

УЧРЕЖДЕНИЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



ПРЕПРИНТ

1

Е. П. ОРЛОВ

**О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ
СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ В КОСОУГОЛЬНЫХ
СИСТЕМАХ КООРДИНАТ ЕВКЛИДОВА
ПРОСТРАНСТВА СОБЫТИЙ**

Москва 2011

А Н Н О Т А Ц И Я

С точки зрения понятия евклидова пространства событий с косоугольными системами координат, рассмотрены решения релятивистского уравнения Дирака для свободной частицы. Вектора этого пространства, направленные по биссектрисам четырёх углов между осью времени и пространственной осью, вдоль которой происходит движение частицы, названы спиновыми, поскольку определяют её спиновые состояния. Показано, что компоненты биспинора Дирака в стандартном представлении определяются проекциями спиновых векторов на биссектрисы квадрантов плоскости, в которой лежат оси. В спинорном же представлении его спинорные компоненты определяются проекциями спиновых векторов на пространственную ось системы координат, связанной с неподвижным наблюдателем, а коспинорные – проекциями на временную ось системы координат, связанной с движущейся частицей. Проиллюстрированы преобразования спиновых векторов при пространственной инверсии и зарядовом сопряжении.

ON SOLUTIONS OF THE DIRAC EQUATION FOR A FREE MOVING PARTICLE IN NON-ORTHOGONAL REFERENCE SYSTEMS OF THE EUCLIDIAN SPACE OF EVENTS

A B S T R A C T

The solutions of relative Dirac equation for a free moving particle have been considered from the viewpoint of the Euclidian space of events with non-orthogonal reference systems. The vectors of this space directed along the bisectors of four angles between the time axis and the space axis along which the moving of particle occurs were named the “spin-vectors” since they determine the particle spinning states. It was shown that the components of Dirac’s bispinor in a standard representation are determined by the projections of spin-vectors on the bisectors of quadrants of plane in which the axes lie. In the spinor representation the spinor components of Dirac’s bispinor are determined by the projections of spin-vectors on the space axis of the reference system connected with immovable observation, and the co-spinor components are determined by the projections of spin-vectors on the temporary axis of the reference system connected with the moving particle. The spin-vectors’ transformations at the space inverse and charge conjugation have been illustrated.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Введение	4
2. Преобразование решений, записанных в стандартном представлении ...	5
3. Геометрическая интерпретация стандартного представления	12
4. Спинорное представление решений в евклидовом пространстве событий	17
5. Геометрическая интерпретация спинорного представления	19
6. Обсуждение результатов	24
7. Заключение	30
8. Литература	31

1. Введение

В работах [1, 2] на основе рассмотрения пространственно временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора было введено понятие евклидова пространства событий с косоугольными системами координат, одна из которых жестко связана с наблюдателем, а другая с движущейся модой, образованной волнами, распространяющимися под углом к оси резонатора. Такой резонатор с возбуждёнными в нем модами, которые движутся друг относительно друга, можно рассматривать как наглядную модель пространства с дополнительным компактным четвертым измерением, заполненного волновыми полями частиц, см., например, [3 – 6]. Моды с одинаковым продольным индексом при этом ассоциируются с частицами одного сорта, движущимися друг относительно друга. В [2, 7] было показано, что использование косоугольных систем координат в указанном четырёхмерном пространстве обладает рядом преимуществ, позволяющим вывод формул кинематики тел в специальной теории относительности сделать наглядным и физически понятным.

Достоинством рассмотрения физических процессов в таком пространстве является, во-первых, то, что нет необходимости в основу рассмотрения класть такие постулаты как постоянство скорости света или псевдоевклидовость пространственно временного многообразия Минковского. Достаточно предположить, что пространство внутри резонатора однородно и изотропно, и отсутствует дисперсия скорости распространяющихся в нём волн. При этом псевдоевклидовость пространства времени и постулат о постоянстве скорости света являются следствием этих предположений и резонансного условия для мод резонатора. Во-вторых, вывод кинематических эффектов специальной теории относительности базируется на вращении системы координат на действительные, а не на мнимые углы, как это имеет место при рассмотрении физических процессов в пространстве времени Минковского. Это позволяет иллюстрировать физические процессы привычными геометрическими образами, лишёнными той иррациональности, которая присуща геометрическим образам пространства времени Минковского.

Связь эффектов теории относительности с законами распространения волн в резонаторах позволяет также, с точки зрения евклидова пространства событий с косоугольными системами координат, рассматривать физические процессы, относящиеся к сфере релятивистской квантовой механики. Пример такого рас-

смотрения продемонстрирован в настоящей работе, посвящённой решениям релятивистского уравнения Дирака для свободной частицы.

