Авт.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени П.Н.ЛЕБЕДЕВА

Препринт № 146

Ю.К.Хохлов

О ТРАЕКТОРИЯХ ЧАСТИЦ В ИЗОХРОННОМ ЦИКЛОТРОНЕ ПРИ НАЛИЧИИ УСКОРЕНИЯ. I

Москва - 1969

Рассматривается плоская траектория частицы ускоряемой в изохронном циклотроне с произвольным числом и расположением ускоряющих промежутков (щелей). Полученные в первом приближении замкнутые аналитические формулы описывают свойства радиуса-вектора траектории, как функции числа оборотов n при фиксированном азимуте. и фиксированном приросте энергии на каждой щели.

Плоская траектория частицы описывается функцией

$$r(\varphi) = R(\varphi) + \frac{x(\vartheta)}{\cos\psi(\varphi)}, \qquad \text{(I)}$$

где r, φ – полярные координаты; $R(\varphi)$ – равновесная орбита; $\psi(\varphi)$ – угол падения, определяемый из $tg\,\psi(\varphi) = R'(\varphi)/R(\varphi)$; $\vartheta = \vartheta(\varphi)$ – обобщенный азимут /I/, определяемый соотношением $d\vartheta = (K_0 R/\cos\psi)\,d\varphi$; $K_0 = 2\pi/\Pi$;

П – периметр равновесной орбиты.

Задача нахождения $r(\varphi)$ при известном $R(\varphi)$ решается с помощью разложения по малым параметрам x/R, x'/R и $\Delta W_j/W_j$, где W_j – кинетическая энергия частицы перед входом в j-ю щель. Расчет ведется в первом (линейном) приближении по этим параметрам. Для траектории частицы получается линейное неоднородное уравнение, которое затем решается вполне точно, а не по методу возмущений (ср. с работой Гордона /2/). Основное ограничение состоит в том, что каждое ΔW_j имеет строго постоянную, не зависящую от момента прихода частицы, величину.

Свойства найденного решения, рассматриваемого как функция числа оборотов n при фиксированном азимуте φ_{obs}, обсуждаются в заключительной части. Главным физическим выводом теории является неразличимость свободной и вынужденной прецессий каждого из центров траектории и, как следствие, возможность полной взаимной компенсации прецессий при некотором специальном выборе начальных условий.

Вне щелей траектория частицы в плоскости полярных координат r,φ описывается уравнением

$$\left[\frac{r'}{r\sqrt{1+(r'/r)^2}}\right]' - \frac{1}{\sqrt{1+(r'/r)^2}} + Kr = 0, \tag{2}$$

где $K = eH/cp$ - кривизна траектории в магнитном поле; $\vec{H} = -H\vec{e}_z$; $H = H(r,\varphi) > 0$; $\vec{e}_z$ - единичный вектор оси z цилиндрической системы координат z,r,φ; p - импульс.

Если щели расположены вдоль радиусов имеют пренебрежимо малую ширину, то в точке пересечения траектории $r(\varphi)$ с j-й щелью должны выполняться условия

$$r_{j+1} = r_j\,, \quad \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)_{j+1} = \left\{1+\left[\frac{2\Delta p}{p}+\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]\right\}_j^{-1/2}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)_j \tag{3}$$

Последнее из равенств (3) есть следствие граничных условий

Δ $p_{r,j+1} = p_{r,j}$, $p_{j+1} = p_j + \overset{\Delta}{\cancel{\delta}} p_j$ и соотношения $p_r/p_\varphi = r'/r$; индексы j +I и j отмечают, соответственно, выходные и входные значения.

Траекторию частицы, имеющей импульс p, будем отсчитывать от соответствующей, т.е. принадлежащей тому же р, равновесной орбиты $R=R(\varphi)$ по формуле (I). Пусть n – число совершенных оборотов; n +I – номер совершаемого оборота; j – номер электрического сектора, образованного j -й и j +I-й целями. Объединяя участки различных равновесных орбит, принадлежащих одному и тому же n, в единую ступенчатую reference trajectory, будем иметь $R=R_n(\varphi)$, где $R_n(\varphi)=R_{nj}(\varphi)$ при $\varphi_j<\varphi\leqslant\varphi_{j+1}$. Аналогично определяется $x_n(\vartheta)$, причем, как нетрудно проверить, $0<\vartheta\leqslant 2\pi$.

