

30 экземпляров

В свет

Руководитель АКЦ ФИАН

академик Кардашев Н. С.

_____ 2009 г.

Астрокосмический Центр

Б.Б. Крейсман

**Периодические решения пространственной ограниченной
задачи трех тел и применение их для проекта “Миллиметрон”**

Москва 2009

Аннотация

В рамках круговой ограниченной задачи трех тел рассматривается семейство обратных периодических орбит вокруг обоих притягивающих тел (семейство Егорова) и порождаемые им при резонансах $1/1$, $2/1$ и $3/1$ семейства пространственных орбит в системах Солнце – Земля и Земля – Луна. Исследуется их связь с семействами, порожденными орбитами вокруг точек либрации L_1 , L_2 и L_3 .

Одно из семейств содержит периодические решения, перспективные как орбиты космического радиотелескопа проекта “Миллиметрон”.

© Б.Б. Крейсман

© ФИАН

Введение.

Эта публикация является продолжением нашей статьи [1] и использует описанные в ней понятия и алгоритмы. В рамках круговой ограниченной задачи трех тел [2]÷[3] основное внимание уделяется второму по важности (после рассмотренного в той статье семейства обратных периодических орбит вокруг большего притягивающего тела) является семейство **D** обратных орбит вокруг обоих притягивающих тел [4]. Оно является аналогом семейства **m** классификации по Стрёмгрену и носит [2] имя профессора В.А. Егорова.

Для системы Земля - Луна используется $m_2 = 0.0121505816234336$, для системы Солнце – (Земля+Луна) $m_2 = 0.0000030404235885$. Далее вместо комбинации (Земля+Луна) мы будем писать просто Земля с этим значением m_2 .

Все рассматриваемые ниже периодические решения симметричны относительно оси (плоскости, в пространственном случае) $Y=0$ и за период дважды пересекают ее вертикально. В этих точках имеем: $y = v_x = 0$. Точку с меньшим x мы далее обозначаем a_1 , с большим – a_2 . Семейства пространственных периодических решений, порождаемые при нечетном резонансе, симметричны еще и по скорости v_z либо по высоте z и параметризуются соответственно высотой z или

скоростью v_z . При четном резонансе получаем двоякосимметричные семейства, параметризируемые в точках a_1 либо a_2 как высотой z , так и скоростью v_z , и симметричные как по скорости v_z , так и по высоте z .

1.Случай системы Земля – Луна.

На рисунке 1 даны образцы орбит семейства Егорова в системе Земля – Луна. Здесь и далее расстояния – в тысячах км.

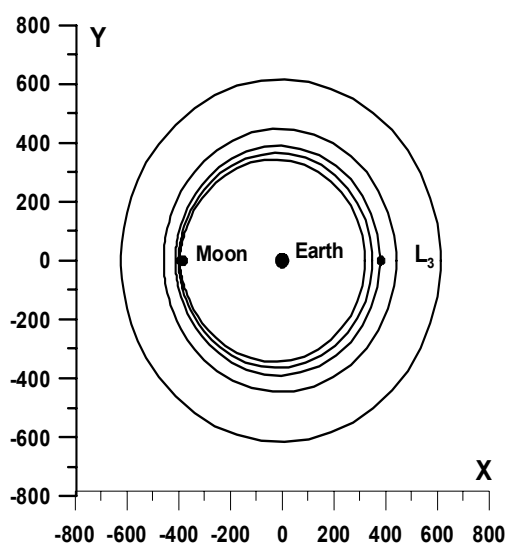


Рис. 1.

На рисунке 2 дана зависимость параметра устойчивости по вертикали s_2 от константы Якоби C для орбит этого семейства, в таблице 1 – параметры периодических решений с резонансами 1-4 по вертикали. Во втором и четвертом столбцах указаны координаты точек пересечения оси X (в тысячах км), в третьем и пятом - скорость v_y (в км/сек), в шестом – длительность периода (в сутках), в седьмом – константа Якоби, в восьмом – параметр s_2 , в девятом – соответствующая ему кратность резонанса p/q .

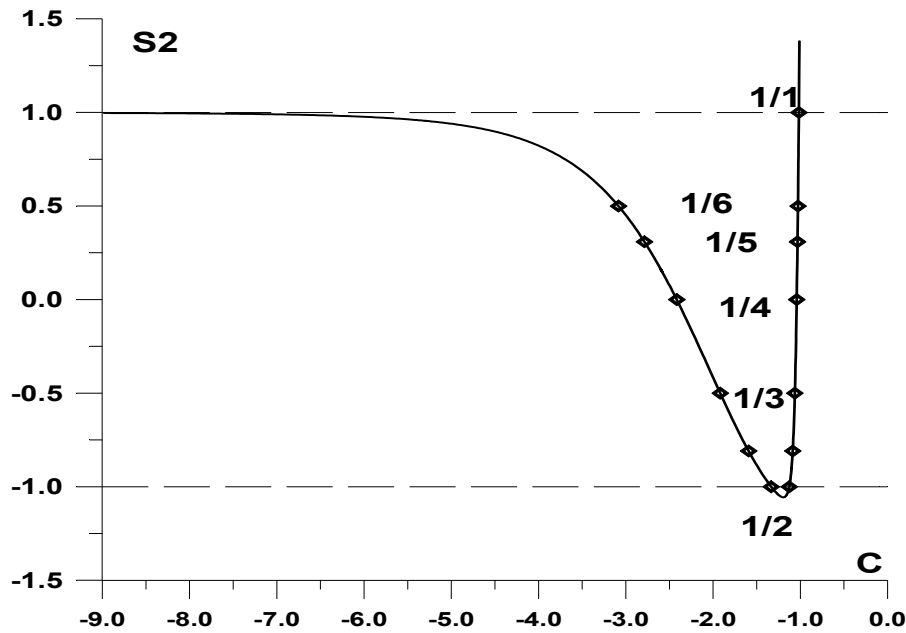


Рис. 2.

Таблица 1.

n	a_2	v_2	a_1	v_1	T	C	s_2	p/q
1	320.44	-1.22416	-395.49	1.1934	12.2864	-1.0161	1	1/1
2	335.95	-1.17896	-398.15	1.1540	12.6527	-1.0406	0	1/4
3	348.41	-1.14540	-401.05	1.1235	12.9484	-1.0618	-1/2	1/3
4	378.67	-1.07508	-412.41	1.0563	13.6735	-1.1266	-1	1/2
5	440.95	-.976421	-457.55	.95596	15.1370	-1.3331	-1	1/2
6	611.53	-.824401	-621.88	.80060	18.2662	-1.9176	-1/2	1/3
7	797.90	-.722644	-807.51	.69809	20.4858	-2.4153	0	1/4

Семейство пространственных периодических решений, порождаемое первой строкой таблицы (резонанс 1/1), мы обозначили EG1z, а двоякосимметричные семейства, порождаемые строками 4 и 5 (резонанс 2/1), – EG2z и EG2v.

Наиболее популярными решениями плоской ограниченной задачи трех тел во вращающейся системе координат являются 5 положений равновесия – точки либрации $L_1 \div L_5$. Мы ограничимся рассмотрением трех коллинеарных (лежащих на оси X) точек L_1 , L_2 и L_3 . На рисунке 3. даны образцы орбит вокруг точек L_2 и L_3 . Орбиты изображаются во вращающейся геоцентрической системе координат. Точка $(0,0)$ соответствует Земле. Луна находится слева по оси X на расстоянии 384.4 тыс. км. Точки либрации L_2 , L_1 и L_3 имеют координаты $(-448.914902, 0)$, $(-326.380865, 0)$ и $(381.675397, 0)$.

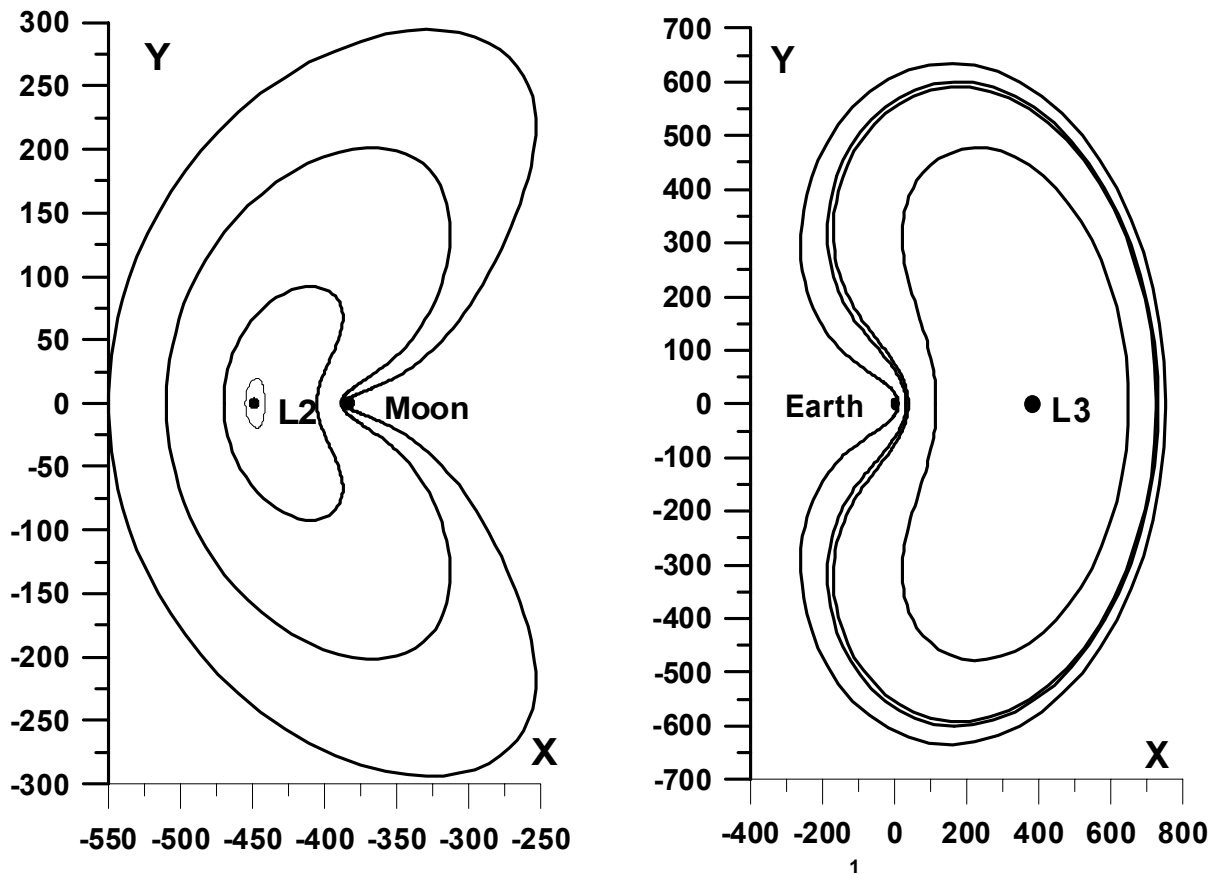


Рис. 3.

В таблице 2 даны параметры периодических решений с резонансами 1-2 по вертикали для трех коллинеарных точек либрации.

Таблица 2.

<i>FAM</i>	<i>n</i>	a_1	v_1	a_2	v_2	<i>T</i>	<i>C</i>	s_2	p/q
<i>L1</i>	1	-333.256	-.751215	-321.182	-.985479	11.9114	3.17435	1	1/1
<i>L1</i>	2	-362.393	-.347098	-305.108	-1.267285	17.1528	3.02139	1	1/1
<i>L1</i>	3	-373.723	-.035230	-278.682	-1.367993	24.3971	2.94928	-1	1/2
<i>L2</i>	4	-458.608	-1.062653	-435.347	-1.340699	14.8319	3.15212	1	1/1
<i>L2</i>	5	-473.630	-.824385	-400.410	-1.810468	18.7183	3.01377	1	1/1
<i>L2</i>	6	-494.677	-.767508	-390.714	-2.286176	24.8107	2.95572	-1	1/2
<i>L3</i>	7	114.331	2.437578	647.559	.414979	27.0934	2.42353	1	1/1
<i>L3</i>	8	37.3654	4.512587	724.262	.217846	27.1909	1.85898	1	1/1

В таблице 3 даны параметры периодических решений с резонансами 1-4 по вертикали для семейства EMS прямых орбит вокруг Земли и Луны.

Таблица 3.

<i>n</i>	a_2	v_1	a_1	v_1	<i>T</i>	<i>C</i>	s_2	p/q
1	1120.5	.586635	-1130.0	-.611293	34.0968	3.7653	0	1/4
2	965.37	.632865	-975.13	-.657119	36.3620	3.5758	-1/2	1/3
3	797.08	.697651	-808.20	-.719823	40.8569	3.3715	-1	1/2
4	794.73	.698702	-805.90	-.720806	40.9465	3.3687	-1	1/2
5	704.05	.743556	-719.04	-.760008	45.3878	3.2637	-1/2	1/3
6	670.92	.762703	-689.88	-.773475	47.6357	3.2278	0	1/4
7	578.39	.839141	-655.28	-.772003	54.3175	3.1534	1	1/1
8	573.82	.844662	-657.28	-.768801	54.4852	3.1513	1	1/1

Оказывается, некоторые пространственные семейства, порождаемые строками таблицы 1, совпадают или пересекаются с семействами, порождаемыми строками таблиц 2 или 3.

1.1. Семейство пространственных периодических решений EG1z.

Это семейство порождается при резонансе 1/1 семейства Егорова (строка 1 таблицы 1). Его решения параметризуются высотой z и симметричны по скорости v_z . На рисунке 4 дана зависимость константы Якоби C от безразмерной начальной высоты z . Видно, что второму нулевому значению z соответствует такое же C , как и у первой строки таблицы 2, порождающей семейство L11z вокруг точки либрации L_1 . Оказывается, эти 2 семейства, EG1Z и L11z, совпадают. Образцы периодических решений во вращающейся геоцентрической системе координат даны на рисунках 5 ÷ 9. Движение происходит в основном в верхнем полупространстве $z > 0$.

