

ПРЕПРИНТ

11

А.В.ПЕРЕСТОРОНИН

СПОСОБ РЕШЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ КЛАССИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В ПОЛЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ВИДЕ РЕШЕНИЙ

Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева

ISSN 2410-4914

Главный редактор В. И. Ритус, *зам. главного редактора* А. А. Гиппиус, *научный секретарь* С. А. Богачев, *ответственный секретарь* Л. В. Селезнев

Редакционная коллегия: В. С. Бескин, А. А. Горбацевич, О. Д. Далькаров, Е. И. Демихов, И. Г. Зубарев, К. П. Зыбин, А. А. Ионин, Н. Н. Колачевский, Е. Р. Корешева, С. Ф. Лихачев, А. С. Насибов, И. Д. Новиков, В. Н. Очкин, Н. Г. Полухина, В. С. Лебедев, Н. Н. Сибельдин, Д. Р. Хохлов, С. А. Чайковский

Информация

Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева издаются с 1964 г.

Издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН)

Адрес редакции: Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53, ФИАН Тел.: +7 (499) 132-6137, +7 (499) 783-3640; E-mail: preprins@sci.lebedev.ru, irinakh@sci.lebedev.ru

Страница сборника «Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева» в интернете: http://preprints.lebedev.ru/

Содержание

1		оторые свойства движения классического заряда в поле ской электромагнитной волны	5	
2	Способ описания электромагнитного поля монохроматической плоской волны (эллиптической, линейной и круговой поляризации) в трёхмерном евклидовом и четырёхмерном псевдо-			
		пидовом пространстве	13	
	2.1	Разложение компонент тензора электромагнитного поля на сум-		
		му комплексных экспонент	14	
	2.2	Классификация решений, описывающих поле волны	18	
	2.3	Постоянный комплексный вектор напряжённости электрическо-		
		го поля	21	
	2.4	Двузначная псевдоскалярная величина как совершенно анти-		
		симметричный единичный тензор третьего ранга	24	
	2.5	Ещё одно представление для волны эллиптической поляризации	26	
	2.6	Векторный потенциал и производные по фазе волны	28	
	2.7	Тензор энергии-импульса	29	
3	Движение классического заряда в поле монохроматической			
			30	
	3.1	Постоянный четырёхвектор дрейфовой скорости частицы	32	
	3.2	Связь четырёхвектора дрейфовой скорости с начальными усло-		
		виями	35	
	3.3	Дрейфовая скорость и период движения частицы	38	
	3.4	Усреднение четырёхвектора скорости	41	
	3.5	Усреднение квадрата четырёхмерного ускорения	42	
	3.6	Усреднение четырёхвектора ускорения	43	
	3.7	Траектория частицы при нулевой дрейфовой скорости	49	
	3.8	Усреднённые величины при нулевой дрейфовой скорости	53	
	3.9	Направление и величина дрейфовой скорости частицы, покоив-		
		шейся до прихода волны	54	
	3.10	Усреднённые величины в случае частицы, покоившейся до при-		
		хода волны	63	
	3.11	Момент количества движения частицы при нулевой дрейфовой		
		скорости	68	

Аннотация

Модельная релятивистская задача о движении классической заряженной точечной частицы в электромагнитном поле монохроматической плоской волны, распространяющейся в пустом пространстве, сохраняет свою актуальность, в том числе и благодаря созданию в последние десятилетия мощных лазерных установок, генерирующих лазерное излучение, в поле которого мгновенная скорость электрона может быть близка к скорости света. Известные способы решения задачи и анализ этих решений, позволяющий выявить многие важные особенности поведения частицы в поле волны, приведены как в учебной, так и в научной литературе. В тех случаях, когда используется четырёхмерный подход к рассматриваемой задаче, поле волны, в котором движется частица, обычно описывается с помощью четырёхвекторного потенциала, а не с помощью тензора электромагнитного поля.

В настоящей работе предложен способ решения этой задачи, основанный на анализе четырёхвекторного уравнения движения частицы во внешнем электромагнитном поле, не учитывающего реакцию излучения, в совокупности с тензорными и четырёхвекторным уравнениями, которым удовлетворяют компоненты тензора электромагнитного поля монохроматической плоской волны. Получены точные решения уравнения движения частицы в поле монохроматической плоской волны, имеющей линейную, круговую или эллиптическую поляризацию.

Получены выражения для ряда усреднённых по времени системы отсчёта величин, которыми являются компоненты четырёхвектора скорости, квадрат четырёхвектора ускорения и компоненты четырёхвектора ускорения частицы. Четырёхвектор скорости соответствует импульсу и энергии движущейся классической частицы, а квадрат четырёхвектора ускорения определяет полную мощность излучения ускоренно движущегося заряда. Усреднённые значения пространственных компонент четырёхвектора ускорения определяют трёхмерные векторы средней релятивистской силы и средней напряжённости электрического поля.

Движение частицы в поле волны и поведение усреднённых величин проанализировано в двух специально выбранных системах отсчёта: такой, где начальная скорость частицы равна нулю, и такой, где частица в среднем покоится, то есть усреднённая по времени скорость частицы равна нулю. Для системы отсчёта, в которой начальная скорость частицы равна нулю, получены выражения, определяющие величину и направление трёхмерного вектора дрейфовой скорости, являющегося результатом усреднения трёхмерного вектора мгновенной скорости частицы по времени системы отсчёта. В системе отсчёта, где дрейфовая скорость частицы равна нулю, получены выражения определяющие величину и направление трёхмерного псевдовектора мгновенного и среднего момента количества движения классической частицы.

Некоторые свойства движения классического заряда в поле плоской электромагнитной волны

В отличие от обычно принимаемого для работы в псевдоевклидовом пространстве соглашении о приписывании мнимого значения временной компоненте четырёхвектора, здесь будем считать чисто мнимыми пространственные компоненты. Для четырёхвектора координаты используем обозначения

$$X_k = \begin{Bmatrix} X_\alpha \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ix_\alpha \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ix_\alpha \\ ct \end{Bmatrix},$$

где i— мнимая единица, t— время и c— скорость света. Греческие индексы α , β ... пробегают значения от 1 до 3, а латинские индексы i, k...— от 1 до 4. Три пространственные компоненты x_{α} четырёхмерного вектора X_k являются составляющими трёхмерного вектора x. При таком определении, дифференциал собственного времени движущейся со скоростью v = dx/dt материальной точечной частицы

$$ds = c \, dt \sqrt{1 - v_{\alpha}^2/c^2} = c \, dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2},\tag{1}$$

выражается равенством $ds = \sqrt{(dX_i)^2}$. Для квадратного корня в (1) выбирается его положительное значение, что соответствует совпадению знаков дифференциалов времени и собственного времени частицы. Для четырёхмерных векторов скорости и ускорения будем использовать обозначения

$$\frac{dX_i}{ds} = U_i = \begin{Bmatrix} U_{\alpha} \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} iu_{\alpha} \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \text{if} \quad \frac{d^2X_i}{ds^2} = W_i = \begin{Bmatrix} W_{\alpha} \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} iw_{\alpha} \\ w_4 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

соответственно. В рамках принятых определений, U_i является безразмерным единичным четырёхвектором

$$U_i^2 = \left(\frac{dX_i}{ds}\right)^2 = \frac{(dX_i)^2}{(ds)^2} = 1,$$
 (3)

квадрат времениподобных четырёхмерных векторов является положительной величиной, а квадрат пространственноподобных—отрицательной. В псевдоевклидовом пространстве Минковского, где мнимым считается значение временной компоненты четырёхвектора, дифференциал собственного времени выражается равенством $ds = \sqrt{-\left(dX_i\right)^2}$, а квадрат четырёхвектора скорости равен минус единице (см. напр. [1]).

Из совпадения знаков дифференциалов времени и собственного времени частицы, следует положительность временной компоненты четырёхвектора скорости

$$U_4 = u_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}},\tag{4}$$

область значений которой, при любом возможном движении материальной частицы, определяется неравенством $U_4 \geqslant 1$. Тремя составляющими трёхмерного вектора

$$\boldsymbol{u} = u_4 \, \boldsymbol{v}/c \tag{5}$$

являются три пространственные компоненты u_{α} четырёхвектора скорости. Компоненты тензора электромагнитного поля

$$F_{in} = \frac{\partial \mathsf{A}_n}{\partial X_i} - \frac{\partial \mathsf{A}_i}{\partial X_n},\tag{6}$$

выражаются через частные производные по четырёхмерным координатам X_i от четырёхмерного векторного потенциала

$$A_i = \begin{Bmatrix} A_\alpha \\ A_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} iA_\alpha \\ \phi \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

где $A_4 = \phi$ — скалярный потенциал электромагнитного поля, а пространственные компоненты A_{α} являются в трёхмерном векторном пространстве составляющими векторного потенциала \boldsymbol{A} . Связь векторов напряжённости \boldsymbol{E} и \boldsymbol{B} электромагнитного поля с частными производными от \boldsymbol{A} и ϕ , определяется формулами

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t};$$
 (8a)

$$\boldsymbol{B} = [\nabla \times \boldsymbol{A}] = \text{rot}\boldsymbol{A},\tag{8b}$$

в которых свойства векторного оператора ∇ аналогичны свойствам полярного вектора, имеющего компоненты $\left\{\partial/\partial x_{\alpha}\right\}$. Для декартовой системы координат ротор векторной функции, например векторного потенциала \boldsymbol{A} , определяется с помощью равенства

$$[\nabla \times \boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{1} & \boldsymbol{e}_{2} & \boldsymbol{e}_{3} \\ \frac{\partial}{\partial x_{1}} & \frac{\partial}{\partial x_{2}} & \frac{\partial}{\partial x_{3}} \\ A_{1} & A_{2} & A_{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{2}} & \frac{\partial}{\partial x_{3}} \\ A_{2} & A_{3} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{1} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{3}} & \frac{\partial}{\partial x_{1}} \\ A_{3} & A_{1} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{2} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{1}} & \frac{\partial}{\partial x_{2}} \\ A_{1} & A_{2} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{3} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_{3}}{\partial x_{2}} - \frac{\partial A_{2}}{\partial x_{3}} \right) \boldsymbol{e}_{1} + \left(\frac{\partial A_{1}}{\partial x_{3}} - \frac{\partial A_{3}}{\partial x_{1}} \right) \boldsymbol{e}_{2} + \left(\frac{\partial A_{2}}{\partial x_{1}} - \frac{\partial A_{1}}{\partial x_{2}} \right) \boldsymbol{e}_{3},$$

$$(9)$$

где e_1 , e_2 и e_3 — единичные орты правой декартовой системы координат, а A_{α} — составляющие соответствующие трёхмерного вектора A в этой системе координат. Объединённый в одну таблицу, тензор электромагнитного поля

имеет вид

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & -F_{31} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & iE_3 \\ -iE_1 & -iE_2 & -iE_3 & 0 \end{pmatrix}.$$
(10)

Такая запись следует из определений (6), (8) и (9).

Записывая первую пару уравнений Максвелла, являющуюся следствием определения (6), и вторую пару уравнений Максвелла в отсутствие зарядов и токов

$$\frac{\partial F_{in}}{\partial X_m} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial X_n} + \frac{\partial F_{nm}}{\partial X_i} = 0 \qquad \qquad \mathbf{II} \qquad \frac{\partial F_{in}}{\partial X_n} = 0, \tag{11}$$

рассмотрим свойства электромагнитного поля плоской волны, для которого воспользуемся удобным определением, приведённым в [2]. Оно воспроизведено ниже с использованием обозначений, принятых в настоящей работе.

«Поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль направления \mathbf{k} , может быть описано 4-потенциалом $A_i = A_i(\varphi)$, зависящим от координат только через одну инвариантную переменную $\varphi = K_n X_n$, где $K_n - 4$ -вектор нулевой длины, образованный из \mathbf{k} :

$$K_n = \begin{Bmatrix} ik_\alpha \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ik_\alpha \\ \omega/c \end{Bmatrix}, \qquad k_\alpha^2 = k_4^2, \qquad K_n^2 = 0.$$
 (12)

Предполагается, что потенциал удовлетворяет лоренцовскому условию калибровки, так что $K_i A_i = 0.$ »

Рассматривая четырёхпотенциал как сложную функцию $A_i = A_i (\varphi(X_m))$, из (6) и определения поля плоской волны получим равенство

$$F_{in} = \frac{\partial \mathsf{A}_n}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} - \frac{\partial \mathsf{A}_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial X_n} = \frac{\partial \mathsf{A}_n}{\partial \varphi} K_i - \frac{\partial \mathsf{A}_i}{\partial \varphi} K_n = \dot{\mathsf{A}}_n K_i - \dot{\mathsf{A}}_i K_n, \tag{13}$$

где точкой обозначено дифференцирование по фазе волны

$$\varphi = K_n X_n = \omega t - k x = (\omega/c) (ct - n_k x); \qquad n_k = k/k_4.$$
 (14)

Компоненты тензора поля плоской волны удовлетворяют равенствам

$$F_{in}K_m + F_{mi}K_n + F_{nm}K_i = 0;$$
 $F_{in}K_n = 0,$ (15)

в чём можно убедиться простой подстановкой (13) в (15).

Уравнение, определяющее закон движения точечной частицы массы m с зарядом q во внешнем электромагнитном поле [3]

$$\frac{dP_i}{ds} = \frac{q}{c} F_{in} U_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dP_i}{(ds/c)} = q F_{in} U_n, \tag{16}$$

где P_i — четырёхвектор импульса частицы

$$P_i = mc U_i = \begin{Bmatrix} P_{\alpha} \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{\alpha} \\ \mathcal{E}/c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ip_{\alpha} \\ p_4 \end{Bmatrix}.$$

перепишем в форме

$$W_i = \frac{q}{mc^2} F_{in} U_n. (17)$$

и, пользуясь вторым свойством (15), получим скалярное равенство

$$W_i K_i = 0. (18)$$

Из (18) следует требование сохранения инвариантной скалярной величины K_iU_i при любом возможном движении точечной частицы в поле плоской волны

$$W_i K_i = 0$$
 \Rightarrow $\frac{dU_i}{ds} K_i = \frac{d}{ds} (K_i U_i) = 0$ \Rightarrow $(K_i U_i) = \text{const.}$

Составим из четырёхмерных векторов ускорения точечной частицы W_i , определяемого формулой (17), и волнового вектора K_i антисимметричный тензор

$$W_{i}K_{n} - W_{n}K_{i} = \frac{q}{mc^{2}} \left(F_{ip}U_{p}K_{n} - F_{np}U_{p}K_{i} \right) = \frac{q}{mc^{2}} U_{p} \left(F_{ip}K_{n} - F_{np}K_{i} \right).$$

Для правой части этого равенства воспользуемся первым свойством (15)

$$F_{ip}K_n + F_{pn}K_i + F_{ni}K_p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{ip}K_n - F_{np}K_i = F_{in}K_p.$$

Подставляя результат в предыдущее соотношение, получим уравнение

$$\frac{W_i K_n - W_n K_i}{(K_p U_p)} = \frac{q}{mc^2} F_{in} \tag{19}$$

В отличие от четырёхвекторного уравнения (17), в котором электромагнитное поле $F_{in} = F_{in}\left(x_{\alpha},t\right)$ является тензорным коэффициентом пропорциональности между кинематическими характеристиками частицы W_{i} и U_{i} , тензорное соотношение (19) содержит в своей левой части только величины, относящиеся к кинематическим характеристикам точечной частицы, или постоянные в рассматриваемых условиях, а в правой—тензор электромагнитного поля, являющийся полевой величиной. Трёхмерной формой записи (19) будут векторное и псевдовекторное уравнения

$$\frac{\boldsymbol{w}k_4 - w_4\boldsymbol{k}}{(K_pU_p)} = \frac{q}{mc^2}\boldsymbol{E} \qquad \qquad \mathbf{H} \qquad \frac{[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{w}]}{(K_pU_p)} = \frac{q}{mc^2}\boldsymbol{B}, \tag{20}$$

в которых \boldsymbol{w} — вектор, тремя составляющими которого являются три пространственные компоненты w_{α} четырёхвектора ускорения, w_4 — временная компонента четырёхвектора ускорения

$$\boldsymbol{w} = \frac{u_4^2}{c^2} \left(\boldsymbol{a} + u_4^2 \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \boldsymbol{a} \right) \frac{\boldsymbol{v}}{c} \right) = \frac{u_4^4}{c^2} \left(\boldsymbol{a} + \left[\left[\boldsymbol{a} \times \frac{\boldsymbol{v}}{c} \right] \times \frac{\boldsymbol{v}}{c} \right] \right) \quad \text{if} \quad w_4 = \frac{u_4^4}{c^3} \left(\boldsymbol{v} \boldsymbol{a} \right). \quad (21)$$

Для правой декартовой системы координат операция векторного произведения, например векторов \boldsymbol{k} и \boldsymbol{w} , определяется с помощью равенства

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{w}] = (k_2 w_3 - k_3 w_2) \, \mathbf{e}_1 + (k_3 w_1 - k_1 w_3) \, \mathbf{e}_2 + (k_1 w_2 - k_2 w_1) \, \mathbf{e}_3, \tag{22}$$

где e_1 , e_2 и e_3 — единичные орты правой декартовой системы координат.

Следствием постоянства четырёхмерного скалярного произведения K_iU_i является пропорциональность дифференциала собственного времени частицы, движущейся в поле плоской волны, значению дифференциала фазы этой волны в той точке четырёхмерного континуума, в которой находится движущаяся точечная частица. Действительно, воспользовавшись определением (14), получаем

$$(K_n U_n) = \frac{d}{ds} (K_n X_n) = \frac{d\varphi}{ds} = \text{const}$$
 \Rightarrow $d\varphi = (K_p U_p) ds.$ (23)

Поэтому дифференцирование любого выражения по собственному времени может быть сведено к дифференцированию по фазе.

Равенства (19) и (17) можно рассматривать как дифференциальные уравнения зависящего от единственного параметра — значения фазы волны в той точке четырёхмерного континуума, в которой находится движущаяся точечная частица. Если рассматривать четырёхпотенциал как функцию только одной переменной φ , то можно считать, что в последнем выражении (13) точкой обозначается операция взятия полной производной по фазе φ . Тогда, из анализа уравнений (19) и (17), в которых $F_{in} = \dot{\mathsf{A}}_n K_i - \dot{\mathsf{A}}_i K_n$, можно получить условие

$$\frac{d}{d\varphi}\left(U_i + \frac{q}{mc^2}\mathsf{A}_i - \left(\frac{q}{mc^2}\frac{(\mathsf{A}_nU_n)}{(K_pU_p)} + \left(\frac{q}{mc^2}\right)^2\frac{\mathsf{A}_n^2}{2\left(K_pU_p\right)}\right)K_i\right) = 0,$$

соответствующее сохранению четырёхвекторной величины, содержащийся под знаком дифференцирования. Из этого условия может быть найдено выражение для четырёхмерного импульса частицы, совпадающее с приведённым в [2] решением (ур.(6) в [2]) уравнений движения классической заряженной частицы в поле плоской волны.

Записывая уравнения (19) в виде

$$\frac{mc^2}{q} \frac{W_i K_n - W_n K_i}{(K_p U_p)} = F_{in}$$
 и $\frac{mc^2}{q} \frac{W_n K_m - W_m K_n}{(K_p U_p)} = F_{nm}$

получим равенство, содержащее симметричные тензоры

$$-\left(\frac{mc^2}{q}\right)^2 \frac{W_n^2}{(K_p U_p)^2} K_i K_m = F_{in} F_{nm} = 4\pi T_{im}, \tag{24}$$

где T_{im} — тензор энергии-импульса электромагнитного поля плоской волны, для которой квадрат тензора электромагнитного поля F_{ml}^2 равен нулю. В (24) учитывается, что в силу (18) и (12), верно соотношение

$$(W_i K_n - W_n K_i) (W_n K_m - W_m K_n) = 0 - W_n^2 K_i K_m - 0 + 0 = -W_n^2 K_i K_m.$$

Рассматривая тензорное уравнение (24) для его компоненты {44}, получим

$$-W_n^2 = \left(\frac{q}{mc^2}\right)^2 \frac{(K_p U_p)^2}{K_A^2} \mathbf{E}^2, \tag{25}$$

что квадрат четырёхмерного ускорения частицы в поле плоской волны определяется значением плотности электромагнитной энергии поля $T_{44} = \mathbf{E}^2/4\pi$ в точке нахождения частицы. Четырёхмерный вектор ускорения пространственноподобен, то есть его квадрат (см. напр. [4])

$$-W_i^2 = \frac{u_4^6}{c^4} \left(\boldsymbol{a}^2 - \left[\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{a} \right]^2 \right) = \frac{u_4^4}{c^4} \left(\boldsymbol{a}^2 + \frac{u_4^2}{c^2} \left(\boldsymbol{v} \boldsymbol{a} \right)^2 \right)$$
(26)

может принимать только отрицательные или равные нулю значения. В последнем выражении (26) в скобках содержится сумма квадратов, которая может стать равной нулю, только в случае когда каждое слагаемое этой суммы равно нулю, то есть из равенства нулю квадрата четырёхмерного ускорения следует равенство нулю каждой из компонент четырёхвектора и равенство нулю вектора трёхмерного ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Как видно из (25), ускорение частицы \mathbf{a} может оказаться равным нулю, только в тех точках траектории, в которых плотность энергии поля плоской волны равна нулю, если такие точки существуют.

Тензор электромагнитного поля плоской волны, который мы здесь временно обозначим как

$$F_{in}^{\text{plane wave}} = F_{in}^{\text{pw}} = F_{in}^{\text{pw}} (\varphi),$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла в пустом пространстве (11) и равенствам (15). Очевидно, что электромагнитное поле, описываемое тензором

$$F_{in} = l(\varphi) F_{in}^{pw}$$

где $l(\varphi)$ — произвольная дифференцируемая функция фазы волны φ , будет удовлетворять уравнениям Максвелла (11) в силу того, что частная производная по четырёхмерной координате от функции $l(X_p)$, согласно правилу

дифференцирования сложной функции, оказывается пропорциональна четырёхмерному волновому вектору. Электромагнитное поле, задаваемое тензором $F_{in}(\varphi) = l(\varphi) F_{in}^{pw}$, с одной стороны само является полем плоской волны, а с другой стороны его можно считать полем амплитудно-модулированной волны с огибающей $l(\varphi)$.

Тогда, при рассмотрении какой-либо модельной задачи, в которой внешнее поле считается, например, полем амплитудно-модулированной волны линейной поляризации с огибающей $l\left(\varphi\right)$, может оказаться полезным использование уравнений (20) и (25), в правых частях которых будут содержаться величины

$$m{E} = l\left(arphi
ight)\,m{E}^{\,\mathrm{lin}}$$
 и $m{B} = l\left(arphi
ight)\left[m{n_k} imesm{E}^{\,\mathrm{lin}}
ight];$ $m{E}^2 = l^2\left(arphi
ight)\left(m{E}^{\,\mathrm{lin}}
ight)^2,$

где $m{E}^{\mathrm{lin}}$ — вектор напряжённости электрического поля монохроматической плоской волны линейной поляризации.

Зависящая от фазы волны огибающая $l\left(\varphi\right)$, вообще говоря, не должна являться непрерывной функцией фазы во всей области определения этой функции. Уравнение

$$\varphi = K_n X_n = \omega t - k x = \frac{\omega}{c} (ct - n_k x) = \varphi^{\text{begin}} = \text{const},$$

определяющее некое фиксированное значение фазы φ^{begin} , описывает плоскую поверхность перпендикулярную направлению распространения волны и движущуюся в этом направлении со скоростью света. Эта поверхность, как показано в [5] является характеристической, то есть такой поверхностью, на которой некоторые из составляющих векторов напряжённости электромагнитного поля могут терпеть разрыв. В \$3 учебника [5] обсуждаются условия, которым должны удовлетворять характеристические поверхности и делается вывод о том, что поверхность $\varphi = \text{const}$, описывающая фронт плоской волны, этим условиям удовлетворяет. Ниже приведён текст одного из абзацев книги [5], который предшествует нахождению уравнений характеристик для системы уравнений Максвелла в пустом пространстве.

«Нас интересует, однако, не общий случай распространения света, а лишь распространение сигнала, идущего с предельной скоростью, т. е. распространение фронта волны. Впереди фронта волны все составляющие поля равны нулю; позади фронта некоторые из них отличны от нуля. Таким образом, на фронте волны некоторые из составляющих поля терпят разрыв. С другой стороны, задание поля на некоторой поверхности (движущейся в пространстве), вообще говоря, определяет, в силу уравнений Максвелла, и значения производных от поля на этой поверхности. Тем самым определяется и значение поля на бесконечно близкой поверхности, а скачки поля становятся невозможными. Это будет не так только в том случае, когда данная поверхность (ее форма и движение) подчинена особым условиям, при выполнении которых значения

производных от поля не определяются значениями поля. Поверхность называется тогда характеристической поверхностью, или проще, характеристикой. Таким образом, скачки поля возможны только на характеристике. Но так как на фронте волны поле заведомо терпит скачок, то ясно, что фронт волны должен быть характеристикой.»

Описать волну с резкими передним и задним фронтами можно, например, с помощью выражения $F_{in}=l\left(\varphi\right)F_{in}^{\mathrm{pw}}$, в котором F_{in}^{pw} — тензор электромагнитного поля плоской волны, имеющей бесконечную протяжённость в любой момент времени, а огибающая $l\left(\varphi\right)$ является функцией, описывающей прямоугольный импульс. В точках, соответствующие началу φ^{begin} и концу прямоугольного импульса φ^{end} , то есть на характеристических поверхностях, определяемых уравнениями $\varphi=\varphi^{\mathrm{begin}}$ и $\varphi=\varphi^{\mathrm{end}}$, некоторые из составляющих векторов напряжённости электромагнитного поля могут терпеть разрыв.

Наличие на фронте волны конечного разрыва некоторых из компонент тензора электромагнитного поля плоской волны не противоречит разумному физическому требованию непрерывности всех трёх составляющих вектора скорости или четырёх компонент четырёхвектора скорости частицы в момент прихода фронта волны в точку нахождения частицы. При этом, в силу соотношений (19) и (25), некоторые компоненты четырёхвектора ускорения и величина квадрата четырёхмерного ускорения могут измениться скачком от нулевого до некоего конечного значения. В отличие от компонент W_i , скалярное произведение K_pW_p , равное нулю в поле плоской волны и, очевидно, имеющее нулевое значение до прихода переднего фронта волны в точку нахождения частицы, является непрерывной функцией произвольного параметра, например, собственного времени частицы, с помощью которого описывается мировая линия частицы.