Подставляя (I) в (2) и разлагая по степеням х, получим в нулевом приближении

$$\frac{d\psi}{d\varphi}=1-\frac{KR}{\cos\psi}$$

В линейном по х приближении:

$$x_n''+u_n^2(\vartheta)\,x_n=0 \tag{4}$$

cosψ

Здесь

$$u^2(\vartheta)=\frac{1}{K_0^2}\left(K^2-\sin\psi\,\frac{\partial K}{R\,\partial\varphi}+\cancel{\frac{1}{\cos\psi}}\,\frac{\partial K}{\partial R}\right); \tag{5}$$

K везде берется только на равновесной орбите: $K=K\big(R(\varphi),\varphi\big)$.

На j -й цели единая траектория $R(\varphi)$ должна удовлетворять условиям

$$R_{j+1}=R_j+\Delta R_j=\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)_j R_j\ ,\quad \mathrm{tg}\,\psi_{j+1}=\mathrm{tg}\,\psi_j\ , \tag{6}$$

первое из которых описывает скачкообразный переход от равновесной орбиты с импульсом p к равновесной орбите с импульсом $p+\Delta p$, второе – связано с геометрическим подобием соседних равновесных орбит. (Центр подобия находится в начале координат). Случай $\psi_j=0$ соответствует перпендикулярному падению частицы на цель. Подставив (I) в (3) разложим (3) по степеням величин x/R, x'/R, $\Delta p/p$, считая их малыми одного порядка. При этом (6) будет совпадать с нулевым приближением. Первое приближение даст

$$\mathbf{X}_{n,j+1}=\mathbf{X}_{n,j}+\Delta\mathbf{X}_{n,j} \tag{7}$$

где

$$\mathbf{X}(\theta)=\begin{pmatrix} x(\theta) \\ x'(\theta) \end{pmatrix},\quad \Delta\mathbf{X}=\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \end{pmatrix},\quad \Delta x=-\frac{\Delta p}{pK_0}K_0R\cos\psi,\quad \Delta x'=-\frac{\Delta p}{pK_0}(1+KR\cos\psi)\,\mathrm{tg}\,\psi. \tag{8}$$

Совокупность уравнений (4) и граничных условий (7) эквивалентна некоторому единому линейному неоднородному уравнению, аргументом которого является $\theta=2\pi n+\vartheta$ – полный обобщенный азимутальный угол. Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\mathbf{X}(\theta)=M(\theta|\theta_0)\mathbf{X}(\theta_0)+\sum_k\sum_j M(\theta|2\pi k+\vartheta_j)\Delta\mathbf{X}_{kj}\,, \tag{9}$$

где $M(\theta|\theta_0)$ – матрица перехода, определяемая однородным уравнением (4), граничными условиями $\Delta X_{nj}=0$ и начальным условием

$M(\theta_0|\theta_0)=I$[1]; суммирование производится по всем k, j в интервале $\theta > 2\pi k+\vartheta_j > \theta_0$. Первое слагаемое решения (9) описывает свободные колебания, второе - вынужденные.

Нашей задачей будет исследование зависимости вектора $X(\theta)=X(2\pi n+\vartheta)$ от n при фиксированном азимуте $\vartheta=\vartheta_{obs}$ начиная с некоторого не слишком малого $n=n_0$. Не теряя общности, можно положить $\varphi_{obs}=\vartheta_{obs}=0$, после чего (9) заменится на

$$X(2\pi n)=M(2\pi n|2\pi n_0)X(2\pi n_0)+\sum_{k=n_0}^{n-1}\sum_j M(2\pi n|2k\pi+\vartheta_j)\Delta X_{kj} \quad (10)$$

(Сумма по всем целям; $j=1,2,\ldots,N_e$; N_e - число целей).