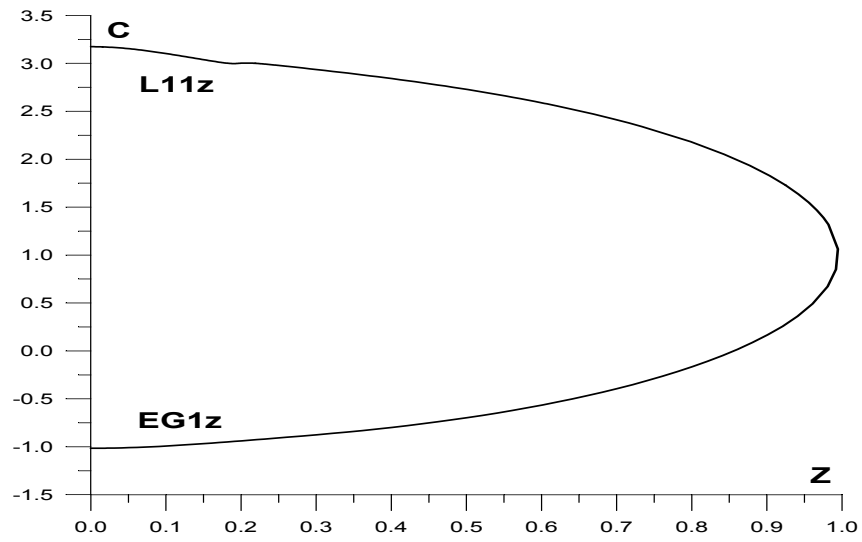


Рис. 4.

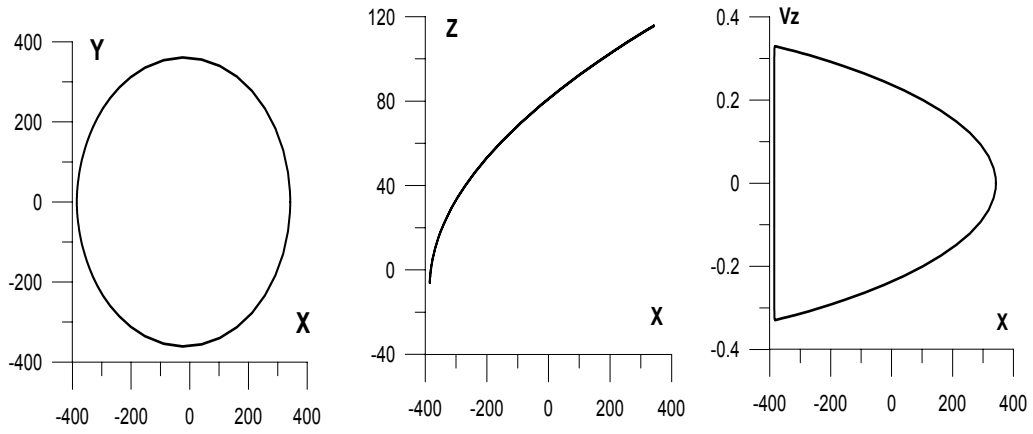


Рис. 5.

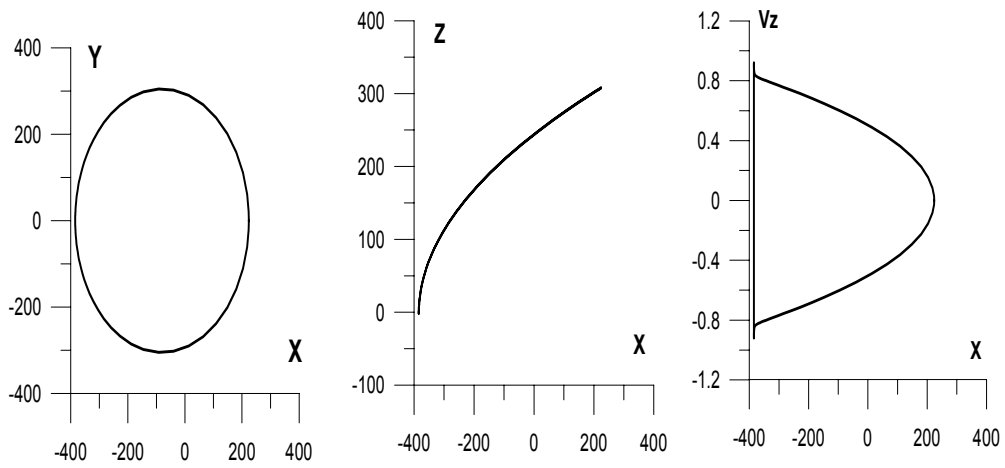


Рис. 6.

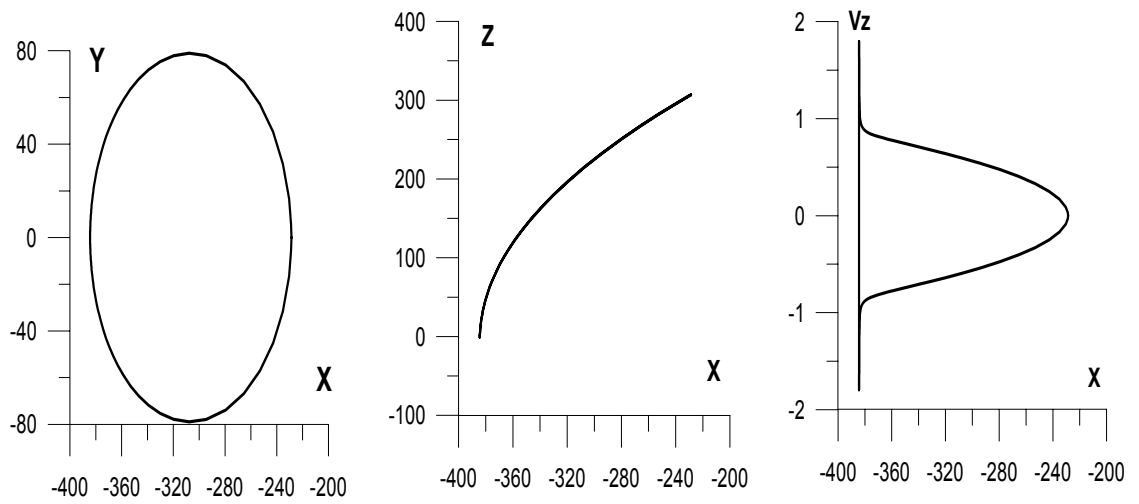


Рис. 7.

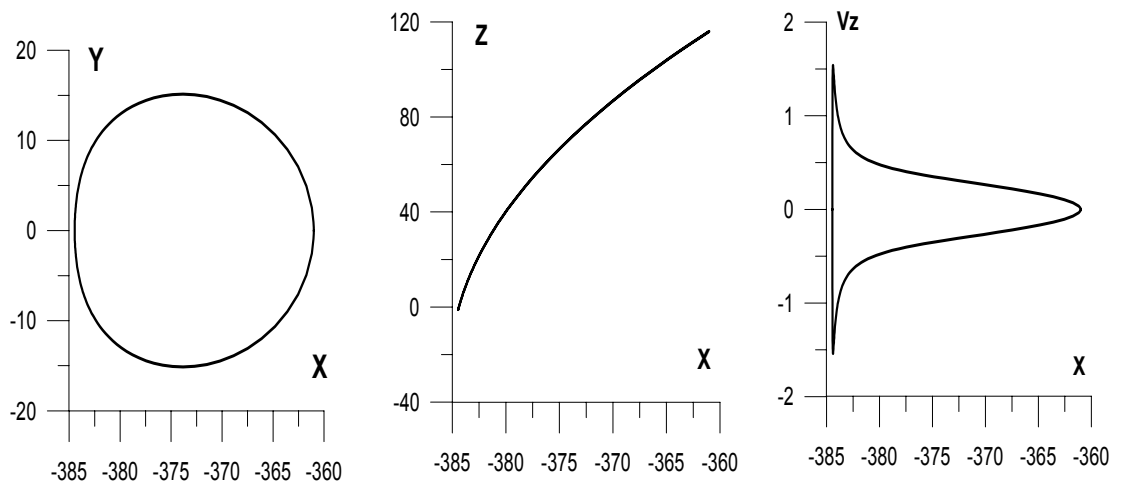


Рис. 8.

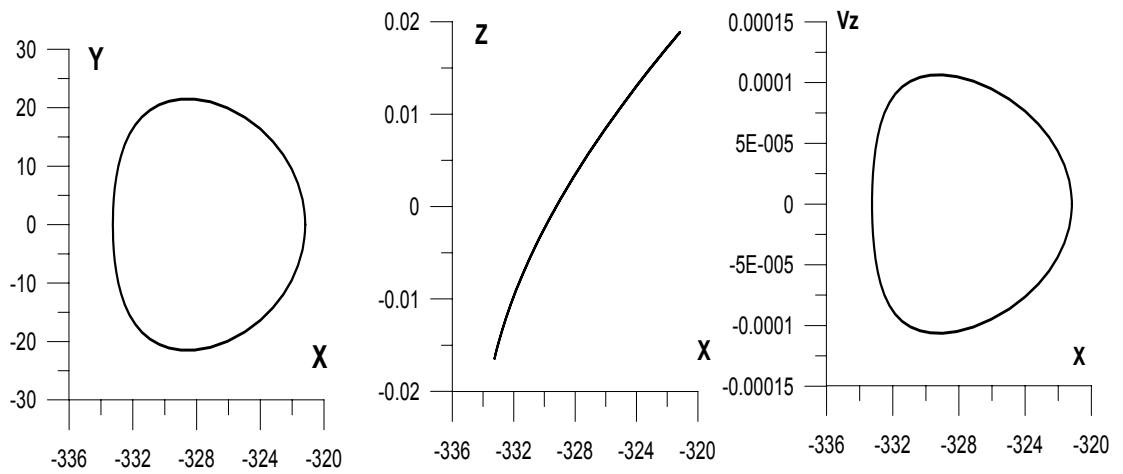


Рис. 9.

Орбиты рисунков 7 и 8 уже не содержат облет Земли, но сохраняют облет Луны. Почти плоская орбита рисунка 9 является орбитой вокруг точки либрации L_1 . На рисунке 10 собраны проекции этих же орбит на плоскость XU .

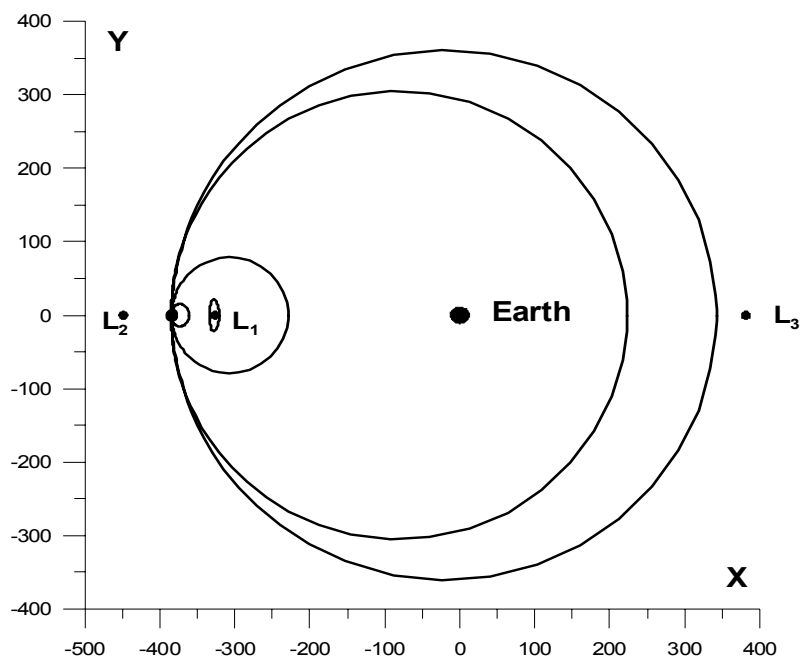


Рис. 10.

1.2. Семейство пространственных периодических решений EG2z.

Это двоякосимметричное семейство порождается при резонансе 2/1 семейства Егорова (строка 4 таблицы 1). Его решения параметризуются как высотой z (в точке a_1), так и скоростью v_z (в точке a_2), и симметричны как по скорости v_z , так и по высоте z . На рисунке 11 даны зависимости параметра s_2 от безразмерной начальной скорости v_z для этого семейства и односимметричного семейства $L2v$, порождаемого строкой 5 таблицы 2.

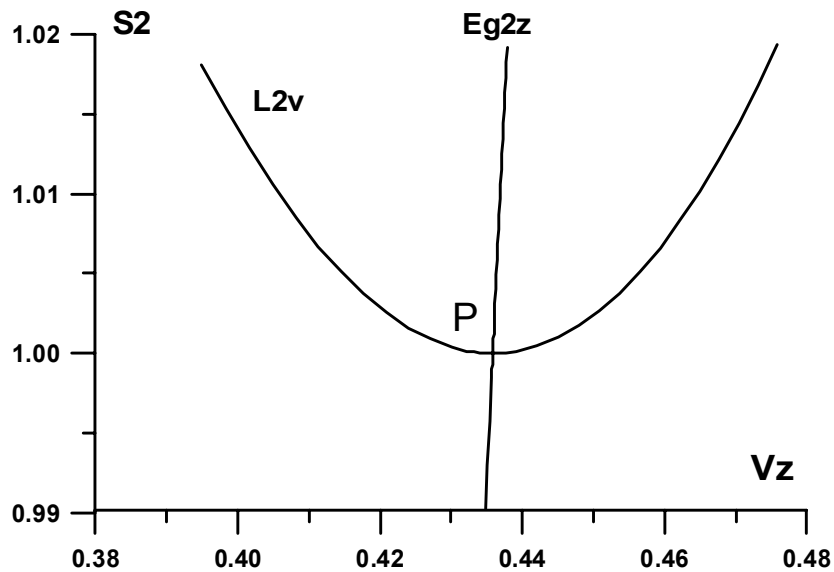


Рис. 11.

Видно, что кривые пересекаются в точке P при $s_2=1$, причем у второго семейства смены устойчивости не происходит. Для семейств плоских решений в аналогичной ситуации мы считали [5], что симметричное семейство порождает несимметричное такого же периода. Естественно теперь считать, что двоякосимметричное семейство $EG2z$ породило односимметричное семейство $L2v$, то есть потерялась одна из симметрий. Образцы периодических решений во вращающейся геоцентрической системе координат семейства $L2v$ даны на рисунках 12 ÷ 16. Видно, что проекция на плоскость XU сжимается и смещается в сторону Луны. У орбиты рисунка 14 появляется петля, которая увеличивается у орбиты рисунка 15 и совпадает с основной у орбиты рисунка 16, на которой происходит пересечение с семейством $EG2z$. Далее изображения орбит повторяются с заменой v_y на $-v_y$.