Величину K_pU_p , имеющую одно и то же значение во всех точках мировой линии частицы: до прихода волны, когда силы отсутствуют, и в поле волны (включая момент прихода переднего фронта волны в точку нахождения частицы), можно определять в отсутствие волны, когда все компоненты U_i постоянны. Для покоящейся ($\mathbf{v}=0,\,u_4=1$) до прихода волны частицы скалярное произведение

$$K_p U_p = K_4 U_4 \left(1 + \frac{K_\alpha}{K_4} \frac{U_\alpha}{U_4} \right) = \frac{\omega}{c} u_4 \left(1 - \left(\boldsymbol{n_k} \frac{\boldsymbol{v}}{c} \right) \right)$$

всегда будет иметь значение ω/c . Во всех точках траектории будут выполняться соотношения

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c} u_4 \left(1 - \left(\boldsymbol{n_k} \frac{\boldsymbol{v}}{c} \right) \right) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\boldsymbol{n_k} \frac{\boldsymbol{v}}{c} \right) = 1 - \frac{1}{u_4} \geqslant 0,$$

где последнее неравенство следует из того, что u_4 всегда больше единицы. При таких условиях скорость частицы нигде не будет иметь составляющей, направ-

ленной в сторону противоположную направлению распространения волны, и, следовательно, частица не может с течением времени смещаться в сторону противоположную направлению распространения волны.

2 Способ описания электромагнитного поля монохроматической плоской волны (эллиптической, линейной и круговой поляризации) в трёхмерном евклидовом и четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве

Компоненты тензора поля плоской волны удовлетворяют равенствам (15), эквивалентным системе уравнений

$$F_{\alpha\beta}K_{\gamma} + F_{\beta\gamma}K_{\alpha} + F_{\gamma\alpha}K_{\beta} = 0; \qquad F_{\alpha\beta}K_{\beta} + F_{\alpha4}K_{4} = 0; F_{\alpha\beta}K_{4} + F_{\beta4}K_{\alpha} + F_{4\alpha}K_{\beta} = 0; \qquad F_{4\alpha}K_{\alpha} = 0.$$
 (15')

Разделив их на ненулевую временну́ю компоненту $K_4 \neq 0$ волнового вектора, запишем свойства компонент тензора электромагнитного поля плоской волны и соответствующие свойства векторов напряжённости

$$F_{\alpha\beta}\frac{K_{\gamma}}{K_{4}} + F_{\beta\gamma}\frac{K_{\alpha}}{K_{4}} + F_{\gamma\alpha}\frac{K_{\beta}}{K_{4}} = 0; \qquad (\mathbf{B}\boldsymbol{n_{k}}) = 0; \qquad (27a)$$

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha4} \frac{K_{\beta}}{K_4} - F_{\beta4} \frac{K_{\alpha}}{K_4}; \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{n_k} \times \mathbf{E}]; \qquad (27b)$$

$$F_{\alpha 4} = -F_{\alpha \beta} \frac{K_{\beta}}{K_{4}}; \qquad \mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n_k}]; \qquad (27c)$$

$$F_{\alpha 4} \frac{K_{\alpha}}{K_{4}} = 0; \qquad (\mathbf{E} \mathbf{n}_{k}) = 0. \tag{27d}$$

Из этих свойств и (12) следует

$$F_{ik}^2 = F_{\alpha\beta}^2 + 2F_{\alpha4}^2 = 2\mathbf{B}^2 - 2\mathbf{E}^2 = 0;$$
 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2$ (27e)

равенство абсолютных величин трёхмерного вектора ${m E}$ и псевдовектора ${m B}$ и перпендикулярность этих векторов

$$F_{\alpha\beta}F_{\gamma4} + F_{\beta\gamma}F_{\alpha4} + F_{\gamma\alpha}F_{\beta4} = 0; \qquad (\mathbf{EB}) = 0. \tag{27f}$$

2.1 Разложение компонент тензора электромагнитного поля на сумму комплексных экспонент

Для каждой компоненты тензора F_{in} , подчиняющейся уравнениям (11) и (27) рассмотрим решение в виде монохроматической плоской волны

$$E_1 = E_1^0 \cos(\omega t - k_\alpha x_\alpha + \varphi_{E1}) = E_1^0 \cos(\varphi + \varphi_{E1}),$$

которое задаётся с помощью шести действительных параметров: амплитуды E_1^0 , величины начальной фазы φ_{E1} , частоты ω и трёх составляющих волнового вектора k_{α} , направление которого совпадает с направлением распространения волны. Нулевое значение параметра амплитуды E_1^0 приводит к тривиальному решению $E_1\left(x_{\alpha},t\right)=0$. Без ограничения общности можно принять соглашение о том, что для нетривиальных решений амплитуда E_1^0 принимает только положительные значения. Изменению знака решения на противоположный $E_1\left(x_{\alpha},t\right) \to -E_1\left(x_{\alpha},t\right)$ будет соответствовать замена параметра $\varphi_{E1} \to \varphi_{E1} + \pi n$, где n-любое целое число. При этом можно считать, что параметр φ_{E1} может принимать любые действительные значения.

Для упрощения описания гармонических колебаний обычно используют приём, заключающийся в приписывании колеблющейся величине комплексного значения, подразумевая при этом, что только действительная часть этого выражения имеет физический смысл. Однако, при использовании четырёхмерного описания в псевдоевклидовом пространстве один и тот же объект, например, четырёхмерный вектор, или тензор электромагнитного поля (10), уже содержит в себе как действительные, так и чисто мнимые компоненты. С другой стороны, применяя формулы Эйлера

$$e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi; \qquad \cos \psi = \frac{1}{2} \left(e^{i\psi} + e^{-i\psi} \right);$$

$$e^{-i\psi} = \cos \psi - i \sin \psi; \qquad \sin \psi = -\frac{i}{2} \left(e^{i\psi} - e^{-i\psi} \right),$$

всегда возможно ввести комплексные экспоненты. Запишем все три составляющие вектора электрического поля ${m E}$ в виде

$$E_1 = E_1^0 \cos \left(\varphi + \varphi_{E1} \right),\,$$

а для всех составляющих псевдовектора ${m B}$ примем форму записи

$$B_1 = B_1^0 \sin \left(\varphi + \varphi_{B1}\right) = B_1^0 \cos \left(\varphi + \varphi_{B1} + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Для амплитуд колебаний выполняются неравенства

$$E_{\alpha}^{0} \geqslant 0;$$
 $B_{\alpha}^{0} \geqslant 0;$ $(E_{\alpha}^{0})^{2} > 0;$ $(B_{\alpha}^{0})^{2} > 0,$

где последние два неравенства необходимы для существования ненулевого поля. Параметры φ_{E1} и φ_{B1} и им аналогичные могут принимать любые действительные значения. С учётом предыдущего, для матрицы тензора электромагнитного поля (10) монохроматической плоской волны получаем тогда представление

$$F_{in} = \begin{pmatrix} 0 & B_3^0 \sin(\varphi + \varphi_{B3}) & -B_2^0 \sin(\varphi + \varphi_{B2}) & iE_1^0 \cos(\varphi + \varphi_{E1}) \\ -B_3^0 \sin(\varphi + \varphi_{B3}) & 0 & B_1^0 \sin(\varphi + \varphi_{B1}) & iE_2^0 \cos(\varphi + \varphi_{E2}) \\ B_2^0 \sin(\varphi + \varphi_{B2}) & -B_1^0 \sin(\varphi + \varphi_{B1}) & 0 & iE_3^0 \cos(\varphi + \varphi_{E3}) \\ -iE_1^0 \cos(\varphi + \varphi_{E1}) & -iE_2^0 \cos(\varphi + \varphi_{E2}) & -iE_3^0 \cos(\varphi + \varphi_{E3}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложим каждую компоненту тензора на сумму двух комплексных экспонент. Для F_{14} и F_{23} получим выражения

$$F_{14} = iE_1^0 \cos(\varphi + \varphi_{E1}) = \frac{i}{2} \left(E_1^0 e^{i\varphi_{E1}} e^{i\varphi} + E_1^0 e^{-i\varphi_{E1}} e^{-i\varphi} \right);$$

$$F_{23} = B_1^0 \sin(\varphi + \varphi_{B1}) = \frac{i}{2} \left(\left(-B_1^0 e^{i\varphi_{B1}} \right) e^{i\varphi} + B_1^0 e^{-i\varphi_{B1}} e^{-i\varphi} \right).$$
(28)

Если теперь ввести две антисимметричные матрицы, компоненты которых имеют постоянные комплексные значения, посредством определений

$$\mathcal{F}_{in}^{\oplus} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11}^{\oplus} & \mathcal{F}_{12}^{\oplus} & \mathcal{F}_{13}^{\oplus} & \mathcal{F}_{14}^{\oplus} \\ \mathcal{F}_{21}^{\oplus} & \mathcal{F}_{22}^{\oplus} & \mathcal{F}_{23}^{\oplus} & \mathcal{F}_{24}^{\oplus} \\ \mathcal{F}_{31}^{\oplus} & \mathcal{F}_{32}^{\oplus} & \mathcal{F}_{33}^{\oplus} & \mathcal{F}_{34}^{\oplus} \\ \mathcal{F}_{41}^{\oplus} & \mathcal{F}_{42}^{\oplus} & \mathcal{F}_{43}^{\oplus} & \mathcal{F}_{44}^{\oplus} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B_{3}^{0}e^{i\varphi_{B3}} & B_{2}^{0}e^{i\varphi_{B2}} & E_{1}^{0}e^{i\varphi_{E1}} \\ B_{3}^{0}e^{i\varphi_{B3}} & 0 & -B_{1}^{0}e^{i\varphi_{B1}} & E_{2}^{0}e^{i\varphi_{E2}} \\ -B_{2}^{0}e^{i\varphi_{B3}} & B_{2}^{0}e^{i\varphi_{B3}} & B_{2}^{0}e^{i\varphi_{B2}} & B_{2}^{0}e^{i\varphi_{E2}} \\ -B_{2}^{0}e^{i\varphi_{B2}} & B_{1}^{0}e^{i\varphi_{B1}} & 0 & E_{3}^{0}e^{i\varphi_{E3}} \\ -E_{1}^{0}e^{i\varphi_{E1}} & -E_{2}^{0}e^{i\varphi_{E2}} & -E_{3}^{0}e^{i\varphi_{E3}} & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\mathcal{F}_{in}^{\ominus} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11}^{\ominus} & \mathcal{F}_{12}^{\ominus} & \mathcal{F}_{13}^{\ominus} & \mathcal{F}_{14}^{\ominus} \\ \mathcal{F}_{21}^{\ominus} & \mathcal{F}_{22}^{\ominus} & \mathcal{F}_{23}^{\ominus} & \mathcal{F}_{24}^{\ominus} \\ \mathcal{F}_{31}^{\ominus} & \mathcal{F}_{32}^{\ominus} & \mathcal{F}_{23}^{\ominus} & \mathcal{F}_{24}^{\ominus} \\ \mathcal{F}_{31}^{\ominus} & \mathcal{F}_{32}^{\ominus} & \mathcal{F}_{23}^{\ominus} & \mathcal{F}_{24}^{\ominus} \\ \mathcal{F}_{31}^{\ominus} & \mathcal{F}_{32}^{\ominus} & \mathcal{F}_{33}^{\ominus} & \mathcal{F}_{34}^{\ominus} \\ \mathcal{F}_{41}^{\ominus} & \mathcal{F}_{42}^{\ominus} & \mathcal{F}_{43}^{\ominus} & \mathcal{F}_{44}^{\ominus} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_{3}^{0}e^{-i\varphi_{B3}} & -B_{2}^{0}e^{-i\varphi_{B3}} & E_{1}^{0}e^{-i\varphi_{E1}} \\ -B_{3}^{0}e^{-i\varphi_{B3}} & 0 & B_{1}^{0}e^{-i\varphi_{B1}} & E_{2}^{0}e^{-i\varphi_{E1}} \\ -B_{3}^{0}e^{-i\varphi_{B3}} & 0 & B_{1}^{0}e^{-i\varphi_{B1}} & E_{2}^{0}e^{-i\varphi_{E2}} \\ B_{2}^{0}e^{-i\varphi_{B2}} - B_{1}^{0}e^{-i\varphi_{B1}} & 0 & E_{3}^{0}e^{-i\varphi_{E3}} \\ -E_{1}^{0}e^{-i\varphi_{E1}} - E_{2}^{0}e^{-i\varphi_{E2}} - E_{3}^{0}e^{-i\varphi_{E3}} & 0 \end{pmatrix} ,$$

то выражение для тензора электромагнитного поля, можно будет записать в виде формулы

$$F_{in} = \frac{i}{2} \left(\mathcal{F}_{in}^{\oplus} e^{i\varphi} + \mathcal{F}_{in}^{\ominus} e^{-i\varphi} \right). \tag{29b}$$

Компоненты матриц $\mathcal{F}_{in}^{\oplus}$ и $\mathcal{F}_{in}^{\ominus}$ связаны между собой соотношениям для их комплексно-сопряжённых значений, а также условием антисимметричности

$$\left(\mathcal{F}_{\alpha 4}^{\oplus}\right)^* = \mathcal{F}_{\alpha 4}^{\ominus}; \qquad \left(\mathcal{F}_{\alpha \beta}^{\oplus}\right)^* = -\mathcal{F}_{\alpha \beta}^{\ominus}; \qquad \mathcal{F}_{in}^{\oplus} = -\mathcal{F}_{ni}^{\ominus}; \qquad \mathcal{F}_{in}^{\ominus} = -\mathcal{F}_{ni}^{\ominus}.$$
 (29c)

Для обозначения антисимметричного тензора второго ранга иногда применяют сокращённую форму записи, подчёркивающую то обстоятельство, что три из шести независимых компонент этого тензора являются в то же время составляющими вектора, а оставшиеся три—составляющими псевдовектора в трёхмерном пространстве. При использовании этой сокращённой формы,

тензор электромагнитного поля (10) записывается в виде выражения $F_{in} = (i \boldsymbol{E}; \boldsymbol{B})$. Подразумевается, что три составляющие E_{α} трёхмерного вектора напряжённости электрического поля \boldsymbol{E} являются компонентами тензора $F_{\alpha 4} = i E_{\alpha}$, а для трёх составляющих B_{α} трёхмерного псевдовектора \boldsymbol{B} верны равенства: $F_{23} = B_1$, $F_{31} = B_2$, и $F_{12} = B_3$.

По аналогии, примем для компонент $\mathcal{F}_{in}^{\oplus}$ антисимметричной матрицы, определённой в (29a), обозначения:

$$\mathcal{F}_{\alpha 4}^{\oplus} = \tilde{E}_{\alpha}^{\oplus}; \qquad \qquad \mathcal{F}_{23}^{\oplus} = \tilde{B}_{1}^{\oplus}; \qquad \qquad \mathcal{F}_{31}^{\oplus} = \tilde{B}_{2}^{\oplus}; \qquad \qquad \mathcal{F}_{12}^{\oplus} = \tilde{B}_{3}^{\oplus}.$$

Рассматривая величины $\tilde{E}^{\oplus}_{\alpha}$ и $\tilde{B}^{\oplus}_{\alpha}$ как составляющие постоянного комплексного вектора $\tilde{\boldsymbol{E}}^{\oplus}$ и постоянного комплексного псевдовектора $\tilde{\boldsymbol{B}}^{\oplus}$, соответственно, запишем матрицы (29a) в сокращённой форме

$$\mathcal{F}_{in}^{\oplus} = \left(ilde{m{E}}^{\oplus}; ilde{m{B}}^{\oplus}
ight); \qquad \qquad \mathcal{F}_{in}^{\ominus} = \left(ilde{m{E}}^{\ominus}; ilde{m{B}}^{\ominus}
ight) = \left(\left(ilde{m{E}}^{\oplus}
ight)^{*}; - \left(ilde{m{B}}^{\oplus}
ight)^{*}
ight),$$

где во втором равенстве использованы первые два свойства (29c). Сокращённая форма записи уравнения (29b)

$$(i\boldsymbol{E};\boldsymbol{B}) = \frac{i}{2} \left(\left(\tilde{\boldsymbol{E}}^{\oplus}; \tilde{\boldsymbol{B}}^{\oplus} \right) e^{i\varphi} + \left(\left(\tilde{\boldsymbol{E}}^{\oplus} \right)^*; - \left(\tilde{\boldsymbol{B}}^{\oplus} \right)^* \right) e^{-i\varphi} \right)$$

соответствует двум равенствам

$$m{E} = rac{1}{2} \left(ilde{m{E}}^\oplus e^{iarphi} + \left(ilde{m{E}}^\oplus
ight)^* e^{-iarphi}
ight) \hspace{0.5cm} \mathbf{H} \hspace{0.5cm} m{B} = rac{i}{2} \left(ilde{m{B}}^\oplus e^{iarphi} - \left(ilde{m{B}}^\oplus
ight)^* e^{-iarphi}
ight).$$

Сравнивая их с (28), заключаем, что с помощью комплексных матриц $\mathcal{F}_{in}^{\oplus}$ и $\mathcal{F}_{in}^{\ominus}$ было бы удобно определить постоянные комплексные вектора $\tilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{\boldsymbol{E}}^{\oplus}$ и $\tilde{\boldsymbol{B}} = -\tilde{\boldsymbol{B}}^{\oplus}$. Сокращённая форма записи комплексных матриц

$$\mathcal{F}_{in}^{\oplus} = \left(ilde{m{E}}; - ilde{m{B}}
ight)$$
 и $\mathcal{F}_{in}^{\ominus} = \left(ilde{m{E}}^*; ilde{m{B}}^*
ight)$

явно демонстрирует выполнение первых двух равенств в соотношениях (29c). Таким образом, действительный вектор электрического поля E может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\boldsymbol{E}} e^{i\varphi} + \tilde{\boldsymbol{E}}^* e^{-i\varphi} \right); \qquad \tilde{\boldsymbol{E}} = \begin{cases} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{cases} = \begin{cases} E_1^0 e^{i\varphi_{E1}} \\ E_2^0 e^{i\varphi_{E2}} \\ E_3^0 e^{i\varphi_{E3}} \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{F}_{14}^{\oplus} \\ \mathcal{F}_{24}^{\oplus} \\ \mathcal{F}_{34}^{\oplus} \end{cases}, \quad (30a)$$

а для псевдовектора \boldsymbol{B} получаем выражение

$$\boldsymbol{B} = \frac{i}{2} \left(-\tilde{\boldsymbol{B}} e^{i\varphi} + \tilde{\boldsymbol{B}}^* e^{-i\varphi} \right); \qquad \tilde{\boldsymbol{B}}^* = \begin{cases} \tilde{B}_1^* \\ \tilde{B}_2^* \\ \tilde{B}_3^* \end{cases} = \begin{cases} B_1^0 e^{-i\varphi_{B1}} \\ B_2^0 e^{-i\varphi_{B2}} \\ B_3^0 e^{-i\varphi_{B3}} \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{F}_{23}^{\ominus} \\ \mathcal{F}_{31}^{\ominus} \\ \mathcal{F}_{12}^{\ominus} \end{cases}. \quad (30b)$$

В определениях (30a) и (30b) для действительных величины E^0_{α} и B^0_{α} выполняются неравенства

$$E_{\alpha}^{0} \geqslant 0;$$
 $B_{\alpha}^{0} \geqslant 0;$ $(E_{\alpha}^{0})^{2} > 0;$ $(B_{\alpha}^{0})^{2} > 0.$ (30c)

Применяя к $\tilde{\boldsymbol{B}}^*$ операцию комплексного сопряжения, получим выражения

$$\tilde{\boldsymbol{B}}^{*} = \begin{cases} B_{1}^{0}e^{-i\varphi_{B1}} \\ B_{2}^{0}e^{-i\varphi_{B2}} \\ B_{3}^{0}e^{-i\varphi_{B3}} \end{cases} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{B}} = \begin{cases} B_{1}^{0}e^{i\varphi_{B1}} \\ B_{2}^{0}e^{i\varphi_{B2}} \\ B_{3}^{0}e^{i\varphi_{B3}} \end{cases} = - \begin{cases} -B_{1}^{0}e^{i\varphi_{B1}} \\ -B_{2}^{0}e^{i\varphi_{B2}} \\ -B_{3}^{0}e^{i\varphi_{B3}} \end{cases} = - \begin{cases} \mathcal{F}_{32}^{\ominus} \\ \mathcal{F}_{13}^{\ominus} \\ \mathcal{F}_{21}^{\ominus} \end{cases},$$

согласующиеся с определениями матриц $\mathcal{F}_{in}^{\oplus}$ и $\mathcal{F}_{in}^{\ominus}$. Компоненты комплексных матриц $\mathcal{F}_{in}^{\oplus}$ и $\mathcal{F}_{in}^{\ominus}$ удовлетворяют соотношениям, аналогичным (15) и (15'). Перепишем, например второе уравнение (15) с учётом (29b), в форме

$$0 = F_{in}K_n = \frac{i}{2} \left(\mathcal{F}_{in}^{\oplus} K_n e^{i\varphi} + \mathcal{F}_{in}^{\ominus} K_n e^{-i\varphi} \right) \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}_{in}^{\oplus} K_n = -\mathcal{F}_{in}^{\ominus} K_n e^{-2i\varphi}.$$

Для того чтобы уравнение выполнялось во всей пространственно-временной области, в которой существует электромагнитная волна, то есть при любых возможных значениях фазы волны φ , обе постоянные комплексные величины в правой и в левой частях уравнения должны равняться нулю $\mathcal{F}_{in}^{\oplus}K_n=0$ и $\mathcal{F}_{in}^{\ominus}K_{n}=0$. Аналогом соотношений (15'), для например компонент комплексной матрицы $\mathcal{F}_{in}^{\oplus}$ будут являться равенства

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\oplus} K_{\gamma} + \mathcal{F}_{\beta\gamma}^{\oplus} K_{\alpha} + \mathcal{F}_{\gamma\alpha}^{\oplus} K_{\beta} = 0; \qquad \qquad \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\oplus} K_{\beta} + \mathcal{F}_{\alpha4}^{\oplus} K_{4} = 0; \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\oplus} K_{4} + \mathcal{F}_{\beta4}^{\oplus} K_{\alpha} + \mathcal{F}_{4\alpha}^{\oplus} K_{\beta} = 0; \qquad \qquad \mathcal{F}_{4\alpha}^{\oplus} K_{\alpha} = 0,$$

которые запишем с использованием постоянных комплексных векторов:

$$\left(\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{n_k}\right) = 0;$$
 $\left(\tilde{\boldsymbol{B}}^*\boldsymbol{n_k}\right) = 0;$ (31a)

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = i \left[\boldsymbol{n_k} \times \tilde{\boldsymbol{E}} \right]; \qquad \qquad \tilde{\boldsymbol{B}}^* = -i \left[\boldsymbol{n_k} \times \tilde{\boldsymbol{E}}^* \right]; \qquad (31b)$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = -i \left[\tilde{\boldsymbol{B}} \times \boldsymbol{n_k} \right]; \qquad \tilde{\boldsymbol{E}}^* = i \left[\tilde{\boldsymbol{B}}^* \times \boldsymbol{n_k} \right]; \qquad (31c)$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{n_k}\right) = 0; \qquad \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^*\boldsymbol{n_k}\right) = 0.$$
 (31d)

Обращаясь с постоянными комплексными векторами так же как с обычными векторами в трёхмерном евклидовом пространстве и пользуясь формулами трёхмерного векторного анализа, получим аналоги свойств (27e) и (27f):

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^2 = -\tilde{\boldsymbol{B}}^2; \qquad \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2 = -\left(\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right)^2; \qquad (31e)$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}\right) = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^*\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right) = 0.$$
 (31f)

2.2 Классификация решений, описывающих поле волны

Используя определение (30а), найдём значение квадрата вектора электрического поля, выраженное через комплексные величины,

$$\boldsymbol{E}^{2} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^{*} \right) + \frac{1}{4} \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^{2} e^{2i\varphi} + \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^{*} \right)^{2} e^{-2i\varphi} \right). \tag{32a}$$

Содержащуюся в (32а), комплексную величину

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^{2} = \tilde{E}_{\alpha}^{2} = (E_{1}^{0})^{2} e^{2i\varphi_{E1}} + (E_{2}^{0})^{2} e^{2i\varphi_{E2}} + (E_{3}^{0})^{2} e^{2i\varphi_{E3}},$$

как и любое комплексное число, всегда можно представить в форме

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^2 = \left| \tilde{\boldsymbol{E}}^2 \right| e^{i\delta},$$
 где $\left| \tilde{\boldsymbol{E}}^2 \right| \geqslant 0.$ (33a)

Тогда, второе и третье слагаемые правой части часть формулы (32a) преобразовываются к виду

$$\frac{1}{4} \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^2 e^{2i\varphi} + \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^* \right)^2 e^{-2i\varphi} \right) = \frac{1}{4} \left| \tilde{\boldsymbol{E}}^2 \right| \left(e^{2i\varphi + i\delta} + e^{-2i\varphi - i\delta} \right) = \frac{1}{2} \left| \tilde{\boldsymbol{E}}^2 \right| \cos \left(2\varphi + \delta \right).$$

Квадрат вектора электрического поля является суммой постоянного положительного слагаемого и осциллирующего слагаемого

$$m{E}^2 = rac{1}{2} \left(\left(\tilde{m{E}} \tilde{m{E}}^* \right) + \left| \tilde{m{E}}^2 \right| \cos \left(2\omega t - 2 m{k} m{x} + \delta \right) \right).$$

Поскольку квадрат действительного вектора неотрицателен, амплитуда колебаний осциллирующей части не должна превышать величину постоянной составляющей

$$\left|\tilde{\boldsymbol{E}}^{2}\right|\leqslant\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}\right)$$
 и $\left|\tilde{\boldsymbol{E}}^{2}\right|\geqslant0;$ $\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}\right)>0.$

Второе неравенство содержится в (33a), а третье следует из (30a) и (30c). Определим коэффициент

$$\gamma = \frac{\left|\tilde{\boldsymbol{E}}^2\right|}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}; \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1, \tag{33b}$$

областью значений которого является промежуток от нуля до единицы. Уравнение (32a) может быть тогда переписано в виде

$$\mathbf{E}^{2} = \frac{\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^{*}}{2} \left(1 + \gamma \cos \left(2\varphi + \delta \right) \right), \tag{32b}$$

а из (33а) и (33b) следует выражение

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^2 = \gamma e^{i\delta} \left(\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^* \right),$$
 где $0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$ (33c)

В записи свойства (27f) используем определения (30a) и (30b)

$$0 = \mathbf{E}\mathbf{B} = \frac{i}{4} \left(-\left(\tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{B}} \right) e^{2i\varphi} + \left(\tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{B}}^* \right) - \left(\tilde{\mathbf{E}}^* \tilde{\mathbf{B}} \right) + \left(\tilde{\mathbf{E}}^* \tilde{\mathbf{B}}^* \right) e^{-2i\varphi} \right).$$

и, учитывая (31f), получим равенство

$$\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^{*}\right) = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}\tilde{\boldsymbol{B}}\right) = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^{*}\right)^{*},$$
 (34a)

из которого следует, что скалярное произведение $ilde{m{E}} ilde{m{B}}^*$ является действительной величиной. Векторное произведения комплексного вектора на комплексносопряжённый ему вектор, как следует из (31), имеет вид

$$\left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \tilde{\boldsymbol{E}}^*\right] = \left[\tilde{\boldsymbol{B}} \times \tilde{\boldsymbol{B}}^*\right]; \qquad \left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \tilde{\boldsymbol{E}}^*\right] = -i\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right)\boldsymbol{n_k}. \tag{34b}$$

Скалярное умножение второго уравнения (34b) на вектор n_k позволяет

$$\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right) = i\left(\boldsymbol{n_k}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right]\right) = i\left(\boldsymbol{n_k}\left[\tilde{\boldsymbol{B}}\times\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right]\right)$$
 (34c)

выразить значение действительного скалярного произведения (34a) через смешанное произведение.