2. Преобразование решений, записанных в стандартном представлении

Как известно [8, С.108, 109], решения релятивистского уравнения Дирака для свободного движения частицы в так называемом стандартном представлении имеют вид:

$$\psi_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}} w \\ \sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}} (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) w \end{pmatrix} e^{-i(\varepsilon t - \mathbf{p}\mathbf{r})}, \quad (1)$$

$$\psi_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}} (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) w' \\ \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}} w' \end{pmatrix} e^{i(\varepsilon t - \mathbf{p}\mathbf{r})}, \quad (2)$$

где индекс p указывает значение 4-импульса, m_0 - масса покоя частицы, $\varepsilon = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}$, \mathbf{p} - 3- импульс, \mathbf{n} - орт вектора \mathbf{p} , $\boldsymbol{\sigma}$ - двухрядная матрица, компоненты которой представляют собой матрицы Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

w и w' - спиноры, произвольные двухкомпонентные величины, удовлетворяющие лишь условию нормировки

$$w^* w = 1, \quad w'^* w' = 1. \quad (4)$$

Решения, в которых в качестве индекса фигурирует величина p , называются положительными решениями уравнения Дирака, то есть решениями с «положительной частотой», а решения с $-p$ - отрицательными решениями, то есть решениями с «отрицательной частотой». Как отмечается в [9, С.251] эти названия были введены Дираком. Они имеют условный смысл и удобны для описания процессов рождения и уничтожения пар частиц на языке квантовых переходов одной частицы.

Выполняя дираковское сопряжение $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, получаем

$$\bar{\psi}_p = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}} w^*, -\sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}} w^* (\mathbf{n}\sigma) \right) e^{i(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{r})}, \quad (5)$$

$$\bar{\psi}_{-p} = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}} w'^* (\mathbf{n}\sigma), -\sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}} w'^* \right) e^{-i(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{r})}. \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда \mathbf{n} направлен вдоль положительного направления оси z . Пусть два независимых состояния свободной частицы с заданным \mathbf{p} отвечают двум значениям z -проекции спина в системе покоя; обозначим её σ . Соответствующие спиноры:

$$w^{(\sigma=1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^{(\sigma=-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В качестве же двух линейно независимых решений с «отрицательной частотой» в соответствии с [8, С.110] выберем плоские волны, в которых трёхмерные спиноры $w^{(\sigma)'} = -\sigma_y w^{(-\sigma)} = 2\sigma i w^{(\sigma)}$, то есть

$$w'^{(\sigma=1/2)} = i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w'^{(\sigma=-1/2)} = -i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Тогда, учитывая, что $(\mathbf{n}\sigma) = \sigma_z$, а $w^{(\sigma=1/2)*} = (1, 0)$, $w^{(\sigma=-1/2)*} = (0, 1)$, $w'^{(\sigma=1/2)*} = -i(1, 0)$, $w'^{(\sigma=-1/2)*} = i(0, 1)$ получаем

$$\psi_{p,1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\varepsilon - p_z z)/\hbar}, \quad \psi_{p,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}} \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}} \end{pmatrix} e^{-i(\varepsilon - p_z z)/\hbar}, \quad (9)$$

$$\psi_{-p,1/2} = i \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\varepsilon - p_z z)/\hbar}, \quad \psi_{-p,-1/2} = i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}} \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}} \end{pmatrix} e^{i(\varepsilon - p_z z)/\hbar}, \quad (10)$$

$$\bar{\psi}_{p,1/2} = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}}, 0, -\sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}}, 0 \right) e^{i(\varepsilon - p_z z)/\hbar},$$

$$\bar{\psi}_{p,-1/2} = \left(0, \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}}, 0, \sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}} \right) e^{i(\varepsilon - p_z z)/\hbar}, \quad (11)$$

$$\bar{\psi}_{-p,1/2} = -i \left(\sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}}, 0, -\sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}}, 0 \right) e^{-i(\varepsilon - p_z z)/\hbar},$$

$$\bar{\psi}_{-p,-1/2} = -i \left(0, \sqrt{\frac{\varepsilon - m_0 c^2}{2\varepsilon}}, 0, \sqrt{\frac{\varepsilon + m_0 c^2}{2\varepsilon}} \right) e^{-i(\varepsilon - p_z z)/\hbar}. \quad (12)$$

Преобразуем эти решения, используя представление о пространстве с дополнительным четвертым измерением, компактность которого обеспечивается некоторым потенциалом, влияющим на распространение волн материи в направлении оси координат этого дополнительного измерения и имеющим в простейшем случае вид прямоугольной потенциальной ямы с «очень высокими» стенками. Как показано в [1, 2, 4, 7], простейшей моделью такого пространства с компактным четвертым измерением может служить оптический (или акустический) резонатор с плоскими параллельными слегка пропускающими зеркалами, размеры которых несоизмеримо велики по сравнению с расстоянием L между ними. Это позволяет допустить непрерывность поперечных индексов мод и возможность распространения волн, образующих моды, под любыми углами к оси резонатора. Моды с отличающимися поперечными индексами при фиксированном продольном индексе ассоциируются с одинакового рода частицами, движущимися друг относительно друга. Мода, прямая и обратная волны которой распространяются перпендикулярно плоскостям зеркал резонатора (волновые векторы параллельны оси резонатора), ассоциируется с покоящейся относительно наблюдателя частицей и связанной с ней системой координат. Такую моду будем называть покоящейся. Мода, прямая и обратная волны которой распространяются под углами β и $\pi - \beta$, соответственно, ассоциируется с движущейся относительно наблюдателя частицей. С ней связывается движущаяся система координат, а саму моду будем называть движущейся. Скорость движущейся моды относительно покоящейся связана с углом β соотношением $v/c = \sin \beta$.