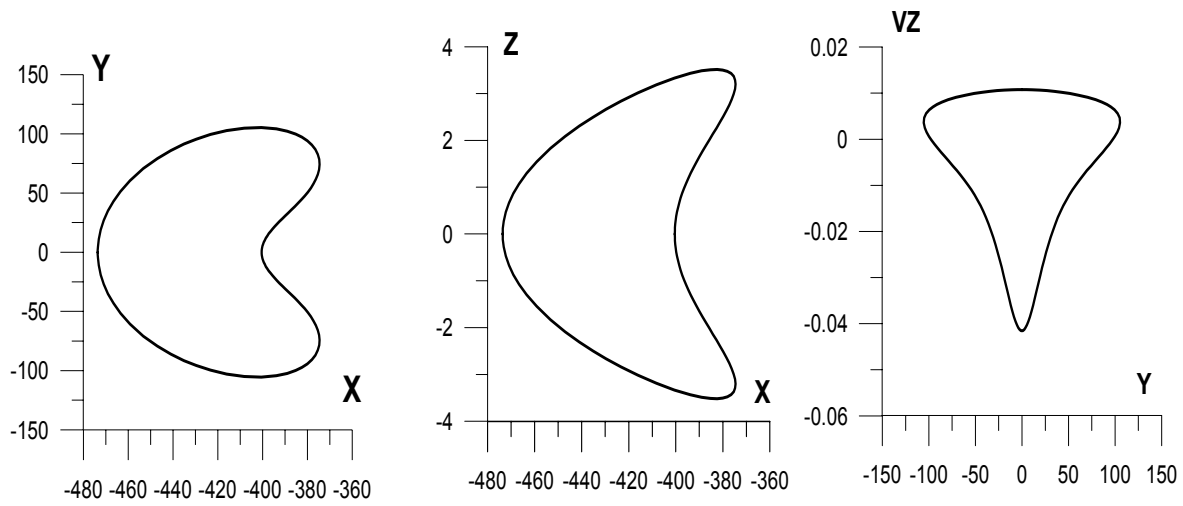


Рис. 12.

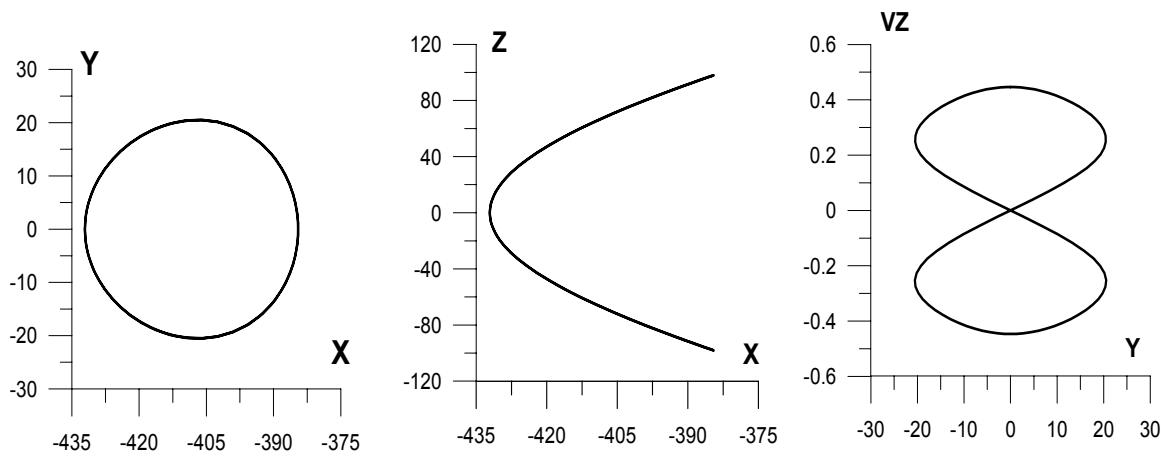


Рис. 13.

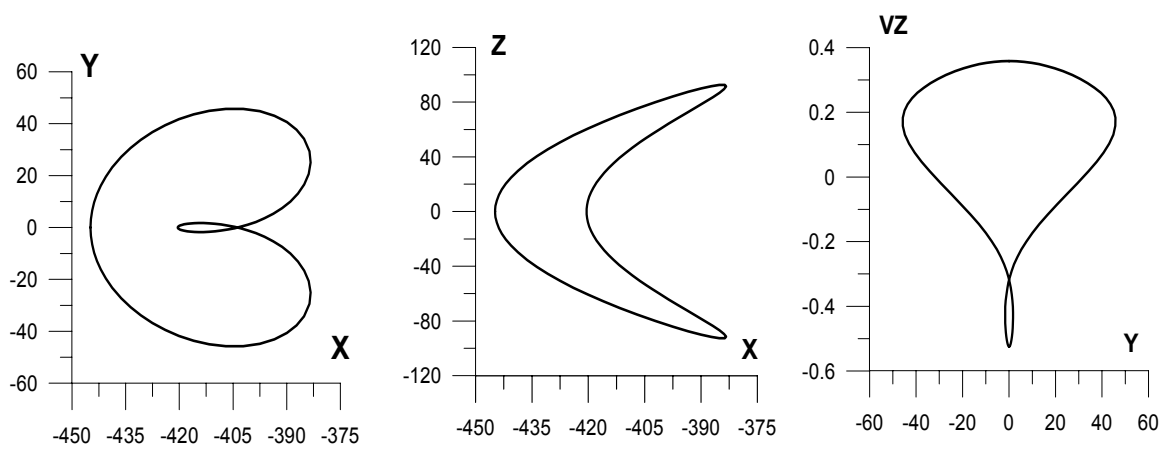


Рис. 14.

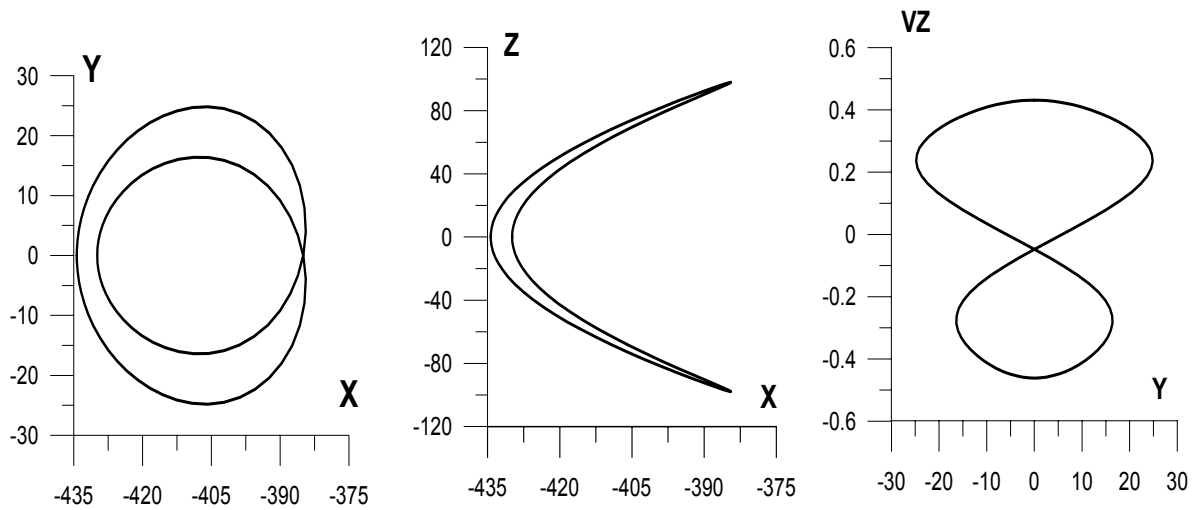


Рис. 15.

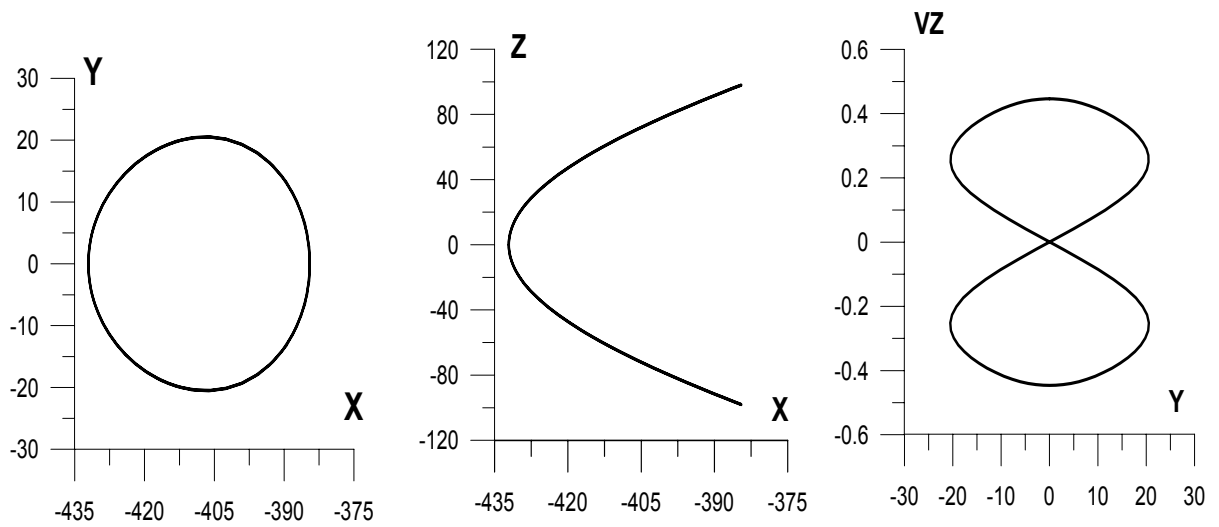


Рис. 16.

Образцы периодических решений семейства $EG2z$ даны на рисунках 17 ÷ 22. Видно, что проекция на плоскость XU сжимается и смещается к точке L_2 и обрывается (орбита рисунка 22) вблизи нее. Проекция на все три плоскости проходит за период дважды.

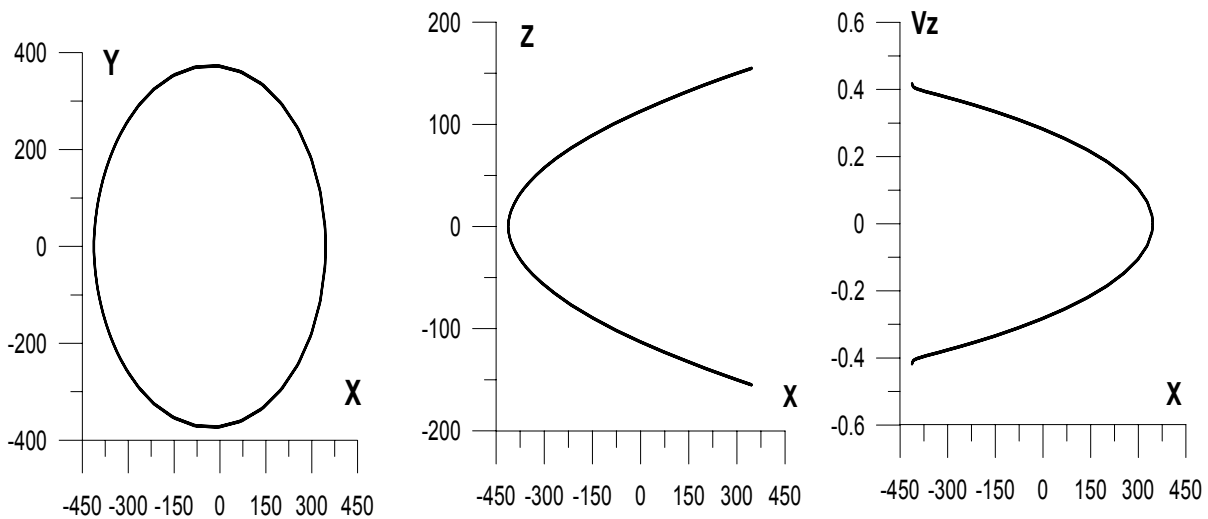


Рис. 17.

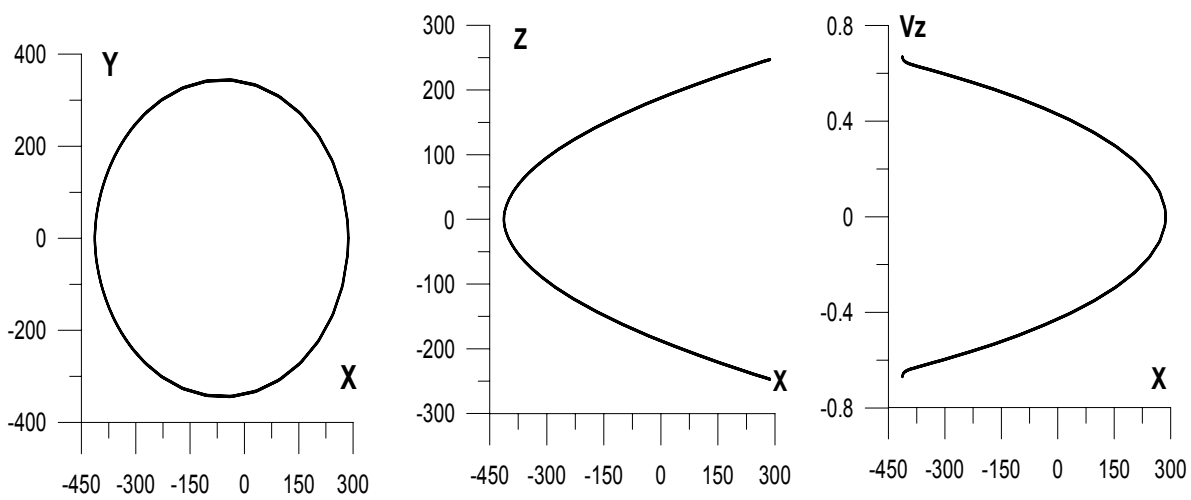


Рис. 18.

