

ПРЕПРИНТ

И.М.СИЗОВА

АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ЗОНЕ ФРАУНГОФЕРА ПРИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКИХ АПЕРТУРАХ

ФИАН — 2016

ISSN 2410-4914

# Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева

ISSN 2410-4914

**Главный редактор** В.И.Ритус, *зам. главного редактора* А.А.Гиппиус, *научный секретарь* С.А.Богачев, *ответственный секретарь* Л.В.Селезнев

Редакционная коллегия: В.С.Бескин, А.А.Горбацевич, О.Д.Далькаров, Е.И. Демихов, И.Г.Зубарев, К.П.Зыбин, А.А.Ионин, Н.Н.Колачевский, Е.Р.Корешева, С.Ф.Лихачев, А.С.Насибов, И.Д.Новиков, В.Н.Очкин, Н.Г.Полухина, В.С.Лебедев, Н.Н.Сибельдин, Д.Р.Хохлов, С.А.Чайковский

# Информация

Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева издаются с 1964 г.

**Издатель:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН)

Адрес редакции: Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53, ФИАН Тел.: +7 (499) 132-6137, +7 (499) 783-3640; E-mail: *pavel@sci.lebedev.ru* 

Страница сборника «Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева» в интернете: *http://preprints.lebedev.ru/* 

© Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 2016

# РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА

# И. М. Сизова

# АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ЗОНЕ ФРАУНГОФЕРА ПРИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКИХ АПЕРТУРАХ

# <u>№</u> 14

ФИАН 2016

### И.М.Сизова

# Аналоговая модель функции потока энергии в зоне Фраунгофера при дифракции плоской световой волны на плоских апертурах АННОТАЦИЯ

Предложенная ранее аппроксимация потока излучения (ПИ) в конусе зенитного угла в зоне Фраунгофера при дифракции плоской световой волны, перпендикулярно падающей на плоскую ограниченную апертуру, основана на моделировании производной усредненной по полярному углу автокорреляционной функции (ПАФ), через которую ПИ выражается как интегральное преобразование. Модели ПАФ сохраняют ряд её характеристик, но им скорее всего не отвечают реальные апертуры и поля, т.к. ПАФ является тройным интегралом от поля на апертуре. Здесь рассмотрены аналоговые модели ПИ с осесимметричными апертурами и полями на них (три варианта), также сохраняющие характеристики ПАФ. Модели опробованы на всех примерах предыдущих работ и еще на одном практическом примере. Предложенные модели по точности близки рассмотренным ранее, но сложнее их в расчете как ПИ, так и параметров модели из параметров апертуры и поля, и показывают близость ПИ на всей области определения при равенстве у ПАФ упомянутых характеристик.

## I.M.Sizova

# Analog model of the encircled energy function for the diffraction of a plane light wave by planar apertures in the Fraunhofer zone ABSTRACT

The proposed earlier approximation of the encircled energy function (EEF) for the diffraction in the Fraunhofer zone of a plane light wave normally falling on the planar restricted aperture is based on modeling of the angle-average optical transfer function derivative (OTFD) (the EEF is the integral transformation of the OTFD). Models conserve some of the OTFD invariants but most probably not correspond to real apertures and wave fields because the OTFD is the triple integral of the field on the aperture. Here the analog models of the EEF are discussed with axially symmetric apertures and fields (three variants) also conserving the invariants of the OTFD. The models are tested by all examples of the previous studies and one more practical example. The proposed models for the approximation accuracy are close to those discussed earlier but they are more difficult in their calculations of EEF and of the model parameters from the field and aperture settings. They also show the closeness of EEF throughout the range of definition if the OTFD invariants above-mentioned are equal.

#### Введение

В работах [1-4] была предложена модель приближённого вычисления потока излучения (ПИ) в заданном конусе зенитного угла в зоне Фраунгофера при дифракции плоской световой волны с произвольным распределением амплитуды поля, перпендикулярно падающей на плоскую ограниченную апертуру произвольной формы.

Предложенное приближение ПИ основано на моделировании простыми функциями производной усредненной по полярному углу так называемой автокорреляционной функции (АФ), через которую упомянутый ПИ выражается как интегральное преобразование с ядром в виде функции Бесселя нулевого порядка. Для обеспечения хорошей точности приближения для ПИ моделирование производной АФ делалось с сохранением ряда её характеристик.

Для всех рассмотренных примеров предложенное приближение оказалась удачным при нескольких вариантах моделей производной АФ. Однако этим моделям скорее всего не отвечают реальные апертуры и поля, поскольку моделируются не они, а производная от АФ, являющаяся тройным интегралом от поля на апертуре.

В настоящей работе рассмотрено аналоговое моделирование функции ПИ, когда моделируются именно апертуры и поля на них так, чтобы для полученной модельной АФ по-прежнему некоторые характеристики равнялись реальным. Модели (три варианта) опробованы на всех примерах из работ [1-4] и еще на одном практическом примере.

Полученные результаты показывают, что предложенные аналоговые модели по точности близки рассмотренным в [1-4], но сложнее их как в расчете ПИ, так и в вычислении параметров модели из характеристик апертуры и поля, и демонстрируют хорошую близость функций ПИ на всей области их определения при равенстве упомянутых характеристик производных от АФ.

#### Модели потока излучения

В рамках физической оптики методом Кирхгофа в параксиальной области в приближении Френеля в зоне Фраунгофера поток продифрагировавшего излучения (ПИ) в конусе заданного зенитного угла 9 (по отношению к направлению *z* падения излучения, перпендикулярного апертуре) выражается как

$$\varepsilon(\vartheta) = \frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \int_{0}^{\infty} \overline{T}(\rho) J_{1}\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda}\rho\right) d\rho = 1 - \int_{0}^{\infty} \Gamma(\rho) J_{0}\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda}\rho\right) d\rho, \qquad (1)$$

где

$$\overline{T}(\rho) = \frac{1}{2\pi E_{\Sigma}} \int_{0}^{2\pi} \left( \iint_{\Sigma} U^{*}(\vec{r},0) \cdot U(\vec{r}+\vec{\rho},0) d^{2}\vec{r} \right) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} T(\rho,\phi) d\phi -$$
(2)

усредненная по углу  $\phi$  автокорреляционная функция  $T(\rho, \phi)$  (A $\Phi$ ) поля  $U(\vec{r}, 0)$  в плоскости апертуры;  $\vec{r}$  – двумерные координаты в плоскости апертуры;  $\vec{\rho} = (\rho, \phi)$  – полярные координаты в плоскости апертуры, характеризующие сдвиг двух функций поля в А $\Phi$  ( $\rho$  – сдвиг,  $\phi$  – направление сдвига);

$$\Gamma(\rho) = -T'(\rho) - \tag{3}$$

производная от функции (2);  $J_{0,1}$  – функции Бесселя нулевого и первого порядка;  $\lambda$  – длина волны;  $E_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} |U(\vec{r},0)|^2 d^2 \vec{r}$  – весь поток излучения через апертуру. Переход от первого выражения ко второму в (1) обусловлен свойствами функций Бесселя и равенством  $\overline{T}(0) = 1$ , вытекающим из (2).

Введем, как и в [1-4], два линейных параметра задачи

$$\rho_{1} = \sqrt{\Sigma_{\text{eff}} / \pi},$$
(4)  
где  $\Sigma_{\text{eff}} = \left| \iint_{\mathbf{E}_{\Sigma}} U(\vec{\mathbf{r}}, 0) d^{2} \vec{\mathbf{r}} \right|^{2} / \mathbf{E}_{\Sigma} = 2\pi \int_{0}^{\infty} \overline{T}(\rho) \rho d\rho;$ 

$$\rho_2 = 2\mathbf{E}_{\Sigma} / \int_{\mathbf{c}} \left| U \right|^2 \mathrm{d} \mathbf{l} \,, \tag{5}$$

где в знаменателе стоит интеграл по периметру апертуры; и нужное далее отношение (4) к (5)

$$\mu = \rho_1 / \rho_2. \tag{6}$$

Всегда  $\mu \ge 1$ . Для однородных полей на апертуре  $\rho_1 = \sqrt{\Sigma/\pi}$ ,  $\rho_2 = 2\Sigma/P$  и  $\mu = P/2\sqrt{\pi\Sigma}$ , где  $\Sigma$  – площадь апертуры, а P – ее периметр.