Возводя в квадрат второе уравнение (34b), получим выражение

$$\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right)^2 = -\left[\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right]^2 = -\left(\tilde{\boldsymbol{E}}^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2 - \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2\right) = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2 - \tilde{\boldsymbol{E}}^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2,$$

которое можно переписать в форме

$$\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right)^2 + \tilde{\boldsymbol{E}}^2 \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2 = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2. \tag{35}$$

В правой части этого уравнения находится действительная положительная величина. Левая же часть является суммой действительных неотрицательных величин. Отсюда следует, что скалярные произведения $ilde{m E} ilde{m B}^*$ и $ilde{m E}^2$ не могут одновременно принимать нулевые значения. Поэтому, все возможные решения, описывающие плоские монохроматические волны можно классифицировать по признаку равенства нулю этих скалярных произведений. В результате получим три возможные области:

(I)
$$\tilde{\boldsymbol{E}}^2 = 0; \qquad \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right) \neq 0; \qquad \gamma = 0;$$

(II)
$$\tilde{\boldsymbol{E}}^2 \neq 0; \qquad \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right) = 0; \qquad \gamma = 1;$$

(I)
$$\tilde{\boldsymbol{E}}^2 = 0;$$
 $\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right) \neq 0;$ $\gamma = 0;$ (II) $\tilde{\boldsymbol{E}}^2 \neq 0;$ $\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right) = 0;$ $\gamma = 1;$ (III) $\tilde{\boldsymbol{E}}^2 \neq 0;$ $\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right) \neq 0;$ $0 < \gamma < 1.$

В классификацию добавлено значение величины γ , определенной ранее формулой (33b). Для первой области её значение очевидно. Из (33c) следует равенство

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^2 \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^* \right)^2 = \gamma^2 e^{i\delta} e^{-i\delta} \left(\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^* \right)^2 = \gamma^2 \left(\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^* \right)^2.$$

Тогда, представив уравнение (35) в форме

$$\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right)^2 + \gamma^2 \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2 = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^*\right)^2 = \left(1 - \gamma^2\right) \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right)^2, \tag{35'}$$

убеждаемся в том, что γ равна единице во второй области, а в третьей области равна единице быть не может. В третьей области γ не может принимать нулевое значение, поскольку из этого следовало бы, что $\left| \tilde{\boldsymbol{E}}^2 \right| = 0$ и тогда $\tilde{\boldsymbol{E}}^2 = 0$.

Свойства постоянных комплексных векторов, появление которых явилось следствием разложения компонент тензора электромагнитного поля на сумму комплексных экспонент, оказываются аналогичны свойствам комплексных векторов, определяемых при использовании способа описания электромагнитных волн [6], называемого автором ковариантным описанием поляризации плоских волн. Подробное описание этих свойств, приведённое в \$2 книги [6], можно сравнить с формулами (31) и (34).

Из (30a) видно, что вектор напряжённости электрического поля плоской монохроматической волны принимает значения, равные действительной и мнимой частям постоянного комплексного вектора $\tilde{\boldsymbol{E}}$, при условиях

$$m{E}\left(m{x},t
ight)=\mathrm{Re}\left\{ ilde{m{E}}
ight\}$$
 при $arphi=0$ и $m{E}\left(m{x},t
ight)=\mathrm{Im}\left\{ ilde{m{E}}
ight\}$ при $arphi=rac{3\pi}{2}.$

Действительная часть ${\rm Re}\left\{ ilde{m E} \right\}$ комплексного вектора ${m E}$ оказывается трёхмерным вектором, совпадающим с вектором напряжённости электрического поля ${m E}\left({m x},t\right)$ в начале координат в нулевой момент времени, поскольку одним из решений уравнения ${m \varphi}=0$ является точка пространственно-временно́го континуума ${m x}=0,\,t=0.$ В той же самой точке начала координат ${m x}=0$ при условии ${m \varphi}=3\,\pi/2$, имеем

$$arphi = \omega t - \boldsymbol{k} \boldsymbol{x} = rac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega t = rac{3\pi}{2}, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = rac{3\pi}{2\omega} = rac{3\pi}{2rac{2\pi}{T}} = rac{3T}{4}.$$

И, следовательно, мнимая часть $\operatorname{Im}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\right\}$ является трёхмерным вектором, совпадающим с $\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{x},t\right)$ через три четверти периода после нулевого момента времени в точке начала координат $(\boldsymbol{x}=0,\,t=3\,T/4)$. Поскольку трёхмерный

вектор напряжённости электрического поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ является полярным вектором, то действительная $\operatorname{Re}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\right\}$ и мнимая $\operatorname{Im}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\right\}$ части постоянного комплексного вектора должны считаться постоянными полярными векторами в трёхмерном пространстве.

2.3 Постоянный комплексный вектор напряжённости электрического поля

Воспользовавшись введённой в (33a) величиной δ и скалярной действительной неотрицательной величиной $\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*$, представим комплексный вектор $\tilde{\boldsymbol{E}}$ в виде

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = e^{i\delta/2} \sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*} \ \tilde{\boldsymbol{\mathfrak{a}}},$$

где безразмерный постоянный комплексный вектор $\tilde{\mathbf{a}}$, пропорциональный $\tilde{m{E}}$, имеет значение

$$\tilde{\mathbf{a}} = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{a}} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \tilde{\mathbf{a}} \right\} = \mathbf{a} + i \mathbf{b} = e^{-i\delta/2} \frac{\tilde{\mathbf{E}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^*}}.$$

Содержащиеся здесь векторы

$$\operatorname{Re}\left\{\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{a}}}\right\} = \boldsymbol{\mathfrak{a}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}} \left(\operatorname{Re}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\right\}\cos\delta/2 + \operatorname{Im}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\right\}\sin\delta/2\right);$$

$$\operatorname{Im}\left\{\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{a}}}\right\} = \boldsymbol{\mathfrak{b}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}} \left(\operatorname{Im}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\right\}\cos\delta/2 - \operatorname{Re}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\right\}\sin\delta/2\right)$$

являются постоянными полярными векторами в трёхмерном пространстве. Квадрат безразмерного постоянного комплексного вектора $\tilde{\mathfrak{a}}$ равен неотрицательному действительному числу

$$\tilde{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 + 2i\left(\mathbf{a}\mathbf{b}\right) = \frac{\tilde{\boldsymbol{E}}^2 e^{-i\delta}}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*} = \frac{\gamma e^{i\delta}\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^* e^{-i\delta}}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*} = \gamma,$$

где использована формула (33c). Векторы \mathfrak{a} и \mathfrak{b} взаимно перпендикулярны, поскольку их скалярное произведение равно нулю.

Представление постоянного комплексного вектора электрического поля

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*} e^{i\delta/2}\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*} e^{i\delta/2} (\boldsymbol{\mathfrak{a}} + i\boldsymbol{\mathfrak{b}}),$$
 (36) где $(\boldsymbol{\mathfrak{a}}\boldsymbol{\mathfrak{b}}) = (\boldsymbol{\mathfrak{a}}\boldsymbol{n_k}) = (\boldsymbol{\mathfrak{b}}\boldsymbol{n_k}) = 0;$ $\boldsymbol{\mathfrak{a}}^2 + \boldsymbol{\mathfrak{b}}^2 = 1;$ $\boldsymbol{\mathfrak{a}}^2 - \boldsymbol{\mathfrak{b}}^2 = \gamma,$

с точностью до обозначений совпадает с представлением, получаемым при рассмотрении монохроматической плоской волны, например в \$48 учебника [3]. Определив единичные векторы

$$m{n}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}/\mathfrak{a}$$
 и $m{n}_{\mathfrak{b}} = m{b}/\mathfrak{b},$ где $\mathfrak{a} = \sqrt{m{a}^2}$ и $\mathfrak{b} = \sqrt{m{b}^2},$

запишем вектор напряжённости электрического поля, согласно (30a), в виде

$$\boldsymbol{E} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*} \left(\mathfrak{a} \cos \left(\varphi + \delta/2 \right) \boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} - \mathfrak{b} \sin \left(\varphi + \delta/2 \right) \boldsymbol{n}_{\mathfrak{b}} \right). \tag{36'}$$

В двумерной декартовой системе координат с ортами $n_{\mathfrak{a}}$ и $n_{\mathfrak{b}}$, координаты вектора напряжённости электрического поля будут иметь значения

$$E_{\mathfrak{a}} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*} \, \mathfrak{a} \cos \left(\varphi + \delta/2 \right)$$
 и $E_{\mathfrak{b}} = -\sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*} \, \mathfrak{b} \sin \left(\varphi + \delta/2 \right),$

удовлетворяющие соотношению

$$\frac{E_{\mathbf{a}}^{2}}{\mathbf{a}^{2}} + \frac{E_{\mathbf{b}}^{2}}{\mathbf{b}^{2}} = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}\right) = \left(\operatorname{Re}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\right\}\right)^{2} + \left(\operatorname{Im}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\right\}\right)^{2},$$

являющемуся каноническим уравнением эллипса, который с течением времени описывает конец вектора напряжённости электрического поля в любой фиксированной точке трёхмерного пространства. Содержащиеся в (36') величины большой $\mathfrak a$ и малой $\mathfrak b$ полуосей эллипса поляризации

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = 1$$
 и $\gamma = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = \frac{1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}{1 + \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}},$

могут быть выражены через параметр эллиптичности γ

$$\mathfrak{a} = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$$
 и $\mathfrak{b} = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}$

или эксцентриситет ϵ эллипса поляризации, связанный с $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ и γ формулами

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}} = \sqrt{1 - \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{1 + \gamma}}.$$

С геометрической точки зрения длины большой $2\mathfrak{a}$ и малой $2\mathfrak{b}$ осей эллипса являются длинами отрезков, отсекаемых эллипсом на его осях симметрии, задаваемых векторами $n_{\mathfrak{a}}$ и $n_{\mathfrak{b}}$. В предельном случае $\epsilon=0$, из чего следует, что $\gamma=0$ и $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}=1$, эллипс вырождается в окружность. Для предельного случая $\epsilon=1$, и соответственно $\gamma=1$ и $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}=0$, эллипс вырождается в отрезок. Таким

образом, приведённая ранее классификация возможных решений будет соответствовать различным видам поляризации волны, отвечающим различным траекториям, описываемым концом вектора напряжённости электрического поля в фиксированной точке трёхмерного пространства:

Круговая поляризация,
$$\epsilon=0$$
: $\tilde{\boldsymbol{E}}^2=0, \quad \left[\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right]\neq 0, \quad \gamma=0;$ Линейная поляризация, $\epsilon=1$: $\tilde{\boldsymbol{E}}^2\neq 0, \quad \left[\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right]=0, \quad \gamma=1;$ Эллиптическая поляризация, $0<\epsilon<1$: $\tilde{\boldsymbol{E}}^2\neq 0, \quad \left[\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right]\neq 0, \quad 0<\gamma<1.$

При описании волны эллиптической поляризации (36), (36') используется тройка взаимно перпендикулярных единичных безразмерных векторов n_k , $n_{\mathfrak{a}}$ и $n_{\mathfrak{b}}$. Выразим один из них через векторное произведение двух других с помощью формулы

$$n_{\mathfrak{b}} = p_{\pm} [n_{\mathfrak{a}} \times n_k].$$

Векторное произведение двух полярных векторов является аксиальным вектором или псевдовектором, поэтому для того, что бы в обеих частях предыдущего равенства содержались полярные векторы, необходимо использовать величину, обладающую псевдоскалярными свойствами. Псевдоскаляр p_{\pm} может принимать значения равные единице или минус единице, в чём можно убедиться, например, возводя в квадрат рассматриваемое векторное равенство. Тогда из (36) получим представление постоянного комплексного вектора электрического поля

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} e^{i\delta/2} \left(\sqrt{1+\gamma} \, \boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} + i\sqrt{1-\gamma} \, p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} \times \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} \right] \right), \tag{37}$$

которому, согласно (30а), соответствует представление полярного вектора напряжённости электрического поля

$$\boldsymbol{E} = \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \left(\cos \left(\varphi + \delta/2 \right) \sqrt{1 + \gamma} \, \boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} - \sin \left(\varphi + \delta/2 \right) \sqrt{1 - \gamma} \, p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} \times \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} \right] \right). \quad (37a)$$

Псевдовектор \boldsymbol{B} можно найти пользуясь свойством (27b), либо с помощью выражения (30b), в котором $\tilde{\boldsymbol{B}}$ определяется через (31b) и (37).

Анализируя следующую из (37a) зависимость вектора напряжённости электрического поля E от времени в фиксированной точке пространства можно заключить, что для случая $\gamma \neq 1$ и $p_{\pm} = 1$ вращение вектора E происходит против часовой стрелки, если рассматривается наблюдателем, смотрящим навстречу световому лучу, или со стороны положительного направления движения. В оптике принято считать, что этот случай соответствует левополяризо-

ванному свету [6, 7]. Следовательно, знак двузначной действительной псевдоскалярной величины p_{\pm} определяет, для волны круговой или эллиптической поляризации $\gamma \neq 1$, правую или левую поляризацию этой волны:

$$p_{\pm} = -1$$
— правая поляризация; $p_{\pm} = 1$ — левая поляризация.

Из (37) и (34с) следуют псевдовекторное и псевдоскалярное равенства

$$\left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \tilde{\boldsymbol{E}}^*\right] = ip_{\pm} \sqrt{1 - \gamma^2} \left(\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*\right) \boldsymbol{n_k}; \tag{38a}$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^{*}\right) = -p_{\pm}\sqrt{1-\gamma^{2}}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}\right),$$
 (38b)

которые позволяют определить связь знака двузначной действительной псевдоскалярной величины p_{\pm} и знака смешанного произведения, содержащего $\boldsymbol{n_k},\, \tilde{\boldsymbol{E}}$ и $\tilde{\boldsymbol{E}}^*$:

$$\operatorname{sign} \{p_{\pm}\} = -\operatorname{sign} \left\{ i \left(\boldsymbol{n_k} \left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \tilde{\boldsymbol{E}}^* \right] \right) \right\}.$$

В силу этого, для левополяризованной и правополяризованной волн выполняются неравенства

$$i\left(m{n_k}\left[ilde{m{E}} imes ilde{m{E}}^*
ight]
ight)>0$$
— правая; $i\left(m{n_k}\left[ilde{m{E}} imes ilde{m{E}}^*
ight]
ight)<0$ — левая,

совпадающие с приведёнными в [6].

2.4 Двузначная псевдоскалярная величина как совершенно антисимметричный единичный тензор третьего ранга

Рассматривая волну круговой поляризации $\gamma=0,$ составим, используя (38a), выражение

$$\left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \tilde{\boldsymbol{E}}^*\right]\right] = i p_{\pm} \left(\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*\right) \left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \boldsymbol{n_k}\right],$$

левую часть которого преобразуем с учётом равенства $\tilde{\boldsymbol{E}}^2=0$ для волны с круговой поляризацией

$$\left[ilde{m{E}} imes\left[ilde{m{E}} imes ilde{m{E}}^*
ight]
ight] = \left(ilde{m{E}} ilde{m{E}}^*
ight) ilde{m{E}} - \left(ilde{m{E}} ilde{m{E}}
ight) ilde{m{E}}^* = \left(ilde{m{E}} ilde{m{E}}^*
ight) ilde{m{E}}.$$

Сокращая скалярное произведение $\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*,$ находим соотношения

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = ip_{\pm} \left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \boldsymbol{n_k} \right] \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{\boldsymbol{E}} = p_{\pm} \tilde{\boldsymbol{B}},$$
 (39)

где второе равенство следует из (31b). При рассмотрении свойств комплексных векторов, характеризующих волну круговой поляризации, в [6] используются выражения, аналогичные (39), но не содержащие двузначной псевдоскалярной величины p_+ (ур.(2.52) в [6]).

Второе уравнение (39) может быть записано в виде $\tilde{\boldsymbol{B}} = p_{\pm} \tilde{\boldsymbol{E}}$. Составляющие постоянных комплексных трёхмерных вектора и псевдовектора, согласно определениями (30), являются в то же время компонентами антисимметричной комплексной матрицы $\mathcal{F}_{in}^{\oplus}$

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathcal{F}_{14}^{\oplus} \\ \mathcal{F}_{24}^{\oplus} \\ \mathcal{F}_{34}^{\oplus} \end{matrix} \right\}, \qquad \quad \tilde{\boldsymbol{B}} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathcal{F}_{23}^{\oplus} \\ \mathcal{F}_{31}^{\oplus} \\ \mathcal{F}_{12}^{\oplus} \end{matrix} \right\},$$

Условие $\tilde{\boldsymbol{B}}=p_{\pm}\tilde{\boldsymbol{E}}$, для случая, например $p_{\pm}=+1$, будет эквивалентно равенству компонент

$$\mathcal{F}_{23}^{\oplus}=\mathcal{F}_{14}^{\oplus}; \qquad \qquad \mathcal{F}_{31}^{\oplus}=\mathcal{F}_{24}^{\oplus}; \qquad \qquad \mathcal{F}_{12}^{\oplus}=\mathcal{F}_{34}^{\oplus}.$$

Эти три равенства могут рассматриваться как компоненты индексной записи

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\oplus} = e_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{F}_{\gamma4}^{\oplus},$$

в которой $e_{\alpha\beta\gamma}$ — трёхиндексный символ Леви—Чивита или совершенно антисимметричный единичный тензор третьего ранга. Его компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1 . Ввиду своей антисимметричности этот тензор принципиально двузначен, то есть, как $e_{\alpha\beta\gamma}$, так и $-e_{\alpha\beta\gamma}$ являются совершенно антисимметричными единичными тензорами третьего ранга. Выбор между ними можно осуществить, задав одну единственную не равную нулю компоненту этого тензора, например e_{123} . Рассматриваемому случаю левой круговой поляризации $p_{\pm}=+1$, соответствует выбор $e_{123}=+1$. В результате, оказывается, что условием круговой поляризации можно записать в индексной форме

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\oplus}=e_{lphaeta\gamma}^{\pm}\mathcal{F}_{\gamma4}^{\oplus}$$
 или $\mathcal{F}_{lpha4}^{\oplus}=rac{1}{2}\,e_{lphaeta\gamma}^{\pm}\mathcal{F}_{eta\gamma}^{\oplus},$

а каждому из двух совершенно антисимметричных единичных тензоров третьего ранга соответствует случай правой или левой поляризации волны:

$$e^-_{\alpha\beta\gamma}$$
— правая поляризация; $e^+_{\alpha\beta\gamma}$ — левая поляризация.

Здесь для двух совершенно антисимметричных единичных тензоров третьего ранга введены обозначения

$$e_{\alpha\beta\gamma}^{-} = -e_{\alpha\beta\gamma}^{+};$$
 $e_{123}^{+} = +1;$ $e_{123}^{-} = -1.$

Совершенно антисимметричный единичный тензор может использоваться для индексной записи составляющих вектора, все составляющие которого равны составляющим псевдовектора, являющегося векторным произведением двух векторов. Выбор знака совершенно антисимметричного единичного тензора в определении векторного произведения связан с выбором между правой и левой системами координат.

Рассматриваемый здесь двузначный псевдоскалярный коэффициент p_{\pm} или эквивалентный ему совершенно антисимметричный единичный тензор третьего ранга $e_{\alpha\beta\gamma}^{\pm}$ не имеет отношения к выбору правой или левой системы координат или выбору знака векторного произведения. Знак этих величин определяется лишь физическими свойствами плоской монохроматической электромагнитной волны круговой или эллиптической поляризации, а именно, направлением вращения (по часовой стрелке или против) вектора электрического поля в фиксированной точке пространства.

2.5 Ещё одно представление для волны эллиптической поляризации

Запишем представление постоянного комплексного вектора напряжённости электрического поля (36) или (37) в форме

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*} \frac{e^{i\delta/2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2}} \left(\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} + ip_{\pm} \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \left[\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} \times \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} \right] \right)$$

и определим новый единичный трёхмерный вектор

$$m{n}_{\eta} = rac{1}{\sqrt{2}} \left(m{n}_{\mathfrak{a}} + p_{\pm} \left[m{n}_{\mathfrak{a}} imes m{n}_{m{k}}
ight]
ight).$$

По построению, величина угла между этим единичным трёхмерным вектором, лежащим в плоскости перпендикулярной направлению распространения волны, и вектором n_k равна 45° или $\pi/4$ радиан. Содержащиеся в исходном представлении полярные единичные векторы можно выразить через n_η и n_k с помощью равенств

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{n}_{\eta} - p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\eta} \times \boldsymbol{n}_{k} \right] \right); \\ p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} \times \boldsymbol{n}_{k} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{n}_{\eta} + p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\eta} \times \boldsymbol{n}_{k} \right] \right). \end{aligned}$$

Из них следует формула для комплексного вектора напряжённости

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*} \frac{e^{i\delta/2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 + i\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2}} \boldsymbol{n}_{\eta} - \frac{1 - i\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2}} p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\eta} \times \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} \right] \right).$$

Определив новую комплексную величину, модуль которой равен единице

$$e^{i\eta} = \frac{1 + i\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2}},$$

перепишем предыдущую формулу в виде выражения

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} e^{i\delta/2} \left(e^{i\eta} \boldsymbol{n}_{\eta} - e^{-i\eta} p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\eta} \times \boldsymbol{n}_{k} \right] \right), \tag{40}$$

которое можно считать ещё одной формой записи постоянного комплексного вектора напряжённости электрического поля для волны с эллиптической поляризацией. Уравнению (40), согласно (30a), соответствует представление полярного вектора напряжённости электрического поля

$$\boldsymbol{E} = \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \left(\cos \left(\varphi + \delta/2 + \eta \right) \, \boldsymbol{n}_{\eta} + \cos \left(\varphi + \delta/2 - \eta \right) \, p_{\pm} \, \left[\boldsymbol{n}_{\eta} \times \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} \right] \right), \quad (40a)$$

из которого следует возможность разложения волны эллиптической поляризации на сумму двух волн линейной поляризации, имеющих одинаковую интенсивность. Угол между взаимно перпендикулярными направлениями, вдоль которого происходят колебания векторов электрического поля этих волн, и направлениями осей эллипса поляризации раскладываемой волны составляет сорок пять градусов. Сдвиг фаз 2η между этими двумя волнами линейной поляризации связан простыми тригонометрическими формулами с величиной γ , эксцентриситетом ϵ и отношением величин большой и малой полуосей $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ эллипса поляризации

$$\cos 2\eta = \gamma = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = \frac{1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}{1 + \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}} = \frac{\epsilon^2}{2 - \epsilon^2}; \qquad \operatorname{tg} \eta = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \sqrt{\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}} = \sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

С учётом связи между 2η и $\gamma,$ можно записать аналогичные (38) формулы

$$\left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \tilde{\boldsymbol{E}}^*\right] = ip_{\pm} \sin 2\eta \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right) \boldsymbol{n_k}; \tag{41a}$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{B}}^{*}\right) = -p_{\pm}\sin 2\eta \left(\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}\right). \tag{41b}$$

2.6 Векторный потенциал и производные по фазе волны

Считая (37а) векторной функцию одной переменной φ , рассмотрим векторную величину, являющуюся производной от вектора напряжённости электрического поля по фазе волны

$$\frac{d\mathbf{E}}{d\varphi} = \dot{\mathbf{E}} = \tag{42}$$

$$= \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \left(-\sin\left(\varphi + \delta/2\right) \sqrt{1+\gamma} \, \boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} - \cos\left(\varphi + \delta/2\right) \sqrt{1-\gamma} \, p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} \times \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} \right] \right).$$

Пользуясь правилами обращения с дифференциальными операторами легко можно получить соотношение $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\left(c\dot{\mathbf{E}}/\omega\right)$, где псевдовектор \mathbf{B} определяется из (37a) и (27b). Из сравнения этого соотношения с (8b) следует, что для плоской монохроматической электромагнитной волны возможен выбор векторного потенциала \mathbf{A} в форме

$$\mathbf{A} = \frac{c}{\omega} \,\dot{\mathbf{E}}.\tag{43}$$

Квадрат трёхмерного вектора $\dot{\boldsymbol{E}}$, величина которого, как следует из (42), имеет значение

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{2} = \frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}{2} \left(1 - \gamma \cos\left(2\varphi + \delta\right) \right) \tag{44}$$

отличается от величины E^2 , определяемой равенством (32b), только знаком второго слагаемого.