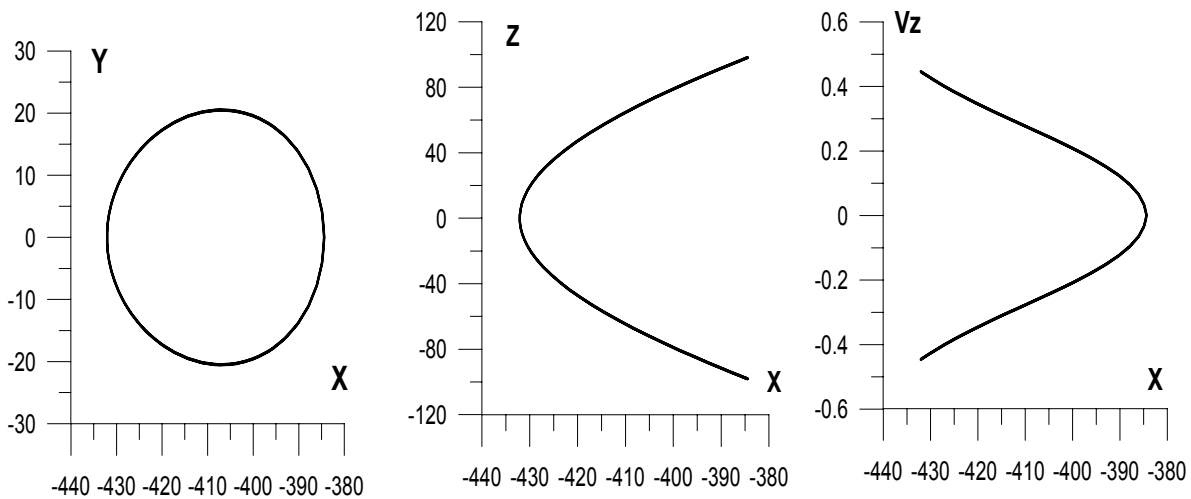


Рис. 19.

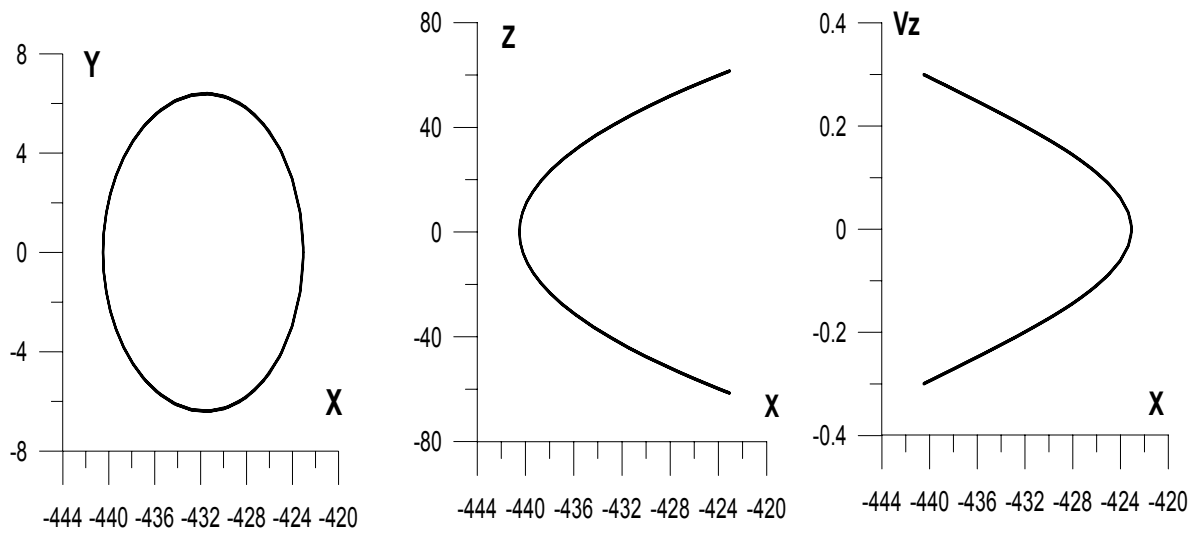


Рис. 20.

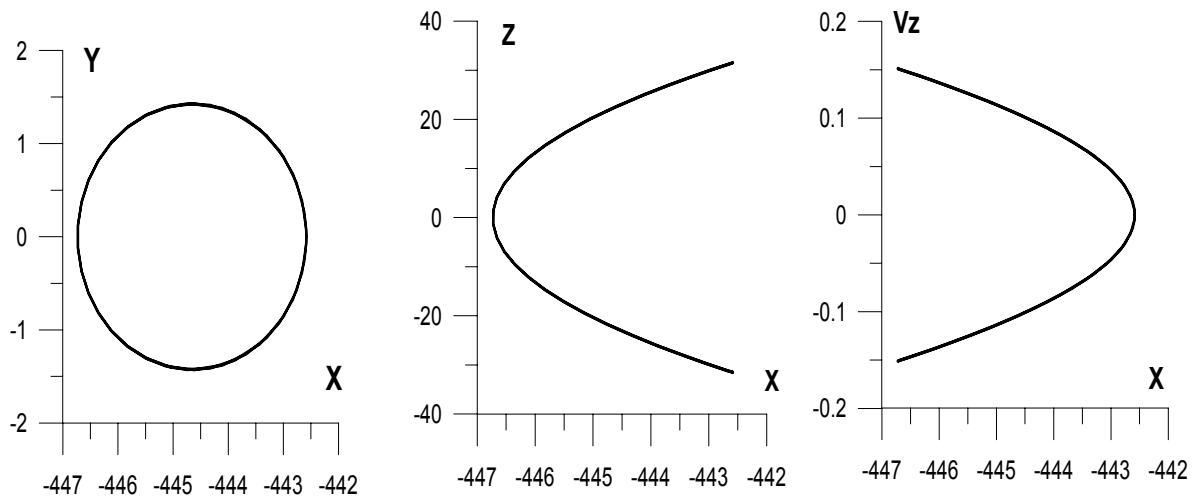


Рис. 21.

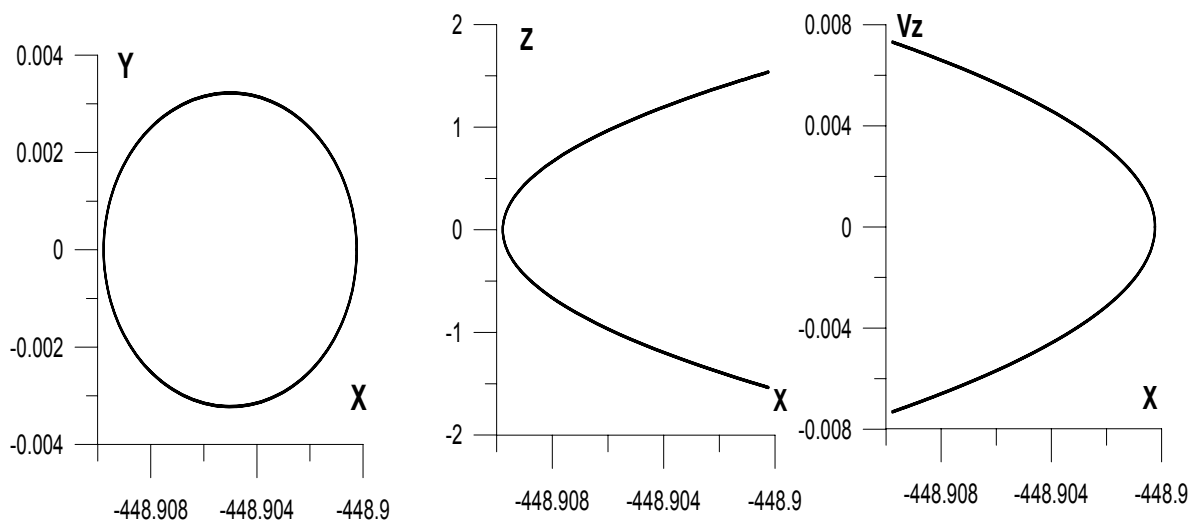


Рис. 22.

1.2. Семейство пространственных периодических решений

EG2v.

Это двоякосимметричное семейство порождается при резонансе 2/1 семейства Егорова (строка 5 таблицы 1). Его решения параметризуются как высотой z (в точке a_2), так и скоростью v_z (в точке a_1), и симметричны как по скорости v_z , так и по высоте z . На рисунке 23 даны зависимости параметра s_1 от безразмерной начальной скорости v_z для этого семейства и односимметричного семейства **L3v**, порождаемого строкой 8 таблицы 2.

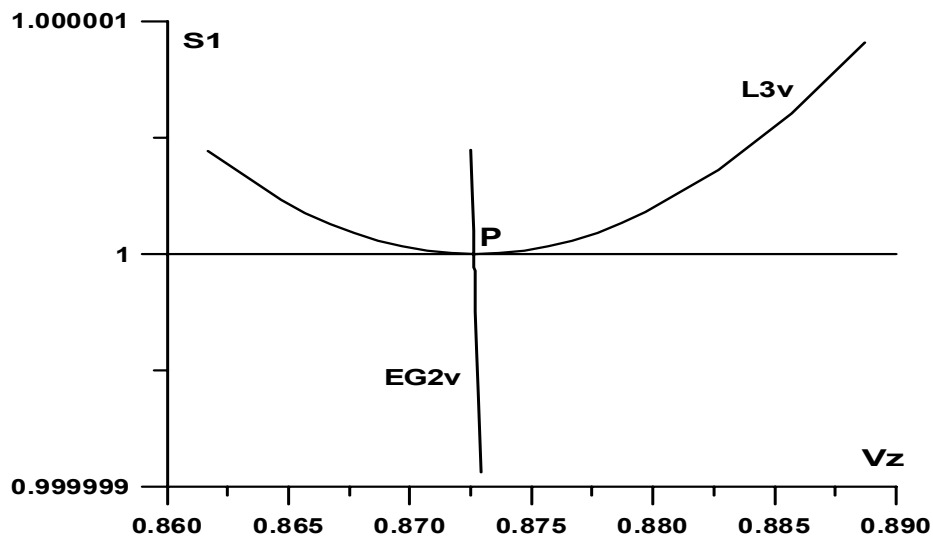


Рис. 23.

Видно, что кривые пересекаются в точке P при $s_1=1$, причем, как в предыдущем разделе, у второго семейства смены устойчивости не происходит. Значит двоякосимметричное семейство **EG2v** породило односимметричное семейство **L3v**. Образцы периодических решений во вращающейся геоцентрической системе координат семейства **L3v**

даны на рисунках 24 ÷ 27. Видно, что проекция на плоскость XU сжимается и смещается в сторону Земли. У орбиты рисунка 25 появляется петля, которая увеличивается у орбиты рисунка 26 и совпадает с основной у орбиты рисунка 27, на которой происходит пересечение с семейством **EG2v**. Далее изображения орбит повторяются с заменой v_y на $-v_y$.

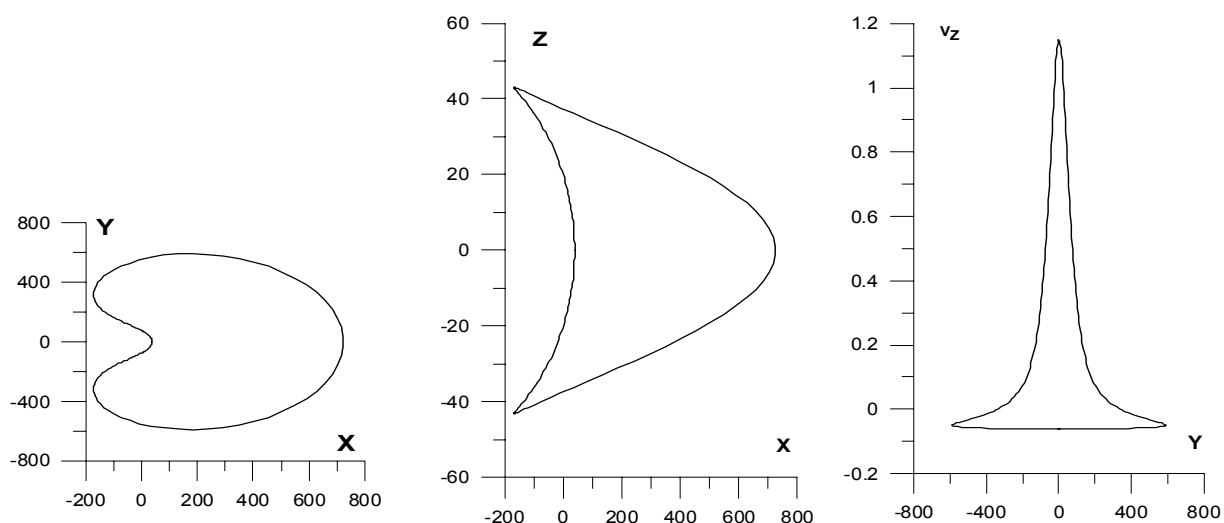


Рис. 24.

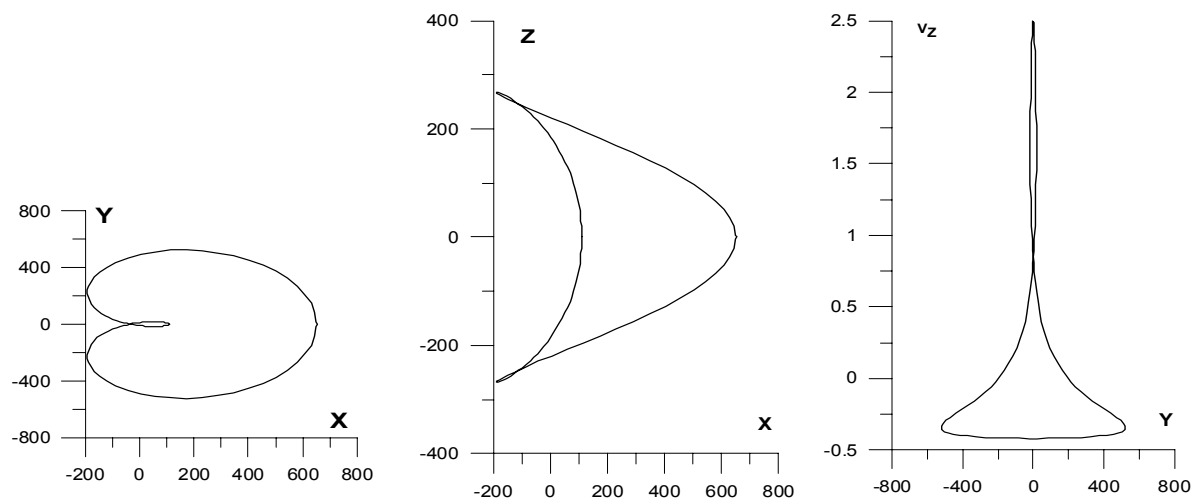


Рис. 25.