Выражение (10) значительно упрощается, если на всем рассматриваемом интервале $n-n_0$ равновесные орбиты могут считаться подобными друг другу. (Это означает, что $u_n(\vartheta)$ в уравнении (4) не зависит от n). Тогда

$$M(2\pi n|2\pi n_0)=M^{n-n_0},\quad M=M(2\pi|0),\quad M_j=M(0|\vartheta_j) \quad (11)$$

и т.п. Вместо (10) получится

$$X(2\pi n)=M^{n-n_0}X(2\pi n_0)+\sum_{k=n_0}^{n-1}M^{n-k}\sum_j M_j\Delta X_{kj}\,. \quad (12)$$

Возведение матрицы M в степень облегчается ее унимодулярностью($\operatorname{Det}M=1$). Нетрудно проверить, что для всякой действительной унимодулярной матрицы справедлива формула

---

1). Может показаться, что условие $\Delta X_{nj}=0$ означает просто отсутствие целей. Это не так, поскольку остаются еще вызванные ускорением скачки траектории $R(\varphi)$.

$$M^k = \frac{1}{2} e^{ik\mu} Z + c.c. , \quad Z = I - \frac{i}{\sin\mu}\left(M - \cos\mu\, I\right) \tag{I3}$$

где

$$2\cos\mu = Sp\, M = M_{11} + M_{22} . \tag{I4}$$

Будем подразумевать под μ главное значение корня уравнения (I4). Тогда $\mu = 2\pi(\nu - 1)$, где ν – частота радиальных бетатронных колебаний. Если, как обычно $\nu - I \ll I$, то $\mu \ll 2\pi$ и, согласно (I2), (I3), относительное изменение $X(2\pi n)$ при переходе от n к $n + I$ мало по сравнению с единицей. Именно в этом случае и можно рассматривать n как почти непрерывным образом изменяющуюся переменную, а $X(2\pi n)$ – как функцию этой переменной. (Впрочем, практически неравенство $\mu \ll 2\pi$ не обязано быть очень сильным – значение $\mu \approx 1$ уже вполне приемлемо для излагаемого подхода).

Исходя из соотношений

$$K_0 = \frac{e\langle H\rangle}{cp} = \frac{\omega_y m}{p} , \quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta W}{v p} , \quad \frac{\Delta p}{p K_0} = \frac{\Delta W}{\omega_y \sqrt{(m+m_0)W}} , \tag{I5}$$

введем обозначения

$$A_j = \begin{pmatrix} K_0 R\cos\psi \\ (1 + KR\cos\psi)\,\mathrm{tg}\,\psi \end{pmatrix}_j , \quad r_0 = \frac{c}{\omega_y}\sqrt{\frac{\sum_j \Delta W_j}{2 m_0 c^2}} , \quad C_j = \frac{N_e \Delta W_j}{(\sum_j \Delta W_j)} , \quad f_j(n) = \frac{1}{\sqrt{K_j n}} \tag{I6}$$

Здесь $\omega_y = e\langle H\rangle / mc$ – частота обращения по равновесной орбите; $\sum_j \Delta W_j$ – прирост кинетической энергии за оборот; $r_0 n^{-1/2}$ – расстояние между соседними траекториями на n+I-м орбите (приближенно) ; m и m_0 – полная масса и масса покоя; $\gamma_{nj} = (m+m_0)/2m_0$;

$$\sum_j C_j = N_e \ ; \ C_j \approx 1 \ ; \ \gamma_{nj} \approx \gamma_n .$$

Тогда

$$\Delta X_{nj} = -\frac{r_0}{N_e} f_j(n) C_j A_j \tag{I7}$$

Подставив (I3) и (I7) в (I2), получим

$$X(2\pi n) = \frac{1}{2}\left\{ e^{i(n-n_0)\mu} Z X(2\pi n_0) - \frac{r_0}{N_e} \sum_j \sum_{k=n_0}^{n-1} e^{i(n-k)\mu} f_j(k) Z M_j C_j A_j + c.c. \right\} \tag{I8}$$

Сумму по k в (I8) можно представить в виде /3/

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} e^{-ik\mu} f(k) = e^{-in\mu} F(n) - e^{-in_0\mu} F(n_0) \tag{I9}$$

где $F(n)$ – функция, удовлетворяющая разностному уравнению

$$e^{-i\mu} F(n+1) - F(n) = f(n);$$

индекс j временно опущен. Последнее уравнение определяет $F(n)$ с точностью до преобразования

$$F(n) \to F(n) + e^{in\mu} P(n),$$

в котором $P(n)$ – произвольная функция с периодом единица.