Аналогично (42) определим производную от тензора электромагнитного поля по фазе волны \dot{F}_{in} , значение которой следует из (29b). Пусть нам известны значения компонент тензоров F_{in} и \dot{F}_{in} в некоей фиксированной точке $X_l = X_l^0$ пространственно-временно́го континуума, определяемые формулами

$$F_{in}\left(X_{l}^{0}\right) \equiv F_{in}^{0} = \frac{i}{2} \left(\mathcal{F}_{in}^{\oplus} e^{i\varphi_{0}} + \mathcal{F}_{in}^{\ominus} e^{-i\varphi_{0}} \right);$$

$$\dot{F}_{in}\left(X_{l}^{0}\right) \equiv \dot{F}_{in}^{0} = -\frac{1}{2} \left(\mathcal{F}_{in}^{\oplus} e^{i\varphi_{0}} - \mathcal{F}_{in}^{\ominus} e^{-i\varphi_{0}} \right),$$

в которых $\varphi_0 = K_p X_p^0$. Тензор электромагнитного поля F_{in} в произвольной точке четырёхмерного континуума запишем в виде

$$F_{in} = \frac{i}{2} \left(\mathcal{F}_{in}^{\oplus} e^{i\varphi} + \mathcal{F}_{in}^{\ominus} e^{-i\varphi} \right) = \frac{i}{2} \left(\mathcal{F}_{in}^{\oplus} e^{i\Phi} e^{i\varphi_0} + \mathcal{F}_{in}^{\ominus} e^{-i\Phi} e^{-i\varphi_0} \right),$$

где введено обозначение $\Phi = \varphi - \varphi_0$. Преобразовывая это выражение, выразим значение тензора электромагнитного поля через значение тензоров F_{in} и \dot{F}_{in} в некоей фиксированной точке $X_l = X_l^0$ пространственно-временно́го континуума и разность фаз Φ между этими точками

$$F_{in} = F_{in}^0 \cos \Phi + \dot{F}_{in}^0 \sin \Phi. \tag{45a}$$

Аналогично, для значения производной от тензора электромагнитного поля по фазе получим формулу

$$\dot{F}_{in} = \dot{F}_{in}^0 \cos \Phi - F_{in}^0 \sin \Phi. \tag{45b}$$

2.7 Тензор энергии-импульса

Общее выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля, компоненты которого имеют размерность плотности энергии, в случае плоской монохроматической волны, для которой квадрат тензора электромагнитного поля равен нулю (27e), имеет вид

$$T_{im} = (1/4\pi) F_{in} F_{nm}$$
.

Записывая компоненты $T_{\alpha\beta}, T_{\alpha4}$ и T_{44} и преобразовывая их с помощью свойств (27b) и (27d), находим выражение для симметричного тензора

$$F_{in}F_{nm} = 4\pi T_{im} = 4\pi T_{44} \frac{K_i K_m}{K_4^2} = -F_{\gamma 4}^2 \frac{K_i K_m}{K_4^2} = \mathbf{E}^2 \frac{K_i K_m}{K_4^2}.$$
 (46a)

Плотность потока энергии падающей волны, определяется вектором Пойнтинга S, составляющие S_{α} которого пропорциональны компонентам $T_{\alpha 4}$ тензора (46a). Векторная величина плотности потока энергии S, то есть количество энергии протекающей через единичную поверхность в единицу времени

$$T_{\alpha 4} = \frac{i}{c} S_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad S_{\alpha} = \frac{c}{i} T_{\alpha 4} = \frac{c}{i} T_{44} \frac{K_{\alpha}}{K_{4}} = c T_{44} \frac{k_{\alpha}}{k_{4}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = c \frac{\mathbf{E}^{2}}{4\pi} \mathbf{n}_{\mathbf{k}},$$

имеет размерность равную размерности отношения энергии к произведению квадрата расстояния на время. Будем обозначать операцию усреднения угловыми скобками, указывая при этом по какой переменной это усреднение производится. Усредняя предыдущее векторное уравнение, в котором E^2 определяется равенством (32b), по фазе волны φ , получим выражение

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{\varphi} = \frac{c \, \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{E}}^*}{8\pi} \mathbf{n_k} \qquad \Rightarrow \qquad I = \left| \langle \mathbf{S} \rangle_{\varphi} \right| = \frac{c \, \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{E}}^*}{8\pi}$$
 (47)

для абсолютной величины среднего значения плотности потока энергии плоской монохроматической волны, являющейся интенсивностью I этой волны.

Из антисимметричных тензоров \dot{F}_{in} построим для плоской монохроматической волны ещё один симметричный тензор

$$\dot{F}_{in}\dot{F}_{nm} = -\left(\dot{F}_{\gamma 4}\right)^2 \frac{K_i K_m}{K_4^2} = \dot{\boldsymbol{E}}^2 \frac{K_i K_m}{K_4^2},\tag{46b}$$

в котором $\dot{\boldsymbol{E}}^2$ определяется равенством (44). Вывод выражения (46b) полностью совпадает с выводом формулы (46a), с учётом того обстоятельства, что из свойств (27b) и (27d) следуют аналогичные свойства для антисимметричных тензоров \dot{F}_{in} .

3 Движение классического заряда в поле монохроматической плоской электромагнитной волны

Будем решать уравнения (19) и (17), зависящие от фазы волны в точке нахождения частицы

$$\dot{U}_i K_n - \dot{U}_n K_i = \frac{q}{mc^2} F_{in}$$
 $\qquad \dot{U}_i = \frac{q}{mc^2} \frac{1}{(K_p U_p)} F_{in} U_n,$ (48)

с учётом того, что для монохроматической плоской волны, как следует из (29b), выполняется равенство

$$\ddot{F}_{in} = -F_{in}. (49)$$

Дважды продифференцировав первое уравнение (48), используем (49) и, подставив F_{in} во второе соотношение (48), получим четырёхвекторное уравнение, содержащее только кинематические величины

$$\dot{U}_i + \ddot{U}_i - (\ddot{U}_n U_n) \frac{K_i}{(K_p U_p)} = 0.$$

Трижды продифференцировав тождество (3), найдём его следствие

$$(\ddot{U}_n U_n) = -\frac{3}{2} \frac{d}{d\varphi} \left(\dot{U}_n^2 \right),$$

которое позволяет записать левую часть четырёхвекторного уравнения в виде полной производной

$$\frac{d}{d\varphi}\left(U_i + \ddot{U}_i + \frac{3}{2}\dot{U}_n^2 \frac{K_i}{(K_p U_p)}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что при движении частицы в поле плоской монохроматической волны сохраняется четырёхвектор

$$U_i + \ddot{U}_i + \frac{3}{2} \dot{U}_n^2 \frac{K_i}{(K_p U_p)} = C_i,$$

квадрат которого имеет значение

$$C_i^2 = 1 + \dot{U}_n^2 + \ddot{U}_n^2$$

Вместо четырёхвектора \mathcal{C}_i будем использовать другой постоянный безразмерный четырёхвектор

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{C}_i - \frac{1}{2} \left(\dot{U}_n^2 + \ddot{U}_n^2 \right) \frac{K_i}{(K_p U_p)},$$

квадрат которого равен единице. В результате перехода от C_i к D_i , получим четырёхвекторное кинематическое уравнение

$$U_i + \ddot{U}_i + \left(\dot{U}_n^2 - \frac{1}{2}\ddot{U}_n^2\right) \frac{K_i}{(K_p U_p)} = \mathcal{D}_i,$$
 (50)

из которого, в частности, следует скалярное равенство $K_i\mathcal{D}_i = K_iU_i$.

Продифференцируем первое уравнение (48) и умножив это тензорное равенство на четырёхвектор \mathcal{D}_n , выразим величину \ddot{U}_i

$$\ddot{U}_i K_n - \ddot{U}_n K_i = \frac{q}{mc^2} \dot{F}_{in} \quad \Rightarrow \quad \ddot{U}_i = \frac{q}{mc^2} \frac{1}{(K_n \mathcal{D}_n)} \dot{F}_{in} \mathcal{D}_n + \frac{\ddot{U}_n \mathcal{D}_n}{(K_n \mathcal{D}_n)} K_i.$$

Содержащееся здесь скалярное произведение $\ddot{U}_n \mathcal{D}_n$, получим, умножая уравнение (50) на \ddot{U}_i и учитывая равенство $U_i \ddot{U}_i = -\dot{U}_i^2$, следующее из тождества (3)

$$U_i\ddot{U}_i + \ddot{U}_i\ddot{U}_i + 0 = \mathcal{D}_i\ddot{U}_i \quad \Rightarrow \quad \ddot{U}_n\mathcal{D}_n = \ddot{U}_n^2 - \dot{U}_n^2.$$

Тогда выражение для \ddot{U}_i принимает вид

$$\ddot{U}_i = \frac{q}{mc^2} \frac{1}{(K_p \mathcal{D}_p)} \dot{F}_{in} \mathcal{D}_n + \left(\ddot{U}_n^2 - \dot{U}_n^2 \right) \frac{K_i}{(K_p \mathcal{D}_p)}.$$

Подставив его в (50), получим равенство

$$U_i = \mathcal{D}_i - \frac{q}{mc^2} \frac{1}{(K_p \mathcal{D}_p)} \dot{F}_{in} \mathcal{D}_n - \frac{1}{2} \ddot{U}_n^2 \frac{K_i}{(K_p \mathcal{D}_p)},$$

где в правой части содержится кинематическая величина \ddot{U}_n^2 , которая ещё не выражена через значения полевых величин в точке нахождения частицы.

Уравнение (25), которое в силу равенства $4\pi T_{44} = \mathbf{E}^2$ (46a) может быть записано в форме

$$-\dot{U}_n^2 = \left(\frac{q}{mc^2}\right)^2 \frac{\mathbf{E}^2}{K_4^2},\tag{51a}$$

было получено как следствие (19) или первого первого уравнения (48). Дифференцируя первое уравнение (48), построим симметричный тензор $\dot{F}_{in}\dot{F}_{nm}$ и учитывая (46b) получим равенство

$$-\ddot{U}_n^2 = \left(\frac{q}{mc^2}\right)^2 \frac{\dot{\boldsymbol{E}}^2}{K_4^2}.\tag{51b}$$

Тогда, зависимость четырёхвектора скорости частицы в поле монохроматической плоской волны от значений полевых величин в точке нахождения частицы будет определяться формулой

$$U_i = \mathcal{D}_i - \frac{q}{mc^2} \frac{1}{(K_p \mathcal{D}_p)} \dot{F}_{in} \mathcal{D}_n + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{mc^2} \right)^2 \frac{\dot{\boldsymbol{E}}^2}{K_4^2} \frac{K_i}{(K_p \mathcal{D}_p)}, \tag{52}$$

где не выяснен пока смысл безразмерного единичного четырёхвектора \mathcal{D}_i .

3.1 Постоянный четырёхвектор дрейфовой скорости частицы

Для удобства записи определим безразмерную величину

$$\mu = \frac{1}{k_4} \frac{q}{mc^2} \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}},\tag{53a}$$

которая в зависимости от знака заряда q точечной частицы может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Всегда положительный квадрат (53a) выражается формулами

$$\mu^{2} = \frac{1}{k_{4}^{2}} \left(\frac{q}{mc^{2}}\right)^{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}{2} = \frac{1}{k_{4}^{2}} \frac{r_{q}}{mc^{2}} \frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}{2} = \frac{4\pi}{k_{4}^{2}} \frac{r_{q}I}{mc^{3}},$$
 (53b)

в которых используется величина классического радиуса заряда

$$r_q = \frac{q^2}{mc^2} \tag{53c}$$

и связь (47) интенсивности волны с амплитудным значением напряжённости. С помощью соотношений

$$K_4 = k_4 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c T_\omega},\tag{53d}$$

где λ — длина волны, а T_{ω} — её период, можно преобразовать (53b) к виду

$$\mu^2 = \frac{r_q \,\lambda^2}{\pi} \frac{I}{mc^3} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\lambda}{r_q}\right)^2 \frac{I}{I_q}, \quad \text{где} \quad I_q = \frac{mc^3}{r_q^3}.$$
 (53b')

Определённая равенствами (53b) и (53b') величина отличается в два раза от аналогичной безразмерной величины, нередко используемой различными авторами при рассмотрении релятивистского поведения заряда в волне (в работе [8] она обозначена как μ , а в работе [9] — как q^2). Если считать движущуюся в поле волны частицу электроном ($r_e = e^2/m_ec^2 \approx 2,818 \cdot 10^{-13} {\rm cm}$), то для излучения с интенсивностью примерно 7 ${\rm BT/cm^2}$ и длиной волны 0,63 мкм безразмерный параметр будет иметь значение $\mu^2 = 10^{-18}$.

Из (53), (44) и (32b) следует тогда запись уравнений (51) в виде

$$-\dot{U}_n^2 = \mu^2 \left(1 + \gamma \cos \left(2\varphi + \delta \right) \right); \tag{54a}$$

$$-\ddot{U}_n^2 = \mu^2 \left(1 - \gamma \cos \left(2\varphi + \delta \right) \right). \tag{54b}$$

А для четырёхвекторного уравнения (52), определяющего зависимость четырёхвектора скорости частицы в поле монохроматической плоской волны от параметра фазы волны в точке нахождения частицы, получим выражение

$$U_{i} = \mathcal{D}_{i} - \mu \frac{K_{4}}{(K_{p}\mathcal{D}_{p})} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} \dot{F}_{in}\mathcal{D}_{n} + \frac{1}{2} \mu^{2} \left(1 - \gamma \cos\left(2\varphi + \delta\right)\right) \frac{K_{i}}{(K_{p}\mathcal{D}_{p})}. \quad (52')$$

Можно заметить, что правая часть (52') является суммой различных четырёхвекторных величин, две из которых образуют постоянный четырёхвектор

$$\mathcal{D}_i + \frac{1}{2} \,\mu^2 \frac{K_i}{(K_p \mathcal{D}_p)},$$

а остальные имеют осциллирующую зависимость от фазы.

Более наглядно разделение слагаемых (52') на осциллирующие и постоянные может быть быть продемонстрировано, если воспользоваться возможностью представления значений компонент производной от тензора электромагнитного поля по фазе в качестве суммы двух гармонических зависимостей от разности фаз между двумя произвольными точками пространственно-временного континуума (45b). Для этого, с помощью (45b) и тригонометрических

тождеств, получим эквивалентное уравнению (52') представление

$$U_{i} = U_{i} (\Phi) = \mathcal{D}_{i} + \frac{1}{2} \mu^{2} \frac{K_{i}}{(K_{p} \mathcal{D}_{p})} - \frac{K_{4}}{(K_{p} \mathcal{D}_{p})} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} \dot{F}_{in}^{0} \mathcal{D}_{n} \cos \Phi + \mu \frac{K_{4}}{(K_{p} \mathcal{D}_{p})} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} F_{in}^{0} \mathcal{D}_{n} \sin \Phi - \frac{K_{i}}{2} \frac{K_{i}}{(K_{p} \mathcal{D}_{p})} \cos (2\varphi_{0} + \delta) \cos 2\Phi + \mu^{2} \frac{\gamma}{2} \frac{K_{i}}{(K_{p} \mathcal{D}_{p})} \sin (2\varphi_{0} + \delta) \sin 2\Phi.$$

Для значений компонент тензоров F_{in} и \dot{F}_{in} в некоей фиксированной точке пространственно-временно́го континуума X_l^0 , принадлежащей мировой линии точечной частицы, приняты обозначения

$$F_{in}\left(X_{l}^{0}\right) \equiv F_{in}^{0}$$
 и $\dot{F}_{in}\left(X_{l}^{0}\right) \equiv \dot{F}_{in}^{0}$

а разность фаз Φ между произвольной точкой пространственно-временно́го континуума X_l , в отношении которой также подразумевается её принадлежность к мировой линии частицы, и начальной точкой X_l^0 , записывается в виде

$$\Phi = \varphi - \varphi_0 = K_p X_p - \varphi_0,$$
 где $\varphi_0 = K_p X_p^0.$

Усредняя четырёхвектор скорости частицы в поле волны по параметру разности фаз Φ или по параметру фазы φ , получим соотношения

$$\langle U_i \rangle_{\Phi} = \langle U_i \rangle_{\varphi} = \mathcal{D}_i + \frac{1}{2} \mu^2 \frac{K_i}{(K_n \mathcal{D}_n)} = \sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{U}_i,$$
 (55)

в которых использован постоянный безразмерный четырёхвектор \overline{U}_i , квадрат которого равен единице. Как будет показано в дальнейшем, именно \overline{U}_i определяет трёхмерный постоянный вектор $\overline{\boldsymbol{v}}$ дрейфовой скорости точечной частицы в поле монохроматической плоской волны.

Заменяя в представлении $U_i(\Phi)$ четырёхвектор \mathcal{D}_i на \overline{U}_i в соответствии с (55), запишем выражение для четырёхвектора скорости частицы в поле плоской монохроматической волны в сокращённом виде

$$U_i = \sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{U}_i + Z_i^{(1)} \cos \Phi + Z_i^{(2)} \sin \Phi + Z_i^{(3)} \cos 2\Phi + Z_i^{(4)} \sin 2\Phi. \tag{56}$$

Четырёхвекторы Z_i имеют значения:

$$Z_i^{(1)} = -\mu \frac{K_4}{\left(K_p \overline{U}_p\right)} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}} \dot{F}_{in}^0 \overline{U}_n; \tag{56.1}$$

$$Z_i^{(2)} = \mu \frac{K_4}{\left(K_p \overline{U}_p\right)} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}} F_{in}^0 \overline{U}_n; \tag{56.2}$$

$$Z_i^{(3)} = -\frac{\gamma}{2} \frac{\mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{K_i}{(K_p \overline{U}_p)} \cos(2\varphi_0 + \delta); \qquad (56.3)$$

$$Z_i^{(4)} = \frac{\gamma}{2} \frac{\mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{K_i}{(K_p \overline{U}_p)} \sin(2\varphi_0 + \delta).$$
 (56.4)

Уравнения (56) эквивалентны равенству

$$U_{i} = \sqrt{1 + \mu^{2}} \, \overline{U}_{i} - \mu \frac{K_{4}}{\left(K_{p} \overline{U}_{p}\right)} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} \dot{F}_{in} \overline{U}_{n} - \frac{\gamma \mu^{2} \cos\left(2\varphi + \delta\right)}{2\sqrt{1 + \mu^{2}}} \frac{K_{i}}{\left(K_{p} \overline{U}_{p}\right)}, \quad (57)$$

которое может быть получено также из (52'), (45b) и (55). Сохраняющаяся при движении частицы в поле волны величина K_pU_p связана с $K_p\overline{U}_p$ простой формулой

$$(K_p U_p) = \sqrt{1 + \mu^2} \left(K_p \overline{U}_p \right). \tag{58}$$

3.2 Связь четырёхвектора дрейфовой скорости с начальными условиями

Выразим теперь четырёхвектор дрейфовой скорости \overline{U}_i через начальные условия задачи, то есть через полевые величины в начальной точке мировой линии X_i^0 и значение четырёхвектора скорости U_i^0 в той же точке. Рассмотрим для этого следствие уравнения (57)

$$\dot{F}_{mi}U_i = \sqrt{1+\mu^2} \, \dot{F}_{mi}\overline{U}_i - \mu \frac{K_4}{(K_p\overline{U}_p)} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}} \dot{F}_{mi}\dot{F}_{in}\overline{U}_n.$$

Содержащуюся тут величину $\dot{F}_{mi}\dot{F}_{in}$ представим с помощью (46b) и (44) в форме

$$\dot{F}_{mi}\dot{F}_{in} = \frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2} \left(1 - \gamma \cos(2\varphi + \delta) \right) \frac{K_m K_n}{K_4^2}$$

и, подставив её в предыдущее равенство, получим уравнение

$$\dot{F}_{in}U_n = \sqrt{1+\mu^2} \, \dot{F}_{in}\overline{U}_n - \mu \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \left(1 - \gamma \cos\left(2\varphi + \delta\right)\right) \frac{K_i}{K_4},$$

из которого выразим величину $\dot{F}_{in}\overline{U}_{n}$. Подставляя её в (57) и преобразовывая полученное уравнение с учётом (58), находим выражение для сохраняющегося

при движении частицы в поле волны безразмерного единичного четырёхвектора

$$\overline{U}_{i} = \frac{U_{i}}{\sqrt{1+\mu^{2}}} + \frac{\mu^{2}}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{K_{i}}{(K_{p}U_{p})} + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{K_{4}}{(K_{p}U_{p})} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} \dot{F}_{in}U_{n} - \frac{\gamma}{2} \cos(2\varphi + \delta) \frac{\mu^{2}}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{K_{i}}{(K_{p}U_{p})}.$$

Это равенство выполняется в любой точке, которая принадлежит мировой линии частицы, а следовательно, и в точке X_l^0 , которая принята за начальную. Обозначая четырёхвектор скорости частицы в этой точке как

$$U_i(X_l^0) \equiv U_i^0$$

запишем предыдущее уравнение для начальной точки мировой линии X_l^0 . Четырёхвектор дрейфовой скорости \overline{U}_i , определённый ранее равенством (55) через постоянный безразмерный четырёхвектор \mathcal{D}_i , который, в свою очередь, является, согласно (50) сохраняющимся при движении частицы в поле волны четырёхвектором, теперь может быть записан в виде формулы

$$\overline{U}_{i} = \frac{U_{i}^{0}}{\sqrt{1+\mu^{2}}} + \frac{\mu^{2}}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{K_{i}}{\left(K_{p}U_{p}^{0}\right)} + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{K_{4}}{\left(K_{p}U_{p}^{0}\right)} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} \dot{F}_{in}^{0} U_{n}^{0} - \frac{\gamma}{2} \cos\left(2\varphi_{0} + \delta\right) \frac{\mu^{2}}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{K_{i}}{\left(K_{p}U_{p}^{0}\right)}, \tag{59}$$

выражающей компоненты \overline{U}_i через начальные условия задачи, то есть через полевые величины в начальной точке мировой линии X_i^0 и значение четырёхвектора скорости U_i^0 в той же точке.

Временная компонента (4) времениподобного единичного $U_n^2=1$ четырёхвектора U_i является положительной величиной, область значений которой при любом возможном движении материальной точечной частицы и в любой инерщиальной системе отсчёта определяется неравенством $U_4\geqslant 1$. Значения величин U_4 и U_4' , относящиеся к двум различным инерциальным системам отсчётах, связаны между собой преобразованиями Лоренца, использование которых не изменяет знак четвёртой компоненты ($U_4\geqslant 1$ и $U_4'\geqslant 1$) четырёхвектора скорости U_i . Так же как и U_i , времениподобный четырёхвектор \overline{U}_i , является единичным $\overline{U}_i^2=1$, но для него неизвестен пока знак его временной компоненты \overline{U}_4 . Переход в сопутствующую систему систему отсчёта, в которой $\overline{U}_\alpha'=0$, который всегда возможен для времениподобного четырёхвектора, позволяет получить лишь равенство $\overline{U}_4'=\pm 1$, но не $\overline{U}_4'=1$.

Однако по аналогии с U_i , если для времениподобного единичного четырёхвектора \overline{U}_i будет найдена система отсчёта, в которой $\overline{U}_4 \geqslant 1$, то это неравенство будет выполняться и в всех других системах отсчёта. Перейдём в такую систему отсчёта, в которой скорость частицы равна нулю в начальной точке мировой линии X_i^0 а четырёхвектор скорости U_i^0 в начальной точке мировой линии имеет значение

$$U_i^0 = \begin{Bmatrix} U_\alpha^0 \\ U_4^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} iu_\alpha^0 \\ u_4^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

и рассмотрим четвёртую компоненту уравнения (59). Содержащееся там скалярное произведение оказывается равным величине $(K_pU_p^0) = K_4$. Третье слагаемое четвёртой компоненты уравнения (59) будет равно нулю, поскольку равен нулю множитель

$$\dot{F}_{4n}^{0}U_{n}^{0} = \dot{F}_{4\beta}^{0}U_{\beta}^{0} + \dot{F}_{44}^{0}U_{4}^{0} = \dot{F}_{4\beta}^{0}U_{\beta}^{0} = 0.$$

Следовательно, \overline{U}_4 в этой системе отсчёта имеет вид

$$\overline{U}_{4} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \left(1 + \mu^{2} - \frac{\gamma}{2} \mu^{2} \cos(2\varphi_{0} + \delta) \right) =
= \frac{1 + \frac{1}{2} \mu^{2}}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \left(1 + \frac{1}{2} \mu^{2} \frac{1 - \gamma \cos(2\varphi_{0} + \delta)}{1 + \frac{1}{2} \mu^{2}} \right),$$
(60)

где во втором равенстве (60) сделаны простые алгебраические преобразования. Содержащаяся в скобках дробь всегда больше нуля, кроме единственного случая линейной поляризации $\gamma = 1$ и, одновременно, начальной фазы такой, что $\cos(2\varphi_0 + \delta) = 1$. Следовательно, множитель в скобках всегда больше или равен единице. Дробь перед скобками всегда больше единицы, поскольку квадрат числителя больше квадрата знаменателя на величину $(1/4) \mu^4$.

Таким образом, в системе отсчёта, в которой скорость частицы равна нулю в начальной точке мировой линии X_i^0 для компоненты \overline{U}_4 выполняется неравенство $\overline{U}_4>1$ из чего следует, что и в любой другой произвольной системе отсчёта $\overline{U}_4\geqslant 1$. Это согласуется с определением четырёхвектора скорости, временная компонента которого является положительной величиной, областью значений которой, при любом возможном движении материальной точечной частицы и в любой инерциальной системе отсчёта, является промежуток от единицы до плюс бесконечности.

Свойства четырёхвектора \overline{U}_i оказались полностью аналогичны свойствам четырёхвектора скорости точечной частицы. Согласно принятым здесь обозначениям три компоненты \overline{v}_{α} образуют вектор трёхмерной дрейфовой скорости $\overline{\boldsymbol{v}}$, а компоненты четырёхвектора дрейфовой скорости имеют вид

$$\overline{U}_i = \left\{ \frac{\overline{U}_{\alpha}}{\overline{U}_4} \right\} = \left\{ \frac{i\overline{u}_{\alpha}}{\overline{u}_4} \right\}, \quad \text{где} \quad \overline{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \overline{\boldsymbol{v}}^2/c^2}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_4 \, \overline{\boldsymbol{v}}/c \quad (61)$$

3.3 Дрейфовая скорость и период движения частицы

Поскольку четырёхвектор скорости частицы в поле волны пропорционален производной от четырёхмерной координаты X_i по разности фаз Φ

$$U_{i} = \frac{dX_{i}}{ds} = \left(K_{p}U_{p}\right)\frac{dX_{i}}{d\varphi} = \sqrt{1 + \mu^{2}}\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)\frac{dX_{i}}{d\varphi} = \sqrt{1 + \mu^{2}}\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)\frac{dX_{i}}{d\Phi},$$

уравнение (56), в левой части которого содержится величина U_i , легко интегрируется, в результате чего получается уравнение мировой линии частицы

$$X_{i} = X_{i}^{0} + \frac{\overline{U}_{i}}{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)}\Phi + \frac{Z_{i}^{(1)}}{\sqrt{1+\mu^{2}}\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)}\sin\Phi - \frac{Z_{i}^{(2)}}{\sqrt{1+\mu^{2}}\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)}\left(\cos\Phi - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{Z_{i}^{(3)}}{\sqrt{1+\mu^{2}}\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)}\sin2\Phi - \frac{1}{2}\frac{Z_{i}^{(4)}}{\sqrt{1+\mu^{2}}\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)}\left(\cos2\Phi - 1\right),$$
(62)

В силу неравенства $\overline{U}_4 \geqslant 1$, временная компонента $X_4 = ct = X_4(\Phi)$ уравнения (62) в любом случае содержит линейное по параметру изменения фазы Φ слагаемое. Естественное физическое требование увеличения параметра времени — время течёт в одном направлении — обеспечивается наличием этого слагаемого.