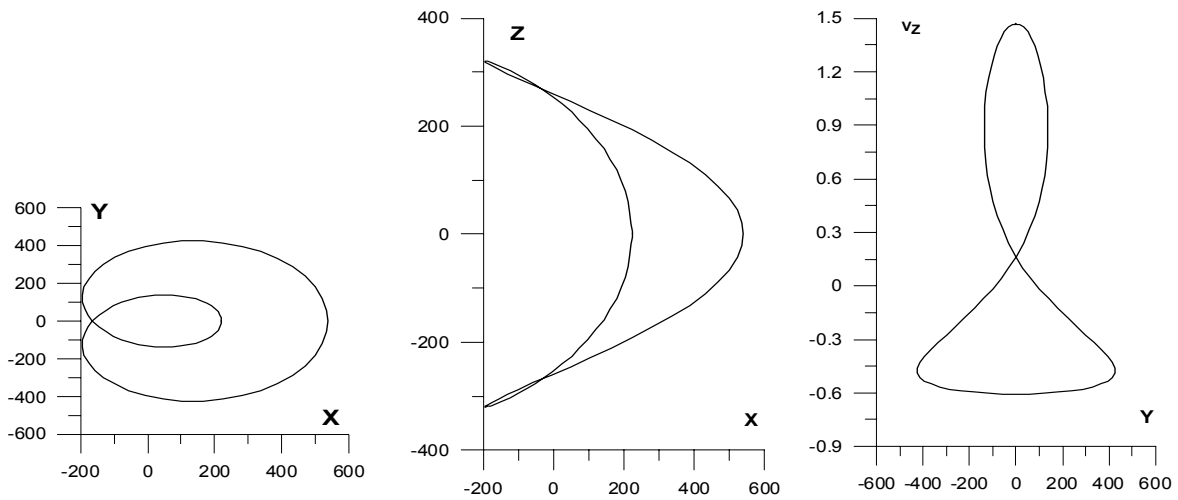


Рис. 26.

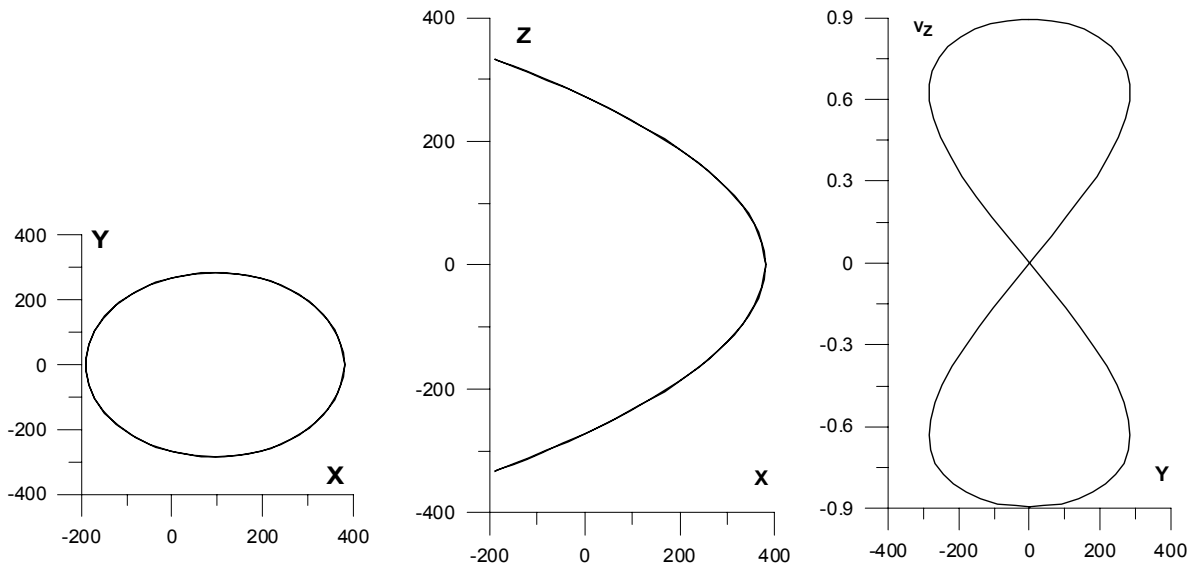


Рис. 27.

Образцы периодических решений семейства $EG2v$ даны на рисунках 28÷33. Видно, что проекция на плоскость XU сжимается и смещается к точке L_3 и обрывается (орбита рисунка 33) вблизи нее. Проекция на все три плоскости проходятся за период дважды.

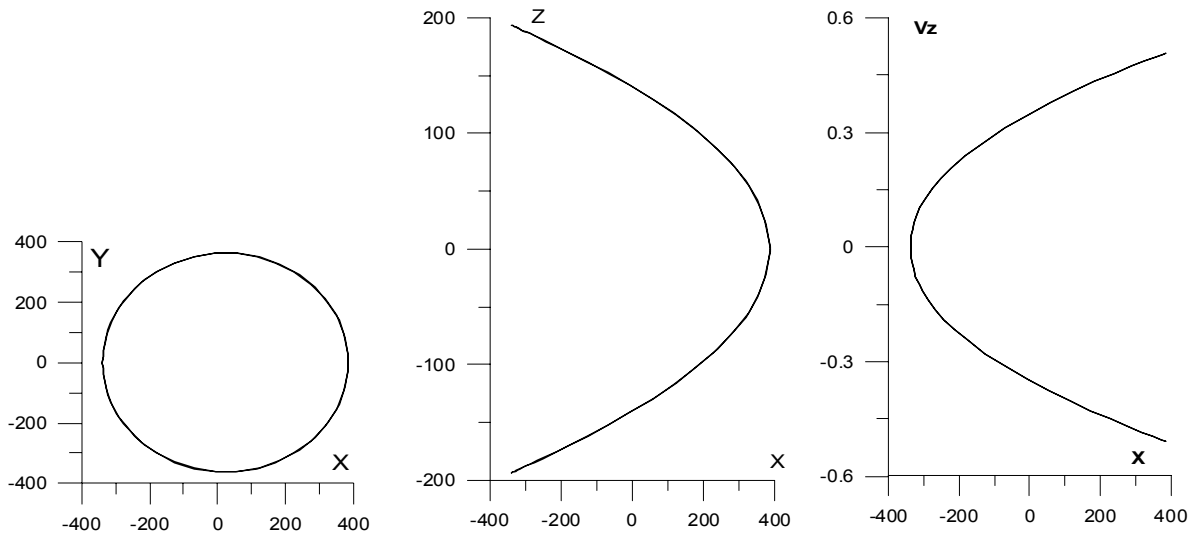


Рис. 28.

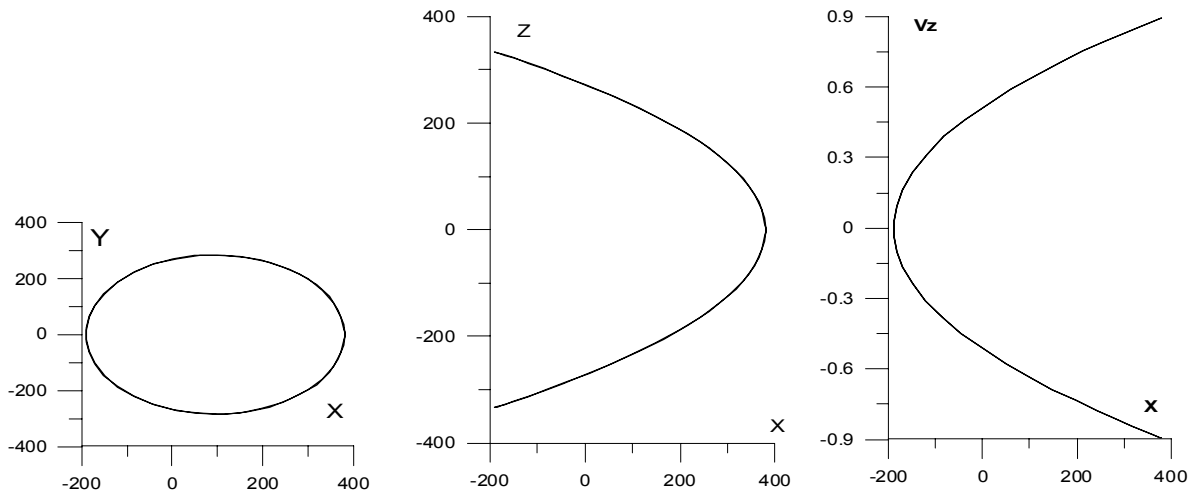


Рис. 29.

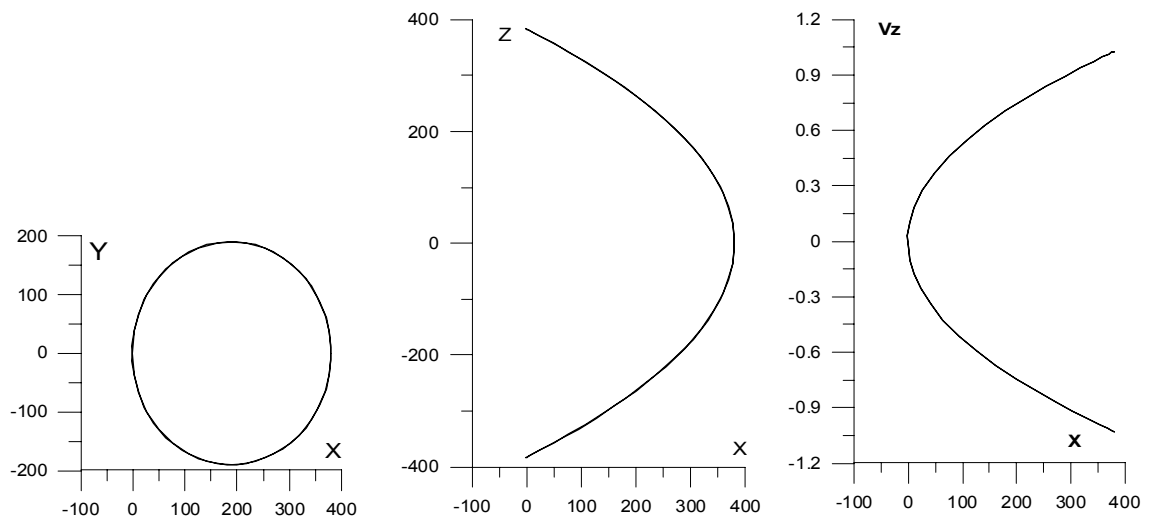


Рис. 30.

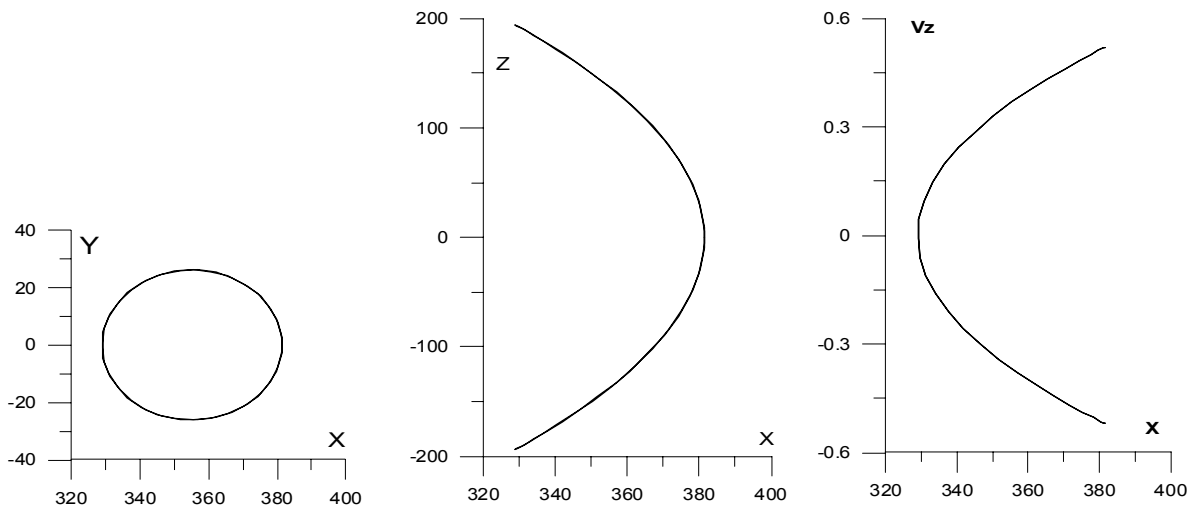


Рис. 31.

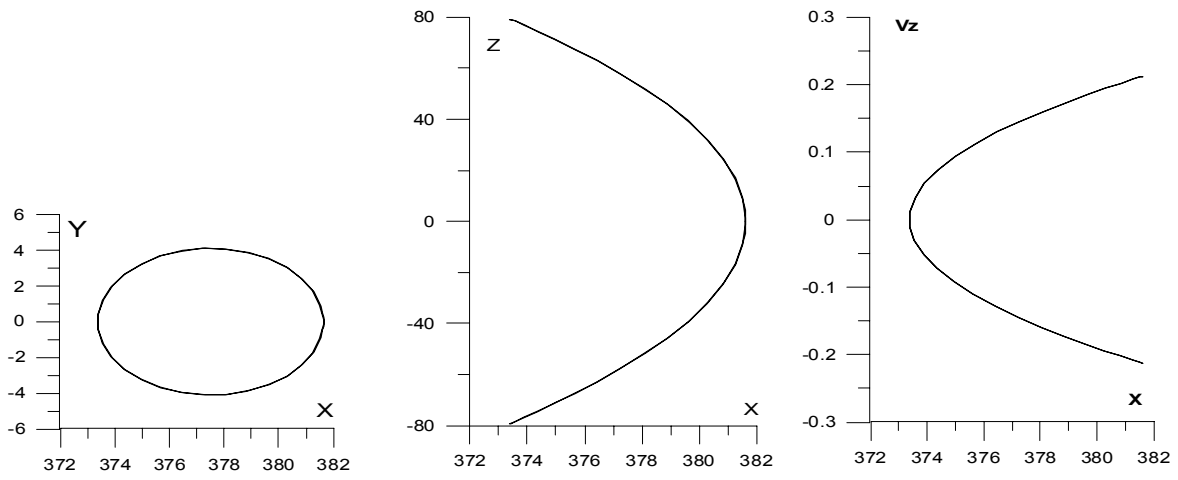


Рис. 32.