Через параметры (4-5) для функции (1) имеют место соотношения  

$$\varepsilon(\vartheta) \underset{2\pi\rho_1\vartheta/\lambda\to 0}{\cong} 0,25(2\pi\rho_1\vartheta/\lambda)^2$$
 и  $\varepsilon(\vartheta) \underset{2\pi\rho_2\vartheta/\lambda\to\infty}{\cong} 1 - \frac{(2/\pi)}{(2\pi\rho_2\vartheta/\lambda)}$  [1-4], первое из ко-

торых следует из разложения (1) в ряд Тейлора в нуле, а второе – из разложения (1) в ряд по методу Виллиса [5] для однородного поля на апертуре в работе [6] и аналогично для неоднородного поля в [7]. Параметр (4) определяет поведение (1) в начале координат, а (5) – ассимтотику при больших значениях аргумента.

При нормировке р в (1,3) на (5) (а (3) нормируем на (5) еще и по оси ординат, чтобы сделать её безразмерной и привести к значению 1 в начале координат [6-7]) получим вместо (3)

$$\widetilde{\Gamma}(\zeta) = \frac{\pi \rho_2}{2} \Gamma(\rho = \rho_2 \zeta) = -\frac{\pi}{2} \overline{T}_{\zeta}'(\rho = \rho_2 \zeta), \qquad (7)$$

а вместо (1)

$$\varepsilon(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \widetilde{\Gamma}(\zeta) J_0(\Delta_2 \zeta) d\zeta, \qquad (8)$$

где фигурируют уже безразмерные аргументы

$$\zeta = \rho/\rho_2; \, \Delta_2 = 2\pi\rho_2 \vartheta/\lambda \,. \tag{9}$$

Через (9) поведение (8) в начале координат и на бесконечности примет вид

$$\varepsilon(\Delta_2) \underset{\mu\Delta_2 \to 0}{\simeq} 0,25(\mu\Delta_2)$$
 и  $\varepsilon(\Delta_2) \underset{\Delta_2 \to \infty}{\simeq} 1 - \frac{(2/\pi)}{\Delta_2}$ , а для (7) верны соотношения [5-7]

$$\widetilde{\Gamma}(0) = 1; \quad \int_{0}^{\infty} \widehat{\Gamma}(\zeta) d\zeta = \pi/2; \quad \int_{0}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(\zeta) \zeta^{2} d\zeta = \mu^{2} \pi/2.$$
(10)

Как показали расчеты в [1-4,7-8] для разных апертур и полей при одинаковых μ (6) функции (8), совпадая в начале координат и асимптотически, могут заметно и качественно и количественно отличаться в промежуточной области. Поэтому использование одной из таких функций для аппроксимации другой может дать существенную погрешность в этой наиболее интересной области.

В то же время в [1-4] было показано, что если в (8) вместо точной функции (7) подставить её модель, имеющую то же  $\mu$ , исходя из (10), и хотя бы еще один параметр, характеризующий (7), то полученное с этой моделью приближение для ПИ (8) оказывается заметно более точным во всей области его определения.

Отталкиваясь от (10), в [1-4] было предложено использовать в качестве дополнительных сохраняющихся параметров при моделировании (8) другие, не задействованные в (10), моменты функции (7), в первую очередь

$$\mathbf{I}_{1} = \int_{0}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(\zeta) \zeta d\zeta; \ \mathbf{I}_{3} = \int_{0}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(\zeta) \zeta^{3} d\zeta.$$
(11)

И было найдено несколько простых моделей (7), в которых при сохранении μ и одного (или обоих) моментов (11) аппроксимация (8) становится хорошей во всей области определения. При этом легко рассчитываются как приближенные функции (8) (аналитически, через известные спецфункции или однократным интегрированием), так и параметры моделей через значения μ и I<sub>i</sub>.

Однако эти модели (7) могут не отвечать (и не отвечают) реальным апертурам и распределениям полей на них, т.к. расчеты показали, что во многих случаях они давали пусть и весьма слабо заметные немонотонности функции (8), что невозможно, если (7) вычисляется через (2). Здесь будет исследована другая группа моделей (8), которую уместно назвать аналоговой, поскольку в этом случае моделируются не (7), а апертуры и поля, такие, что расчет (8) сводится к однократному интегрированию, а модельная функция (7), как и в [1-4], сохраняет значения µ и I<sub>i</sub>.

Как видно из (2,8), функция  $\varepsilon(\Delta_2)$  зависит не от АФ, а от её среднего по полярному углу  $\varphi$ , т.е. она «не чувствует» зависимости АФ от  $\varphi$  и, соответственно, зависимостей  $U(\vec{r},0)$  и самой апертуры от этой координаты. Поэтому есть смысл в качестве модельных апертур и полей на них для аналоговой аппроксимации (8) рассмотреть осесимметричные апертуры и поля; для них (2) совпадает с АФ, не зависящей от  $\varphi$  ( $\overline{T}(\rho) = T(\rho) = T(\rho, \varphi)$ ). В дальнейшем для этих апертур в обозначении функции (2) будет опущена черта сверху.

Простейший класс таких апертур и полей – набор из круга и примыкающих к кругу и друг другу концентрических с кругом колец с постоянным полем внутри каждого кольца и круга. Значения U внутри колец и круга, вообще говоря, различны, в том числе могут быть и нулевыми, т.е. какие-то кольца и круг могут составлять часть экрана. Положим все  $U \ge 0$ , т.е. фаза внутри апертуры постоянна, хотя можно было бы рассмотреть и разные фазы. Если, скажем, возможны скачки фазы на  $\pi$ , тогда для каких-то колец (круга) будут U < 0.

Вид такой апертуры определяется набором параметров. Поскольку вследствие нормировки к безразмерному виду важны лишь относительные параметры (полей и радиусов кругов), то такая апертура нулевого порядка параметров – круг с постоянным полем внутри. Однопараметрическая апертура – кольцо с постоянным полем внутри (параметр – отношение радиусов кругов d). Рассмотрим одно трехпараметрическое семейство таких апертур – апертуры, состоящие из круга радиуса  $r_1$  с  $U_1 \neq 0$  и двух примыкающих последовательно к нему колец: первое – экран (радиусы  $r_1$ ,  $r_2$  и  $U_2 = 0$ ), второе – радиусы  $r_2$ ,  $r_3$  и  $U_3 \neq 0$ . Параметрами семейства будут два относительных радиуса (пусть относительно  $r_3$ ) и отношение полей  $U_3$  к  $U_1$ ;  $d_1 = r_1/r_3$ ,  $d_2 = r_2/r_3$ ,  $\sigma = U_3/U_1$ . И рассмотрим два двухпараметрических частных случая этой апертуры: при  $\sigma = 1$  (однородное поле на апертуре) и при  $d_1 = d_2 = d$ , т.е. без кольцевого экрана внутри, апертура круговая радиуса 1 и вдоль окружности радиуса d <1 происходит скачок поля от  $U_1 = 1$  до  $U_3 = \sigma$ . В первом частном случае остаются 2 параметра  $d_1$  и  $d_2$ , а во втором – d и  $\sigma$ . По сложности формул удобно рассмотреть сначала первый частный случай (двухпараметрическая апертура с однородным полем), затем общий трехпараметрический случай, а потом второй частный случай.

#### Аналоговые модели

## I. Двухпараметрическая модель с однородным полем на апертуре

Для двухпараметрической апертуры с однородным полем имеем

$$T_{\text{mod}}(\mathbf{x}) = \frac{\begin{pmatrix} SS(d_1, d_1, \mathbf{x}) + SS(d_2, d_2, \mathbf{x}) + SS(1, 1, \mathbf{x}) - \\ -2 \cdot SS(d_1, d_2, \mathbf{x}) - 2 \cdot SS(d_2, 1, \mathbf{x}) + 2 \cdot SS(d_1, 1, \mathbf{x}) \end{pmatrix}}{\pi(1 + d_1^2 - d_2^2)},$$
(12)

где  $x = \rho/r_3$ , а функция

$$SS(a, b, x) = b^{2} \arccos\left(\frac{b^{2} - a^{2} + x^{2}}{2xb}\right) + a^{2} \arccos\left(\frac{a^{2} - b^{2} + x^{2}}{2xa}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{(x^{2} - (b - a)^{2})((a + b)^{2} - x^{2})} + \pi(\min(a, b))^{2}$$
(13)

площадь перекрытия кругов с радиусами а и b, сдвинутых на расстояние  $\rho$ , нормированная на  $r_3^2$  (радиусы тоже нормированы на  $r_3$ ). Все слагаемые в (13) определены в областях, где они действительны, а последнее слагаемое присутствует лишь при  $x \le |a - b|$ , т.е. в (12) – в трех последних слагаемых числителя.