Важно то, что при рассмотрении пространственно временных отношений между модами такого резонатора, как уже отмечено во введении, нет необходимости постулировать псевдоевклидовость пространства и времени. При наличии некоторого пропуска зеркал резонатора с помощью представления о длительностях жизни покоящейся и движущейся мод можно ввести представление о

временной координате и показать, что пространственно временные отношения между модами резонатора подчиняются преобразованиям Лоренца, а геометрия пространства времени, если можно так выразиться, с точки зрения мод - псевдо-евклидова. С точки зрения внешнего наблюдателя геометрия пространства событий является евклидовой, но пространственно-временное описание событий необходимо проводить в косоугольных системах координат x, y, z, l и x', y', z', l' , где $l = ct, l' = ct'$, изображённых на рис.1,*a*.

В отрицательных решениях, как известно [8, С.107], наряду с заменой знака ε , или что тоже самое – знака k_l , надо поменять и знак \mathbf{p} , или что тоже самое – знак проекции вектора \mathbf{k} на пространственные оси. Это означает, что движению моды в положительном направлении оси z будет отвечать вектор \mathbf{k} зеркально отражённый относительно оси z . Таким образом, для описания отрицательных решений, соответствующих движению моды резонатора (частицы) в положительном направлении оси z , оси z' и l надо повернуть на угол 2β по часовой стрелке, рис.1,*b*.

Ввиду того, что движение происходит вдоль оси z $x' \equiv x, y' \equiv y$ и поэтому на рис.1 кроме временных координат l и l' из совокупности пространственных координат показаны только координаты z и z' .

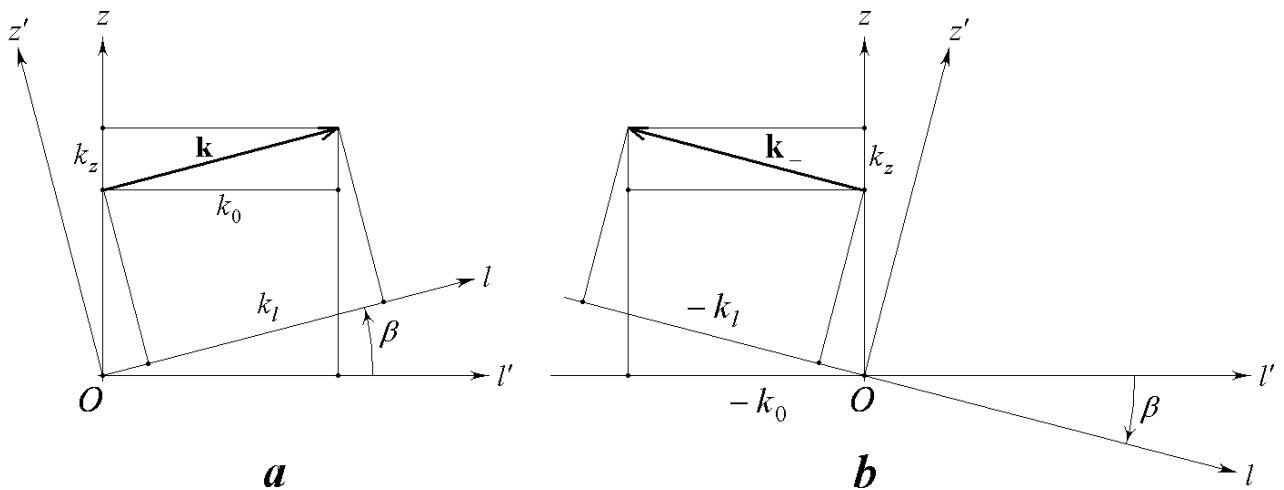


Рис.1. Косоугольные системы координат евклидова пространства событий в случае частицы, описываемой положительными (a) и отрицательными решениями (b). Оси z, l связаны с неподвижным наблюдателем, а z', l' – с движущейся в положительном направлении оси z частицей.

В этих координатах ковариантные компоненты волнового вектора волны движущейся моды «с точки зрения» покоящейся моды для положительных и отрицательных решений $k_l = \pm|\mathbf{k}| = \pm k$, где $k = k_0 / \cos \beta = k_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, k_0 - абсолютное значение волнового вектора в системе координат, связанной с движущейся модой. Величина k_0 численно равна так называемому комптоновскому волновому числу: $k_0 = m_0 c / \hbar$.