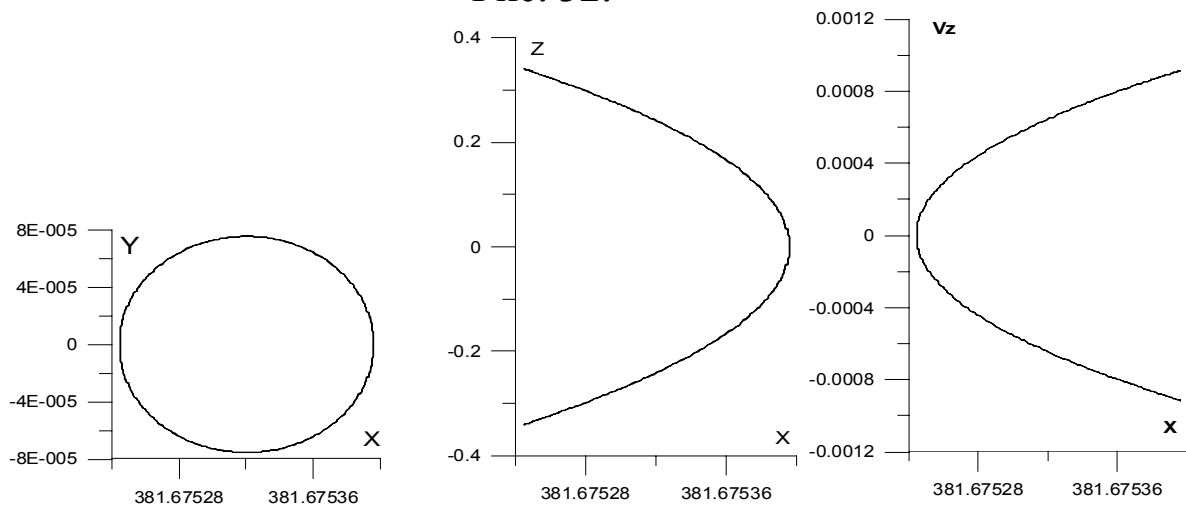


Рис. 33.

1.3. Резонансы более высоких порядков.

Из резонансов более высоких порядков мы ограничимся одним типичным примером резонанса 3/1. Семейство, порождаемое строкой 6 таблицы 1 мы обозначили **EG3v**. Его решения параметризуются скоростью v_z и симметричны по высоте z . На рисунке 34 дана зависимость константы Якоби C от безразмерной начальной скорости v_z .

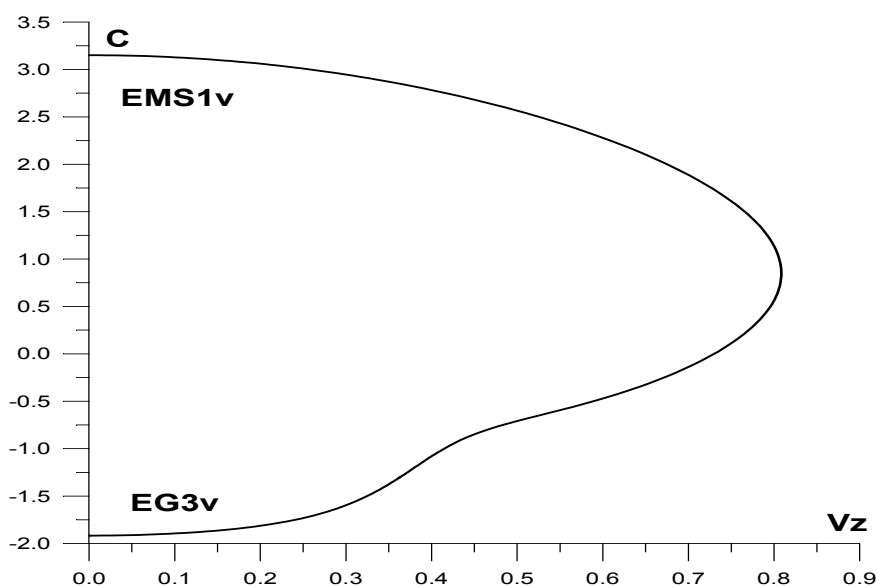


Рис. 34.

Видно, что второму нулевому значению z соответствует такое же C , как и у восьмой строки таблицы 3, порождающей семейство **EMS1v** прямых орбит вокруг Земли и Луны. Как и в примерах работы [1] пространственное семейство соединяет плоские семейства прямых и обратных орбит.

2.Случай системы Солнце -Земля.

Аналогичные результаты несложно получить и для системы Солнце - Земля.

Орбиты изображаются во вращающейся геоцентрической системе координат. Точка (0,0) соответствует Земле. Солнце находится справа по оси X на расстоянии одной астрономической единицы, равной 149597.870691 тыс. км. Точки либрации L_2 , L_1 и L_3 имеют координаты (-1508.1381, 0), (1497.1694, 0) и (299195.22, 0).

В таблице 5 даны параметры периодических решений с резонансами $1 \div 4$ по вертикали для семейства Егорова. Длительность периода T – в годах.

Таблица 5.

n	a_2	v_2	a_1	v_1	T	C	s_2	p/q
1	297487	-.34403	-20.0	59.9113	.49637	-1.00013	1	1/1
2	297845	-.27254	-25.0	59.8406	.49714	-1.00024	0	1/4
3	298130	-.21588	-31.3	59.7844	.49775	-1.00036	-.5	1/3
4	299164	-.02300	-170.2	59.5922	.50000	-1.00226	-1	1/2
5	300816	.15792	-1642.1	59.4112	.50405	-1.02180	-1	1/2
6	387069	6.14440	-87875.6	53.4247	.66667	-1.88989	-.5	1/3
7	460773	9.13297	-161579.4	50.4361	.75000	-2.40375	0	1/4

В таблице 6 даны параметры периодических решений с резонансами 1 и 2 по вертикали для трех коллинеарных точек либрации.

Таблица 6.

n	FAM	a_1	v_1	a_2	v_2	T	C	s_2	p/q
1	$L2$	-1687.79	-.06945	-1260.005	-.542509	.4938	3.000826	1	1/1
2	$L2$	-2065.02	.404544	-456.7476	-1.34213	.6586	3.000245	1	1/1
3	$L2$	-2643.67	.537229	-198.6977	-2.05949	.8999	2.999983	-1	1/2
4	$L1$	1259.37	.537409	1669.9233	.069365	.4870	3.000831	1	1/1
5	$L1$	465.054	1.329501	2048.9594	-.409612	.6550	3.000247	1	1/1
6	$L1$	204.401	2.028324	2636.4145	-.547049	.8989	2.999981	-1	1/2
7	$L3$	193397.3	101.7068	404992.53	42.11911	.9999	2.413996	1	1/1
8	$L3$	164100.4	161.7474	434289.38	36.50712	.9999	1.859058	1	1/1

Видно, что структура этих таблиц такая же, как таблиц 1 и 2; взаимосвязи соответствующих пространственных семейств для системы Солнце – Земля такие же, как и для системы Земля – Луна.

Рассмотрим наиболее интересное для нас семейство пространственных периодических решений **SZEG2z** системы Солнце – Земля, аналогичное семейству **EG2z** системы Земля - Луна. Это двоякосимметричное семейство порождается при резонансе 2/1 семейства Егорова (строка 4 таблицы 5. Его решения параметризуются высотой z и симметричны по скорости v_z .

На рисунке 34 даны зависимости параметра s_2 от безразмерной начальной скорости v_z для этого семейства и односимметричного семейства **SZL2v**, порождаемого строкой 2 таблицы 6. Видно, что кривые пересекаются в точке Р при $s_2=1$, причем у второго семейства смены устойчивости не происходит. Значит и в этом случае односимметричное семейство **SZL2v** порождается двоякосимметричным семейством **SZEG2z**.

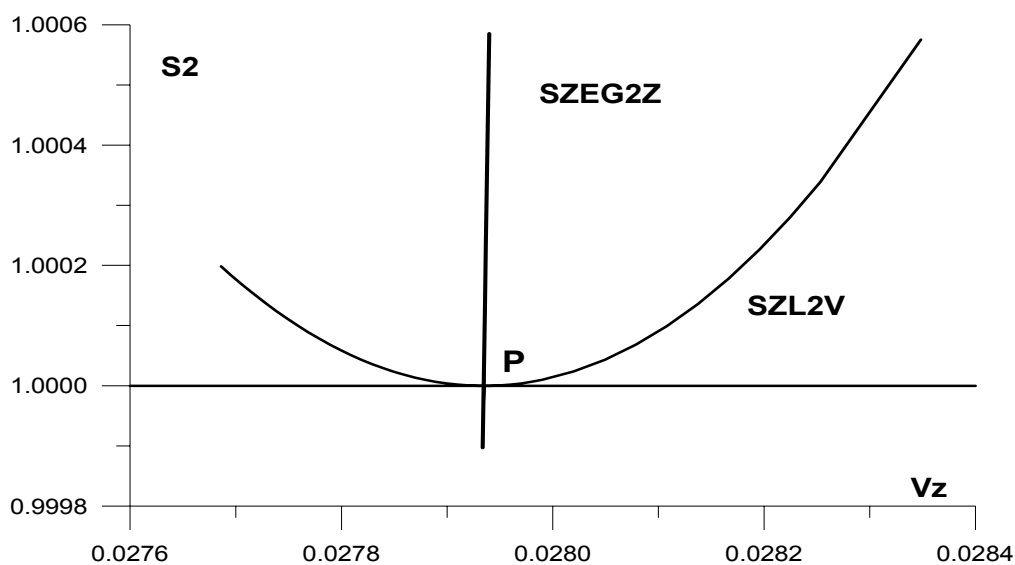


Рис. 34.

Оказалось, это семейство содержит орбиты, удовлетворяющие новым, существенно более жестким ограничениям по охлаждению космического радиотелескопа (КРТ) проекта “Миллиметрон” [6]. На рисунках 35÷39 даны орбиты этого семейства во вращающейся системе координат. В этой системе орбиты периодические, с периодами 247, 219, 208.87, 194 и 186 суток. За это время проекция на плоскость XY обходится дважды по часовой стрелке, один раз выше, второй – ниже плоскости эклиптики.

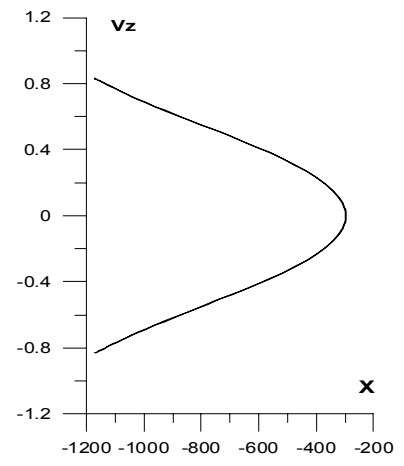
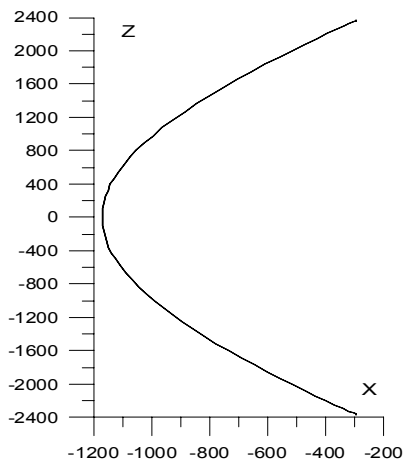
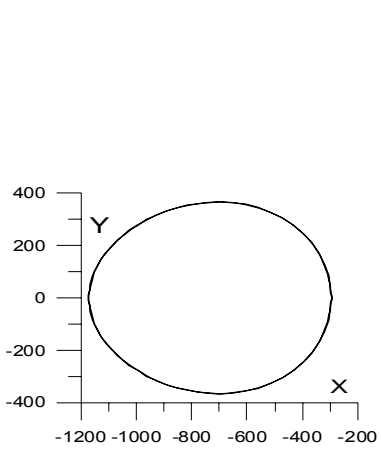


Рис. 35.

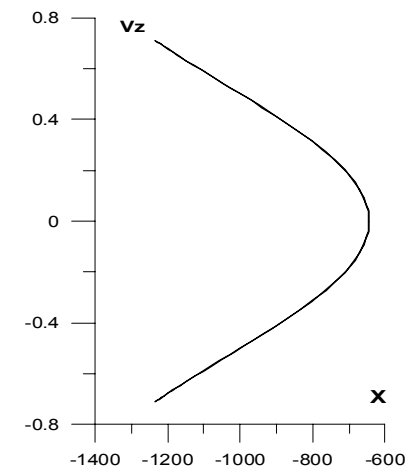
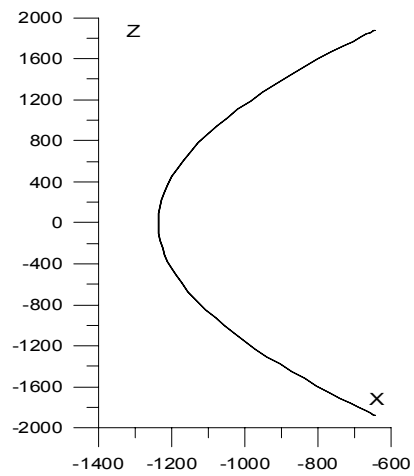
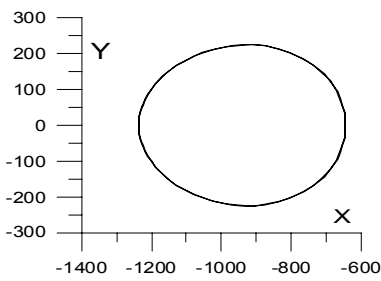


Рис. 36.