Из (4-6) для рассматриваемой апертуры получим:

$$\rho_1 = r_3 \sqrt{1 + d_1^2 - d_2^2} , \qquad (14)$$

$$\rho_2 = \mathbf{r}_3 \frac{1 + \mathbf{d}_1^2 - \mathbf{d}_2^2}{1 + \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2},\tag{15}$$

$$\mu = \frac{1 + d_1 + d_2}{\sqrt{1 + d_1^2 - d_2^2}}.$$
(16)

Из (12-13,15) получим для функции (7) рассматриваемой модели

$$\tilde{\Gamma}_{mod}(\varsigma) = \frac{\left[\sqrt{4v^2 - \varsigma^2} + \sqrt{4d_2^2v^2 - \varsigma^2} + \sqrt{4d_1^2v^2 - \varsigma^2} - 2\frac{\sqrt{(\varsigma^2 - (v(1 - d_2))^2)((v(1 + d_2))^2 - \varsigma^2)}}{\varsigma} + \frac{\varsigma}{\varsigma} + 2\frac{\sqrt{(\varsigma^2 - (v(1 - d_1))^2)((v(1 + d_1))^2 - \varsigma^2)}}{\varsigma} - 2\frac{\sqrt{(\varsigma^2 - (v(d_2 - d_1))^2)((v(d_2 + d_1))^2 - \varsigma^2)}}{\varsigma}}{\varsigma}\right]}{\varsigma}, (17)$$

где, согласно (9),  $\zeta = x \cdot v$ ,  $v = r_3/\rho_2$  и каждое слагаемое определено на интервале, где оно действительно.

Выражения (12,17) легко обобщаются для ряда осесимметричных апертур с однородным полем по следующей схеме. Такие апертуры есть последовательность круг-отверстие, кольцо-экран, кольцо-отверстие и т.д. Или наоборот, ряд начинается с круга-экрана, потом кольцо-отверстие и т.д. Представим каждую такую апертуру как наложенную друг на друга последовательность концентрических круговых отверстий и экранов с уменьшающимися радиусами (начиная с отверстия наибольшего радиуса 1): однопараметрическая апертура (кольцо) – круговое отверстие радиуса 1 + экран радиуса d; двухпараметрическая апертура - отверстие 1 + экран  $d_2$  + отверстие  $d_1$ ; трехпараметрическая апертура – отверстие 1 + экран d<sub>3</sub> + отверстие d<sub>2</sub> + экран d<sub>1</sub> и т.д. Тогда в (12) в числителе будет сумма функций (13) от каждого экрана и каждого отверстия самих с собой и алгебраическая сумма (13) от всех пар неодинаковых экранов-отверстий (из симметрии перестановки в (13) суммы будут удвоены для каждой пары). Знаки у членов второй суммы определяется по правилу: плюс, если отверстие-отверстие или экран-экран, и минус, когда отверстие-экран. Аналогично в числителе (17): каждое отверстие или экран дают одно радикальное слагаемое первого типа (с плюсом), каждая пара неодинаковых экранов-отверстий – одно слагаемое второго типа со знаками как в (12). В знаменателе (12)  $\pi$  умножается на алгебраическую сумму квадратов радиусов экранов-отверстий со знаками: отверстие - минус, экран – плюс (т.е. знаменатель есть площадь апертуры, нормированная на квадрат радиуса максимального отверстия; она же стоит и под радикалом (14)). Параметр (5) будет иметь вид типа (15), где в числителе стоит сумма как в (14), а в знаменателе сумма первых степеней всех присутствующих в апертуре радиусов, нормированных на максимальный; он же и умножается на дробь. В знаменателях (17) тогда будут суммы соответствующего вида из  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

Если предположить, что  $\mu$  (16) задано, то в качестве оставшегося свободного параметра нашей двухпараметрической апертуры удобно взять параметр  $p = d_1 + d_2$ . (18)

Из (16) через (18) для искомых параметров  $d_1, d_2$  двухпараметрической апертуры имеем

$$d_{1} = (1+p)((p-1)\mu^{2} + p + 1)/2p\mu^{2};$$
  

$$d_{2} = ((p^{2}+1)\mu^{2} - (p+1)^{2})/2p\mu^{2}.$$
(19)

При этом p < 2 и для выполнения необходимых по смыслу соотношений  $0 \le d_1 < d_2 < 1$  необходимо и достаточно (см.рис.1)



Закрашенная область соответствует системе неравенств (20).

Обе верхних границы в (20) соответствуют круговой апертуре:  $p = \mu - 1$  отвечает вырожденному случаю  $d_1 = d_2 = p/2$ ;  $p = (\mu + 1)/(\mu - 1)$  – вырожденному случаю  $d_1 = 2/(\mu - 1)$ ;  $d_2 = 1$ ; общая точка границ ( $\mu$ , p) = (3,2) соответствует  $d_1 = d_2 = 1$ . Для обоих этих границ нет предельного перехода выражений (15-16), поэтому в (20) стоят строгие неравенства (как и в условиях на  $d_1$ ,  $d_2$ , порождающих неравенства (20)). Нижняя граница (20)  $p = (\mu^2 - 1)/(\mu^2 + 1)$  соответствует вырожденному случаю  $d_1 = 0$ ;  $d_2 = (\mu^2 - 1)/(\mu^2 + 1)$ , т.е. кольцевой апертуре.

$$I_{3} = \frac{\begin{pmatrix} 16(1+d_{1}^{5}+d_{2}^{5})+(d_{1}+1) \begin{bmatrix} (1+14d_{1}^{2}+d_{1}^{4})E(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1}+1)) - \\ -(1-d_{1})^{2}(1+d_{1}^{2})K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1}+1)) \end{bmatrix} - \\ -(d_{2}+1) \begin{bmatrix} (1+14d_{2}^{2}+d_{2}^{4})E(2\sqrt{d_{2}}/(d_{2}+1)) - \\ -(1-d_{2})^{2}(1+d_{2}^{2})K(2\sqrt{d_{2}}/(d_{2}+1)) \end{bmatrix} - \\ -(d_{1}+d_{2}) \begin{bmatrix} (d_{1}^{4}+d_{2}^{4}+14d_{1}^{2}d_{2}^{2})E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1}+d_{2})) - \\ -(d_{2}-d_{1})^{2}(d_{1}^{2}+d_{2}^{2})K(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1}+d_{2})) - \\ -(d_{2}-d_{1})^{2}(d_{1}^{2}+d_{2}^{2})K(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1}+d_{2})) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ I_{3} = \frac{(2)}{15(1+d_{1}^{2}-d_{2}^{2})^{4}/2(1+d_{1}+d_{2})^{3}}.$$
 (22)

Здесь K(x) =  $\int_0^{\pi/2} 1/\sqrt{1-x^2 \sin^2 \phi} d\phi$  – полный эллиптический интеграл I рода, а E(x) =  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2 \sin^2 \phi} d\phi$  – полный эллиптический интеграл II рода.

Вдоль всей верхней границы р на рис.1  $I_1 = 4\mu/3$  и  $I_3 = 32\mu^3/15$ . А вдоль нижней границы  $I_1 = (\mu^4 + 3 - (\mu^4 + 1)E(\sqrt{\mu^4 - 1}/\mu^2) + 2K(\sqrt{\mu^4 - 1}/\mu^2))/3$  и  $I_3 = (2(\mu^8 + 10\mu^4 + 5) - 2(\mu^8 - \mu^4 + 1)E(\sqrt{\mu^4 - 1}/\mu^2) + (\mu^4 + 1)K(\sqrt{\mu^4 - 1}/\mu^2))/15$ .

Тяблиня 1

Апертура	μ	I <sub>1</sub>	p (18)	$d_1$	$d_2$	I <sub>3</sub>	p (18)	<b>d</b> <sub>1</sub>	$d_2$
Прямоуголь- ник a/b=9,84	1,77	1,852	-	-	-	21,956	-	-	-
<b>Кольцо</b> d = 0,516	1,77	1,996	0,516	0	0,516	15,541	0,516	0	0,516
<b>301</b> (n=10)	1,77	2,316	0,747	0,3566	0,3907	12,014	0,7544	0,3656	0,3888
302(n=3)	1,77	2,124	0,626	0,1883	0,4377	13,934	0,6163	0,1734	0,443
Пример 1	3,367	3,606	1,409	0,5313	0,8777	112,183	1,3855	0,513	0,8725
Пример 2	5,335	4,352	1,249	0,2955	0,9537	701,305	1,2721	0,3143	0,9578
Пример 3	12,03	10,05	1,140	0,1455	0,9948	8553,33	1,1648	0,1648	0,9978

Значения р и отвечающие им  $d_1$ ,  $d_2$ , рассчитанные для рассмотренных в [4] 7-ми вариантов апертур и полей из  $I_1$  (21) или  $I_3$  (22) с подстановкой (18-19), приведены в табл.1 (численный подбор р при известном  $\mu$  из графиков (21) и (22)). Для первых 4-х апертур поле однородное (3О означает зубчатое отверстие в виде шестеренки с зубьями в форме кусков кольца, срезанных по радиусам и внешней окружности, обладающее осью симметрии порядка числа зубьев n). Три последних апертуры кольцевые, а поля спадают по радиусу экспоненциально от центра (**пример 1**), к центру (**пример 2**) и в **примере 3** – сначала спадает от внутреннего радиуса как корень из расстояния (интенсивность – линейно), а 10

затем постоянно до внешнего радиуса (эти поля показаны далее на рис.17-19). Параметры апертур ЗО и апертур и полей в **примерах 1-3** приведены в [1-4].