Заметим, что волновое число k волн движущейся моды, как видно из рис.1, выражается через k_0 и k_z как $k = \sqrt{k_0^2 + k_z^2}$. Так как

$$k_z = k_0 \operatorname{tg} \beta = \frac{m_0 c}{\hbar} \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{m_0 v}{\hbar \sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{p_z}{\hbar},$$

v - абсолютная величина скорости,

а $k_l = k = \frac{m_0 c}{\hbar c \sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{\varepsilon}{\hbar c}$, то решения (9 – 12) можно представить в виде

$$\psi_{p,1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl - k_z z)}, \quad \psi_{p,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} \end{pmatrix} e^{-i(kl - k_z z)}, \quad (13)$$

$$\psi_{-p,1/2} = i \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl - k_z z)}, \quad \psi_{-p,-1/2} = i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \end{pmatrix} e^{i(kl - k_z z)}, \quad (14)$$

$$\bar{\psi}_{p,1/2} = \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}}, 0 \right) e^{i(kl - k_z z)},$$

$$\bar{\psi}_{p,-1/2} = \left(0, \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}}, 0, \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} \right) e^{i(kl - k_z z)}, \quad (15)$$

$$\bar{\psi}_{-p,1/2} = -i \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}}, 0 \right) e^{-i(kl - k_z z)},$$

$$\bar{\psi}_{-p,-1/2} = -i \left(0, \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}, 0, \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} \right) e^{-i(kl-k_z z)}. \quad (16)$$

Поскольку в выражениях (13) – (16) берутся положительные значения квадратных корней, то $\sqrt{(1-\cos\beta)/2} = \sin(\beta/2)$, а $\sqrt{(1+\cos\beta)/2} = \cos(\beta/2)$, где под β подразумевается абсолютное значение угла поворота оси l . Тогда получаем:

$$\psi_{p,1/2} = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ 0 \\ \sin(\beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \psi_{p,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\beta/2) \\ 0 \\ -\sin(\beta/2) \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (17)$$

$$\psi_{-p,1/2} = e^{i\pi/2} \begin{pmatrix} \sin(\beta/2) \\ 0 \\ \cos(\beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)}, \quad \psi_{-p,-1/2} = e^{-i\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\beta/2) \\ 0 \\ \cos(\beta/2) \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)}, \quad (18)$$

$$\bar{\psi}_{p,1/2} = \left(\cos\frac{\beta}{2}, 0, -\sin\frac{\beta}{2}, 0 \right) e^{i(kl-k_z z)}, \quad \bar{\psi}_{p,-1/2} = \left(0, \cos\frac{\beta}{2}, 0, \sin\frac{\beta}{2} \right) e^{i(kl-k_z z)}, \quad (19)$$

$$\bar{\psi}_{-p,1/2} = e^{i\pi/2} \left(-\sin\frac{\beta}{2}, 0, \cos\frac{\beta}{2}, 0 \right) e^{-i(kl-k_z z)},$$

$$\bar{\psi}_{-p,-1/2} = e^{-i\pi/2} \left(0, \sin\frac{\beta}{2}, 0, \cos\frac{\beta}{2} \right) e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (20)$$

В случае, когда $v = 0$, то есть $\beta = 0$ имеем

$$\psi_{p,1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \psi_{p,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (21)$$

$$\psi_{-p,1/2} = e^{i\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)}, \quad \psi_{-p,-1/2} = e^{-i\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)}, \quad (22)$$

$$\bar{\psi}_{p,1/2} = (1, 0, 0, 0) e^{i(kl-k_z z)}, \quad \bar{\psi}_{p,-1/2} = (0, 1, 0, 0) e^{i(kl-k_z z)}, \quad (23)$$

$$\bar{\psi}_{-p,1/2} = e^{i\pi/2} (0, 0, 1, 0) e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \bar{\psi}_{-p,-1/2} = e^{-i\pi/2} (0, 0, 0, 1) e^{-i(kl-k_z z)}. \quad (24)$$

Решения (17) – (24) получены в, так называемом, стандартном представле-

нии [8, С.102], которое в общем виде записывается обычно как $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$,

где $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$. Представим решения в виде

$$\psi_{p,\sigma} = \begin{pmatrix} s_{p,\sigma}^1 \\ s_{p,\sigma}^2 \\ s_{p,\sigma}^3 \\ s_{p,\sigma}^4 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (25)$$

$$\varphi_1 = s_{p,\sigma}^1 e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \varphi_2 = s_{p,\sigma}^2 e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \chi_1 = s_{p,\sigma}^3 e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \chi_2 = s_{p,\sigma}^4 e^{-i(kl-k_z z)},$$

$$\psi_{-p,\sigma} = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} \begin{pmatrix} s_{-p,\sigma}^1 \\ s_{-p,\sigma}^2 \\ s_{-p,\sigma}^3 \\ s_{-p,\sigma}^4 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (26)$$

$$\varphi_1 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} s_{-p,\sigma}^1 e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \varphi_2 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} s_{-p,\sigma}^2 e^{-i(kl-k_z z)},$$

$$\chi_1 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} s_{-p,\sigma}^3 e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \chi_2 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} s_{-p,\sigma}^4 e^{-i(kl-k_z z)}.$$