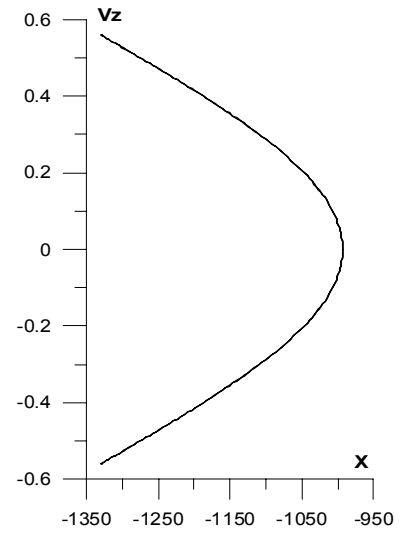
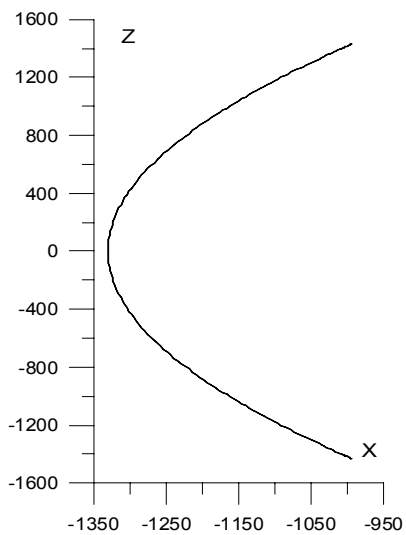
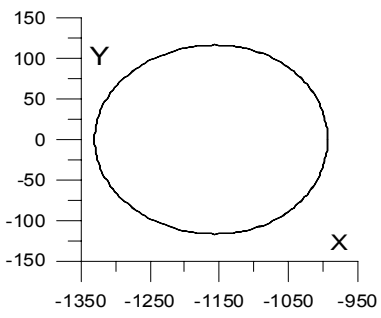


Рис. 37.

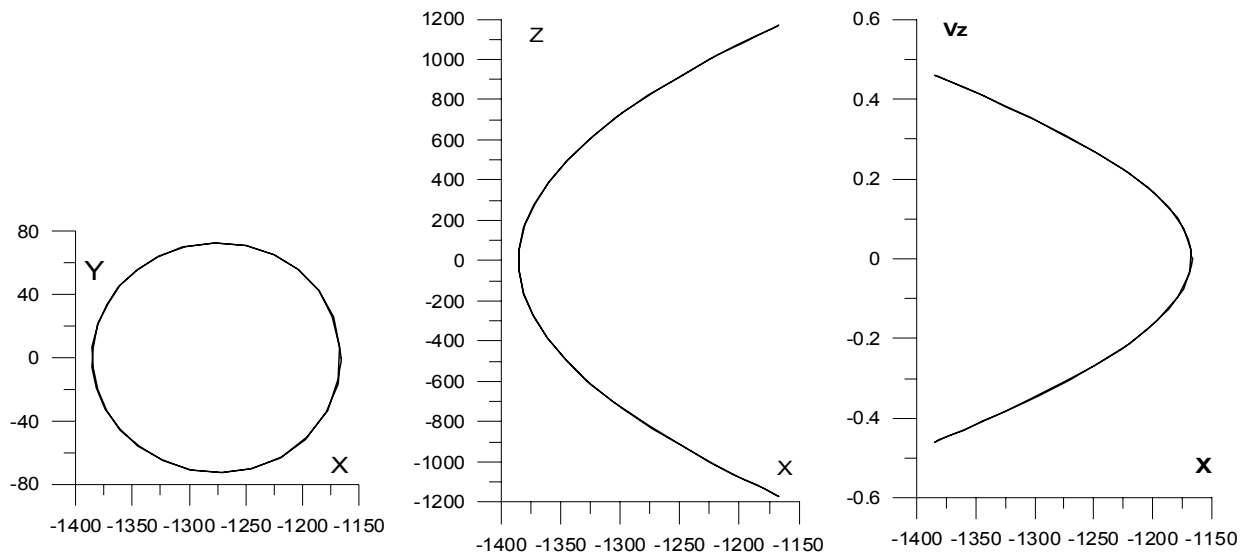


Рис. 38.

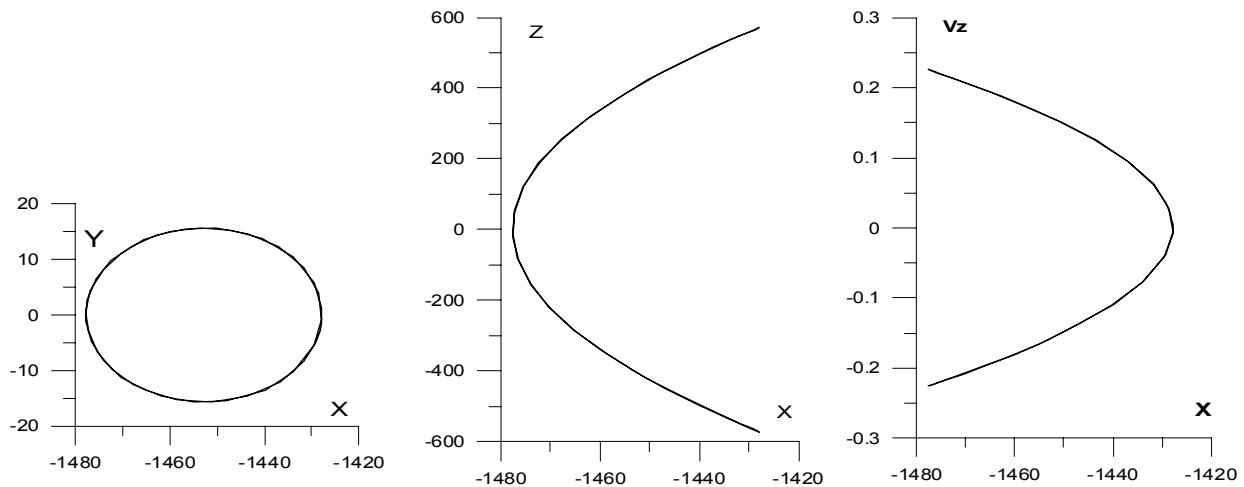


Рис.39.

Из проекций на плоскость XY, совпадающую с плоскостью эклиптики, видно, что КРТ все время находится далеко от Земли и в стороне, противоположной Солнцу.

На рисунках 40÷42 последние 3 орбиты за 2 периода даны в проекциях на координатные плоскости в инерциальной (невращающейся) эклиптической системе. Как и у орбиты “вокруг”

точки либрации L_2 облет Земли совершается за 1 год, то есть с практической точки зрения период 1 год. В вертикальной же плоскости колебания совершаются с теми же периодами, как и во вращающейся системе.

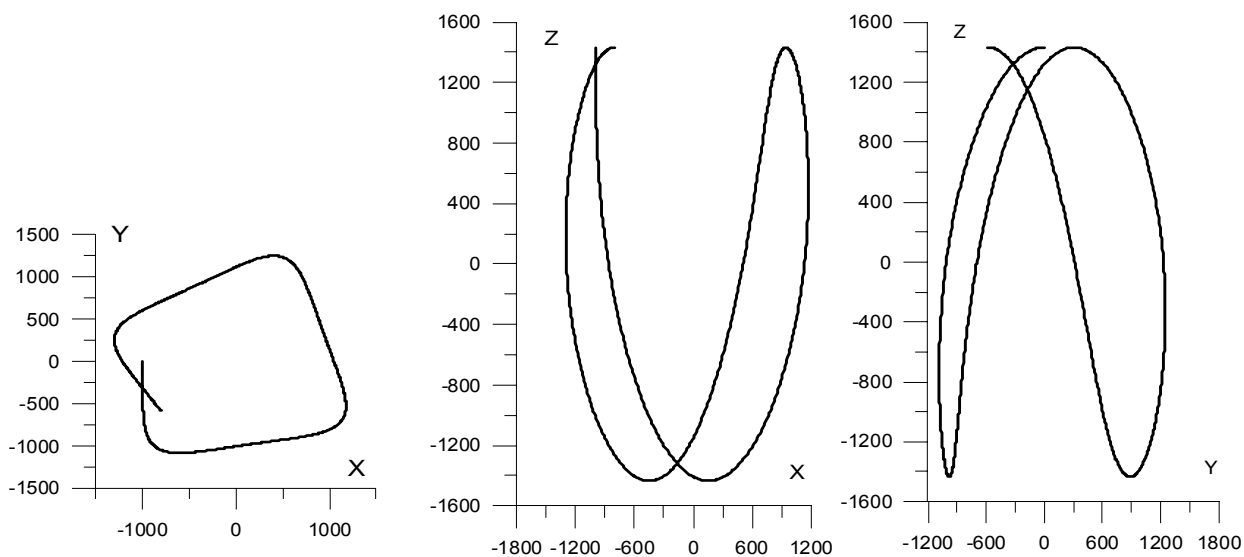


Рис. 40.

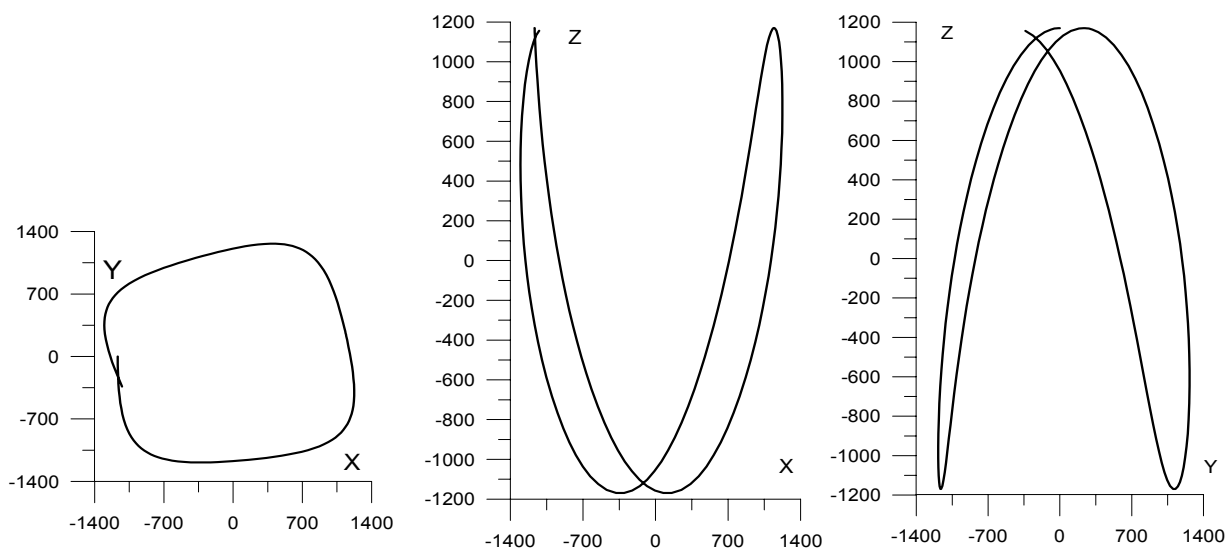


Рис. 41.

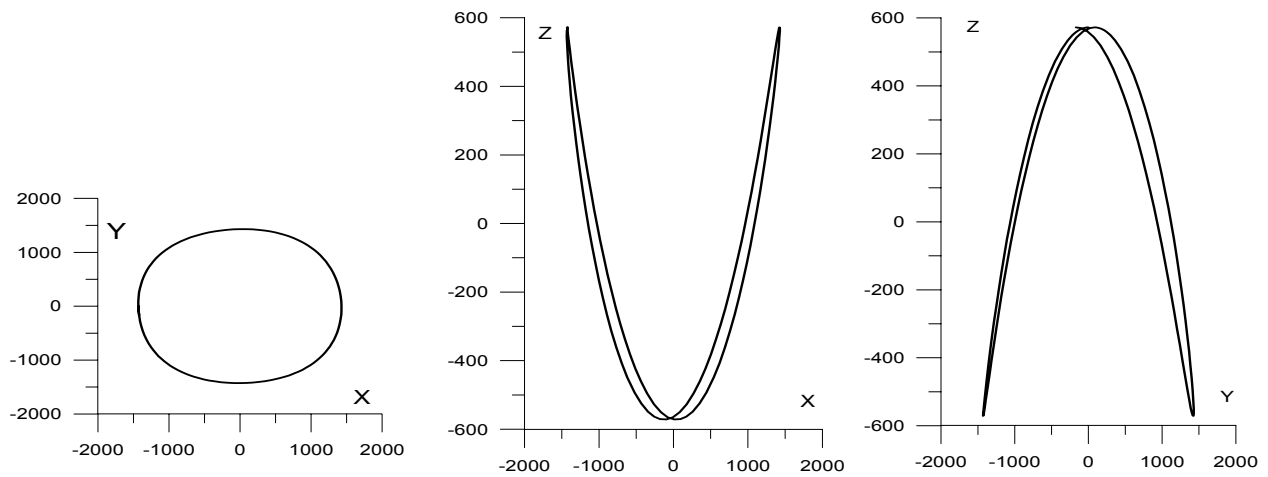


Рис. 42.

На рисунках 43÷47 для пяти орбит дано направление Земля-КРТ за 5 лет. По горизонтали – эклиптическая долгота, по вертикали – широта. Начало нулевой долготы определяется долготой Солнца в момент $t=0$. Небесная сфера разбита на 1000 равновеликих площадок.

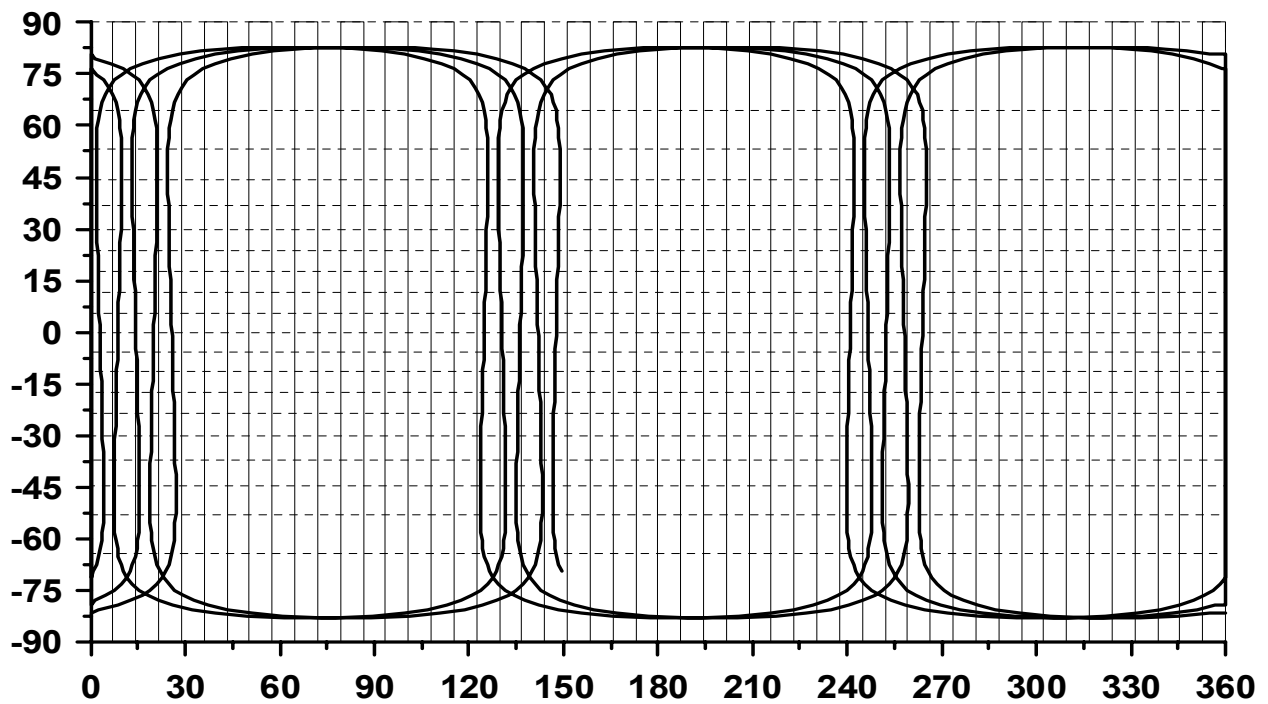


Рис. 43.