Из табл.1 видно, что параметры  $d_1$ ,  $d_2$  модели, получаемые из  $I_{1,3}$ , близки для всех 6 апертур, для которых они существуют. Это показывает рис.2, где наглядно сравниваются пары  $d_1$ ,  $d_2$  двухпараметрической модели для каждой апертуры и приведены оба полученных значения, из  $I_1$  и из  $I_3$ . Видно, что пары  $d_1$ ,  $d_2$  очень различны для каждой апертуры, а область их вариации при расчете через  $I_1$  и  $I_3$  на этом фоне незначительна (на рисунке и в табл.1 только у кольцевой апертуры нет различий между найденными параметрами  $d_1$ ,  $d_2$ , т.к. эта апертура совпадает с граничным случаем рассматриваемой модели при  $d_1 = 0$ ).



Номера по оси абсцисс соответствуют номерам по порядку апертур в табл.1 (без прямоугольной апертуры). Точки изломов нижней кривой – значения  $d_1$  в таблице, верхней кривой –  $d_2$ . Вертикальные линии в каждом изломе показывают значения радиусов, вычисляемых, соответственно, через  $I_1$  и  $I_3$  (соединены именно в такой последовательности слева направо).

При подстановке в (8) функции (17) получим

$$\left\{ \begin{cases} \Phi(\Delta_{2}\nu) + \\ + d_{1}^{2}\Phi(\Delta_{2}\nu d_{1}) + \\ + d_{2}^{2}\Phi(\Delta_{2}\nu d_{2}) \end{cases} - \frac{2}{\pi} \begin{cases} (d_{1} + d_{2})^{2}G\left(\frac{d_{2} - d_{1}}{d_{1} + d_{2}}, \Delta_{2}\nu(d_{1} + d_{2})\right) - \\ - (d_{1} + 1)^{2}G\left(\frac{1 - d_{1}}{d_{1} + 1}, \Delta_{2}\nu(d_{1} + 1)\right) + \\ + (1 + d_{2})^{2}G\left(\frac{1 - d_{2}}{1 + d_{2}}, \Delta_{2}\nu(1 + d_{2})\right) \end{cases} \right\}$$

$$\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_{2}) = 1 - \frac{\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_{2}) - \varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_{2})}{1 + d_{1}^{2} - d_{2}^{2}}$$

$$(23)$$

где  $\Delta_2$  определено (9),  $\Phi(\mathbf{x}) = J_0^2(\mathbf{x}) + J_1^2(\mathbf{x})$  и  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x}}^{t} \frac{\sqrt{(t^2 - \mathbf{x}^2)(1 - t^2)}}{t} J_0(\mathbf{y}t) dt$ .

На рис.3-7 показаны для апертур из табл.1 точные функции (7-8) и модельные (17,23) с d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.1, рассчитанными из I<sub>1</sub>. Нет рисунка для прямоугольной апертуры, т.к. для неё нет решений уравнений. И для кольцевой апертуры – для неё модельное решение совпадает с точным. Аргументы рис.5-7 (с неоднородным полем на апертурах) нормированы не на (5), а, как в [1-4], на параметр  $\rho_{2,eff} = 2\Sigma_{eff}/P_{eff}$  из [8] (для удобства сравнения с кривыми в [1-4]). В подписях указан переходной множитель от  $\rho_{2,eff}$  к (5). На рис.3-7 также приведены кривые второй двухпараметрической модели апертур и полей, описываемой ниже.



Для апертуры ЗО 1 с  $\mu = 1,77$ : (а) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\zeta)$  (сплошная линия) и модельных (штриховые линии: длинные штрихи – модель (17) при d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.1, полученных из I<sub>1</sub>; короткие штрихи – модель (38) при параметрах из табл.3 тоже из I<sub>1</sub>); (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta_2)$  и модельных (23,39), отвечающих (а) (типы линий соответствуют).



Для апертуры ЗО 2 с  $\mu = 1,77$ : (а) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\zeta)$  (сплошная линия) и модельных (штриховые линии: длинные штрихи – модель (17) при d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.1, полученных из I<sub>1</sub>; короткие и средние штрихи – модель (38) при параметрах из табл.3, тоже полученных из I<sub>1</sub>); (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta_2)$  и модельных (23,39), отвечающих (а) (типы линий соответствуют).



Рис.5

Для примера 1: (а) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$  (сплошная линия) и модельных (штриховые линии: длинные штрихи – модель (17) при d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.1, полученных из I<sub>1</sub>; короткие штрихи – модель (38) при параметрах из табл.3 тоже из I<sub>1</sub>); (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta)$  и модельных (23,39), отвечающих (а) (типы линий соответствуют).  $\rho_{2,\text{eff}} \cong 1,88\rho_2$ .



Для примера 2: (а) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$  (сплошная линия) и модельных (штриховые линии: длинные штрихи – модель (17) при d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.1, полученных из I<sub>1</sub>; короткие штрихи – модель (38) при параметрах из табл.3 тоже из I<sub>1</sub>); (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta)$  и модельных (23,39), отвечающих (а) (типы линий соответствуют).  $\rho_{2,\text{eff}} \cong 1,76\rho_2$ .



Для примера 3: (а) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$  (сплошная линия) и модельных (штриховые линии: длинные штрихи – модель (17) при d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.1, полученных из I<sub>1</sub>; короткие штрихи – модель (38) при параметрах из табл.3 тоже из I<sub>1</sub>); (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta)$  и модельных (23,39), отвечающих (а) (типы линий соответствуют).  $\rho_{2,eff} \cong 6,2\rho_2$ .

Из рис.3-7 видно, что модель (23) весьма приемлемо аппроксимирует точные функции всех 5-ти примеров, несмотря иногда на не слишком хорошее при-14 ближение функций (17), как на рис.4-5. Но для прямоугольной апертуры не нашлось  $d_1$ ,  $d_2$  модели (23) ни из системы (16,21) через  $I_1$ , ни из (16,22) через  $I_3$ .

Попытка использовать для расчета  $d_1$ ,  $d_2$  в (17) вместо моментов (11) какие-то другие параметры апертуры не увенчались успехом. Например, приравнять для модели и точной функции нормированные на (5) или его квадрат мо-

менты поля 
$$l_1 = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_{max}} r^2 U(r,\phi) dr}{\rho_2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_{max}} r U(r,\phi) dr}$$
 или  $l_2 = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_{max}} r^3 U(r,\phi) dr}{\rho_2^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_{max}} r U(r,\phi) dr}$  (r, $\phi$  – по-

лярные координаты в плоскости апертуры). Первый момент тоже не дает d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> для прямоугольной апертуры, а второй – и для прямоугольной и для **примера 1**.

## **II.** Трехпараметрическая модель

Для вышеупомянутой трехпараметрической модели вместо (14-16) будут

$$\rho_1 = r_3 (d_1^2 + \sigma(1 - d_2^2)) / \sqrt{d_1^2 + \sigma^2(1 - d_2^2)}, \qquad (24)$$

$$\rho_2 = r_3 \frac{d_1^2 + \sigma^2 (1 - d_2^2)}{d_1 + \sigma^2 (1 + d_2)},$$
(25)

$$\mu = \frac{(d_1 + \sigma^2 (1 + d_2))(d_1^2 + \sigma(1 - d_2^2))}{(d_1^2 + \sigma^2 (1 - d_2^2))^{3/2}}.$$
(26)

Опять же, предполагая  $\mu$  (26) заданным, сделаем замену переменных  $d_1, d_2$  на p, q, позволяющую явно исключить одну из переменных

$$p = d_1^2 / (1 - d_2^2) \ge 0; q = (2d_1 + \sigma^2 (1 + d_2)) / (1 - d_2).$$
(27)

Тогда из (26) выразим одну переменную через другую

$$q = \left[ \mu^{2} \frac{(p + \sigma^{2})^{3}}{(p + \sigma)^{2}} - p \right] / \sigma^{2}.$$
 (28)

Из (27) для d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> получим

$$d_{1} = 2(p(q - \sigma^{2}) + (q + \sigma^{2})\sqrt{p(q\sigma^{2} + p)})/(4p + (q + \sigma^{2})^{2});$$
  

$$d_{2} = (q^{2} - \sigma^{4} - 4\sqrt{p(q\sigma^{2} + p)})/(4p + (q + \sigma^{2})^{2}),$$
(29)