Мы утверждаем, что всегда можно подобрать такую $P(n)$ чтобы функция $F(n)$ оказалась очень плавной, монотонно убывающей.

Действительно, применяя для вычисления суммы (I9) формулу Эйлера, будем иметь

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} e^{-ik\mu}\frac{1}{\sqrt{\gamma_k k}} = \Big/_{n_0}^{n} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{m!}\left(-i\mu-\frac{1}{2k}\right)^{m-1}\frac{1}{\sqrt{\gamma_k k}}e^{-ik\mu} + \int_{n_0}^{n} e^{-ik\mu}\frac{dk}{\sqrt{\gamma_k k}} . \qquad (20)$$

Здесь B_m -числа Бернулли (из них $B_3 = B_5 = \ldots = 0$); производная $d\gamma_k/dk$ как и везде, полагается равной нулю. Сравнивая (20) с (I9) и учитывая асимптотические при $z\to\infty$ значения интегралов

$$\tilde{S}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{\gamma(t)t}} - \frac{1}{2} \to -\frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z\gamma_n}}, \quad \tilde{C}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\gamma(t)t}} - \frac{1}{2} \to \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z\gamma_n}} , \qquad (21)$$

где $\gamma(t)=\gamma_k$ при $t=k\mu$ нетрудно придти к выводу, что в качестве $F(n)$ следует взять

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_n n}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{m!}\left(-i\mu-\frac{1}{2}\right)^{m-1} + e^{in\mu}\left[\int_0^n \frac{e^{-ik\mu}dk}{\sqrt{\gamma_k k}} - \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_n n}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{m!}\left(-i\mu-\frac{1}{2n}\right)^{m-1} - i\sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\,e^{in\mu}\left[\tilde{S}(n\mu)+i\,\tilde{C}(n\mu)\right]. \qquad (22)$$

Пренебрегая в $(i\mu + 1/2n)$ величиной $1/2n$ получим

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{k_e}\,n}\left[B_1 - \frac{i}{\mu}\left(\frac{B_2}{2!}\mu^2 - \frac{B_4}{4!}\mu^4 + \ldots\right)\right] - i\sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\, e^{in\mu}\left[\tilde{S}(n\mu) + i\,\tilde{C}(n\mu)\right]. \quad (23)$$

В области $1 \ll n \lesssim 1/\mu$ (если, конечно, такая область существует) можно положить в (21) $\gamma(t) = 1$, после чего окажется $\tilde{S} = S - 1/2$, $\tilde{C} = C - 1/2$, где S, C – интегралы Френеля, табулированные в /4/. В области $n \gg 1$ применимы асимптотические значения (22), это дает

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{k_e}\,n}\left[B_1 + \frac{i}{\mu}\left(1 - \frac{B_2}{2!}\mu^2 + \frac{B_4}{4!}\mu^4 - \ldots\right)\right] \quad (24)$$

Вернемся к выражению (18), переписав его с помощью (19) в виде

$$X(2\pi n) = \frac{1}{2}\left\{e^{i(n-n_0)\mu} Z X(2\pi n_0) + \frac{r_e}{N_e}\sum_j\left[e^{i(n-n_0)\mu}F_j(n_0) - F_j(n)\right] Z M_j C_j A_j + c.c.\right\} \quad (25)$$

Мы видим, что действие щелей сводится к возбуждению гармонических колебаний с частотой μ и созданию ~~квазипостоянного~~ смещения, пропорционального $F(n)$. Свободные гармонические колебания в (25) имеют ту же частоту μ, что и вынужденные, поэтому существует такое начальное $X(2\pi n_0)$ при котором суммарная амплитуда гармонических колебаний обращается в нуль. Отметим, что изменение X при переходе от одного азимута наблюдения φ_{obs} к другому φ'_{obs} в пределах одного оборота осуществляется матрицей, очень слабо зависящей от n. Поэтому, если гармонические колебания X отсутствуют при каком-либо одном азимуте, они отсутствуют и при всех азимутах.