Рассмотрим любую из компонент $U_i = U_i(\Phi)$ уравнения (56) совместно с временной компонентой $X_4 = X_4(\Phi)$ уравнения (62). Совокупность этих двух равенств можно считать способом задания параметрической зависимости $U_i = U_i(X_4)$. Изменению параметра Φ на величину $\Delta \Phi = 2\pi N$, где $N = 1, 2, 3 \dots$ соответствует, согласно (62), изменение X_4 на величину

$$X_4\left(\Phi + \Delta\Phi\right) - X_4\left(\Phi\right) = X_4\left(\Phi + 2\pi N\right) - X_4\left(\Phi\right) = \frac{\overline{U}_4}{\left(K_p\overline{U}_p\right)} 2\pi N,$$

а для любой компоненты U_i верно равенство $U_i(\Phi + 2\pi N) = U_i(\Phi)$. Следовательно $U_i(X_4)$, хоть и не выражается в явном виде, но, тем не менее, оказываются периодической функцией времени, то есть принимает одинаковые значения в моменты, разделённые промежутком времени равным периоду

$$T = \frac{2\pi}{c} \frac{\overline{U}_4}{\left(K_p \overline{U}_p\right)} = T_\omega \frac{K_4 \overline{U}_4}{\left(K_p \overline{U}_p\right)} = \frac{T_\omega}{1 - \left(\mathbf{n}_k \frac{\overline{v}}{c}\right)}.$$
 (63)

Периодическими функциями времени с тем же периодом T являются также четырёхвектор ускорения W_i и следующие производные по собственному

времени. Поскольку пространственная часть $X_{\alpha} = X_{\alpha}(\Phi)$ уравнения (62) содержит, в отличие от $U_i(\Phi)$ или $W_i(\Phi)$, линейное по Φ слагаемое, зависимость $X_{\alpha} = X_{\alpha}(X_4)$ будет являться периодической функцией времени только при условии равенства нулю этого слагаемого $\overline{U}_{\alpha} = 0$. Кроме того, те величины, которые можно представить в виде функциональных зависимостей, содержащих только периодические по времени функции, например, вектор скорости частицы $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, компоненты которого $v_{\alpha}(t)$, определяются формулой $v_{\alpha}/c = u_{\alpha}(t)/u_{4}(t)$, или квадрат четырёхмерного ускорения W_{n}^{2} , тоже будут периодическими функциями времени.

Период T, согласно (63), связан с проекцией вектора дрейфовой скорости на направление распространения волны. Областью значений величины периода является промежуток

 $\frac{T_{\omega}}{2} < T < \infty.$

Равенство периода движения T и периода T_{ω} волны, в поле которой движется частица, достигается в случае равенства нулю дрейфовой скорости или её перпендикулярности направлению распространения волны. Если направление дрейфовой скорости образует острый угол с направлением распространения волны или эти направления совпадают, то период движения T оказывается больше периода волны T_{ω} . Для случая тупого угла между этими направлениями или их противоположенной направленности, период движения T оказывается меньше периода волны T_{ω} , никогда не достигая при этом значения $T_{\omega}/2$.

Ранее было приведено равенство (55), выражающее усреднённый четырёхвектор скорости точечной частицы в поле волны через четырёхвектор дрейфовой скорости. При этом подразумевалось, что поскольку зависимость четырёхвектора скорости точечной частицы от параметра Φ , записанная, например в форме (56), периодична с периодом 2π , операция усреднения определена согласно формуле

$$\langle U_i \rangle_{\Phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} U_i \left(\Phi \right) d\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} U_i \left(\varphi \right) d\varphi = \langle U_i \rangle_{\varphi}.$$

Операции усреднения по параметрам Φ и φ эквивалентны в силу определения $\Phi = \varphi - \varphi_0$ и совпадают с результатом усреднения по собственному времени, поскольку дифференциал фазы волны $d\varphi = d\Phi$ в точке нахождения частицы пропорционален дифференциалу собственного времени ds движущейся в поле волны частицы.

Аналогично операции усреднения по фазе, определим операцию усреднения по времени и рассмотрим её применение на примере трёхмерного вектора скорости \boldsymbol{v} частицы, движущейся в поле волны. Формула для средних значений

компонент v_{α} этого вектора имеет вид

$$\langle v_{\alpha} \rangle_{t} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} v_{\alpha}(t) dt,$$

где T — период движения, определяемый равенствами (63). Преобразование дифференциала времени с помощью (58) и (63)

$$dt = \frac{1}{(K_p U_p)} \frac{u_4 d\varphi}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{T}{2\pi} \frac{1}{\overline{u}_4} u_4 d\varphi, \tag{64}$$

позволяет выполнить замену переменных в интеграле. Результаты операций усреднения составляющих вектора скорости v_{α} по времени и произведения u_4v_{α} по фазе оказываются связаны соотношением

$$\langle v_{\alpha} \rangle_{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\overline{u}_{4}} \int_{0}^{2\pi} u_{4}(\varphi) v_{\alpha}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{\langle u_{4}v_{\alpha} \rangle_{\varphi}}{\overline{u}_{4}}.$$

Поскольку усредняемое произведение u_4v_α пропорционально (5) пространственным компонентам четырёхвектора скорости точечной частицы u_α , усреднёнными значениями которых, согласно (55), являются величины

$$\langle U_i \rangle_{\Phi} = \sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{U}_i \qquad \Rightarrow \qquad \langle u_{\alpha} \rangle_{\varphi} = \langle u_{\alpha} \rangle_{\Phi} = \sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{u}_{\alpha},$$

то усреднённая по времени скорость частицы в поле волны

$$\langle v_{\alpha} \rangle_{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{\langle u_{4}v_{\alpha} \rangle_{\varphi}}{\overline{u}_{4}} = \frac{c}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{\langle u_{\alpha} \rangle_{\varphi}}{\overline{u}_{4}} = c \frac{\overline{u}_{\alpha}}{\overline{u}_{4}} = \overline{v}_{\alpha}$$

оказывается равна дрейфовой скорости $\langle \boldsymbol{v} \rangle_t = \overline{\boldsymbol{v}}.$

Выражения, связывающие значения квадратов энергии $\mathcal E$ импульса $\boldsymbol p$ и массы частицы, а также значения векторных величин импульса и скорости

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + (mc)^2$$
 и $\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c} \frac{\mathbf{v}}{c},$

можно рассматривать как следствие кинематических тождеств специальной теории относительности и определений трёхмерного вектора импульса $\boldsymbol{p}=mc\boldsymbol{u}$, и полной энергии частицы $\mathcal{E}=mc^2u_4$. Аналогичные выражения можно построить для усреднённых величин

$$\frac{\left(\langle \mathcal{E} \rangle_{\varPhi}\right)^2}{c^2} = \left(\langle \boldsymbol{p} \rangle_{\varPhi}\right)^2 + \left(\sqrt{1 + \mu^2} \ mc\right)^2 \qquad \text{if} \qquad \langle \boldsymbol{p} \rangle_{\varPhi} = \frac{\langle \mathcal{E} \rangle_{\varPhi}}{c} \frac{\langle \boldsymbol{v} \rangle_t}{c} = \frac{\langle \mathcal{E} \rangle_{\varPhi}}{c} \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c}.$$

Уравнения, связывающие усреднённые по фазе, или, что то же самое, усреднённые по собственному времени движущейся в поле волны частицы, значения энергии и импульса, допускают интерпретацию величины $\sqrt{1+\mu^2} m$ в качестве массы покоя объекта, движущегося как целое с постоянной скоростью $\overline{\boldsymbol{v}}$.

3.4 Усреднение четырёхвектора скорости

Связь между операциями усреднения по времени и по фазе, очевидно, не зависит от усредняемой величины. Поэтому, для усреднения компонент четырёхвектора скорости частицы можно использовать выражение

$$\langle U_i \rangle_t = \frac{\langle U_4 U_i \rangle_{\Phi}}{\sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{U}_4},$$

аналогичное тому, которое было получено для составляющих трёхмерного вектора скорости. Для вычисления $\langle U_i \rangle_t$ необходимо найти значения величины $\langle U_4 U_i \rangle_{\Phi}$, в выражении для которой, согласно (56), содержатся компоненты:

$$U_4 = \sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{U}_4 + Z_4^{(1)} \cos \Phi + Z_4^{(2)} \sin \Phi + Z_4^{(3)} \cos 2\Phi + Z_4^{(4)} \sin 2\Phi;$$

$$U_i = \sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{U}_i + Z_i^{(1)} \cos \Phi + Z_i^{(2)} \sin \Phi + Z_i^{(3)} \cos 2\Phi + Z_i^{(4)} \sin 2\Phi.$$

После перемножения U_i и U_4 и усреднения результатов этого умножения, окажутся равными нулю все перекрёстные члены, которые будут содержать: произведения гармонических функций на постоянную величину; произведения косинуса на синус одного и того же аргумента, пропорциональные синусу удвоенного аргумента; произведения гармонических функций одного аргумента на гармонические функции удвоенного аргумента, пропорциональные сумме гармонических функций аргумента и утроенного аргумента. Учитывая значения средних квадратов гармонических функций

$$\left\langle \cos^2 \Phi \right\rangle_{\varPhi} = \left\langle \sin^2 \Phi \right\rangle_{\varPhi} = \left\langle \cos^2 2 \Phi \right\rangle_{\varPhi} = \left\langle \sin^2 2 \Phi \right\rangle_{\varPhi} = 1/2,$$

получим искомое выражение

$$\langle U_i \rangle_t = \sqrt{1 + \mu^2} \, \overline{U}_i + \frac{Z_4^{(1)} Z_i^{(1)} + Z_4^{(2)} Z_i^{(2)} + Z_4^{(3)} Z_i^{(3)} + Z_4^{(4)} Z_i^{(4)}}{2 \sqrt{1 + \mu^2} \, \overline{U}_4},$$

в котором, используя $(56\cdot3)$ и $(56\cdot4)$, удаётся преоброзовать сумму двух из четырёх, содержащихся в числителе дроби, слагаемых

$$\langle U_i \rangle_t = \sqrt{1 + \mu^2} \,\, \overline{U}_i + \frac{\gamma^2}{8\sqrt{1 + \mu^2}} \,\frac{\mu^4}{\overline{U}_4} \,\frac{K_4 K_i}{1 + \mu^2} \,\frac{Z_4^{(1)} Z_i^{(1)} + Z_4^{(2)} Z_i^{(2)}}{2\sqrt{1 + \mu^2} \,\, \overline{U}_4}. \quad (65)$$

Средние по времени значения импульса $\mathbf{p} = mc\mathbf{u}$, энергии $\mathcal{E} = mc^2u_4$ и кинетической энергии $\mathcal{K} = \mathcal{E} - mc^2$ определяются в произвольной системе отсчёта из пространственных и временных компонент формулы (65).

3.5 Усреднение квадрата четырёхмерного ускорения

Квадрат четырёхмерного ускорения, как следует, например из (54a), (58) и равенства $d\varphi = (K_i U_i) \, ds$, определяется выражением

$$-W_n^2 = \mu^2 \left(1 + \mu^2\right) \left(K_p \overline{U}_p\right)^2 \left(1 + \gamma \cos\left(2\varphi + \delta\right)\right).$$

Заменяя параметр φ на $\Phi=\varphi-\varphi_0$, и производя усреднение, согласно формуле

$$\left\langle -W_n^2 \right\rangle_t = \frac{\left\langle -W_n^2 U_4 \right\rangle_{\Phi}}{\sqrt{1 + \mu^2} \, \overline{U}_4},$$

получим значение усреднённого квадрата четырёхмерного ускорения

$$\left\langle -W_n^2 \right\rangle_t = \mu^2 \left(1 + \mu^2 \right) \left(K_p \overline{U}_p \right)^2 - \frac{\gamma^2}{4} \mu^4 \left(K_p \overline{U}_p \right) \frac{K_4}{\overline{U}_4}. \tag{66}$$

В произвольной инерциальной системе отсчёта «излучение 4-импульса» dP_i^{rad} заряженной точечной частицей, согласно [3], определяется (см. напр. ур. 73.3 в [3]) формулой

$$dP_i^{rad} = -\frac{2q^2}{3c} W_n^2 u_i ds \qquad \Rightarrow \qquad dP_4^{rad} = \frac{1}{c} d\mathcal{E}^{rad} = -\frac{2q^2}{3c} W_n^2 u_4 ds,$$

где $d\mathcal{E}^{rad}$ — излучаемая точечным зарядом энергия

$$d\mathcal{E}^{rad} = -\frac{2q^2}{3} W_n^2 u_4 ds = -\frac{2q^2}{3} W_n^2 c dt.$$

Полное количество энергии $\Delta \mathcal{E}_T$, излучаемое ускоренно движущейся частицей за время равное периоду T, будет тогда пропорционально среднему по времени квадрату четырёхмерного ускорения

$$\Delta \mathcal{E}_T = \int_0^T d\mathcal{E}^{rad} = -\frac{2q^2}{3} c \int_0^T W_n^2 dt = \frac{2q^2}{3} c T \left\langle -W_n^2 \right\rangle_t,$$

и, следовательно, не учитывающая угловое распределение интегральная мощность излучения, являющаяся отношением излучаемой за период энергии $\Delta \mathcal{E}_T$ к величине самого периода T, выражается

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta \mathcal{E}_T}{T} = \frac{2}{3} q^2 c \left\langle -W_n^2 \right\rangle_t = \left(\frac{2}{3} q^2 c \,\mu^2 K_4^2\right) \frac{\left\langle -W_n^2 \right\rangle_t}{\mu^2 K_4^2}$$

через усреднённую по времени величину квадрата четырёхмерного ускорения

$$\langle -W_n^2 \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-W_n^2 \right) dt,$$

определяемую в произвольной инерциальной системе отсчёта формулой (66). В выражении для \mathcal{P} преобразуем находящийся перед дробью в скобках коэффициент, с помощью последнего равенства (53b) и (53c)

$$\frac{2}{3}q^2c\,\mu^2k_4^2 = \frac{2}{3}q^2c\,\frac{4\pi}{k_4^2}\,\frac{r_q\,I}{mc^3}\,k_4^2 = \frac{8\pi}{3}\,r_q^2\,I = \sigma_0I,$$

где σ_0 величина томсоновского сечения

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_q^2. \tag{53e}$$

Тогда из (66), получаем выражение

$$\frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0 \left(\left(1 + \mu^2 \right) \frac{\left(K_p \overline{U}_p \right)^2}{K_4^2} - \frac{\gamma^2}{4} \mu^2 \frac{\left(K_p \overline{U}_p \right)}{K_4 \overline{U}_4} \right) \tag{67}$$

для имеющего размерность площади отношения мощности рассеянного излучения \mathcal{P} к интенсивности падающего излучения I в произвольной инерциальной системе отсчёта.

Полная излучаемая за период T энергия $\Delta \mathcal{E}_T$, равна величине

$$\Delta \mathcal{E}_T = \frac{\lambda}{c} \,\sigma_0 I \left(\left(1 + \mu^2 \right) \frac{\left(K_p \overline{U}_p \right)}{K_4} \, \overline{U}_4 - \frac{\gamma^2}{4} \mu^2 \right). \tag{68}$$

3.6 Усреднение четырёхвектора ускорения

Пространственную часть второго уравнения (16)

$$mc^2W_{\alpha} = qF_{\alpha n}U_n = q\left(F_{\alpha 4}U_4 + F_{\alpha \beta}U_{\beta}\right) = qU_4\left(F_{\alpha 4} + F_{\alpha \beta}\frac{U_{\beta}}{U_4}\right)$$

можно записать, считая w_{α} составляющими вектора ${m w}$, в виде трёхмерного векторного равенства

$$mc^2 \mathbf{w} = qu_4 \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right] \right).$$
 (16a)

Векторная величина $mc^2 \boldsymbol{w}$ имеет размерность силы, поскольку $c^2 \boldsymbol{w}$, как видно из (21), совпадает с размерностью ускорения. Компоненты действующей на

точечную частицу со стороны внешнего электромагнитного поля трёхмерной векторной силы

$$\mathbf{f} = qu_4 \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right] \right),$$
 (69)

являются, в то же время, и пространственными компонентами четырёхвекторной величины $qF_{in}U_n$. Трёхмерное векторное равенство (16a) может быть записано в виде уравнения, связывающего силу (69) с производной от импульса $\boldsymbol{p} = mc\boldsymbol{u}$ по собственному времени $d\tau = (ds/c)$ точечной частицы

$$mc^2 \boldsymbol{w} = \frac{d}{ds} (mc^2 \boldsymbol{u}) = c \frac{d\boldsymbol{p}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \boldsymbol{f}.$$

Отсюда можно получить векторное выражение для производной от импульса по времени

$$c\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{u_4}\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{\mathbf{f}}{u_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right]\right), \quad (70)$$

где составляющие последнего векторного равенства уже не являются компонентами какого-либо четырёхвектора.

Отметим, что авторы некоторых учебников избегают употребления термина «сила», в отношении трёхмерной векторной величины, обозначенной здесь как f и являющейся производной импульса частицы по её собственному времени. Силой иногда называют только векторную величину $d\mathbf{p}/dt$, то есть производную импульса по времени. При таком способе изложения материала авторы рассматривают только четырёхвекторное выражение (16), в отношении которого употребляют термин «4-сила» или «сила Минковского».

Если для пространственной части четырёхвекторных уравнений (16) всё же приводится её запись, аналогичная (69), в трёхмерной векторной форме (см. напр. ур. (32.4) из \$32 в [10] или \$66 в [11]), то вектор, обозначенный здесь как f, называют силой Минковского и сравнивают её с силой Лоренца, под которой в этом случае подразумевается вектор $d\mathbf{p}/dt$, равный, согласно (70), трёхмерной векторной величине $q\left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right]\right)$. При этом отмечается (см. напр. \$28 в [10]), что «Лоренцева сила не является составляющей 4-вектора, однако становится таковой после деления на $\sqrt{1-v^2/c^2}$ ». При рассмотрении в рамках специальной теории относительности общего понятия релятивистской силы, которая может иметь не только электромагнитное происхождение (см. напр. \$5.2 в [12]), четырёхмерный вектор $dP_i/d\tau$ также принято называть силой Минковского, а трёхмерная векторная величина $d\mathbf{p}/d\tau$ названа в [12] компонентой силы Минковского (ур. (5.30) в [12]).

Учитывая что скалярное произведение wv, как следует из (21), связана с временной компонентой четырёхмерного ускорения w_4 соотношением $wv = w_4c$, умножим уравнение (16a) на v/c. Полученное равенство

$$mc^2w_4 = qu_4\left(\mathbf{E}\frac{\mathbf{v}}{c}\right). \tag{16b}$$

эквивалентно временной компоненте первого уравнения (16). Формула (16b), в силу (69), может быть записана в виде $mc^3w_4 = (\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})$. Отсюда следуют выражения, для производных от полной энергии $\mathcal{E} = mc^2u_4$ по собственному времени частицы и по времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = (\mathbf{f}\mathbf{v})$$
 If $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{(\mathbf{f}\mathbf{v})}{u_4} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\mathbf{v}\right)$.

Второе из них, не являющееся компонентой какого-либо четырёхвектора, интерпретируется как равенство скорости изменения полной энергии частицы работе, совершаемой силой $d\mathbf{p}/dt$, в единицу времени.

В отношении силы $d\mathbf{p}/dt$, можно сразу заметить, что её усреднённое по времени значение равно нулю поскольку импульс \mathbf{p} является периодической функцией времени. При этом усреднённое по времени значение силы $d\mathbf{p}/d\tau$, как следует из дальнейшего рассмотрения, может иметь ненулевое значение.

Выражение для усреднённых по времени компонент четырёхвектора ускорения точечной частицы с использованием (55) преобразуем к виду

$$\langle W_i \rangle_t = \frac{\langle U_4 W_i \rangle_{\Phi}}{\sqrt{1 + \mu^2} \; \overline{U}_4} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2} \; \overline{U}_4} \left\langle U_4 \frac{dU_i}{ds} \right\rangle_{\Phi} = \frac{\left(K_p \overline{U}_p \right)}{\overline{U}_4} \left\langle U_4 \frac{dU_i}{d\Phi} \right\rangle_{\Phi}.$$

Четвёртая компонента этого равенства равна нулю, в силу равенства нулю интеграла

$$\int_{0}^{2\pi} U_4 \frac{dU_4}{d\Phi} d\Phi = \int_{0}^{2\pi} d\left(\frac{U_4^2}{2}\right) = \frac{U_4^2 (\Phi)}{2} \Big|_{0}^{2\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle W_4 \rangle_t = 0,$$

в котором $U_4^2(\Phi)$ является периодической функцией. Из того что $\langle W_4 \rangle_t = 0$, согласно (16b), (69) и определению операции усреднения по времени, следует

$$\int_{0}^{T} (\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}) dt = \int_{0}^{T} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} = 0$$

равенство нулю работы силы \boldsymbol{f} за время периода T.

Для вычисления $\langle W_{\alpha} \rangle_t$ нужно найти значения величины $\langle U_4 \, dU_{\alpha} / d\Phi \rangle_{\Phi}$, в выражении для которой содержатся компоненты:

$$U_4 = \sqrt{1 + \mu^2} \, \overline{U}_4 + Z_4^{(1)} \cos \Phi + Z_4^{(2)} \sin \Phi + Z_4^{(3)} \cos 2\Phi + Z_4^{(4)} \sin 2\Phi;$$
$$\frac{dU_\alpha}{d\Phi} = -Z_\alpha^{(1)} \sin \Phi + Z_\alpha^{(2)} \cos \Phi - 2Z_\alpha^{(3)} \sin 2\Phi + 2Z_\alpha^{(4)} \cos 2\Phi.$$

После перемножения этих двух уравнений и усреднения результатов, в которых сумма двух из четырёх слагаемых оказываются равна нулю в силу определений (56.3) и (56.4), рассмотрим, содержащуюся в полученном равенстве

$$\langle W_{\alpha} \rangle_t = \frac{1}{2} \frac{\left(K_p \overline{U}_p \right)}{\overline{U}_4} \left(Z_{\alpha}^{(2)} Z_4^{(1)} - Z_{\alpha}^{(1)} Z_4^{(2)} \right),$$

разность произведений различных компонент четырёхвекторов $Z_i^{(1)}$ и $Z_i^{(2)}$. Временно примем обозначение $L_i=F_{in}\overline{U}_n$ для четырёхвекторной величины,

имеющей компоненты

$$L_{\alpha} = F_{\alpha\beta}\overline{U}_{\beta} + F_{\alpha4}\overline{U}_{4}; \qquad L_{4} = F_{4\beta}\overline{U}_{\beta} = -F_{\beta4}\overline{U}_{\beta}.$$

Используя (27b), запишем L_{α} в виде

$$L_{\alpha} = \frac{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)}{K_{4}}F_{\alpha 4} + L_{4}\frac{K_{\alpha}}{K_{4}}.$$

Поскольку тензор \dot{F}_{in} обладает, очевидно, аналогичным (27b) свойством, пространственные компоненты четырёхвекторной величины M_i , построенной таким же образом, как и L_i , могут быть представлены в том же виде

$$M_i = \dot{F}_{in}\overline{U}_n;$$
 $M_\alpha = \frac{\left(K_p\overline{U}_p\right)}{K_4}\dot{F}_{\alpha 4} + M_4\frac{K_\alpha}{K_4};$ $M_4 = \dot{F}_{4\beta}\overline{U}_\beta.$

Обозначив компоненты M_i и L_i в точке мировой линии частицы X_i^0 , принятой за начальную точку, как M_i^0 и L_i^0 , выпишем величины, пропорциональные компонентам четырёхвекторов (56·1) и (56·2):

$$Z_{\alpha}^{(2)} \propto \left(\frac{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)}{K_{4}}F_{\alpha 4}^{0} + L_{4}^{0}\frac{K_{\alpha}}{K_{4}}\right); \qquad Z_{4}^{(1)} \propto -M_{4}^{0};$$

$$Z_{\alpha}^{(1)} \propto -\left(\frac{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)}{K_{4}}\dot{F}_{\alpha 4}^{0} + M_{4}^{0}\frac{K_{\alpha}}{K_{4}}\right); \qquad Z_{4}^{(2)} \propto L_{4}^{0}.$$

Находя отсюда искомую разность

$$Z_{\alpha}^{(2)}Z_{4}^{(1)} - Z_{\alpha}^{(1)}Z_{4}^{(2)} = \mu^{2} \frac{K_{4}}{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)} \frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}} \left(\dot{F}_{\alpha 4}^{0}L_{4}^{0} - F_{\alpha 4}^{0}M_{4}^{0}\right),$$

подставим её в выражение для $\langle W_{\alpha} \rangle_t$, в котором вернёмся к прежним обозначениям

$$\langle W_{\alpha} \rangle_{t} = \frac{\mu^{2} K_{4}}{2 \, \overline{U}_{4}} \, \frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^{*}} \left(\left(\dot{F}_{\beta 4}^{0} \overline{U}_{\beta} \right) F_{\alpha 4}^{0} - \left(F_{\beta 4}^{0} \overline{U}_{\beta} \right) \dot{F}_{\alpha 4}^{0} \right).$$

С учётом определений (10) и (61), перепишем это равенство в векторной форме и преобразуем его к двойному векторному произведению

$$\langle \boldsymbol{w} \rangle_t = -\frac{\mu^2 k_4}{2 c} \frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*} \left(\left(\dot{\boldsymbol{E}}^0 \overline{\boldsymbol{v}} \right) \boldsymbol{E}^0 - \left(\boldsymbol{E}^0 \overline{\boldsymbol{v}} \right) \dot{\boldsymbol{E}}^0 \right) = \frac{\mu^2 k_4}{2 c} \frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*} \left[\overline{\boldsymbol{v}} \times \left[\dot{\boldsymbol{E}}^0 \times \boldsymbol{E}^0 \right] \right].$$

Используя представление (30а)

$$m{E} = rac{1}{2} \left(ilde{m{E}} e^{i arphi} + ilde{m{E}}^* e^{-i arphi}
ight) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{m{E}} = rac{i}{2} \left(ilde{m{E}} e^{i arphi} - ilde{m{E}}^* e^{-i arphi}
ight),$$

найдём, с помощью (38а), величину псевдовектора

$$\left[\dot{\boldsymbol{E}} \times \boldsymbol{E}\right] = \frac{i}{2} \left[\tilde{\boldsymbol{E}} \times \tilde{\boldsymbol{E}}^*\right] = -\frac{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2} p_{\pm} \sqrt{1 - \gamma^2} \, \boldsymbol{n_k}, \tag{71}$$

имеющего в поле монохроматической плоской волны постоянное значение.