при подстановке (28) зависящие от р,  $\sigma$  и  $\mu$ . Для выполнения необходимых по смыслу соотношений  $0 \le d_1 < d_2 < 1$  из (27) необходимо, чтобы

$$\begin{cases} \mu^{2} > \frac{(p+\sigma)^{2}}{(p+\sigma^{2})^{3}} (\sqrt{p}+\sigma^{2})^{2}, 0 \le p < 1 \\ \mu^{2} > \frac{(p+\sigma)^{2}}{(p+\sigma^{2})^{3}} (\sqrt{p}(1+\sigma^{2})+\sigma^{2}\sqrt{p-1})^{2}, p \ge 1 \\ 2\mu\mu^{2}(p+\sigma)(p+\sigma^{2}) \cdot (\mu^{2}(p+\sigma^{2})^{3}-p(p+\sigma)^{2}+\sigma^{2}(2+\sigma^{2}))\sqrt{p(p+\sigma^{2})} < . \end{cases}$$
(30)  
$$< (\mu^{2}(p+\sigma^{2})^{3}-(p+\sigma)^{2}(p+\sigma^{4})) \cdot (\mu^{2}(p+\sigma^{2})^{3}-p(p+\sigma)^{2}+\sigma^{4}-2p\sigma^{2}) \end{cases}$$

Два верхних неравенства в (30) вытекают из условий  $0 \le d_1, d_2 < 1$ , нижнее обеспечивает  $d_1 < d_2$ . Все неравенства в (30) неявные относительно р и  $\sigma$  и не позволяют подобно (20) явно очертить допустимые области изменения р от  $\sigma$  (или наоборот) при данном  $\mu$ . Неравенства (30) строгие, как и условия на  $d_1, d_2$ , их порождающие, по той же причине, что и неравенства (20), – параметры (25-26) примут другой вид в пределах  $d_2 = 1$  или  $d_1 = d_2$ . При  $\sigma = 1$  формулы (26-30) позволяют решить ту же задачу, что и (18-20), но в более сложном виде. Здесь не будет использован этот предельный переход. Численно при  $\sigma = 1$  (26-30) дают те же решения для  $d_1, d_2$ , что и (18-20). Точка p = 0;  $q = \mu^2 \sigma^2$  всегда принадлежит множеству (30), т.к. при этом (30) вырождается в требование  $\mu > 1$ .

Вырожденные значения (26-29) имеют вид:  $d_2 = 1$  дает  $d_1 = 2\sigma^2/(\mu - 1)$ (p,q  $\rightarrow \infty$ );  $d_1 = 0$ , как и в (18-20), соответствует  $d_2 = (\mu^2 - 1)/(\mu^2 + 1)$ (p = 0; q =  $\mu^2 \sigma^2$ ); а для нахождения  $d_1 = d_2 = d$  через  $\sigma$  надо численно, решить полиномиальное уравнение (26) относительно  $d_1 = d_2 = d$ .

Вместо (17) при σ≠1 для функции (7) получим

$$\tilde{\Gamma}_{\rm mod}(\varsigma,\sigma) = \frac{\begin{bmatrix} \sigma^2(\sqrt{4v^2 - \varsigma^2} + \sqrt{4d_2^2v^2 - \varsigma^2}) + \sqrt{4d_1^2v^2 - \varsigma^2} - 2\sigma^2 \frac{\sqrt{(\varsigma^2 - (v(1 - d_2))^2) \cdot ((v(1 + d_2))^2 - \varsigma^2)}}{\varsigma} + \frac{\varsigma}{\varsigma} \\ + 2\sigma \left(\frac{\sqrt{(\varsigma^2 - (v(1 - d_1))^2) \cdot ((v(1 + d_1))^2 - \varsigma^2)}}{\varsigma} - \frac{\sqrt{(\varsigma^2 - (v(d_2 - d_1))^2) \cdot ((v(d_2 + d_1))^2 - \varsigma^2)}}{\varsigma} \right)}{\varsigma} \\ = \frac{2(d_1 + \sigma^2(1 + d_2))^2 / (d_1^2 + \sigma^2(1 - d_2^2))}, \quad (31)$$

а из неё для функции (8)

$$\varepsilon_{\rm mod}(\Delta_2,\sigma) = 1 - \frac{ \begin{pmatrix} d_1^2 \varPhi(\Delta_2 \nu d_1) + \\ + \sigma^2(\varPhi(\Delta_2 \nu) + \\ + d_2^2 \varPhi(\Delta_2 \nu d_2)) \end{pmatrix}}{d_1^2 + \sigma^2(1 - d_2^2)} - \frac{2}{\pi} \sigma \begin{cases} (d_1 + d_2)^2 G\left(\frac{d_2 - d_1}{d_1 + d_2}, \Delta_2 \nu (d_1 + d_2)\right) - \\ - (d_1 + 1)^2 G\left(\frac{1 - d_1}{d_1 + 1}, \Delta_2 \nu (d_1 + 1)\right) + \\ + \sigma(1 + d_2)^2 G\left(\frac{1 - d_2}{1 + d_2}, \Delta_2 \nu (1 + d_2)\right) \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\rm mod}(\Delta_2, \sigma) = 1 - \frac{(d_1 + d_2)^2 G\left(\frac{1 - d_2}{1 + d_2}, \Delta_2 \nu (1 + d_2)\right)}{d_1^2 + \sigma^2(1 - d_2^2)} .$$

$$(32)$$

В (31-32), как и в (9,17),  $\varsigma = \rho / \rho_2$ ,  $\nu = r_3 / \rho_2$ , где теперь  $\rho_2$  берется из (25). Вычисляя для (31) I<sub>1,3</sub> (11), вместо (21-22) получим

$$I_{1} = \frac{\begin{pmatrix} 2(d_{1}^{3} + \sigma^{2}(1 + d_{2}^{3})) + \sigma(d_{1} + 1) \cdot ((1 + d_{1}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + 1)) - (1 - d_{1})^{2} K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + 1))) - (1 - d_{2})^{2} K(2\sqrt{d_{2}}/(d_{2} + 1))) - (1 - d_{2})^{2} K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{2} + d_{2}))) - (1 - d_{2})^{2} K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2} K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + d_{2}))) - (1 - d_{2})^{2} K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + d_{2}))) - (1 - d_{2})^{2} K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + d_{2}))) - (1 - d_{2})^{2} K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2} K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + d_{2}))$$

$$I_{3} = \frac{\left(16(d_{1}^{5} + \sigma^{2}(1 + d_{2}^{5}) + \sigma(d_{1} + 1) \left[ (1 + 14d_{1}^{2} + d_{1}^{4}) E(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + 1)) - (1 - d_{1})^{2}(1 + d_{1}^{2}) K(2\sqrt{d_{1}}/(d_{1} + 1)) \right] - (1 - d_{1})^{2}(1 + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{2}}/(d_{2} + 1)) - (1 - d_{2})^{2}(1 + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{2}}/(d_{2} + 1)) \right] - (1 - d_{2})^{2}(1 + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (d_{2} - d_{1})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (d_{2} - d_{1})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(1 + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}^{2}) E(2\sqrt{d_{1}d_{2}}/(d_{1} + d_{2})) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2}) - (1 - d_{2})^{2}(d_{1}^{2} + d_{2})) - ($$

При  $\sigma = 1$  (31-34) переходят в выражения (17,23,21-22). Как и в модели с  $\sigma = 1$ , вдоль границы области (30) при  $d_1 = 0$   $I_1 = (\mu^4 + 3 - (\mu^4 + 1)E(\sqrt{\mu^4 - 1}/\mu^2) + 2K(\sqrt{\mu^4 - 1}/\mu^2))/3$ ,  $I_3 = (2(\mu^8 + 10\mu^4 + 5) - 2(\mu^8 - \mu^4 + 1)E(\sqrt{\mu^4 - 1}/\mu^2) + (\mu^4 + 1)K(\sqrt{\mu^4 - 1}/\mu^2))/15$ , а при  $d_2 = 1 - I_1 = 4\mu/3$ ,  $I_3 = 32\mu^3/15$ . А вдоль границы  $d_1 = d_2 = d$   $I_1 = \frac{2(\sigma^2 + d^3(1 - \sigma)^2) + \sigma(1 - \sigma)(1 + d) \cdot ((1 + d^2) \cdot E(2\sqrt{d}/(1 + d)) - (1 - d)^2 \cdot K(2\sqrt{d}/(1 + d))))}{3(d^2(1 - \sigma^2) + \sigma^2))^2/2(d(1 + \sigma^2) + \sigma^2)}$ ,  $I_3 = \frac{16(\sigma^2 + d^5(1 - \sigma)^2) + \sigma(1 - \sigma)(1 + d) \cdot ((1 + 14d^2 + d^4)E(2\sqrt{d}/(1 + d)) - (1 - d)^2(1 + d^2)K(2\sqrt{d}/(1 + d))))}{15(d^2(1 - \sigma^2) + \sigma^2))^4/2(d(1 + \sigma^2) + \sigma^2)^3}$ ,

куда надо подставить d , найденное из (26) при  $d_1 = d_2 = d$ .