~~Квазипостоянное~~ Смещение равно

$$\mathbf{X}(2\pi n)_{\text{смещ}} = -\frac{r_0}{2N_e}\sum_j \left[F_j(n)Z + c.c.\right] M_j C_j \mathbf{A}_j =$$

$$= -\frac{r_0}{N_e}\sum_j \left[\operatorname{Im} F_j(n)\cdot\frac{1}{\sin\mu}(M - \cos\mu\, I) + \operatorname{Re} F_j(n)\cdot I\right] M_j C_j \mathbf{A}_j \tag{26}$$

В случае $n\mu \gg 1$ имеем

$$\mathbf{X}(2\pi n)_{\text{смещ}} = \frac{1}{\mu}\left[\left(1 - \frac{B_2}{2!}\mu^2 + \frac{B_4}{4!}\mu^4 - \ldots\right)\frac{(M - \cos\mu\, I)}{\sin\mu} + B_1\mu I\right]\sum_j M_j \Delta\mathbf{X}_{nj} =$$

$$= -\frac{r_0}{N_e}\left[\left(1 - \frac{\mu^2}{12} - \frac{\mu^4}{720} - \ldots\right)\frac{M - \cos\mu\, I}{\mu\sin\mu} - \frac{1}{2}I\right]\sum_j f_j(n) M_j C_j \mathbf{A}_j . \tag{27}$$

(Обозначения см. в (II), (I6) и (I7)).

В случае, когда предположение о подобии равновесных орбит оказывается недостаточно точным, все величины, считавшиеся выше постоянными, должны рассматриваться, как медленно меняющиеся функции n, а именно:

$$M(2\pi(n+1)|2\pi n) = M(n), \quad M(2\pi k|2\pi k + \vartheta_j) = M_j(k), \quad \nu = \nu(n)$$

и т.д. Для вычисления матрицы $M(2\pi n|2\pi n_0)$, определяющей решение (I0), удобно предварительно перейти к новому представлению

$$\mathbf{X}(2\pi n)\to\begin{pmatrix}\sqrt{\nu(n)} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\nu(n)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \nu(n)\mathcal{J}_{11}(n) & \nu(n)\mathcal{J}_{12}(n)\end{pmatrix}\mathbf{X}(2\pi n) \tag{28}$$

где $\mathcal{J}_{11}(n)$, $\mathcal{J}_{12}(n)$ - матричные элементы матрицы

$$\mathcal{J}(n)=\frac{1}{\sin\mu(n)}\Big(M-\cos\mu(n)\,I\Big).$$

В новом представлении матрица $M(2\pi n|2\pi n_0)$ может быть получена с помощью метода WKB. Опуская вывод, приведем искомый результат:

$$M(2\pi n|2\pi n_0)=\frac{1}{2}\,e^{i\int_{n_0}^{n}\mu(l)\,dl}\,Z+c.c.\,,\quad Z=\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}. \tag{29}$$

(Ср. с формулой (13)). Подставим (29) в (10), учитывая общее свойство интегралов

$$\int_k^n\mu(l)\,dl=\sigma(n)-\sigma(k)$$

и аналогичное свойство конечных сумм

$$\sum_{k=n_0}^{n-1}e^{-i\sigma(k)}M_j(k)\,\Delta X_{kj}=e^{-i\sigma(n)}\mathbf{F}_j(n)-e^{-i\sigma(n_0)}\mathbf{F}_j(n_0)$$

(ср. с (19)). Получим

$$\mathbf{X}(2\pi n)=\frac{1}{2}\Big\{e^{i\sigma(n)-i\sigma(n_0)}Z\mathbf{X}(2\pi n_0)+\sum_j\Big[e^{i\sigma(n)-i\sigma(n_0)}Z\mathbf{F}_j(n)-Z\mathbf{F}_j(n_0)\Big]+c.c.\Big\} \tag{30}$$

Формула (30) полностью аналогична (25), поэтому все заключения, сделанные в связи с (25), без всяких изменений переносятся на (30). Следует только иметь в виду, что (30) записано в новом представлении (28). Если в этом представлении колебания гармоничны и имеют строго постоянную амплитуду, то в старом представлении им соответствуют колебания с медленной меняющейся амплитудой, и наоборот. (При этом, в частности автоматически учитывается адиабатическое затухание бетатронных колебаний).