Следовательно, векторная величина усреднённой по времени силы ${m f}=mc^2{m w}$ оказывается пропорциональна векторному произведению волнового вектора и вектора дрейфовой скорости

$$\langle \boldsymbol{f} \rangle_t = mc^2 \frac{\mu^2 \sqrt{1 - \gamma^2}}{2} p_{\pm} \left[\boldsymbol{k} \times \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} \right] = \frac{r_q \lambda I}{c} \sqrt{1 - \gamma^2} p_{\pm} \left[\boldsymbol{n_k} \times \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} \right].$$
 (72)

Во втором равенстве применены соотношения (53b) и (53d).

Использование двузначной псевдоскалярной величины p_{\pm} необходимо для сохранения векторного характера уравнения (72). Поскольку волновой вектор и вектор дрейфовой скорости являются полярными векторами, их векторное произведение будет псевдовектором. Если бы при рассмотрении характеристик плоской монохроматической волны не были прояснены псевдоскалярные свойства величины p_{\pm} и было бы оставлено её обозначение в виде ± 1 , как это сделано в [6], то левая часть уравнения (72) содержала бы вектор, а правая—псевдовектор.

Усреднённая сила (72) будет равна нулю в любой инерциальной системе отсчёта, в том случае, когда частица движется в поле волны линейной поляризации $\gamma=1$. В поле волны круговой или эллиптической поляризации $\langle \boldsymbol{f} \rangle_t$ становится равной нулю в таких системах отсчёта, где дрейфовая скорость отсутствует $\overline{\boldsymbol{v}}=0$, или её направление и направление распространения волны $\boldsymbol{n_k}$ совпадают или противоположены.

При интерпретации движения точечной частицы в поле плоской монохроматической волны как движения материального объекта массой $\sqrt{1+\mu^2}\,m$ с постоянной скоростью $\overline{m v}$ возникает кажущееся противоречие, заключающееся в том, что наличие ненулевой средней внешней силы $\langle {m f} \rangle_t$ не оказывает никакого

влияния на усреднённую по времени постоянную скорость $\bar{\boldsymbol{v}}$. Но рассматриваемая здесь сила $\boldsymbol{f} = mc^2\boldsymbol{w}$ пропорциональна не вектору ускорения частицы \boldsymbol{a} , а вектору \boldsymbol{w} , определяемому формулой (21). При этом, усреднённое по времени значение трёхмерного вектора ускорения частицы $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$ равно нулю, поскольку скорость \boldsymbol{v} является периодической функцией времени.

Из первой формулы (20) и равенства $\langle w_4 \rangle_t = 0$ следует простая связь между $\langle \boldsymbol{f} \rangle_t$ и вектором $\langle \boldsymbol{E} \rangle_t$ усреднённой напряжённости электрического поля на частице

$$\langle \boldsymbol{f} \rangle_t = q \frac{(K_p U_p)}{K_4} \langle \boldsymbol{E} \rangle_t.$$
 (73)

Выразив $\langle \boldsymbol{E} \rangle_t$ из (73), получим с помощью (72) и (53) представление

$$\langle \boldsymbol{E} \rangle_t = \frac{K_4}{(K_p U_p)} \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \frac{\mu \sqrt{1 - \gamma^2}}{2} p_{\pm} \left[\boldsymbol{n_k} \times \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} \right],$$
 (74a)

в котором очевидна размерность вектора $\langle \boldsymbol{E} \rangle_t$. Усреднив равенство (27b)

$$\langle \boldsymbol{B} \rangle_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n_k} \times \langle \boldsymbol{E} \rangle_t \end{bmatrix},$$
 (74b)

запишем для псевловектора $\langle \boldsymbol{B} \rangle_t$ выражение

$$\langle \boldsymbol{B} \rangle_t = \frac{K_4}{(K_p U_p)} \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \frac{\mu \sqrt{1 - \gamma^2}}{2} p_{\pm} \left(\left(\boldsymbol{n_k} \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} \right) \boldsymbol{n_k} - \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} \right).$$
 (74c)

Как следует из (74), вектор $\langle \boldsymbol{E} \rangle_t$ перпендикулярен направлению распространения волны, дрейфовой скорости частицы и псевдовектору $\langle \boldsymbol{B} \rangle_t$:

$$\left(\langle m{E}
angle_t m{k} \right) = 0$$
 и $\left(\langle m{E}
angle_t \, \overline{m{v}} \right) = 0$ и $\left(\langle m{E}
angle_t \, \langle m{B}
angle_t \right) = 0.$

Псевдовектор $\langle {m B} \rangle_t$, в отличие от векторов $\langle {m E} \rangle_t$ и $\langle {m f} \rangle_t$, не перпендикулярен дрейфовой скорости частицы

$$\left(\langle \boldsymbol{B} \rangle_t \, \boldsymbol{k}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\langle \boldsymbol{B} \rangle_t \, \overline{\boldsymbol{v}}\right) \neq 0 \quad \text{и} \quad \left(\langle \boldsymbol{E} \rangle_t \, \langle \boldsymbol{B} \rangle_t\right) = 0.$$

Вектор $\langle {m E} \rangle_t$ является нормалью к плоскости, образуемой взаимно перпендикулярными векторами ${m k}$ и $\langle {m B} \rangle_t$. Все перпендикулярные $\langle {m E} \rangle_t$ векторы принадлежат этой плоскости. Вектор дрейфовой скорости $\overline{{m v}}$ перпендикулярен $\langle {m E} \rangle_t$ и, следовательно, векторы ${m k}$, $\overline{{m v}}$ и $\langle {m B} \rangle_t$ лежат в одной плоскости.

Абсолютные значения $\langle \boldsymbol{E} \rangle_t$ и $\langle \boldsymbol{B} \rangle_t$, как следует из (74), одинаковы

$$\left| \langle \boldsymbol{B} \rangle_t \right| = \left| \langle \boldsymbol{E} \rangle_t \right| = \frac{K_4}{(K_p U_p)} \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \frac{|\mu| \sqrt{1 - \gamma^2}}{2} \left| \left[\boldsymbol{n_k} \times \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} \right] \right|.$$
 (74d)

Рассмотрим скалярное произведение

$$\left(\langle \boldsymbol{B} \rangle_t \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c}\right) = -\frac{K_4}{(K_p U_p)} \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \frac{\mu \sqrt{1 - \gamma^2}}{2} p_{\pm} \left[\boldsymbol{n_k} \times \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c}\right]^2,$$

в выражении для которого учтено тождество трёхмерного векторного анализа. Используя (74d), запишем его в виде

$$\left(\langle \boldsymbol{B} \rangle_t \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c}\right) = -\frac{\mu}{|\mu|} p_{\pm} \left| \left[\boldsymbol{n_k} \times \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} \right] \right| \left| \langle \boldsymbol{B} \rangle_t \right|.$$

Отсюда следует формула для косинуса угла между векторами $\overline{m{v}}$ и $\langle {m{B}}
angle_t$

$$\cos\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}\langle\boldsymbol{B}\rangle_{t}}\right) = \frac{(\langle\boldsymbol{B}\rangle_{t}\overline{\boldsymbol{v}})}{|\langle\boldsymbol{B}\rangle_{t}|\,|\overline{\boldsymbol{v}}|} = -\frac{\mu}{|\mu|}\,p_{\pm}\left|\left[\boldsymbol{n_{k}}\times\frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{|\overline{\boldsymbol{v}}|}\right]\right| = -\frac{q}{|q|}\,p_{\pm}\left|\left[\boldsymbol{n_{k}}\times\frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{|\overline{\boldsymbol{v}}|}\right]\right|.$$

Знак проекции усреднённого по времени псевдовектора $\langle \boldsymbol{B} \rangle_t$ на направление дрейфовой скорости частицы в поле волны определяется исключительно поляризацией волны и знаком зарядом частицы. В волне левой поляризации проекция $\langle \boldsymbol{B} \rangle_t$ на направление дрейфовой скорости электрона всегда, если только сам вектор не равен нулю, положительна.

3.7 Траектория частицы при нулевой дрейфовой скорости

Используя тригонометрические тождества и определения четырёхмерных векторов Z_i в (56), перейдём в записи уравнения (62), описывающем мировую линию частицы в поле волны, от параметра изменения фазы Φ к параметру фазы φ

$$X_{i} = X_{i}^{0} + \frac{\overline{U}_{i}}{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)} \left(\varphi - \varphi_{0}\right) - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \frac{K_{4}}{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)^{2}} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} F_{in}\overline{U}_{n} - \frac{\gamma}{4} \frac{\mu^{2}}{1 + \mu^{2}} \sin\left(2\varphi + \delta\right) \frac{K_{i}}{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)^{2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \frac{K_{4}}{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)^{2}} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} F_{in}^{0}\overline{U}_{n} + \frac{\gamma}{4} \frac{\mu^{2}}{1 + \mu^{2}} \sin\left(2\varphi_{0} + \delta\right) \frac{K_{i}}{\left(K_{p}\overline{U}_{p}\right)^{2}}.$$

$$(75)$$

В случае нулевой дрейфовой скорости частицы в поле волны

$$\overline{\boldsymbol{v}} = 0; \qquad \overline{U}_i = \left\{ \frac{\overline{U}_{\alpha}}{\overline{U}_4} \right\} = \left\{ 0 \atop 1 \right\}; \qquad \left(K_p \overline{U}_p \right) = K_4, \qquad (76)$$

соответствующее пространственной части уравнения (75), трёхмерное векторное представление

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}^{0} = -\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \frac{1}{k_{4}} \left(\sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} \boldsymbol{E} + \frac{\gamma}{4} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \sin(2\varphi + \delta) \boldsymbol{n_{k}} \right)$$
(77)

содержит постоянный вектор, для которого принято обозначение

$$r^{0} = x^{0} + \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \frac{1}{k_{4}} \sqrt{\frac{2}{\tilde{E}\tilde{E}^{*}}} E^{0} + \frac{\gamma}{4} \frac{\mu^{2}}{1 + \mu^{2}} \sin(2\varphi_{0} + \delta) \frac{n_{k}}{k_{4}}.$$

Перепишем (77) в виде

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}^{0} = -\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \frac{\lambda}{2\pi} \boldsymbol{g}(\varphi), \qquad (77')$$

где $g(\varphi)$ — безразмерная векторная функция, в которой вектор напряжённости электрического поля задаётся либо формулой (37a)

$$\mathbf{g} = \cos(\varphi + \delta/2) \sqrt{1 + \gamma} \, \mathbf{n}_{\mathfrak{a}} - \sin(\varphi + \delta/2) \sqrt{1 - \gamma} \, p_{\pm} \left[\mathbf{n}_{\mathfrak{a}} \times \mathbf{n}_{k} \right] + \frac{\gamma}{4} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \sin(2\varphi + \delta) \, \mathbf{n}_{k},$$

$$(77'a)$$

либо формулой (40а)

$$\mathbf{g} = \cos(\varphi + \delta/2 + \eta) \, \mathbf{n}_{\eta} - \cos(\varphi + \delta/2 - \eta) \, p_{\pm} \left[\mathbf{n}_{\eta} \times \mathbf{n}_{k} \right] + \frac{1}{4} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \cos 2\eta \, \sin(2\varphi + \delta) \, \mathbf{n}_{k}.$$

$$(77'b)$$

Уравнения (77'а) и (77'b) при одинаковых значениях содержащихся в них параметрах μ и $\gamma = \cos 2\eta$ описывают одну и ту кривую, но в разных «системах координат», задаваемых тремя взаимно перпендикулярными единичными векторами. Единичные векторы \boldsymbol{n}_{η} и $p_{\pm}\left[\boldsymbol{n}_{\eta}\times\boldsymbol{n}_{k}\right]$ представления (77'b) повёрнуты в плоскости перпендикулярной \boldsymbol{n}_{k} на угол сорок пять градусов относительно векторов $\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}}$ и $p_{\pm}\left[\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}}\times\boldsymbol{n}_{k}\right]$ представления (77'a).

Обе формы записи описывают в предельных случаях известные результаты для форм траекторий частицы: для круговой поляризации $\gamma=0$ и $\eta=\pi/4$ окружность, лежащая в плоскости перпендикулярной направлению распространения волны; для линейной поляризации $\gamma=1$ и $\eta=0$ траектория в форме восьмёрки лежит в плоскости, образуемой направлением вдоль которого колеблется вектор напряжённости электрического поля и волновым вектором.

При малых значениях параметра μ третьим слагаемым в уравнениях (77'а) и (77'b) можно пренебречь, тем самым пренебрегая движением частицы вдоль направления распространения волны. Смещение частицы пропорционально значению вектора напряжённости электрического поля

$$|\mu| \ll 1$$
: $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}^0 = -q\boldsymbol{E}/\left(m\omega^2\right)$.

Кроме того, пренебрежение при малых μ движением частицы вдоль направления распространения поперечной электромагнитной волны позволяет считать фазу волны в точке нахождения частицы зависящей только от времени

$$\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{E}\boldsymbol{k}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}^0) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega t - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}) = \omega t - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}^0).$$

В волне линейной поляризации с амплитудой $E_{\rm A} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}$ для зависимости координаты частицы от времени получим

$$|\mu| \ll 1; \quad \gamma = 1:$$
 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}^0 = -\frac{qE_A}{m\omega^2}\cos\left(\omega t - \omega t^0\right)\,\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}},$ (78)

где $t^0 = \left({m n_k r^0} \right)/c - \delta/\left({2\omega} \right)$, известный результат решения нерелятивистской задачи.

Для больших значениях параметра μ из (77) следует выражение

$$\begin{aligned} |\mu| \gg 1: & \quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}^0 = \frac{\lambda}{2\pi} \left(-\frac{\gamma}{4} \sin\left(2\varphi + \delta\right) \boldsymbol{n_k} - \right. \\ & \left. -\frac{q}{|q|} \cos\left(\varphi + \delta/2\right) \sqrt{1 + \gamma} \, \boldsymbol{n_a} + \frac{q}{|q|} \sin\left(\varphi + \delta/2\right) \, \sqrt{1 - \gamma} \, p_{\pm} \left[\boldsymbol{n_a} \times \boldsymbol{n_k} \right] \right). \end{aligned}$$

Амплитуда движения частицы вдоль направления распространения волны становится, в случаях линейной и эллиптической поляризаций, сравнима с амплитудой движения в плоскости перпендикулярной этому направлению,

С помощью (77'а) или (77'b) можно найти экстремумы функции $\mathbf{g}^{2}(\varphi)$, совпадающие с экстремумами функции $|\mathbf{g}(\varphi)|$

$$|oldsymbol{g}|_{\max} = \sqrt{1+\gamma} = \sqrt{2}\cos\eta$$
 и $|oldsymbol{g}|_{\min} = \sqrt{1-\gamma} = \sqrt{2}\sin\eta,$

которые соответствут максимальному и минимальному расстоянию от частицы до точки трёхмерного пространства, задаваемой вектором \mathbf{r}^0 . Для волны круговой поляризации $\gamma=0$ и $\eta=\pi/4$ они совпадают— частица движется по окружности, а при линейной поляризации $\gamma=1$ и $\eta=0$, когда траектория имеет форму восьмёрки, минимальное расстояние до центра равно нулю.

Векторное уравнение (77'), определяющее траекторию частицы при любых значениях параметра μ в волне эллиптической, в общем случае, поляризации,

можно переписать с использованием нормированной на максимальное значение $\sqrt{1+\gamma}$, функцией $\boldsymbol{g}^{\rm n}\left(\varphi\right)$, в виде

$$rac{oldsymbol{x} - oldsymbol{r}^0}{\left|oldsymbol{x} - oldsymbol{r}^0
ight|_{ ext{max}}} = -oldsymbol{g}^{ ext{n}} = -rac{oldsymbol{g}}{\sqrt{1+\gamma}}, \quad ext{где} \quad \left|oldsymbol{x} - oldsymbol{r}^0
ight|_{ ext{max}} = rac{|\mu|}{\sqrt{1+\mu^2}} rac{\sqrt{1+\gamma}}{2\pi} \lambda.$$

Форма трёхмерной траектории, описываемая векторной функцией $\boldsymbol{g}^{n}\left(\varphi\right)$, при значениях параметров $\gamma=0,9$ и $\mu=1$, для которых

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}^0|_{\text{max}} = \left(1/\sqrt{2}\right) \left(\sqrt{1,9}/2\pi\right) \lambda \approx 0,16 \lambda$$

показана на рисунке 1. Единицей измерения длины, как для левой, так и для

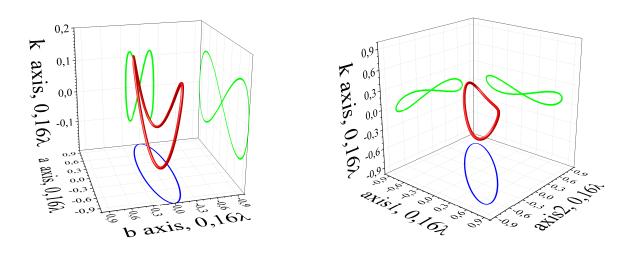


Рис. 1: Форма трёхмерной траектории (красная кривая) частицы, движущейся в поле волны эллиптической поляризации, в системе отсчёта, в которой дрейфовая скорость частицы равна нулю. Зеленым и синим цветом показаны проекции трёхмерной траектории на три плоскости, каждая из которых перпендикулярна одной из осей декартовой системы координат. Синим цветом показаны проекции трёхмерной траектории на плоскость, перпендикулярную направлению распространения волны.

правой части рисунка является $|x-r^0|_{\rm max}\approx 0,16\,\lambda$. Обе части рисунка демонстрируют одну и ту кривую, но в разных системах координат, задаваемых тремя взаимно перпендикулярными единичными векторами. На левой части рисунка оси, обозначенные как "а axis"и "b axis", соответствуют большой и малой полуосям эллипса поляризации электромагнитной волны, а на правой его части оси, обозначенные как "axis 1"и "axis 2", повёрнуты в плоскости перпендикулярной направлению распространения волны на угол сорок пять градусов. Масштаб левого рисунка вдоль оси "k axis", соответствующей волновому вектору, для наглядности увеличен, а на правом — масштабы по всем осям одинаковы.

3.8 Усреднённые величины при нулевой дрейфовой скорости

В системе отсчёта, где частица в среднем покоится, или при условии нулевой дрейфовой скорости (76), согласно (56·1) и (56·2), содержащиеся в (65) временные компоненты четырёхвекторов $Z_4^{(1)}$ и $Z_4^{(2)}$ равны нулю. Определяя из (65) средние по времени значения импульса \boldsymbol{p} и кинетической энергии \mathcal{K} , сравним их со значениями тех же величин, усреднённых по фазе или по собственному времени

$$\frac{\langle \boldsymbol{p} \rangle_{\Phi}}{mc} = 0; \qquad \frac{\langle \boldsymbol{p} \rangle_{t}}{mc} = \frac{\gamma^{2}}{8\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{\mu^{4}}{1+\mu^{2}} \boldsymbol{n_{k}};
\frac{\langle \mathcal{K} \rangle_{\Phi}}{mc^{2}} = \sqrt{1+\mu^{2}} - 1; \qquad \frac{\langle \mathcal{K} \rangle_{t}}{mc^{2}} = \sqrt{1+\mu^{2}} - 1 + \frac{\gamma^{2}}{8\sqrt{1+\mu^{2}}} \frac{\mu^{4}}{1+\mu^{2}}.$$

Оказывается, что в системе отсчёта, где частица в среднем покоится, усреднённый по времени импульс частицы равен нулю только в случае круговой поляризации волны $\gamma=1$, а в случаях линейной и эллиптической поляризаций, вектор $\langle \boldsymbol{p} \rangle_t$ направлен в сторону распространения волны.

Для малых значений $|\mu|$ средняя кинетическая энергия частицы равна величине

$$|\mu| \ll 1$$
: $\langle \mathcal{K} \rangle_t \approx \frac{1}{2} m c^2 \mu^2 = \frac{1}{4} \frac{q^2}{m \omega^2} \tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*.$

Она совпадает с величиной $\langle \mathcal{K} \rangle_t$, получаемой в нерелятивистской задаче (78)

$$|\mu| \ll 1; \quad \gamma = 1: \qquad \boldsymbol{v} = \frac{qE_{\mathrm{A}}}{m\omega}\sin\left(\omega t - \omega \tau^{0}\right) \, \boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \boldsymbol{v}^{2} \right\rangle_{t} = \frac{1}{2} \left(\frac{qE_{\mathrm{A}}}{m\omega}\right)^{2},$$

где кинетическая энергия частицы определяется формулой $\mathcal{K} = m\mathbf{v}^2/2$.

Из (67), при условии нулевой дрейфовой скорости (76), получим отношение мощности рассеянного излучения к интенсивности падающего

$$\frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0 \left(1 + \mu^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \right).$$

Если выразить отсюда \mathcal{P} , то получаемые для случая $\gamma = 0$, соответствующего круговой поляризации волны, и для случая $\gamma = 1$, соответствующего линейной поляризации, значения мощности с точностью до обозначений совпадут с приведёнными в [3] решениями задач 3 и 4 к \$73.

Полную излучаемую за период энергию (68)

$$\Delta \mathcal{E}_T = \frac{\lambda}{c} \, \sigma_0 I \left(1 + \mu^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \right).$$

сравним с величиной средней кинетической энергии частицы для случая круговой поляризации волны

$$\gamma = 0:$$

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_T}{\langle \mathcal{K} \rangle_t} = \frac{\lambda \, \sigma_0 I}{mc^3} \, \frac{1 + \mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2} - 1} = \frac{8\pi^2}{3} \, \frac{r_q}{\lambda} \, \frac{\mu^2 \, (1 + \mu^2)}{\sqrt{1 + \mu^2} - 1}$$

В случае малых значений $|\mu|$ получим соотношение

$$\gamma = 0; \quad |\mu| \ll 1: \qquad \frac{\Delta \mathcal{E}_T}{\langle \mathcal{K} \rangle_t} \approx \frac{16\pi^2}{3} \frac{r_q}{\lambda} \approx 53 \frac{r_q}{\lambda}.$$

При одновременном выполнении условий $|\mu|\ll 1$ и $\lambda\gg 53\,r_q$ количество электромагнитной энергии, излучаемой ускоренно движущимся зарядом за время равное периоду, много меньше средней кинетической энергии этой частицы. Следовательно, учёт сил радиационного трения, в этом случае, приведёт лишь к малым поправкам к найденному без учёта этих сил закону движения точечной частицы в поле волны.

Согласно (72) и (74), при нулевой дрейфовой скорости (76) усреднённые по времени сила и поля на частице оказываются равными нулю

$$\langle \boldsymbol{f} \rangle_t = 0;$$
 $\langle \boldsymbol{E} \rangle_t = 0$ и $\langle \boldsymbol{B} \rangle_t = 0.$

3.9 Направление и величина дрейфовой скорости частицы, покоившейся до прихода волны

Для случая бесконечной монохроматической плоской волны, занимающей всё пространство в любой момент времени, на мировой линии частицы, целиком принадлежащей области существования волны, произвольно выбиралась начальная точка X_k^0 , в которой компоненты четырёхвектора скорости имели значения U_i^0 . При рассмотрении же волны с резким фронтом в качестве начальной четырёхточки X_k^0 , представляется разумным выбрать пространственные координаты x_{α}^{0} , которые имеет частица, в момент $x_{4}^{0}=c\,t^{0}$ прихода переднего фронта волны в эту точку. Частица движется равномерно и прямолинейно или покоится до момента прихода переднего фронта волны точку с координатами x_{α}^{0} . В силу непрерывности всех составляющих вектора скорости в момент прихода волны в точку нахождения частицы, начальная скорость частицы в поле волны совпадает со скоростью частицы до прихода волны. Четырёхвектор U_i^0 , является как начальным значением четырёхскорости частицы в поле волны, так и постоянным до прихода волны четырёхвектором скорости частицы. В точке четырёхмерного континуума X_i^0 фаза волны имеет значение $\varphi_0 = K_p X_p^0$. Уравнение $\varphi = \varphi_0$ описывает плоскость перпендикулярную направлению распространения волны, движущуюся в этом направлении со

скоростью света. Точка трёхмерного пространства с координатами x_{α}^{0} принадлежит этой плоскости в момент времени $t^{0}=x_{4}^{0}/c$, то есть в момент прихода переднего фронта волны в точку нахождения частицы, откуда следует, что уравнение $\varphi=\varphi_{0}$ описывает передний фронт волны. Таким образом, в ситуации когда волна имеет резкий передний фронт, начальными условиями удобно считать скорость частицы до прихода волны и значения полевых величин на переднем фронте волны.

Для случая нулевой начальной скорости частицы в поле волны выпишем значения инвариантных скалярных произведений волнового вектора на четырёхвектор мгновенной скорости и на постоянный четырёхвектор дрейфовой скорости частицы

$$\mathbf{v}^{0} = 0; \quad U_{i}^{0} = \begin{Bmatrix} U_{\alpha}^{0} \\ U_{4}^{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad (K_{p}U_{p}) = K_{4}; \quad (K_{p}\overline{U}_{p}) = \frac{K_{4}}{\sqrt{1 + \mu^{2}}}.$$
 (79)

Последнее равенство в (79) следует из (58).

Временная компонента четырёхвектора дрейфовой скорости частицы, покоившейся до прихода волны, фактически уже была найдена (60) при обсуждении уравнения (59), где дрейфовая скорость рассматривалась в специально выбранной системе отсчёта, в которой скорость частицы равна нулю в начальной точке мировой линии. Там же было показано, что выражение для \overline{U}_4 может быть преобразовано к такой форме записи которая явно демонстрирует выполнение неравенства $\overline{U}_4 > 1$. Поскольку $\overline{U}_4 = \overline{u}_4$ связано с квадратом трёхмерной дрейфовой скорости $\overline{\boldsymbol{v}}$ частицы соотношением, приведённым в (61), то это означает, что трёхмерный вектор $\overline{\boldsymbol{v}}$ дрейфовой скорости частицы, покоившейся до прихода волны, не может быть равен нулю.

Используя выражения для \overline{U}_4 и $(K_p\overline{U}_p)$ определим по формуле (63) период

$$T = T_{\omega} \left(1 + \mu^2 - \frac{\gamma}{2} \mu^2 \cos(2\varphi_0 + \delta) \right),$$

который оказывается больше периода T_{ω} волны, в поле которой движется частица, что означает что направление распространения волны образует острый угол с направлением дрейфовой скорости или эти направления совпадают.