Была рассмотрена аппроксимация точных функций (8) с помощью модели (32), вычисляя р для (28-29) из I<sub>1</sub> (33) при разных  $\sigma \neq 1$ , а также  $\sigma$ , р из I<sub>1</sub> (33) и I<sub>3</sub> (34). Рассматривались прямоугольная апертура (для которой при  $\sigma = 1$  нет решения) и **примеры 1-3** с неоднородным полем. Параметры р и  $\sigma$  находились численно с помощью графиков и подгонки.

В табл.2, схожей с табл.1, приведены полученные для аппроксимации параметры. Там, где в качестве инварианта брался только I<sub>1</sub>,  $\sigma$  полагался свободным параметром и выбирался произвольно в диапазоне, где для р (27) есть решения. Их могло быть и не одно (для прямоугольной апертуры получалось по два решения – см. табл.2). Когда задействовались и I<sub>1</sub> и I<sub>3</sub>, модель (32) во всех примерах дала лишь одну пару значений  $\sigma$ , р (27), а значит и d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub>.

	μ	I <sub>1</sub>	I <sub>3</sub>	σ	p (27)	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>
<b>Прямоугольник</b> a/b=9,84 ;	1,77	1,852		0,1	0,111764 0,35217	0,260877 0,0456272	0,625353 0,99704
однородное поле				0,2	0,26284 0,5449	0,298321 0,179132	0,81327 0,970109
			21,956	0,232923	0,41004	0,285535	0,895078
Пример 1	3,367	3,606		0,5	1,749	0,225661	0,985335
				2,0	1,02381	0,626787	0,785032
			112,183	0,91155	1,38265	0,508046	0,901844
Пример 2	5,335	4,352		0,5	0,73177	0,126677	0,988975
				2,0	1,18518	0,445627	0,912384
			701,305	1,14733	0,98997	0,328607	0,943888
Пример 3	12,033	10,045		0,5	0,9934	0,0489487	0,998793
				5,0	7,9006	0,794817	0,959187
			8553,33	1,8147	3,48705	0,319567	0,985248

Таблица 2

На рис.8 показаны зависимости  $I_1$  (33) от р (27) при значении  $\mu = 1,77$  и различных  $\sigma$ . Интервалы изменения р для каждого  $\sigma$  брались в соответствии с (30). Видно, что для первых 4-х апертур табл.1 существуют решения для р при многих  $\sigma$  (нередко не по одному). На рис.9 две кривые с рис.8, перекрывающие значение  $I_1 = 1,852$  (горизонтальная прямая), отвечающее прямоугольной апертуре из табл.1, представлены в более крупном масштабе.



Кривые I<sub>1</sub> (33) от р (27) при  $\mu = 1,77$  и различных  $\sigma$ . Диапазон р для каждой кривой определен (30). Кривая с самыми длинными штрихами соответствует  $\sigma = 0,1$ , по мере уменьшения длины штрихов –  $\sigma = 0,2$ ,  $\sigma = 0,5$  и  $\sigma = 2$ . Сплошная кривая соответствует  $\sigma = 1$ , т.е. модели, идентичной (23), но от свободного параметра р (27), а не (18). При  $\sigma = 0,1-0,5$  кривые состоят из двух частей, при  $\sigma = 1-2$  – из одной, выходящей, как и левые части при  $\sigma = 0,1-0,5$ , из точки (0, 1,9963). В масштабе графика левые части кривых при  $\sigma = 0,1-0,2$  сливаются в почти вертикальную прямую.



Зависимости I<sub>1</sub> (33) от р (27) при  $\mu$  = 1,77,  $\sigma$  = 0,1 (более длинные штрихи) и  $\sigma$  = 0,2 Диапазон изменения р для кривых определен (30). Горизонтальная прямая I<sub>1</sub> = 1,852 соответствует прямоугольной апертуре из табл.1-2.





Для прямоугольной апертуры с a/b = 9,84 ( $\mu = 1,77$ ): (**a**) – графики точной функции  $\widetilde{\Gamma}(\zeta)$  (сплошная линия) и модельных (31) при d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.2, полученных из I<sub>1</sub> (штриховые линии: короткие штрихи – 2 решения при  $\sigma = 0,1$ , средние штрихи – 2 решения при  $\sigma = 0,2$ , длинные штрихи – решение, когда у точной функции и (31) совпадают I<sub>1</sub> и I<sub>3</sub>); (**б**) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta_2)$  и модельных (32), отвечающих (**a**) (типы линий соответствуют).



Для прямоугольной апертуры с a/b = 9,84 ( $\mu = 1,77$ ) графики точной функции  $\overline{T}(\zeta)$  (сплошная линия) и модельных, соответствующих (31) с рис.10 (типы линий соответствуют).



Для примера 1: (а) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$  (сплошная линия) и модельных (31) (штриховые линии, по возрастанию длины штрихов соответствуют d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.1-2: для  $\sigma = 0.5$ ; 1; 2 и р из I<sub>1</sub> (33) и для р,  $\sigma$  при равенстве у точной функции и у модели (31) обоих I<sub>1</sub> и I<sub>3</sub>; кривая для  $\sigma = 1$  совпадает с кривой с длинными штрихами на рис.5); (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta)$  и модельных (32), отвечающих (а) (типы линий соответствуют).



Для примера 2: (а) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$  (сплошная линия) и модельных (31) (штриховые линии, по возрастанию длины штрихов соответствуют d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.1-2: для  $\sigma = 0.5$ ; 1; 2 и р из I<sub>1</sub> (33) и для р,  $\sigma$  при равенстве у точной функции и у модели (31) обоих I<sub>1</sub> и I<sub>3</sub>; кривая для  $\sigma = 1$  совпадает с кривой с длинными штрихами на рис.6); (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta)$  и модельных (32), отвечающих (а) (типы линий соответствуют).



Для примера 3: (а) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$  (сплошная линия) и модельных (31) (штриховые линии, по возрастанию длины штрихов соответствуют d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> из табл.1-2: для  $\sigma = 0.5$ ; 1; 5 и р из I<sub>1</sub> (33) и для р,  $\sigma$  при равенстве у точной функции и у модели (31) обоих I<sub>1</sub> и I<sub>3</sub>; кривая для  $\sigma = 1$  совпадает с кривой с длинными штрихами на рис.7); (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta)$  и модельных (32), отвечающих (а) (типы линий соответствуют).

Из рис.10 видно, что для двух взятых о и обоих р (27) для каждой из них точность приближения (8) с помощью (32) вполне приемлема. Видно также, что хорошая точность приближения (7) с помощью (31) не необходима для хорошей близости (8) и (32). Функция (8) – производная от физически значимой усредненной АФ (2). И отличие (31) еще не означает, что столь же сильно различны и модели (12). На рис.11 для моделей с рис.10 показаны функции (12).

Рис.12-14 аналогичны рис.5-7. Модельные функции при σ=1, совпадающие с функциями на рис.5-7, здесь тоже приведены для сравнения.

## III. Двухпараметрическая модель круговой апертуры

Обратимся к двухпараметрической осесимметричной модели с параметрами d и  $\sigma$  – модели круговой апертуры с полем, скачком меняющимся от U = 1внутри круга радиуса d  $\leq 1$  до  $U = \sigma$  внутри кольца с радиусами d и 1. Опять полагая  $\mu$  (6) заданным, получим однопараметрическое семейство моделей, для определения свободного параметра которого также используем момент I<sub>1</sub>. Эта модель, в отличие от модели (17,23), не получается как частный случай (31-32), поскольку здесь  $\rho_2$  и  $\mu$  отличаются от выражений (25-26) при d<sub>1</sub> = d<sub>2</sub> = d. Рассуждая аналогично [6-7], при скачкообразном изменении поля вдоль некоторой кривой внутри апертуры вместо выражения (5) для  $\rho_2$  получим

$$\rho_2 = 2E_{\Sigma} / (\int |U|^2 dl + \int_{c_{KayKa}} |\Delta U|^2 dl), \qquad (35)$$

где первое слагаемое знаменателя то же, что и в (5) – интеграл по контуру апертуры, а второе – интеграл по контуру скачка внутри апертуры. Собственно, первое слагаемое такое же, т.к. скачок на краю апертуры совпадает с самим полем, а (5) есть частный случай (35) при отсутствии скачков поля внутри апертуры.