Аналогично

$$\bar{\psi}_{p,\sigma} = (\bar{s}_{p,\sigma}^1, \bar{s}_{p,\sigma}^2, \bar{s}_{p,\sigma}^3, \bar{s}_{p,\sigma}^4) e^{i(kl-k_z z)}, \quad (27)$$

$$\varphi_1 = \bar{s}_{p,\sigma}^1 e^{i(kl-k_z z)}, \quad \varphi_2 = \bar{s}_{p,\sigma}^2 e^{i(kl-k_z z)}, \quad \chi_1 = \bar{s}_{p,\sigma}^3 e^{i(kl-k_z z)}, \quad \chi_2 = \bar{s}_{p,\sigma}^4 e^{i(kl-k_z z)},$$

$$\bar{\psi}_{-p,\sigma} = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} (\bar{s}_{-p,\sigma}^1, \bar{s}_{-p,\sigma}^2, \bar{s}_{-p,\sigma}^3, \bar{s}_{-p,\sigma}^4) e^{i(kl-k_z z)}. \quad (28)$$

$$\varphi_1 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} \bar{s}_{-p,\sigma}^1 e^{i(kl-k_z z)}, \quad \varphi_2 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} \bar{s}_{-p,\sigma}^2 e^{i(kl-k_z z)}, \quad \chi_1 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} \bar{s}_{-p,\sigma}^3 e^{i(kl-k_z z)},$$

$$\chi_2 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} \bar{s}_{-p,\sigma}^4 e^{i(kl-k_z z)}.$$

$$\text{Величины } \mathbf{s}_{p,\sigma} = \begin{pmatrix} s_{p,\sigma}^1 \\ s_{p,\sigma}^2 \\ s_{p,\sigma}^3 \\ s_{p,\sigma}^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_{-p,\sigma} = \begin{pmatrix} s_{-p,\sigma}^1 \\ s_{-p,\sigma}^2 \\ s_{-p,\sigma}^3 \\ s_{-p,\sigma}^4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{s}}_{p,\sigma} = (\bar{s}_{p,\sigma}^1, \bar{s}_{p,\sigma}^2, \bar{s}_{p,\sigma}^3, \bar{s}_{p,\sigma}^4),$$

$\bar{\mathbf{s}}_{-p,\sigma} = (\bar{s}_{-p,\sigma}^1, \bar{s}_{-p,\sigma}^2, \bar{s}_{-p,\sigma}^3, \bar{s}_{-p,\sigma}^4)$ как будет видно из следующего раздела естественно называть спиновыми векторами. Величины $\mathbf{u}_{p,\sigma} = \mathbf{s}_{p,\sigma}$,

$\mathbf{u}_{-p,\sigma} = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|}i\pi/2} \mathbf{s}_{-p,\sigma}$, $\bar{\mathbf{u}}_{p,\sigma} = \bar{\mathbf{s}}_{p,\sigma}$, $\bar{\mathbf{u}}_{-p,\sigma} = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|}i\pi/2} \bar{\mathbf{s}}_{-p,\sigma}$ называются в литературе [9, С.267] спиновыми функциями.

3. Геометрическая интерпретация стандартного представления

В 4-мерном евклидовом пространстве переход от неподвижной системы координат к движущейся вдоль оси z для положительных решений соответствует повороту оси l в плоскости осей l и z на угол β , такой, что $\sin \beta = v/c$, а для отрицательных – повороту на угол β в противоположном направлении.

Из полученных выражений (17) – (20) видно, что при переходе от неподвижной системы координат к движущейся биспинор Дирака в евклидовом пространстве событий преобразуется по закону, аналогичному для 3-мерных спиноров, то есть при повороте на угол β преобразование спиноров определяется величиной $\beta/2$ [8 – 10].

Обратим теперь внимание на то, что вектора, направленные из начала координат по биссектрисам четырёх углов между осями l и z (или l' и z'), при повороте оси l на угол β против часовой стрелки также поворачиваются на угол $\beta/2$ против часовой стрелки, рис.2. При повороте оси l на угол β по часовой стрелке вектора, направленные из начала координат по биссектрисам четырёх углов между осями l и z , поворачиваются тоже по часовой стрелке на угол $\beta/2$.

Известно [11], что точкам пространства времени Минковского, лежащим на световом конусе, можно сопоставить спиноры – вектора в двумерном комплексном пространстве. Поскольку точки евклидова пространства событий, лежащие на биссектрисах упомянутых углов, соответствуют точкам пространства-времени Минковского, лежащим на световом конусе, то, следовательно, вектора, направленные по биссектрисам углов между осями l и z (l' и z'), можно сопос-

тавить спинорам, и, следовательно, спину частицы. Как будет понятно из дальнейшего, вектора верхней полуплоскости отвечают состояниям со спином, направленным в положительном направлении оси z , а вектора нижней полуплоскости – состояниям со спином, направленным в отрицательном направлении оси z . Вектора правой полуплоскости отвечают положительным решениям, а вектора левой полуплоскости – отрицательным решениям. Далее эти вектора будем называть спиновыми векторами.