Пространственные компоненты четырёхвектора дрейфовой скорости (59) частицы, покоившейся до прихода волны (79), имеют вид

$$\overline{U}_{\alpha} = \frac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \cos(2\varphi_0 + \delta) \right) \frac{K_{\alpha}}{K_4} + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}} \left(\frac{dF_{\alpha 4}}{d\varphi} \right)^0.$$

Воспользовавшись (42) и другими определениями, можно переписать это вы-

ражение в форме трёхмерного векторного равенства

$$\overline{u}_{4} \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} = \frac{\mu^{2}}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \cos(2\varphi_{0} + \delta) \right) \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^{2}}} \left(-\sin(\varphi_{0} + \delta/2) \sqrt{1+\gamma} \, \boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} - \cos(\varphi_{0} + \delta/2) \sqrt{1-\gamma} \, p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} \times \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} \right] \right), \tag{80a}$$

в котором временная компонента четырёхвектора дрейфовой скорости, покоившейся до прихода волны частицы, имеет значение

$$\overline{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\overline{v}}{c}\right)^2}} = \sqrt{1 + \mu^2} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \cos\left(2\varphi_0 + \delta\right) \right). \tag{80b}$$

Из равенства (80a) видно, что при любых возможных значениях параметров, содержащихся в правой части этого уравнения, дрейфовая скорость первоначально покоившейся частицы будет всегда иметь составляющую, направленную вдоль волнового вектора, поскольку $1-\frac{\gamma}{2}\cos{(2\varphi_0+\delta)}>1$. Этим ещё раз подтверждается то обстоятельство, что направление распространения волны образует острый угол с направлением дрейфовой скорости или эти направления совпадают.

Вектор дрейфовой скорости не будет иметь составляющей, направленной перпендикулярно волновому вектору, только в случае одновременного выполнения условий

$$\gamma = 1$$
 и $\sin(\varphi_0 + \delta/2) = 0$ \Rightarrow $\varphi_0 + \delta/2 = \pi N$,

где N— целое число. Эти условия соответствуют ситуации, в которой на переднем фронте волны линейной поляризации модуль вектора напряжённости электрического поля (37а) принимает максимально возможное для этой волны значение. Для гармонических функций удвоенного аргумента при этом условии получаем

$$2\varphi_0 + \delta = 2\pi N$$
 \Rightarrow $\sin(2\varphi_0 + \delta) = 0$ и $\cos(2\varphi_0 + \delta) = 1$.

Из равенств (80) тогда следуют выражения

$$\overline{u}_4 \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}} \boldsymbol{n_k}$$
 if $\overline{u}_4 = \frac{1+\frac{1}{2}\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}}$, \Rightarrow $\frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} = \frac{\mu^2}{2+\mu^2} \boldsymbol{n_k}$.

Во всех остальных случаях, кроме только что описанного, дрейфовая скорость первоначально покоившейся частицы будет всегда иметь как составляющую, направленную вдоль волнового вектора, так и перпендикулярную ей.

С помощью (80а) определим тангенс угла между дрейфовой скоростью частицы и направлением распространения волны. Составляющая дрейфовой скорости, перпендикулярная волновому вектору, имеет значение

$$\overline{\boldsymbol{v}}_{\perp} = \frac{c}{\overline{u}_4} \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(-\sin\left(\varphi_0 + \delta/2\right) \sqrt{1+\gamma} \, \boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} - \cos\left(\varphi_0 + \delta/2\right) \sqrt{1-\gamma} \, p_{\pm} \left[\boldsymbol{n}_{\mathfrak{a}} \times \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} \right] \right),$$

а её модуль $|\overline{oldsymbol{v}}_{\perp}| = \sqrt{\left(\overline{oldsymbol{v}}_{\perp}\right)^2}$ равен величине

$$|\overline{\boldsymbol{v}}_{\perp}| = \frac{c}{\overline{u}_4} \frac{|\mu|}{\sqrt{1+\mu^2}} \sqrt{1-\gamma\cos\left(2\varphi_0+\delta\right)} \tag{81}$$

Отношение модулей перпендикулярной $|\overline{m{v}}_\perp|$ и параллельной

$$\overline{m{v}}_{\parallel} = rac{c}{\overline{u}_4} rac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(1 - rac{\gamma}{2} \cos\left(2arphi_0 + \delta
ight)
ight) m{n_k}$$

составляющих будет равно тангенсу угла между направлением дрейфовой скоростью и волновым вектором

$$\operatorname{tg}\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}}\right) = \frac{|\overline{\boldsymbol{v}}_{\perp}|}{|\overline{\boldsymbol{v}}_{\parallel}|} = \frac{1}{|\mu|} \frac{\sqrt{1 - \gamma \cos\left(2\varphi_0 + \delta\right)}}{1 - \frac{\gamma}{2} \cos\left(2\varphi_0 + \delta\right)},\tag{82}$$

который оказывается обратно пропорционален параметру $|\mu|$ и зависит от значения параметра эллиптичности γ падающей волны. Содержащаяся в (82) полная фаза $\varphi_0 + \delta/2$, то есть сумма начальной фазы $\delta/2$ и фазы φ_0 , определяет значения полевых величин на переднем фронте волны.

Для волны круговой поляризации абсолютная величина дрейфовой скорости, определяемая из (80b), и угол между её направлением и волновым вектором (82) не зависят от значения полной фазы волны $\varphi_0 + \delta/2$ на её переднем фронте

$$\gamma = 0:$$
 $\operatorname{tg}\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}}\right) = \frac{1}{|\mu|};$ $\overline{u}_4 = \sqrt{1+\mu^2};$ $\frac{|\overline{\boldsymbol{v}}|}{c} = \frac{|\mu|}{\sqrt{1+\mu^2}}.$

Если модуль параметра μ много меньше единицы

$$\gamma = 0; \quad |\mu| \ll 1: \quad \operatorname{tg}\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}}\widehat{\boldsymbol{k}}\right) = \frac{1}{|\mu|}; \quad \frac{|\overline{\boldsymbol{v}}|}{c} \approx |\mu|; \quad |\overline{\boldsymbol{v}}| \operatorname{tg}\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}}\widehat{\boldsymbol{k}}\right) \approx c,$$

то дрейфовая скорость частицы будет направлена почти перпендикулярно направлению распространения волны. Угол между ними может быть сколь угодно близок к прямому, но поскольку $|\mu| > 1$, будет всегда оставаться острым

углом. В рассматриваемом случае частицы, покоившейся до прихода волны круговой поляризации, параметр μ^2 приобретает дополнительный физический смысл, а именно — корень из этого безразмерного параметра, при условии его малости, оказывается равен отношению абсолютной величины дрейфовой скорости к скорости света. Если модуль параметра μ много больше единицы

$$\gamma = 0; \quad |\mu| \gg 1: \quad \operatorname{tg}\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}}\widehat{\boldsymbol{k}}\right) = \frac{1}{|\mu|}; \quad \overline{u}_4 \approx |\mu|; \quad \overline{u}_4 \operatorname{tg}\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}}\widehat{\boldsymbol{k}}\right) \approx 1,$$

то направления дрейфовой скорости и волнового вектора будут мало отличаться, никогда при этом не совпадая.

Рассмотрим движение частицы в поле монохроматической плоской волны круговой поляризации $\gamma=0$ при малых значениях $|\mu|$. В системе отсчёта, в которой дрейфовая скорость равна нулю $\overline{\boldsymbol{v}}=0$, то есть частица в среднем покоится (76), траекторией её движения является окружность, лежащая в плоскости перпендикулярной направлению волны. Временно обозначим мгновенную скорость частицы в этой системе отсчёта как \boldsymbol{v}' , а временную компоненту четырёхвектора скорости как u_4' . Найдём её значение, например, из временной компоненты четырёхвекторного уравнения (57), при условии (76)

$$\overline{\boldsymbol{v}} = 0; \qquad \gamma = 0: \qquad u_4' = \sqrt{1 + \mu^2}.$$

При малых $|\mu|$ постоянная величина модуля вектора м
гновенной скорости

$$\overline{\boldsymbol{v}} = 0; \quad \gamma = 0; \quad |\mu| \ll 1: \quad \frac{|\boldsymbol{v}'|}{c} = \frac{\sqrt{u_4'^2 - 1}}{u_4'} = \frac{|\mu|}{\sqrt{1 + \mu^2}} \approx |\mu|$$

много меньше скорости света c. В нерелятивистском $|v'|\ll c$ случае мгновенная скорость частицы v в системе отсчёта, где частица покоилась до прихода волны круговой поляризации, является векторной суммой $v=v'+\overline{v}$ мгновенной скорости частицы в движущейся системе отсчёта v' и скорости самой системы отсчёта \overline{v} , которая при рассматриваемых условиях $|\mu|\ll 1$ и $\gamma=0$ мала по сравнению со скоростью света $|\overline{v}|\ll c$ и имеет направление перпендикулярное направлению распространению волны. Отсюда следует, что в нерелятивистском случае $|\mu|\ll 1$ траекторией частицы, которая покоилась до прихода волны круговой поляризации $\gamma=0$, является циклоида, которая определяется как как траектория фиксированной точки окружности, катящейся без скольжения по прямой. При рассматриваемых условиях траектория частицы принадлежит плоскости перпендикулярной направлению распространения волны.

Для случаев эллиптической и линейной поляризации $\gamma \neq 0$ падающей волны определим область возможных значений временной компоненты четырёхвектора дрейфовой скорости (80b) и угла между дрейфовой скоростью частицы и

направлением распространения волны (82). Для этого исследуем экстремумы, содержащейся в правой части (82), неотрицательной функции, зависящей от значения полной фазы волны $\varphi_0 + \delta/2$ на её переднем фронте

$$h(\varphi_0 + \delta/2) = \frac{\sqrt{1 - \gamma \cos(2\varphi_0 + \delta)}}{1 - \frac{\gamma}{2} \cos(2\varphi_0 + \delta)}; \qquad h(\varphi_0 + \delta/2) \geqslant 0.$$

Производная этой функции $h'(\varphi_0 + \delta/2)$ в случае линейной поляризации $\gamma = 1$ не определена в тех точках, где $\cos(2\varphi_0 + \delta) = 1$, но эти точки, в которых сама функция $h(\varphi_0 + \delta/2)$ равна нулю, являются минимумами рассматриваемой функции в силу её неотрицательности. Приравнивая к нулю производную h' и анализируя полученное равенство, заключаем, что при любых значениях $\gamma \neq 0$ все экстремальные значения функции $h(\varphi_0 + \delta/2)$ находятся в точках

$$\sin(2\varphi_0 + \delta) = 0$$
 или $\cos(2\varphi_0 + \delta) = 0$ \Rightarrow $\varphi_0 + \delta/2 = \frac{\pi}{4}N$,

где N — целое число. Тангенс угла (82), в силу его пропорциональности функции $h\left(\varphi_0+\delta/2\right)$, принимает экстремальные значения в этих же точках. Кроме того, при выполнении условия $\sin\left(2\varphi_0+\delta\right)=0$, временная компонента четырёхвектора дрейфовой скорости, как следует из (80b), так же имеет экстремальное значение.

Для функций $\operatorname{tg}\left(\widehat{\overline{m{v}}m{k}}\right)$ и \overline{u}_4 составим таблицу их экстремальных значений

$$\varphi_{0} + \delta/2 \qquad \operatorname{tg}\left(\widehat{\boldsymbol{v}}\widehat{\boldsymbol{k}}\right) \qquad \overline{u}_{4}$$

$$0 \qquad \operatorname{tg}\left(\widehat{\boldsymbol{v}}\widehat{\boldsymbol{k}}\right)_{\min} = \frac{1}{|\mu|} \frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\frac{\gamma}{2}} \qquad \overline{u}_{4\min} = \sqrt{1+\mu^{2}} \left(1-\frac{\gamma}{2} \frac{\mu^{2}}{1+\mu^{2}}\right)$$

$$\pi/4 \qquad \operatorname{tg}\left(\widehat{\boldsymbol{v}}\widehat{\boldsymbol{k}}\right)_{\max} = \frac{1}{|\mu|} \qquad \sqrt{1+\mu^{2}}$$

$$\pi/2 \qquad \frac{1}{|\mu|} \frac{\sqrt{1+\gamma}}{1+\frac{\gamma}{2}} \qquad \overline{u}_{4\max} = \sqrt{1+\mu^{2}} \left(1+\frac{\gamma}{2} \frac{\mu^{2}}{1+\mu^{2}}\right)$$

$$3\pi/4 \qquad \operatorname{tg}\left(\widehat{\boldsymbol{v}}\widehat{\boldsymbol{k}}\right)_{\max} = \frac{1}{|\mu|} \qquad \sqrt{1-\gamma}$$

$$\pi \qquad \operatorname{tg}\left(\widehat{\boldsymbol{v}}\widehat{\boldsymbol{k}}\right)_{\min} = \frac{1}{|\mu|} \frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\frac{\gamma}{2}} \qquad \overline{u}_{4\min} = \sqrt{1+\mu^{2}} \left(1-\frac{\gamma}{2} \frac{\mu^{2}}{1+\mu^{2}}\right),$$

которая описывает и случай круговой поляризации $\gamma=0,$ при которой все экстремальные значения функций одинаковы.

Как видно из таблицы, областью значений величины тангенса угла между вектором дрейфовой скорости частицы и направлением распространения

эллиптически поляризованной волны $0<\gamma<1$ является промежуток

$$0<\gamma<1: \qquad \frac{1}{|\mu|}\frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\frac{\gamma}{2}}\leqslant \operatorname{tg}\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}}\right)\leqslant \frac{1}{|\mu|},$$

а возможные значения временной компоненты четырёхвектора дрейфовой скорости подчинены неравенству

$$0 < \gamma < 1:$$
 $\sqrt{1+\mu^2} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \frac{\mu^2}{1+\mu^2}\right) \leqslant \overline{u}_4 \leqslant \sqrt{1+\mu^2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{\mu^2}{1+\mu^2}\right).$

Областью значений величины модуля вектора дрейфовой скорости частицы, соответствующей предыдущему неравенству, является промежуток

$$0<\gamma<1: \qquad \frac{|\mu|}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{\sqrt{1-\gamma+\frac{\gamma^2}{4}\frac{\mu^2}{1+\mu^2}}}{1-\frac{\gamma}{2}\frac{\mu^2}{1+\mu^2}}\leqslant \frac{|\overline{\boldsymbol{v}}|}{c}\leqslant \frac{|\mu|}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{\sqrt{1+\gamma+\frac{\gamma^2}{4}\frac{\mu^2}{1+\mu^2}}}{1+\frac{\gamma}{2}\frac{\mu^2}{1+\mu^2}}.$$

Неравенство для $|\overline{\boldsymbol{v}}|$ следует из соотношения $\overline{u}_4 = 1/\sqrt{1-(\overline{\boldsymbol{v}}/c)^2}$.

На рисунке 2 показаны графики функции $h\left(\varphi_0+\dot{\delta}/2\right)$ для двух значений параметра эллиптичности $\gamma=0,9$ и $\gamma=0,5$ падающей волны. Достигаемые

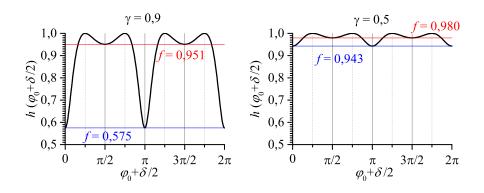


Рис. 2: Графики функции $h\left(\varphi_0+\delta/2\right)$ (чёрные кривые) для значений $\gamma=0,9$ и $\gamma=0,5.$

при $\varphi_0 + \delta/2 = \pi N$, минимальные значения этих функций

$$\gamma = 0,9:$$
 $\frac{\sqrt{1-0,9}}{1-\frac{0,9}{2}} \approx 0,575;$ $\gamma = 0,5:$ $\frac{\sqrt{1-0,5}}{1-\frac{0,5}{2}} \approx 0,943,$

соответствуют минимальным в рассматриваемых случаях углам

$$\gamma = 0, 9: \quad \left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}}\right)_{\min} \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{0,575}{|\mu|}\right); \qquad \gamma = 0, 5: \quad \left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}}\right)_{\min} \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{0,943}{|\mu|}\right).$$

В этих же точках $\varphi_0 + \delta/2 = \pi N$, свои минимально возможные значения будут принимать временная компонента четырёхвектора дрейфовой скорости и модуль вектора дрейфовой скорости

$$\overline{u}_{4\min} = \sqrt{1 + \mu^2} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right) \qquad \text{if} \qquad \frac{|\overline{\boldsymbol{v}}|_{\min}}{c} = \frac{|\mu|}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{\sqrt{1 - \gamma + \frac{\gamma^2}{4} \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}}}{1 - \frac{\gamma}{2} \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}}.$$

Максимальные значения функция $h\left(\varphi_0+\delta/2\right)$ принимает в точках $\varphi_0+\delta/2=\pi/4+\pi N/2$, что соответствует максимальным, не зависящим от γ , углам

$$\left(\widehat{\overline{v}k}\right)_{\max} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|\mu|}\right).$$

Величина \overline{u}_4 имеет в этих точках промежуточное между максимальным и минимальным значение $\sqrt{1+\mu^2}$. В точках локального минимума $\varphi_0+\delta/2=\pi/2+\pi N$, в которых функция $h\left(\varphi_0+\delta/2\right)$ принимает значения

$$\gamma = 0,9:$$
 $\frac{\sqrt{1+0,9}}{1+\frac{0,9}{2}} \approx 0,951;$ $\gamma = 0,5:$ $\frac{\sqrt{1+0,5}}{1+\frac{0,5}{2}} \approx 0,980,$

величина \overline{u}_4 и модуль вектора дрейфовой скорости

$$\overline{u}_{4\max} = \sqrt{1+\mu^2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \right) \qquad \text{if} \qquad \frac{|\overline{\boldsymbol{v}}|_{\max}}{c} = \frac{|\mu|}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{\sqrt{1+\gamma + \frac{\gamma^2}{4} \frac{\mu^2}{1+\mu^2}}}{1 + \frac{\gamma}{2} \frac{\mu^2}{1+\mu^2}}$$

достигают максимальных значений.

Если модуль параметра μ много меньше единицы, то абсолютная величина вектора дрейфовой скорости частицы будет лежать в промежутке

$$0 < \gamma < 1;$$
 $|\mu| \ll 1:$ $|\mu| \sqrt{1 - \gamma} \leqslant \frac{|\overline{v}|}{c} \leqslant |\mu| \sqrt{1 + \gamma}.$

В рассматриваемом случае частицы, покоившейся до прихода волны эллиптической поляризации, отношению абсолютной величины максимально возможной дрейфовой скорости к скорости света имеет тот же порядок, что и корень из безразмерного параметра μ^2 , при условии его малости. Если же модуль параметра μ много больше единицы

$$0 < \gamma < 1;$$
 $|\mu| \gg 1:$ $|\mu| \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \leqslant \overline{u}_4 \leqslant |\mu| \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right),$

область значений величины \overline{u}_4 определяется приведённым выше неравенством.

В случае линейной поляризации $\gamma=1$ падающей волны областью значений функции $h\left(\varphi_0+\delta/2\right)$, график которой приведён на рисунке 3, является

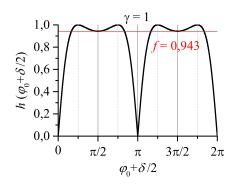


Рис. 3: График функции $h\left(\varphi_0+\delta/2\right)$ (чёрная кривая) для значения $\gamma=1.$

промежуток от нуля до единицы. Следовательно, величина угла между направлениями дрейфовой скорости и волновым вектором $\widehat{\overline{vk}}$, будет находиться в промежутке

$$0 \leqslant |\mu| \operatorname{tg}\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}}\right) \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \widehat{\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}} \leqslant \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|\mu|}\right),$$

а конкретное значение будет зависеть от величины полной фазы $\varphi_0 + \delta/2$ волны на её переднем фронте.

В точках $\varphi_0 + \delta/2 = \pi N$, свои минимальные значения будет принимать временна́я компоненты четырёхвектора дрейфовой скорости и модуль вектора дрейфовой скорости

$$\overline{u}_{4\min} = \sqrt{1+\mu^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \right) \quad \text{if} \quad \frac{|\overline{v}|_{\min}}{c} = \frac{\mu^2}{2+\mu^2}.$$

В точках локального минимума $\varphi_0 + \delta/2 = \pi/2 + \pi N$ функции $h\left(\varphi_0 + \delta/2\right)$, в которых она принимает значения

$$\gamma = 1$$
: $h(\varphi_0 + \delta/2) = h(\pi/2 + \pi N) = \frac{\sqrt{1+1}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,943,$

временна́я компонента четырёхвектора дрейфовой скорости и модуль вектора дрейфовой скорости достигают своего максимума

$$\overline{u}_{4\max} = \sqrt{1+\mu^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \right) \qquad \text{if} \qquad \frac{|\overline{\boldsymbol{v}}|_{\max}}{c} = \sqrt{2} \left| \mu \right| \frac{\sqrt{1+\frac{9}{8}\mu^2}}{1+\frac{3}{2}\mu^2}.$$

Если модуль параметра μ много меньше единицы, то абсолютная величина вектора дрейфовой скорости частицы будет лежать в промежутке

$$\gamma = 1; \qquad |\mu| \ll 1: \qquad \qquad \frac{\mu^2}{2} \leqslant \frac{|\overline{\boldsymbol{v}}|}{c} \leqslant \sqrt{2} |\mu|.$$

В рассматриваемом случае частицы, покоившейся до прихода волны линейной поляризации, отношению абсолютной величины максимально возможной дрейфовой скорости к скорости света имеет тот же порядок, что и корень из безразмерного параметра μ^2 , при условии его малости. Если же модуль параметра μ много больше единицы

$$\gamma = 1; \qquad |\mu| \gg 1: \qquad \qquad \frac{1}{2} |\mu| \leqslant \overline{u}_4 \leqslant \frac{3}{2} |\mu|,$$

область значений величины \overline{u}_4 определяется приведённым выше неравенством.

В случае частицы, покоившейся до прихода резкого переднего фронта монохроматической плоской волны, параметр μ^2 , приобретает дополнительный физический смысл, а именно — корень из этого безразмерного параметра, при условии его малости, имеет тот же порядок величины, что и отношение абсолютной величины максимально возможной дрейфовой скорости к скорости света.

В статье [13], в результате рассмотрения даже нерелятивистского движения частицы в переменном поле, был сделан вывод о том, что «наличие систематического дрейфа у частицы в поле волны меняет качественную картину рассеяния света на свободных частицах», поскольку систематическое смещение «приводит к изменению углового распределения и даёт смещение рассеянной частоты». Использование точных формул для абсолютной величины вектора дрейфовой скорости и угла между этим вектором и направлением распространения волны, возможно, позволит количественно учесть вклад эффектов, вызванных наличием ненулевой дрейфовой скорости у заряженной частицы, которая покоилась до прихода электромагнитной волны.

3.10 Усреднённые величины в случае частицы, покоившейся до прихода волны

В четырёхвекторных уравнениях (62) и (56), описывающих мировую линию частицы и зависимость четырёхвектора скорости частицы в поле плоской монохроматической волны, содержатся в качестве постоянных параметров безразмерные четырёхвекторы Z_i . Они определяются как полевыми величинами в начальной точке мировой линии X_i^0 , а именно: значениями компонент тензора F_{in}^0 , производной тензора F_{in}^0 и начальной фазой $\varphi_0 = K_p X_p^0$, так и значением постоянного четырёхвектора дрейфовой скорости \overline{U}_i . Такое представление четырёхвекторов Z_i удобно при рассмотрении движения частицы в системе отсчёта, где она в среднем покоится, поскольку три компоненты четырёхвектора дрейфовой скорости \overline{U}_i в этом случае равны нулю, а четвёртая — единице, в результате чего некоторые компоненты безразмерных четырёхвекторов Z_i принимали более простой вид.

При рассмотрении движения покоившейся до прихода волны частицы желательно выразить четырёхвекторы Z_i через полевые величины в начальной точке мировой линии X_i^0 и значение четырёхвектора скорости U_i^0 в той же точке, у которого в этом случае три его пространственные компоненты равны нулю, а временная компонента равна единице.

Для четырёхвекторов $Z_i^{(3)}$ и $Z_i^{(4)}$, используя (58), получим выражения:

$$Z_i^{(3)} = -\frac{\gamma}{2} \mu^2 \frac{K_i}{(K_p U_p^0)} \cos(2\varphi_0 + \delta); \qquad (56.3')$$

$$Z_i^{(4)} = \frac{\gamma}{2} \mu^2 \frac{K_i}{(K_p U_p^0)} \sin(2\varphi_0 + \delta).$$
 (56.4')

Для того чтобы найти представление для для четырёхвектора $Z_i^{(1)}$ заметим сначала, что при условии $\Phi=0$, то есть в точке мировой линии X_i^0 , соответствующей моменту прихода волны в точку нахождения частицы, как следует из уравнения (56) выполняется соотношение

$$U_i^0 = \sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{U}_i + Z_i^{(1)} + Z_i^{(3)} = \sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{U}_i + Z_i^{(1)} - \frac{\gamma}{2} \mu^2 \frac{K_i}{\left(K_p U_p^0\right)} \cos\left(2\varphi_0 + \delta\right),$$

в котором учтено (56·3′). Выразив из (59) четырёхвектор U_i^0 , получим

$$U_{i}^{0} = \sqrt{1 + \mu^{2}} \, \overline{U}_{i} - \mu^{2} \frac{K_{i}}{(K_{p}U_{p}^{0})} - \frac{K_{4}}{(K_{p}U_{p}^{0})} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{*}}} \dot{F}_{in}^{0} U_{n}^{0} + \frac{\gamma}{2} \mu^{2} \cos(2\varphi_{0} + \delta) \frac{K_{i}}{(K_{p}U_{p}^{0})}$$

Сравнивая эти два равенства, находим что $(56 \cdot 1)$ можно преобразовать к форме записи

$$Z_i^{(1)} = -\mu \frac{K_4}{\left(K_p U_p^0\right)} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}} \dot{F}_{in}^0 U_n^0 - \mu^2 \left(1 - \gamma \cos\left(2\varphi_0 + \delta\right)\right) \frac{K_i}{\left(K_p U_p^0\right)}. \quad (56 \cdot 1')$$

С целью получения аналогичного представления для четырёхвектора $Z_i^{(2)}$, рассмотрим значение четырёхвектора ускорения W_i точечной частицы, определяемое уравнением (17), в начальной точке мировой линии частицы. Выражение для значения ускорения W_i^0 в начальной точке X_i^0 запишем с использованием обозначений (53a)

$$W_i^0 = \frac{q}{mc^2} F_{in}^0 U_n^0 = \mu K_4 \sqrt{\frac{2}{\tilde{E}\tilde{E}^*}} F_{in}^0 U_n^0.$$

В то же время, дифференцируя уравнение (56)

$$\frac{dU_i}{d\varphi} = \frac{W_i}{(K_p U_p)} = \frac{dU_i}{d\Phi} = -Z_i^{(1)} \sin \Phi + Z_i^{(2)} \cos \Phi - 2Z_i^{(3)} \sin 2\Phi + 2Z_i^{(4)} \cos 2\Phi,$$

находим, что в начальной точке мировой линии X_i^0 выполняется соотношение

$$\frac{W_i^0}{\left(K_p U_p^0\right)} = Z_i^{(2)} + 2Z_i^{(4)}.$$

Отсюда, с учётом $(56\cdot4')$, получаем выражение для искомого четырёхвектора

$$Z_i^{(2)} = \mu \frac{K_4}{\left(K_p U_p^0\right)} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}} F_{in}^0 U_n^0 - \gamma \mu^2 \frac{K_i}{\left(K_p U_p^0\right)} \sin(2\varphi_0 + \delta).$$
 (56.2')

Формулы $(56\cdot1')$, $(56\cdot2')$, $(56\cdot3')$ и $(56\cdot4')$ решают в явном виде задачу аналитического описания поведения частицы в поле монохроматической плоской в произвольной системе отсчёта с любыми возможными начальными условиями, которыми являются скорость точечной частицы в той точке мировой линии, которая принята за начальную, и значения полевых величин в этой точке. Действительно, теперь в уравнениях (62) и (56), описывающих мировую линию частицы и зависимость четырёхвектора скорости частицы в поле плоской монохроматической волны, все четырёхвекторы Z_i выражены уже через начальные условия, а четырёхвектор дрейфовой скорости \overline{U}_i определяется ими же с помощью формулы (59).