Тогда вместо (25-26) получим ( $\rho_1$  совпадает с (24) при  $d_1 = d_2 = d$ )

$$\rho_2 = r_3 \frac{\sigma^2 + d^2 (1 - \sigma^2)}{\sigma^2 + d(1 - \sigma)^2},$$
(36)

$$\mu = \frac{(\sigma^2 + d(1 - \sigma)^2) \cdot (\sigma + d^2(1 - \sigma))}{(\sigma^2 + d^2(1 - \sigma^2))^{3/2}}.$$
(37)

И вместо (31-34) будет ( $\nu\!=\!r_{\!3}\!/\rho_2\,$ с $\rho_2\,$ из (36))

$$\widetilde{\Gamma}_{\text{mod}}(\varsigma) = \frac{\left[\sigma^2 \sqrt{4\nu^2 - \varsigma^2} + (1 - \sigma)^2 \sqrt{4d^2\nu^2 - \varsigma^2} + 2\sigma(1 - \sigma) \frac{\sqrt{(\varsigma^2 - ((1 - d)\nu)^2) \cdot (((1 + d)\nu)^2 - \varsigma^2)}}{\varsigma}\right]}{2(\sigma^2 + d(1 - \sigma)^2)^2 / (\sigma^2 + d^2(1 - \sigma^2))},$$

$$\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2) = 1 - \frac{\sigma^2 (\Phi(\Delta_2 v) + d^2 (1 - \sigma)^2 \Phi(\Delta_2 dv)) + \frac{2}{\pi} \sigma (1 - \sigma) (d + 1)^2 G\left(\frac{1 - d}{d + 1}, \Delta_2 (d + 1)v\right)}{\sigma^2 + d^2 (1 - \sigma^2)}.$$
 (39)

$$I_{1} = \frac{2(d^{3}(1-\sigma)^{2}+\sigma^{2})+\sigma(1-\sigma)(d+1)\cdot((1+d^{2})E(2\sqrt{d}/(d+1))-(1-d)^{2}K(2\sqrt{d}/(d+1)))}{3(\sigma^{2}+d^{2}(1-\sigma^{2}))^{2}/2(\sigma^{2}+d(1-\sigma)^{2})}, (40)$$

$$I_{3} = \frac{16(d^{5}(1-\sigma)^{2}+\sigma^{2}) + \sigma(1-\sigma)(d+1) \cdot ((1+14d^{2}+d^{4}) E(2\sqrt{d}/(d+1)) - (1-d)^{2}(1+d^{2}) K(2\sqrt{d}/(d+1)))}{15(\sigma^{2}+d^{2}(1-\sigma^{2}))^{4}/2(\sigma^{2}+d(1-\sigma)^{2})^{3}} \cdot (41)$$

Т	6	-	110	2
	au	JIN.	ца	3

Апертура	μ	I <sub>1</sub>	σ	d
Прямоугольник a/b=9,84	1,77	1,852	0,0440105	0,200454
Кольцо d=0,516	1,77	1,996	0,09565	0,2416
<b>3O 1</b> (n=10)	1,77	2,316	1,34767	0,94639
<b>30 2</b> (n=3)	1,77	2,124	0,1655 2,251	0,23115 0,6698
Пример 1	3,367	3,606	3,2106	0,845217
Пример 2	5,335	4,352	0,033593	0,071238
Пример 3	12,03	10,05	7,1635	0,960731

Параметры d и σ для (38-41) вычислялись из уравнений (37,40) графически численным подбором. Результаты подбора для 7-ми апертур и полей из табл.1 представлены в табл. 3, а соответствующие модельные кривые – на рис.3-7 вместе с кривыми модели (17,23) и отдельно на рис.15-16 для прямоугольной и кольцевой апертур, для которых (17,23) не рассматривались. Видно, что решений (37,40) может быть и не одно (в табл.3 для 3О 2 получилось 2 решения).



Для прямоугольной апертуры (a/b = 9,84) с  $\mu$  = 1,77 : (a) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\zeta)$  (сплошная линия) и модельной (38) (штриховая линия) при параметрах из табл.3; (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta_2)$  и модельной (39), отвечающих (a) (типы линий соответствуют).



Для кольцевой апертуры (d = 0,516) с  $\mu$  = 1,77 : (a) – графики точной функции  $\tilde{\Gamma}(\zeta)$  (сплошная линия) и модельной (38) (штриховая линия) при параметрах из табл.3; (б) – графики точной функции  $\varepsilon(\Delta_2)$  и модельной (39), отвечающих (a) (типы линий соответствуют).



Для **примера 1** нормированные поля вдоль радиуса апертуры. Сплошная линия – точное поле, штриховые линии – модели (17,31,38). Самые короткие штрихи – модель (17), параметры из табл.1, далее по возрастанию длины штрихов – три модели (31), параметры из табл.2 в порядке, как они записаны в таблице, самые длинные штрихи – модель (38), параметры из табл.3.



Для **примера 2** нормированные поля вдоль радиуса апертуры. Сплошная линия – точное поле, штриховые линии – модели (17,31,38). Самые короткие штрихи – модель (17), параметры из табл.1, далее по возрастанию длины штрихов – три модели (31), параметры из табл.2 в порядке, как они записаны в таблице, самые длинные штрихи – модель (38), параметры из табл.3.



Для **примера 3** нормированные поля вдоль радиуса апертуры. Сплошная линия – точное поле, штриховые линии – модели (17,31,38). Самые короткие штрихи – модель (17), параметры из табл.1, далее по возрастанию длины штрихов – три модели (31), параметры из табл.2 в порядке, как они записаны в таблице, самые длинные штрихи – модель (38), параметры из табл.3.

Заметим в табл.3, что при одинаковых  $I_1$  отношение радиусов кольца со скачком поля оказалось почти в 2 раза меньше, чем при однородном поле. Еще заметнее такие различия для апертур с неоднородными полями в **примерах 1-3**, где поля и апертуры осесимметричны, как и в рассмотренных моделях. Поэтому интересно сравнить радиальную структуру поля в этих примерах с полученной в моделях. Они показаны для **примеров 1-3** на рис.17-19, соответственно.

Для удобства восприятия каждое поле вдоль радиуса нормировалось как  $U(y)/\int_0^1 U(y) dy$ , где у – расстояние из центра относительно радиуса внешнего кольца (интегралы от полей по радиусу приведены к единице). Т.е. поле нормировано на  $\delta(1-d)(1-e^{-1/\delta})$  в **примерах 1-2**, на  $\frac{2}{3\alpha}(1-\delta^3)+\delta(1-d-\frac{1-\delta^2}{\alpha})$  в **примере 3** (см. обозначение параметров в [1-3]), на  $1+d_1-d_2$  в модели (17), на  $d_1+\sigma(1-d_2)$  в модели (31) и на  $d+\sigma(1-d)$  в модели (38).

Анализ рис.3-7,10,12-16 показывает, что лучшими моделями для аппроксимации (8) оказались модели (17) и (31) при выборе параметров из обоих  $I_1$  и  $I_3$  (последняя лучше). В целом видно, что взятые двух-трех параметрические аналоговые модели полей и апертур приемлемо аппроксимируют точные функции (8) для всех рассмотренных примеров, когда недостающие параметры берутся из сохранения  $\mu$  и момента I<sub>1</sub> (или I<sub>3</sub>, или I<sub>1</sub> и I<sub>3</sub>). При этом даже для радиально-симметричных полей и апертур у рассмотренных моделей с моделируемой ситуацией сильно отличаются и параметры апертур и радиальные распределения полей; подчас не совпадают даже направления убывания поля.

На полученные результаты можно взглянуть и с другой точки зрения. К 7ми примерам апертур и полей в [1-4] добавлены новые примеры осесимметричных апертур (и полей на них), у которых с исходными совпадают не только  $\mu$ , но и моменты I<sub>1</sub> (и/или I<sub>3</sub>). При этом, конечно, функции (8) остаются для этих апертур-полей различными в своей средней части, но, если совпадение  $\mu$  обеспечивает совпадение (8) в начале координат и на бесконечности, то дополнительное равенство I<sub>i</sub>, если можно так выразиться, заметно сужает отличия (8) и по оси ординат, и по оси абсцисс в упомянутой средней части.

## Пример не осесимметричных апертур с неоднородными полями

В рассмотренных здесь и в [1-4] примерах с неоднородными полями на апертурах апертуры были осесимметричными. Добавим пример не осесимметричных апертур с неоднородными полями, например, как в работе [8], модель поля и апертуры некоторых конструкций йодных фотодиссоционных лазеров. Сравним для них точные функции (8) с аналоговыми моделями полей-апертур настоящей работы и с простейшими моделями функций (7) из работ [1-4].