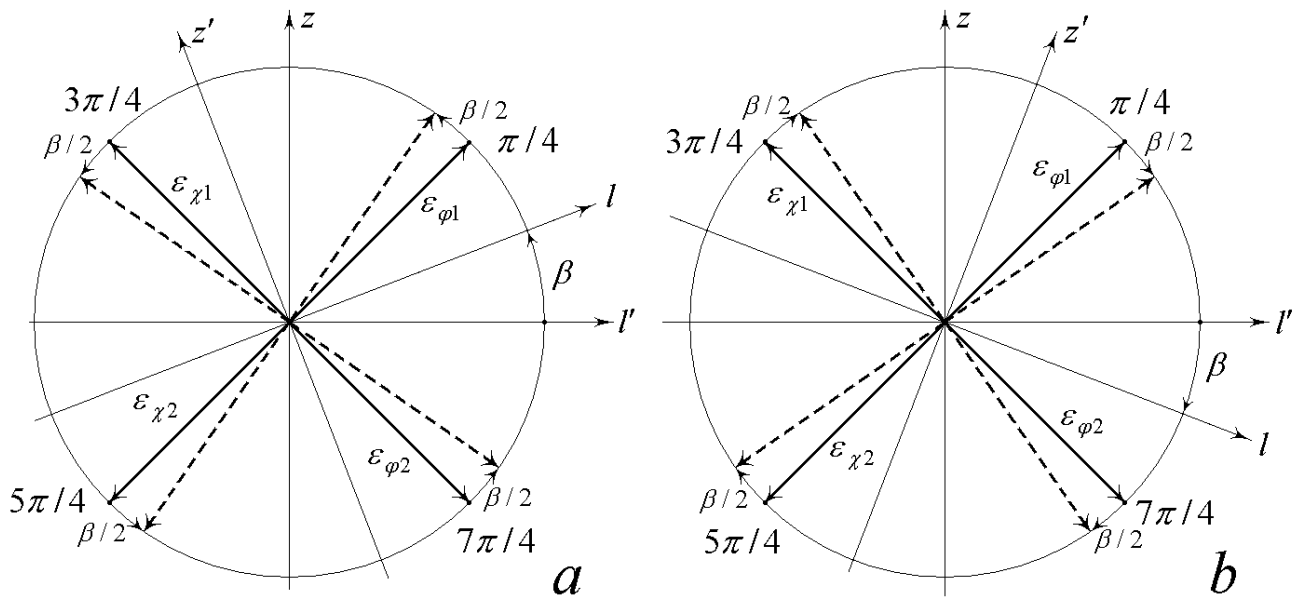


Рис.2. Иллюстрация поворота векторов, направленных из начала координат по биссектрисам углов между осями l , z при вращении оси l против часовой стрелки на угол β (a) и по часовой стрелке на угол β (b).

Положив $\beta = 0$, и приняв орты векторов правой полуплоскости за базисные векторы $\varepsilon_{\varphi 1}$, $\varepsilon_{\varphi 2}$, а орты векторов левой полуплоскости за базисные векторы $\varepsilon_{\chi 1}$, $\varepsilon_{\chi 2}$, рис.2, рассмотрим проекции спиновых векторов, повернутых на углы $\pm \beta/2$, на эти базисные векторы.

Вспомним при этом, что некоторая фазовая поверхность световой волны в евклидовом пространстве событий в плоскости осей l и z изображается кругом с некоторым радиусом l [1, 2, 7]. При повороте оси l на угол β , то есть при переходе к движущейся системе координат, его радиус остаётся неизменным (что и составляет принцип постоянства скорости света) и можно произвести нормировку спиновых векторов, которая не зависит от поворота системы координат.

Если длину спиновых векторов нормировать на единицу, то биспинорам $\Psi_{-p,1/2}$, $\Psi_{p,1/2}$, $\Psi_{-p,-1/2}$, $\Psi_{p,-1/2}$ можно поставить в соответствие рис.3.