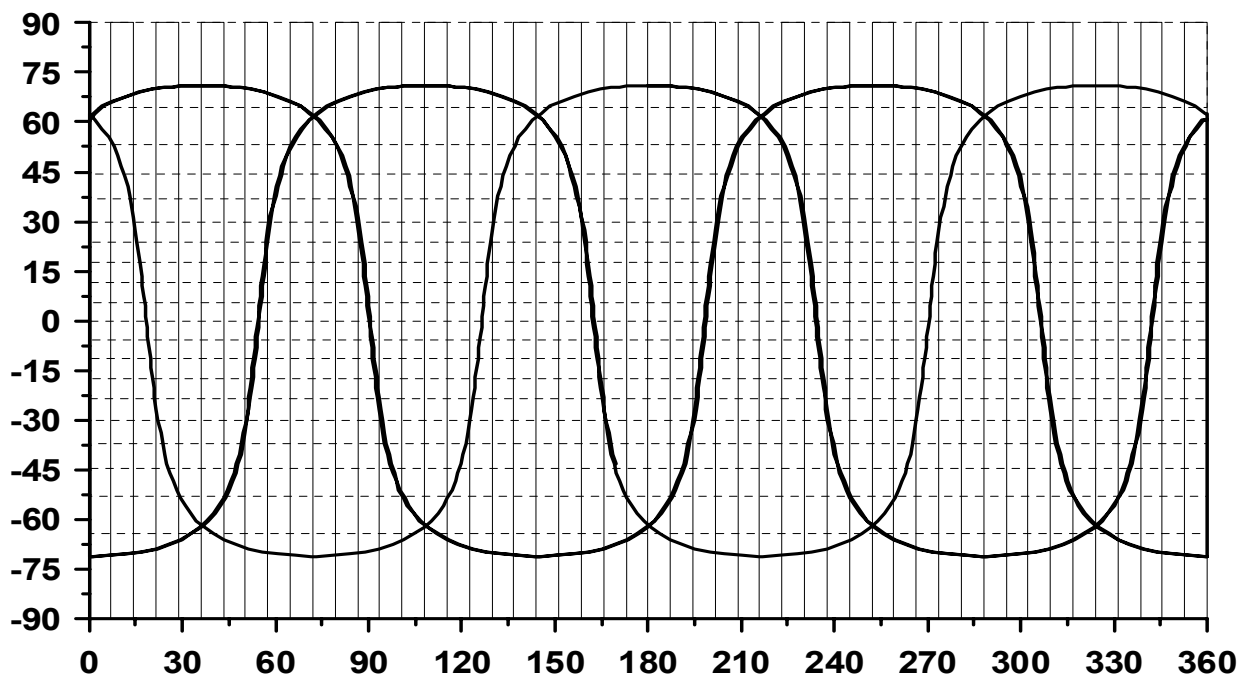


Рис.44.

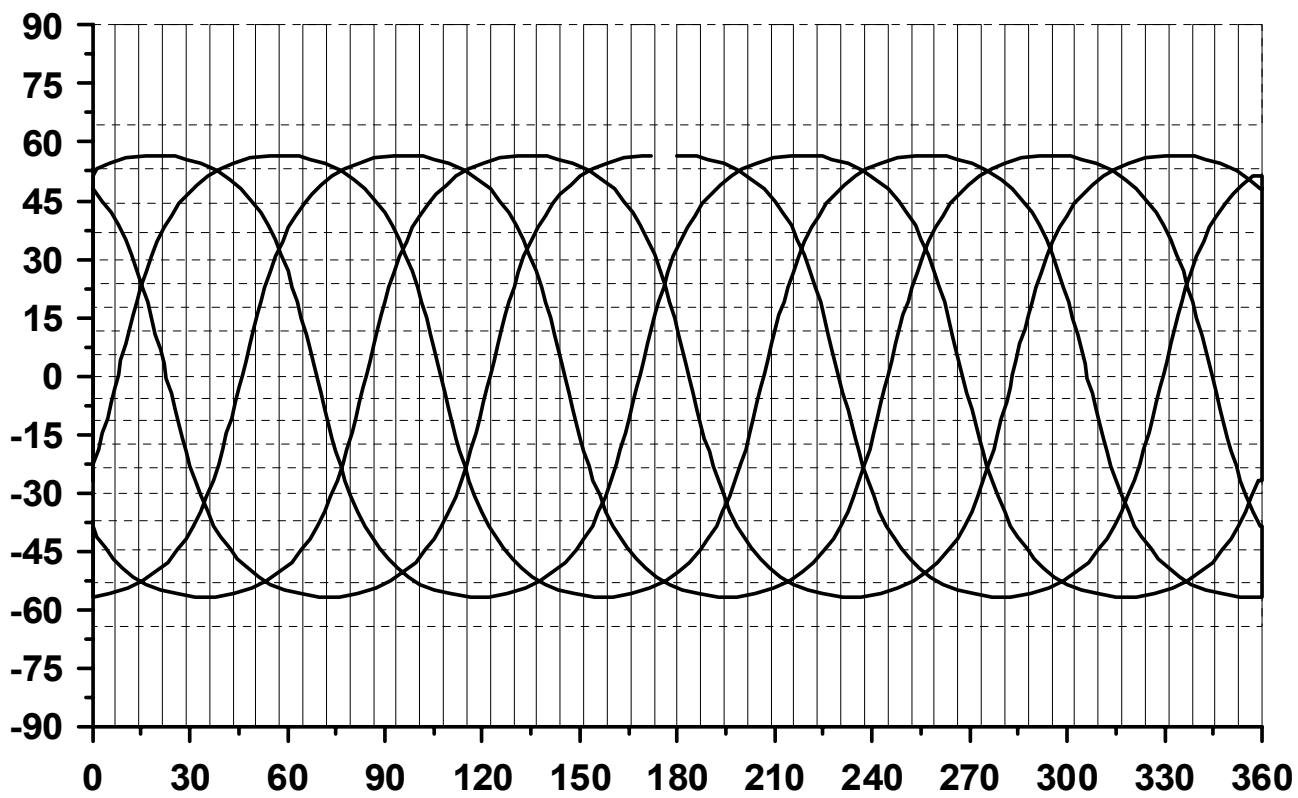


Рис. 45.

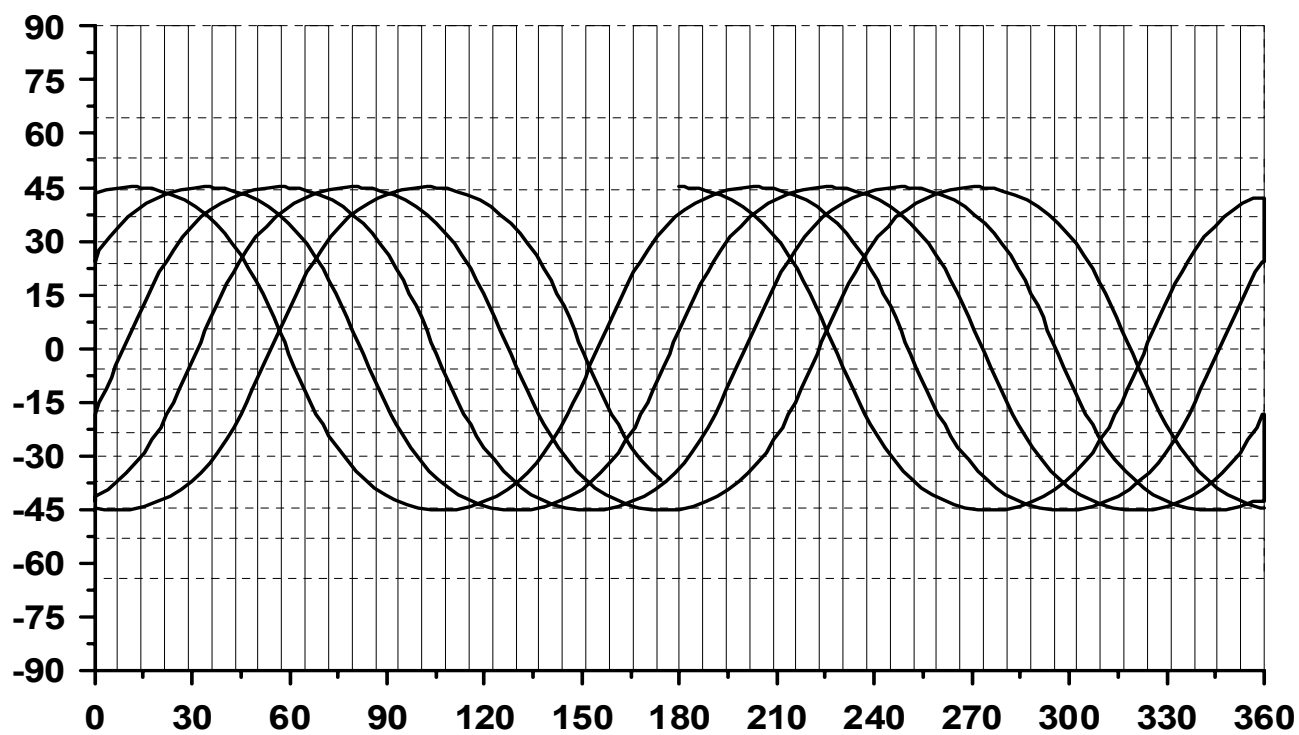


Рис. 46.

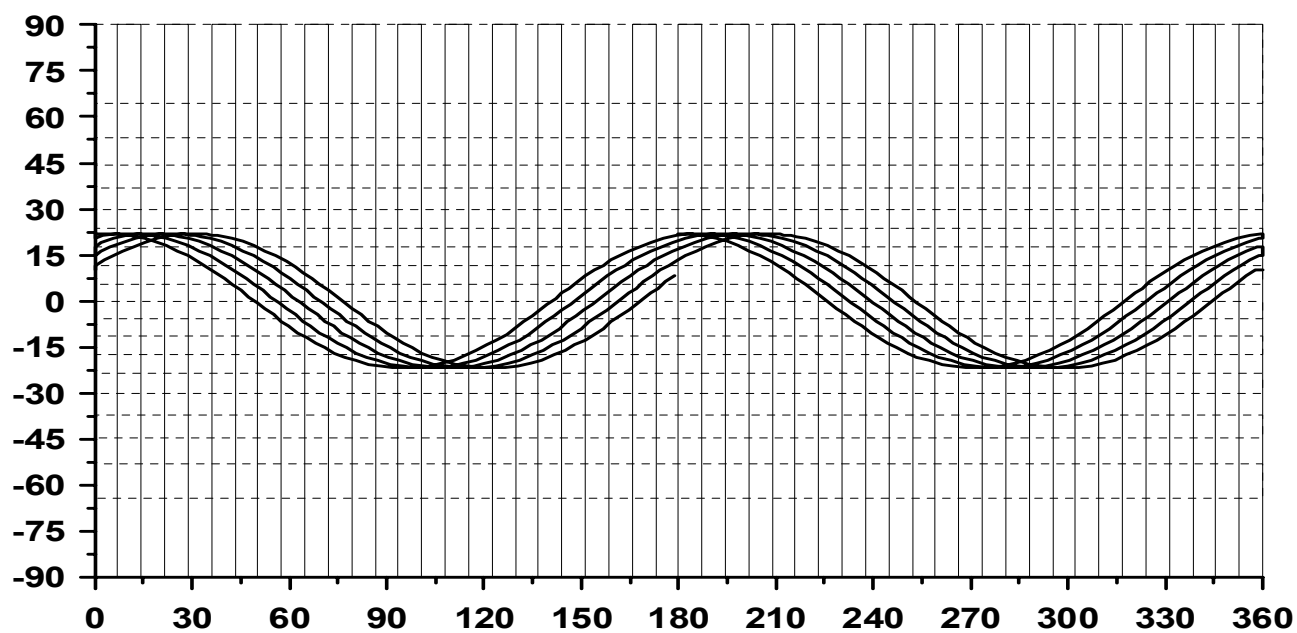


Рис. 47.

По мнению руководителя проекта “Миллиметр” академика РАН Кардашева Н. С. наиболее подходящей для решения поставленных научных задач является третья орбита с периодом 200.8 суток. Для

нее минимальное расстояние от центра Земли 1330.2 тыс. км, максимальное – 1743.8 тыс. км.

Список литературы

1. Крейсман Б.Б. Периодические решения пространственной ограниченной задачи трех тел. Космич. исслед., 2008, том 46, №6.

2. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М., Наука, 1982, 656с.

3. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М., 1990, 296 с.

4. Егоров В.А. О некоторых задачах динамики полета к Луне. Успехи физ. наук, 1957, №63, вып. 1а, с. 73-117.

5. Крейсман Б.Б. Семейства периодических решений гамильтоновых систем. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел. Космич. исследования, 2005, том 43, №2. С.88-110.

6. ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ НА КОСМИЧЕСКУЮ ОБСЕРВАТОРИЮ. Опытнo-конструкторская работа «Создание космической обсерватории «Миллиметрoн» и интерферoметра Земля-Космос на ее основе для исследований астрономических объектов со сверхвысокой чувствительностью в миллиметровом, субмиллиметровом и дальнем инфракрасном диапазoнах спектра электромагнитного излучения на период 2008÷2009».

Шифр ОКР «СПЕКТР-М». АКЦ ФИАН, 2006.