Величина [redacted] смещения равна, очевидно

$$X(2\pi n)_{смещ} = \frac{1}{2}\Big[Z \sum_j F_j(n) + c.c. \Big] \qquad (31)$$

Формулы (25) и (26) (соответственно, (30) и (31)) означают, что частица, запущенная на соответствующий ее энергии n +1-й виток с $X_{нач} - X(2\pi n)_{смещ}$ будет двигаться по равномерно разворачивающейся спирали, не имеющей ни сгущений, ни разрежений.

Если имеется вычисленная на ЭВМ при каких-то взятых наугад начальных данных функция $X(2\pi n)$, то $X(2\pi n)_{смещ}$ можно найти графическим способом . Для этого нужно выделить из $X(2\pi n)$ гармонически колеблющуюся часть; то, что останется, и будет $X(2\pi n)_{смещ}$. Принимая найденное $X(2\pi n)_{смещ}$ в качестве нового начального значения, можно повторять процедуру, получая все лучшие значения.

Отмеченные свойства функции $X(2\pi n)$ тесно связаны с закономерностями, управляющими движениями центра траектории – так называемой прецессией. Понятие центра траектории относится к участку траектории, заключенному между двумя соседними щелями. Азимут наблюдения φ_{obs} обязательно находится между этими же щелями. Прецессия представляет собой медленное, по сравнению с частотой обращения частицы, движение центра траектории около некоторой, еще менее подвижной, средней точки. Согласно полученным результатам, вынужденная прецессия имеет ту же частоту и тот же ход амплитуды в зависимости от n, что и свободная прецессия, вызываемая начальным отклонением траектории от соответствующей равновесной орбиты. Единственное отличие заключается в том, что средняя точка вынужденной прецессии оказывается смещенной относительно центра магнитного поля. Эта ситуация означает существование таких начальных данных, для которых свободная прецессия полностью компенсирует вынужденную. Смещение центра траектории при этом, конечно, остается. Его геометрический смысл очень прост: поскольку равновесные орбиты представляют собой замкнутые концентрические кривые, а частица движется по спирали, то в начале участка между соседними щелями равномерно разворачивающаяся траектория должна идти ниже соответствующей равновесной орбиты, а в конце - выше. Это и означает некоторое смещение центра траектории относительно центра магнитного поля в направлении средней скорости частицы.

Матрицы M и M_j в (26), а следовательно и само (26), были найдены в аналитической форме в случае, когда магнитное поле состоит из отдельных секторов, в каждом из которых поле однородно (т.н. ступенчатая модель). Полученный результат сравнивался с точным численным расчетом этой же модели, выполненным в работе Е.М.Мороза /5/ с учетом всех высших (нелинейных) приближений. Согласие обоих результатов, как и следовало ожидать, хорошее: в области $50 < n < 250$ при $\sqrt{\ } - 1 = 0,04$ ошибка асимптотической формулы (27) не превосходит 5%. Подробнее о ступенчатой модели см. в /5/.

Автор благодарен А.А.Коломенскому, А.П.Фатееву, Л.Н. Кацаурову и Р.Н.Литуновскому за советы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев - Теория циклических ускорителей. ФМ, Москва, 1962, стр.52.
2. M.M.Gordon, Nucl. Instr. and Meth., 18,19,268,1962
3. А.О.Гельфонд - Исчисление конечных разностей. Наука, Москва, 1967, стр. 248.
4. Е.Янке и Ф.Эмде - Таблицы функций. Гостехиздат, М.Л. 1949, стр.137.
5. Е.М.Мороз - Атомная энергия (в печати).