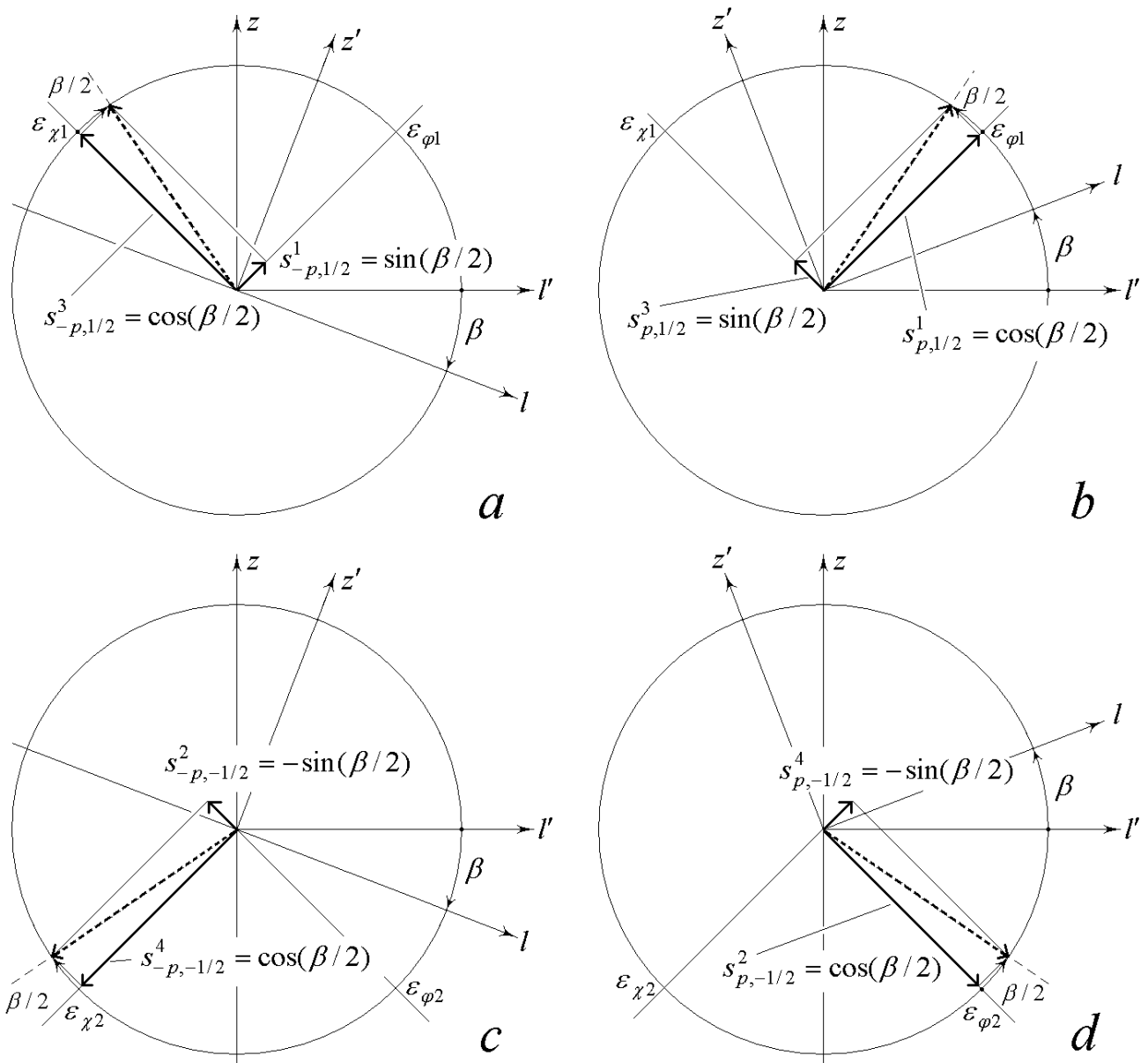


Рис.3. Изображение проекций $s_{p,\sigma}^1$, $s_{p,\sigma}^2$, $s_{p,\sigma}^3$ и $s_{p,\sigma}^4$ спиновых векторов биспиноров $\Psi_{-p,1/2}$ (a), $\Psi_{p,1/2}$ (b), $\Psi_{-p,-1/2}$ (c), $\Psi_{p,-1/2}$ (d) в стандартном представлении. Жирной пунктирной линией изображён спиновой вектор движущейся в положительном направлении оси z моды с определённым знаком частоты и направлением спина вдоль оси z . Жирными сплошными линиями изображены проекции этого спинового вектора на базисные оси неподвижной системы координат.

Биспинорам же $\bar{\psi}_{-p,1/2}$, $\bar{\psi}_{p,1/2}$, $\bar{\psi}_{-p,-1/2}$, $\bar{\psi}_{p,-1/2}$, полученным в результате дираковского сопряжения можно поставить в соответствие рис.4.