Пример простой модели апертуры йодного фотодиссоционного лазера с одним источником разряда показан на рис.20. Амплитуду поля на апертуре смоделируем меняющейся по закону (с плоским фронтом)

$$U(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp(-p(\mathbf{x} - \mathbf{l}_0)), \, \mathbf{x} \ge \mathbf{l}_0 \\ 0, \, \mathbf{x} < \mathbf{l}_0 \end{cases} = \begin{cases} \exp(-b(\mathbf{x}/\mathbf{r}_0 - \mathbf{a})), \, \mathbf{x}/\mathbf{r}_0 \ge \mathbf{a} \\ 0, \, \mathbf{x}/\mathbf{r}_0 < \mathbf{a} \end{cases}, \tag{42}$$

где х отсчитывается от центра окружности  $l_0$ . Расчеты проводились для двух значений  $a = l_0/r_0 - 0,25$  и 0,5, и трех значений  $b = pr_0 - 2,5$ ; 5 и 10. Спад поля внутри апертуры составлял для рассмотренных 6 вариантов поля-апертуры от  $2,35 \cdot 10^{-2}$  (a = 0,5; b = 2,5) до  $2,75 \cdot 10^{-5}$  (a = 0,25; b = 10).

В табл.4 приведены параметры (6,11) для рассмотренных апертур рис.20 и полей (42) на них. Численно рассчитанные для них ПИ (8), близкие при больших  $\Delta_2$  и расходящиеся в начале координат в соответствии с различием  $\mu$ , показаны на рис.21. На рис.22 для двух примеров из шести показана аппроксимация (8) с

помощью простой однопараметрической треугольной модели для (7) из [1-4], свободный параметр которой рассчитывается через  $I_1$  (11): функция (7) от аргумента  $\zeta$  моделируется кусочно-линейной функцией из двух наклонных отрезков прямых – из точки (0; 1) в ( $l_1$ , h) и из ( $l_1$ , h) в ( $l_2$ , 0). Значения  $l_{1,2}$  и h этой треугольной модели также даны в табл.4. Для остальных примеров, не приведенных на рис.22, точность аппроксимации (8) лучше, чем на рис.22

Парам	етры (42)	μ	$I_1$	I <sub>2</sub>	$l_1$	12	h	σ	$d_1$	$d_2$
а	b		1	5	1	2			1	2
0,25	2,5	1,60	1,97	10,21	1,30	4,21	0,44			
	5	2,03	2,38	23,04	1,51	5,86	0,28			
	10	2,56	2,81	52,23	1,78	8,31	0,16	0,579	0,428	0,922
								1	0,424	0,702
								3,223	0,771	0,771
0,5	2,5	1,82	2,24	15,55	0,94	4,77	0,46			
	5	2,43	2,79	43,34	1,39	7,08	0,25			
	10	3,20	3,21	121,74	2,09	12,04	0,088			

Таблица 4



## Рис.20

Модель апертуры йодного фотодиссоционного лазера с одним источником разряда. Апертура представляется кругом радиуса  $r_0$  без разрядной области в виде части круга радиуса  $l_0$  с центром на окружности  $r_0$  (закрашена). Стрелками показано направление экспоненциального спада поля внутри апертуры (из центра окружности  $l_0$ ).

Для левого примера рис.22 на рис.23 показана аппроксимация (8) с помощью трех аналоговых моделей, описанных выше. Параметры моделей для этого примера тоже даны в табл.4. Для трехпараметрической модели (32) параметры считались из обоих моментов  $I_{1,3}$ , для ее частных случаев (модель (23) при  $\sigma = 1$ и модель (39) при  $d_1 = d_2$ ) – из  $I_1$ .



Функции (8) для 6-ти вариантов апертур с рис.20 и полей (42) на них с параметрами из табл.4. Кривые лишь иллюстрируют трансформацию функций (8) при изменении параметров (42).



Функции (8) для двух примеров апертур с рис.20 и полей (42) на них: (a) – a = 0,25; b = 10; (б) – a = 0,5; b = 5. Сплошные линии – численный расчет (8), штриховые линии – треугольная однопараметрическая модель (7), параметры которой рассчитаны через I<sub>1</sub> (табл.4).

Из правого графика рис.23 видно, что наилучшее совпадение с точной функцией наблюдается для трехпараметрической модели, у которой с точной совпадают оба момента  $I_{1,3}$  (как и на рис.10,12-14). А левый рисунок показывает, сколь сильно у рассмотренных моделей расходятся функции (7).



Рис.23

Справа – функции (8) для примера с рис.20 с параметрами а = 0,25; b = 10 апертуры и поля на них. Сплошные линии – численный расчет (8), штриховые линии – аналоговые модели, параметры которых даны в табл.4: короткие штрихи – модель (23), рассчитанная через  $I_1$ ; средние штрихи – модель (32), рассчитанная через  $I_1$  и  $I_3$ ; длинные штрихи – модель (39), рассчитанная через  $I_1$ . Слева для моделей показаны функции (7) (типы линий соответствуют).

### Выводы

В дополнение к расчетам в [1-4] моделей ПИ (8) для 7 апертур и полей на них (4-х при однородном поле с одинаковыми  $\mu$  (6) и трех кольцевых апертур с неоднородными осесимметричными полями) здесь рассчитаны функции (7-8) для трех типов простых осесимметричных апертур и полей на них (одного трехпараметрического и двух двухпараметрических частных случаев). Параметры их взяты так, чтобы с примерами из [1-4] совпали и  $\mu$ , и моменты (11) функции (7) ( $I_1$ , $I_3$  или оба). Их можно назвать аналоговыми моделями (8), поскольку для моделей подбираются апертуры и поля, сохраняющие (6) и (11), а не функции (7), как в [1-4], которым, скорее всего, не отвечают какие-либо апертуры и поля.

Сравнение ПИ (8) для новых апертур-полей с рассмотренными в [1-4] показали, что они тоже могут служить хорошими приближениями этих функций, в особенности, когда совпадают оба момента  $I_1$  и  $I_3$ . Модели эти менее удобны в применении для аппроксимации (8), поскольку и расчет модельных функций (23,32,39) не аналитический, как для моделей в [1-4], а требует вычисления однократных интегралов, и расчет параметров аналоговых моделей через сохранение  $\mu$ ,  $I_1$  и/или  $I_3$  из неявных уравнений требует численной подгонки. Однако эти модели показали на дополнительных примерах, что если у апертур и полей на них совпадают  $\mu$ ,  $I_1$  и/или  $I_3$ , то и функции ПИ (8) для них будут близки на всей области своего определения и могут служит моделями друг другу.

В дополнение для одного из типов апертур, моделирующих апертуру йодного фотодиссоционного лазера с одним разрядом, и неоднородных полей на них численно рассчитаны функции (8) и сопоставлены как с одной из простых моделей из [1-4], так и с аналоговыми моделями (23,32,39) настоящей работы. Расчет 4-хкратного интеграла (8) в этом несимметричном случае не является простой численной процедурой, а все рассмотренные модели дают весьма хорошую точность приближения во всей области определения функции ПИ (8).

## Литература

- Сизова И.М. Об аппроксимации некоторых интегралов в теории дифракции на апертурах сложной формы. Препринт ФИАН №16. Москва, 2014. 60 с.
- Сизова И.М. Об аппроксимации некоторых интегралов в теории дифракции на апертурах сложной формы. Еще одна модель. Препринт ФИАН № 2. Москва, 2015. 32 с.
- 3. Сизова И.М. Аппроксимация функции потока энергии в дальней зоне Фраунгофера при дифракции плоской световой волны на плоских апертурах сложной формы. Препринт ФИАН № 5. Москва, 2015. 33 с.
- 4. Сизова И.М. Аппроксимация функции потока энергии в зоне Фраунгофера при дифракции плоской световой волны на плоских апертурах сложной формы. Компьютерная оптика, 2015, т. 39, №5, с.635-543.
- 5. Willis H.F. A formula for expanding an integral as a series. Philos.Mag. 1948. V.39. P.455-459.
- 6. Clark P.P., Howard J.W., Freniere E.R. Asymptotic approximation to the encircled energy function for arbitrary aperture shapes. Appl.Opt. 1984. V.23, No 2. P.353-357.
- 7. Sizova I.M. Similarity of light fluxes diffracted in the far field by apertures of complicated shape. J. Soviet Laser Research. 1992. V.13. No.1. P.25-45.
- 8. **Sizova I.M.** Approximate scaling relationships of light diffraction by apertures with complicated shapes. Appl. Opt. 1992. V.31.No.28.P.5930-5936.

Ирина Михайловна СИЗОВА

# АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ЗОНЕ ФРАУНГОФЕРА ПРИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКИХ АПЕРТУРАХ

Формат 60х84/16. П. л. 2,25. Тираж 140 экз. Заказ №48 Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии РИИС ФИАН 119991 Москва, Ленинский проспект 53