Полученные формулы, выражающие значения четырёхвекторов Z_i через начальные условия, применим для нахождения усреднённых по времени величин, для случая покоившейся до прихода волны частицы (79).

Используя (65), запишем усреднённое значение временно́й компоненты четырёхвектора скорости

$$\langle u_4 \rangle_t = \sqrt{1+\mu^2} \ \overline{u}_4 + \frac{\gamma^2}{8\sqrt{1+\mu^2}} \frac{\mu^4}{\overline{u}_4} \frac{k_4^2}{1+\mu^2} \frac{k_4^2}{\left(K_p \overline{U}_p\right)^2} + \frac{\left(z_4^{(1)}\right)^2 + \left(z_4^{(2)}\right)^2}{2\sqrt{1+\mu^2} \ \overline{u}_4}.$$

Для частицы, покоившейся до прихода волны, содержащиеся в этом выражении величины $z_4^{(1)}$ и $z_4^{(2)}$ имеют, согласно $(56\cdot1')$, $(56\cdot2')$ и (79), значения

$$z_4^{(1)} = -\mu^2 + \gamma \mu^2 \cos(2\varphi_0 + \delta)$$
 $\qquad \qquad z_4^{(2)} = -\gamma \mu^2 \sin(2\varphi_0 + \delta)$

а значения величин $K_p\overline{U}_p$ и \overline{u}_4 определяются формулами (79) и (80b), соответственно. После преобразований получим выражение

$$\frac{\langle \mathcal{K} \rangle_t}{mc^2} = \mu^2 - \frac{\gamma}{2}\mu^2 \cos(2\varphi_0 + \delta) + \frac{\mu^4}{2} \frac{1 + \frac{5}{4}\gamma^2 - 2\gamma \cos(2\varphi_0 + \delta)}{1 + \mu^2 - \frac{\gamma}{2}\mu^2 \cos(2\varphi_0 + \delta)}.$$

для средней по времени кинетической энергии частицы $\mathcal{K} = \mathcal{E} - mc^2$, являющейся разностью между полной энергией $\mathcal{E} = mc^2u_4$ и энергией покоя mc^2 . Для случая круговой поляризации падающей волны

$$\gamma = 0:$$

$$\frac{\langle \mathcal{K} \rangle_t}{mc^2} = \mu^2 + \frac{\mu^4}{2} \frac{1}{1+\mu^2} = \mu^2 \frac{1+\frac{3}{2}\mu^2}{1+\mu^2}$$

средняя кинетическая энергия частицы не зависит от значения полной фазы волны на её переднем фронте $\varphi_0 + \delta/2$. Полученная формула, с точностью до обозначений совпадает с найденным в [8] выражением для средней кинетической энергии в волне круговой поляризации. Если волна поляризована линейно, кинетическая энергия будет определяться равенством

$$\gamma = 1: \frac{\langle \mathcal{K} \rangle_t}{mc^2} = \mu^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \cos(2\varphi_0 + \delta) + \frac{\mu^4}{2} \frac{1 + \frac{5}{4} - 2\cos(2\varphi_0 + \delta)}{1 + \mu^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \cos(2\varphi_0 + \delta)}.$$

Преобразовав полученное выражение к виду

$$\frac{\langle \mathcal{K} \rangle_t}{mc^2} = \frac{\mu^2}{2} \left(1 + 2\sin^2(\varphi_0 + \delta/2) + \frac{2\mu^2 \left(\frac{1}{8} + 2\sin^2(\varphi_0 + \delta/2) \right)}{1 + \frac{\mu^2}{2} \left(1 + 2\sin^2(\varphi_0 + \delta/2) \right)} \right),$$

можно убедиться в том, оно совпадает с формулой (49) в [8] при условии замены $2\mu^2 \longrightarrow \mu$ и $\varphi_0 + \delta/2 \longrightarrow \varphi_0$.

Используя для рассматриваемого случая покоившейся до прихода волны частицы значения $K_p\overline{U}_p$ из (79) и (80b), запишем, согласно (67), отношение мощности излучения заряженной частицы, движущейся в поле плоской монохроматической волны, к плотности потока энергии этой волны

$$\frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0 \left(1 - \frac{\frac{\gamma^2}{4}}{\frac{1+\mu^2}{\mu^2} - \frac{\gamma}{2} \cos(2\varphi_0 + \delta)} \right).$$

При малых $|\mu|$, поскольку

$$|\mu| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\mu^2}{\mu^2} \approx \frac{1}{\mu^2} \gg 1 > \frac{\gamma}{2} \cos(2\varphi_0 + \delta),$$

получаем выражение, не зависящее от значения полной фазы волны $\varphi_0 + \delta/2$ на её переднем фронте

$$|\mu| \ll 1$$
:
$$\frac{\mathcal{P}}{I} \approx \sigma_0 \left(1 - \mu^2 \frac{\gamma^2}{4} \right).$$

При больших значениях $|\mu|$ в формуле для полного сечения рассеяния

$$|\mu| \gg 1$$
:
$$\frac{\mathcal{P}}{I} \approx \sigma_0 \left(1 - \frac{\frac{\gamma^2}{4}}{1 - \frac{\gamma}{2} \cos(2\varphi_0 + \delta)} \right)$$

не содержится параметр μ , то есть сечение не зависит от частоты падающей волны и её интенсивности. Для случая круговой поляризации $\gamma = 0$ падающей волны полное сечение рассеяния в оказывается точно равно томсоновскому σ_0 .

Для нахождения усреднённых по времени трёхмерных векторов силы и полей на частице, которая покоилась до прихода волны, заметим сначала, что из (73) и (79) следует в рассматриваемом случае простая связь между векторами усреднённой силы усреднённой напряжённости электрического поля на частице

$$\langle \boldsymbol{f} \rangle_t = q \langle \boldsymbol{E} \rangle_t$$
.

Векторы $\langle \boldsymbol{f} \rangle_t$ и $\langle \boldsymbol{E} \rangle_t$, согласно (74а), направлены перпендикулярно как вектору $\boldsymbol{n_k}$, задающему направление распространения волны, так и вектору дрейфовой скорости $\overline{\boldsymbol{v}}$. Псевдовектор $\langle \boldsymbol{B} \rangle_t$, абсолютная величина которого равна абсолютной величине вектора усреднённой напряжённости электрического поля $|\langle \boldsymbol{B} \rangle_t| = |\langle \boldsymbol{E} \rangle_t|$, направлен, согласно (74b), перпендикулярно как вектору $\boldsymbol{n_k}$, так и вектору $\langle \boldsymbol{E} \rangle_t$.

Определим абсолютное значение векторного произведения содержащегося в формулах (72) или (74a). Это значение, как следует из трёхмерного векторного анализа, является модулем той составляющей дрейфовой скорости частицы $\overline{\boldsymbol{v}}/c$, которая перпендикулярна волновому вектору \boldsymbol{k} . Но для рассматриваемого сейчас случая, искомая величина (81) уже была получена

$$\left| \left[\boldsymbol{n_k} \times \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} \right] \right| = \frac{|\overline{\boldsymbol{v}}_{\perp}|}{c} = \frac{|\mu|}{\overline{u}_4} \frac{\sqrt{1 - \gamma \cos{(2\varphi_0 + \delta)}}}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{|\mu| \sqrt{1 - \gamma \cos{(2\varphi_0 + \delta)}}}{1 + \mu^2 - \frac{\gamma}{2}\mu^2 \cos{(2\varphi_0 + \delta)}}.$$

В последнем равенстве для знаменателя дроби использована формула (80b). Из предыдущего рассмотрения и формулы (74d) следует выражение

$$\left| \langle \boldsymbol{B} \rangle_t \right| = \left| \langle \boldsymbol{E} \rangle_t \right| = \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{2} \frac{\mu^2 \sqrt{1 - \gamma \cos(2\varphi_0 + \delta)}}{1 + \mu^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2} \cos(2\varphi_0 + \delta)\right)}.$$

Для волны круговой поляризации абсолютные значения усреднённых векторов не зависят от полной фазы волны на её переднем фронте

$$\gamma = 0:$$
 $\left| \langle \boldsymbol{B} \rangle_t \right| = \left| \langle \boldsymbol{E} \rangle_t \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}} \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}; \quad \left| \langle \boldsymbol{f} \rangle_t \right| = |q| \left| \langle \boldsymbol{E} \rangle_t \right|.$

Как видно из предыдущего равенства, при рассматриваемых условиях и в случае малых $|\mu|$, модуль усреднённого вектора напряжённости в $\mu^2/2$ раз меньше мгновенного значения напряжённости поля. При больших значениях параметра $|\mu|$ модуль усреднённого вектора напряжённости стремится к величине, равной половине мгновенного значения напряжённости поля.

3.11 Момент количества движения частицы при нулевой дрейфовой скорости

Ранее были получены параметрические векторные уравнения (77), (77'), (77'а) и (77'b), определяющее траекторию в системе отсчёта, где частица в среднем покоится, то есть такую, в которой дрейфовая скорость частицы в поле волны равна нулю. При выводе использовался постоянный вектор

$$m{r}^0 = m{x}^0 + rac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} rac{1}{k_4} \sqrt{rac{2}{ ilde{m{E}} ilde{m{E}}^*}} \, m{E}^0 + rac{\gamma}{4} rac{\mu^2}{1+\mu^2} \sin{(2arphi_0 + \delta)} \, rac{m{n_k}}{k_4},$$

который, с учётом, например выражения (77'а), и очевидных равенств

$$\langle \cos{(\varphi+\delta/2)}\rangle_{\varphi}=0; \qquad \langle \sin{(\varphi+\delta/2)}\rangle_{\varphi}=0; \qquad \langle \sin{(2\varphi+\delta)}\rangle_{\varphi}=0,$$

является усреднённым по фазе или по собственному времени $\langle \boldsymbol{x} \rangle_{\varphi} = \langle \boldsymbol{x} \rangle_{\Phi} = \boldsymbol{r}^0$ вектором мгновенного положения частицы \boldsymbol{x} .

Покажем, что результатом усреднения вектора x по времени будет являться тот же вектор r^0 . В представлении (77) зависимости вектора мгновенного положения частицы от фазы волны содержится величина $\sin(2\varphi + \delta)$, для усреднения которой используем равенство

$$\langle \sin(2\varphi + \delta) \rangle_t = \frac{\langle U_4 \sin(2\varphi + \delta) \rangle_{\Phi}}{\sqrt{1 + \mu^2}} \overline{U}_4.$$

C помощью определения $\Phi = \varphi - \varphi_0$ и тригонометрического тождества

$$\sin(2\varphi + \delta) = \sin(2\Phi + 2\varphi_0 + \delta) = \sin 2\Phi \cos(2\varphi_0 + \delta) + \sin(2\varphi_0 + \delta) \cos 2\Phi,$$

после перемножения величин $\sin{(2\varphi+\delta)}$ и

$$U_4 = \sqrt{1 + \mu^2} \ \overline{U}_4 + Z_4^{(1)} \cos \Phi + Z_4^{(2)} \sin \Phi + Z_4^{(3)} \cos 2\Phi + Z_4^{(4)} \sin 2\Phi,$$

получим

$$\langle U_4 \sin(2\varphi + \delta) \rangle_{\Phi} = \frac{1}{2} Z_4^{(3)} \sin(2\varphi_0 + \delta) + \frac{1}{2} Z_4^{(4)} \cos(2\varphi_0 + \delta).$$

В силу определений (56·3) и (56·4), усредняемая величина

$$\langle \sin\left(2\varphi + \delta\right)\rangle_t = 0$$

оказывается равна нулю в любой инерциальной системе отсчёта, а не только в рассматриваемом случае нулевой дрейфовой скорости частицы. Первое слагаемое правой части выражения (77) содержит вектор напряжённости E,

для которого, как было показано ранее, $\langle \boldsymbol{E} \rangle_t = 0$ в системе отсчёта, такой где дрейфовая скорость частицы равна нулю. Следовательно, вектор \boldsymbol{r}^0 является результатом усреднения вектора \boldsymbol{x} не только по фазе волны в точке нахождения частицы, но и по времени системы отсчёта $\langle \boldsymbol{x} \rangle_t = \boldsymbol{r}^0$.

Определим псевдовектор момента количества движения точечной частицы относительно точки трёхмерного пространства, задаваемой вектором \boldsymbol{r}^0 , в форме векторного произведения

$$\mathfrak{M}^{\text{particle}} = \mathfrak{M}^{\text{p}} = m \left[\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}^0 \right) \times \boldsymbol{v} \right],$$

в котором векторное смещение частицы ${m x}-{m r}^0$ описывается выражением

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}^0 &= -\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{1}{k_4} \left(\frac{\gamma}{4} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \sin(2\varphi + \delta) \, \boldsymbol{n_k} + \right. \\ &\left. + \cos(\varphi + \delta/2) \, \sqrt{1 + \gamma} \, \boldsymbol{n_a} - \sin(\varphi + \delta/2) \, \sqrt{1 - \gamma} \, p_{\pm} \left[\boldsymbol{n_a} \times \boldsymbol{n_k} \right] \right), \end{aligned}$$

следующим из (77') и (77'а).

Скорость частицы можно найти из полученных в четырёхмерном виде общих решений уравнения движения или просто продифференцировать по времени предыдущее выражение для $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}^0$, принимая во внимание соотношения

$$oldsymbol{v} = rac{doldsymbol{x}}{dt} = rac{doldsymbol{x}}{darphi}rac{darphi}{ds}rac{c\ ds}{c\ dt} = rac{doldsymbol{x}}{darphi}rac{c\ (K_pU_p)}{u_4} = rac{c\ \sqrt{1+\mu^2}\ k_4}{u_4}rac{doldsymbol{x}}{darphi},$$

где в последнем равенстве использованы формулы (58) и (76). При вычислении векторного произведения вектора мгновенной скорости

$$\mathbf{v} = -\frac{\mu c}{u_4(\varphi)} \left(\frac{\gamma}{2} \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \cos(2\varphi + \delta) \, \mathbf{n_k} - \sin(\varphi + \delta/2) \, \sqrt{1+\gamma} \, \mathbf{n_a} - \cos(\varphi + \delta/2) \, \sqrt{1-\gamma} \, p_{\pm} \left[\mathbf{n_a} \times \mathbf{n_k} \right] \right)$$

на вектор смещения частицы $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}^0$ воспользуемся тригонометрическими тождествами и векторными равенствами

$$[\boldsymbol{n_k} \times (p_{\pm} [\boldsymbol{n_a} \times \boldsymbol{n_k}])] = p_{\pm} \boldsymbol{n_a}; \qquad [\boldsymbol{n_a} \times (p_{\pm} [\boldsymbol{n_a} \times \boldsymbol{n_k}])] = -p_{\pm} \boldsymbol{n_k}.$$

В полученном выражении для псевдовектора момента количества движения

$$\begin{split} \boldsymbol{\mathfrak{M}}^{\mathrm{p}} &= \frac{mc}{k_4} \frac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{1}{u_4\left(\varphi\right)} \left(\sqrt{1-\gamma^2} \ p_{\pm} \, \boldsymbol{n_k} + \right. \\ &\left. + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{\gamma}{2} \left(\cos^3\left(\varphi + \delta/2\right) \, \sqrt{1+\gamma} \, \left[\boldsymbol{n_a} \times \boldsymbol{n_k} \right] - \sin^3\left(\varphi + \delta/2\right) \sqrt{1-\gamma} \, \, p_{\pm} \, \boldsymbol{n_a} \right) \right) \end{split}$$

зависимость $u_4(\varphi)$ определяется временной компонентой четырёхвекторного уравнения (57) при условиях нулевой дрейфовой скорости (76).

Формула для псевдовектора мгновенной величины момента количества движения частицы \mathfrak{M}^p в случае круговой поляризации $\gamma=0$ описывает постоянный псевдовектор, направление которого совпадает с направлением распространения волны или противоположно ему. В случае линейной поляризации $\gamma=1$ псевдовектор \mathfrak{M}^p всегда направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит траектория движущейся частицы. Эта плоскость образована вектором n_k , совпадающим с направлением распространения волны, и вектором n_a , вдоль которого колеблется вектор напряжённости электрического поля.

Благодаря тому, что в формуле для усреднённого по времени значения псевдовектора момента количества движения частицы

$$\langle \mathfrak{M}^{\mathrm{p}} \rangle_{t} = \frac{\langle u_{4} \mathfrak{M}^{\mathrm{p}} \rangle_{\Phi}}{\sqrt{1 + \mu^{2}} \ \overline{u}_{4}} = \frac{\langle u_{4} \mathfrak{M}^{\mathrm{p}} \rangle_{\varphi}}{\sqrt{1 + \mu^{2}} \ \overline{u}_{4}}$$

в выражении, содержащемся внутри угловых скобок, обозначающих операцию усреднения по фазе, сокращается величина $u_4(\varphi)$, а средние значения куба косинуса и куба синуса равны нулю, получаем, с учётом нулевого значения дрейфовой скорости частицы ($\overline{\boldsymbol{v}}=0$ и $\overline{u}_4=1$), равенство

$$\langle \mathfrak{M}^{\mathbf{p}} \rangle_{t} = \frac{mc^{2}}{\omega} \frac{\mu^{2}}{1 + \mu^{2}} p_{\pm} \sqrt{1 - \gamma^{2}} \, \boldsymbol{n_{k}}. \tag{83}$$

Как следует из (83), псевдовектор среднего по времени момента количества движения частицы равен нулю только в случае линейной поляризации волны $\gamma=1$. Направление $\langle \mathfrak{M}^{\mathbf{p}} \rangle_t$ совпадает с направлением распространения волны или противоположно ему в зависимости от знака двузначной псевдоскалярной величины p_{\pm} , определяющей правую или левую поляризацию волны.

При усреднении четырёхвектора ускорения было получено (71) равенство

$$\left[\boldsymbol{E}\times\dot{\boldsymbol{E}}\right] = \frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2}p_{\pm}\sqrt{1-\gamma^2}\,\boldsymbol{n_k},$$

в правой части которого содержится псевдовекторная величина присутствующая так же и в (83). Левую часть этого выражения можно переписать, используя вместо производной от напряжённости поля по фазе волны векторный потенциал монохроматической плоской волны, который может быть выбран (43) в форме $\mathbf{A} = (c/\omega) \dot{\mathbf{E}}$.

При таком выборе \boldsymbol{A} из предыдущего равенства следует формула

$$\left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{A}\right] = \frac{c}{\omega} \frac{\tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2} p_{\pm} \sqrt{1 - \gamma^2} \, \boldsymbol{n_k}.$$

Векторное произведение напряжённости электрического поля на векторный потенциал иногда интерпретируется как величина, определяющая собственный или спиновый момента количества движения электромагнитного поля. Так, в \$30 книги [14] приводится выражения для этой величины

$$\mathbf{m}^{ ext{field}} = \mathbf{m}^{ ext{f}} = \frac{1}{4\pi c} \int\limits_{V} \left[\mathbf{E} \times \mathbf{A} \right] dV.$$

Придерживаясь такой интерпретации, можно определить и псевдовектор плотности собственного момента количества движения электромагнитного поля

$$\mathbf{m}^{\mathrm{field}} = \mathbf{m}^{\mathrm{f}} = \frac{1}{4\pi c} \left[\mathbf{E} \times \mathbf{A} \right].$$

Свойства этой величины обсуждаются, например, в \$37 книги [15]. В результате подстановки значения векторного произведения напряжённости электрического поля на векторный потенциал в формулу для \mathbf{m}^f , получим выражение для псевдовектора плотности собственного момента количества движения электромагнитного поля в монохроматической плоской волне

$$\mathbf{m}^{\mathrm{f}} = \frac{1}{4\pi\omega} \frac{\tilde{\boldsymbol{E}}\tilde{\boldsymbol{E}}^*}{2} p_{\pm} \sqrt{1 - \gamma^2} \, \boldsymbol{n_k}. \tag{84}$$

Как следует из (84) и (47), связь псевдовектора \mathbf{m}^{f} с усреднённым по фазе волны вектором Пойнтинга $\langle \boldsymbol{S} \rangle_{\varphi}$ в монохроматической плоской волне определяется формулой

$$\mathbf{m}^{\mathrm{f}} = \sqrt{1 - \gamma^2} \; \frac{p_{\pm} \langle \mathbf{S} \rangle_{\varphi}}{\omega}.$$

Для волны круговой поляризации $\gamma=0$ вектор Пойнтинга не зависит от фазы волны и, следовательно, величины ${m S}$ и $\langle {m S} \rangle_{\varphi}$ одинаковы. Для этого случая связывающее ${m m}^{\rm f}$ и ${m S}$ уравнение

$$\mathbf{m}^{\mathrm{f}} = \frac{p_{\pm} \mathbf{S}}{\omega}$$

оказывается аналогично, за исключением использования двузначной псевдоскалярной величины p_{\pm} , уравнению (37.3) приведённому в [15].

Заметим, что использование псевдовектора \mathbf{m}^{f} позволяет преобразовать выражение для усреднённой по времени релятивистской силы в произвольной инерциальной системе отсчёта (72). Выражая из уравнения (84) величину $p_{\pm}\sqrt{1-\gamma^2}\,\mathbf{n_k}$, содержащуюся в его правой части, и подставляя её в (72), получим, после преобразования с помощью (53b'), равенство

$$\langle \boldsymbol{f} \rangle_t = 2\pi \, r_q \left[\boldsymbol{\mathfrak{m}}^{\mathrm{f}} \times \overline{\boldsymbol{v}} \right],$$

определяющее вектор усреднённой по времени релятивистской силы через векторное произведение псевдовектора плотности собственного момента количества движения электромагнитного поля в монохроматической плоской волне и вектора дрейфовой скорости частицы.

Из сравнения (83) и (84), с учётом (53b'), получим соотношение

$$\langle \mathfrak{M}^{\mathrm{p}} \rangle_t = \frac{r_q \, \lambda^2}{\pi} \frac{\mathbf{m}^{\mathrm{f}}}{1 + \mu^2}.$$

Таким образом, при классическом рассмотрении движения заряда в поле монохроматической плоской волны любой эллиптичности в такой системе отсчёта, где дрейфовая скорость частицы равна нулю, псевдовектор усреднённого по времени момента количества движения частицы пропорционален величине \mathbf{m}^f , которую можно интерпретировать как псевдовектор плотности собственного момента количества движения поля монохроматической плоской волны.

Автор выражает глубокую благодарность В.Н. Мурзину за внимание к работе, поддержку и многочисленные стимулирующие обсуждения, которые помогли улучшить изложение материала. Автор благодарен А.Л. Карузскому и Л.Ю. Щуровой за полезные обсуждения и замечания, позволившие избежать ряда неточностей.

Список литературы

- [1] *Ландау Л. Лифшиц Е.* Теоретическая физика: Под общей редакцией акад. Л.Д. Ландау. / Том четвёртый Теория поля / 2-е изд., перераб. ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва 1948 Ленинград.
- [2] Pumyc~B.U. Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем // Труды ФИАН «Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле» М.: Наука 1979 Т. 111. Стр. 5-151.
- [4] Гинзбург В.Л. Об излучении и силе радиационного трения при равномерно ускоренном движении заряда // УФН. 1969. Т. 98. Вып. 3. Стр. 569-585.
- [5] Φ ок В.А. Теория пространства, времени и тяготения Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва 1955.
- [6] Федоров Ф.И. Теория гиротропии Минск, «Наука и техника», 1976.
- [7] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики / Пер. с англ. С.Н. Бреуса, А.И. Головашкина, А.А. Шубина; под ред. Г.П. Мотулевич. 2-е изд. доп. М.: Наука, 1973.
- [8] *Андреев С.Н., Макаров В.П., Рухадзе А.А.* О движении заряженной частицы в плоской монохроматической электромагнитной волне // Квантовая электроника. 2009. Т. 39. № 1. Стр. 68-72.
- [9] Sarachik E.S., Schappert G.T. Classical Theory of the Scattering of Intense Laser Radiation by Free Electrons // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. № 10. P. 2738-2753.
- [10] Зоммерфельд А. Электродинамика / Пер. с нем. под ред. С.А. Элькинда. М.: Издательство иностранной литературы, 1958.
- [11] $\it Mameeee~A.H.$ Электродинамика: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. школа, 1980.
- [12] Угаров В.А. Специальная теория относительности / 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1977.
- [13] *Болотовский Б.М., Серов А.В.* Об особенностях движения заряженных нерелятивистских частиц в переменном поле // УФН. 1994. Т. 164. № 5. Стр. 545-547.
- [14] Иваненко Д. и Соколов А. Классическая теория поля (новые проблемы) / 2-е изд. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва 1951 Ленинград.
- [15] Cивухин Д.В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. / Т. V. Атомная и ядерная физика / 2-е изд., стереот. М.: Физматлит; Изд-во МФТИ, 2002. 784с.

Анатолий Викторович ПЕРЕСТОРОНИН

СПОСОБ РЕШЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ КЛАССИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В ПОЛЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ВИДЕ РЕШЕНИЙ

> Формат 60х84/16. П. л. 4,75. Тираж 140 экз. Заказ №45 Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии РИИС ФИАН 119991 Москва, Ленинский проспект 53