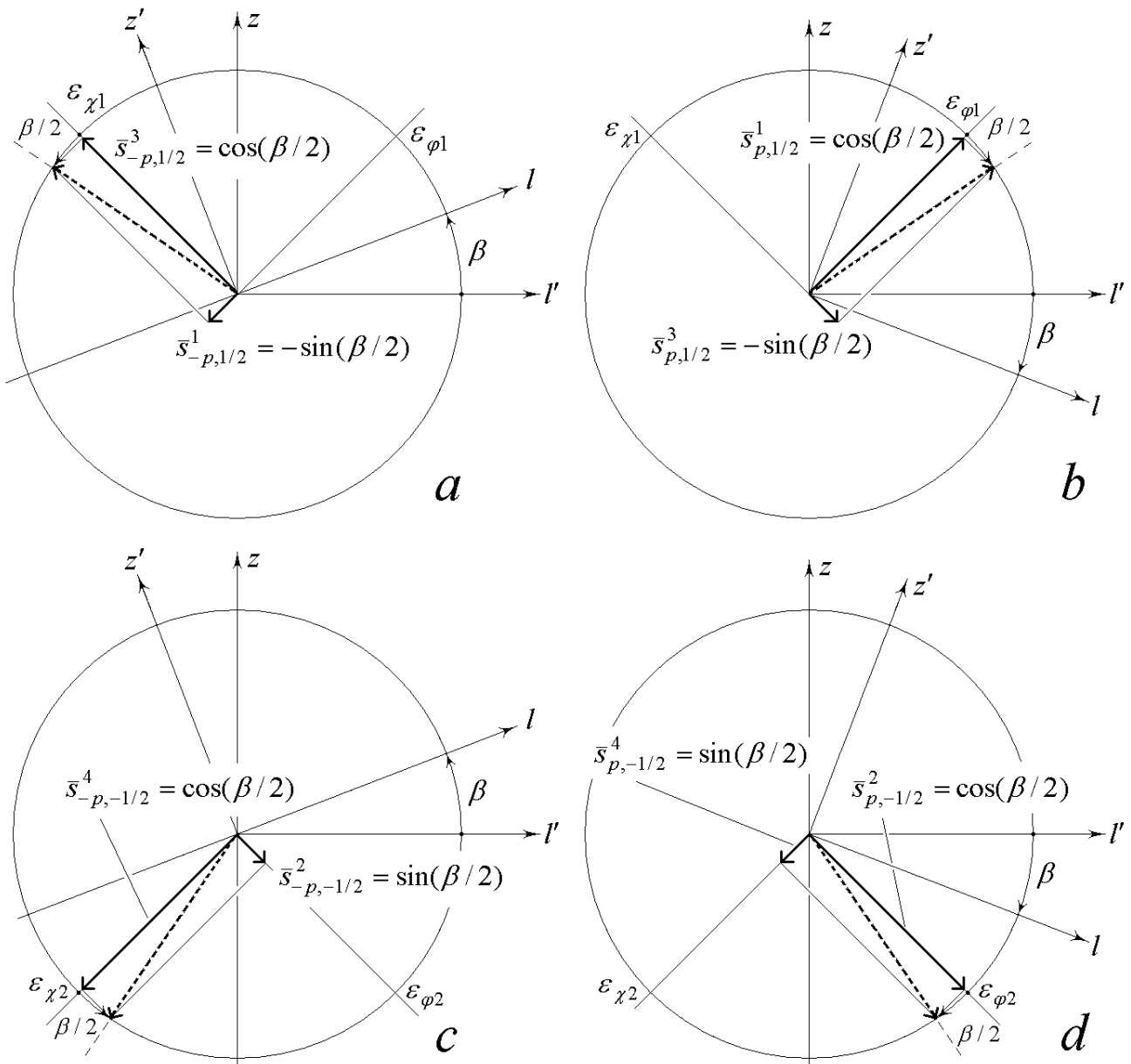


Рис.4. Изображение проекций $\bar{s}_{p,\sigma}^1$, $\bar{s}_{p,\sigma}^2$, $\bar{s}_{p,\sigma}^3$ и $\bar{s}_{p,\sigma}^4$ спиновых векторов дираковски сопряжённых биспиноров $\bar{\psi}_{-p,1/2}$ (a), $\bar{\psi}_{p,1/2}$ (b), $\bar{\psi}_{-p,-1/2}$ (c), $\bar{\psi}_{p,-1/2}$ (d) в стандартном представлении. Так же как и на рис.3 жирной пунктирной линией изображён спиновой вектор дираковски сопряжённого биспинора движущейся в положительном направлении оси z моды с определённым знаком частоты и направлением спина вдоль оси z . Жирными сплошными линиями изображены проекции этого спинового вектора на базисные оси неподвижной системы координат.

Из рис.3 и рис.4 мы видим, что величины $s_{p,\sigma}^n$, $s_{-p,\sigma}^n$, $\bar{s}_{p,\sigma}^n$, $\bar{s}_{-p,\sigma}^n$, $n = 1, 2, 3, 4$ в плоскости осей l и z представляют собой проекции спиновых векторов, на биссектрисы углов каждой из четвертей круга, отсчитываемых против часовой стрелки от оси l' . Эти проекции являются составляющими элементами биспиноров Дирака в стандартном представлении.

На рис.5 показано взаимное положение спиновых векторов в плоскости осей l и z . Мы видим, что спиновые вектора, описывающие частицы со спином, направленным вдоль положительного направления оси z , лежат в верхней полуплоскости, а спиновые вектора, описывающие частицы со спином, направленным против положительного направления оси z , лежат в нижней полуплоскости.

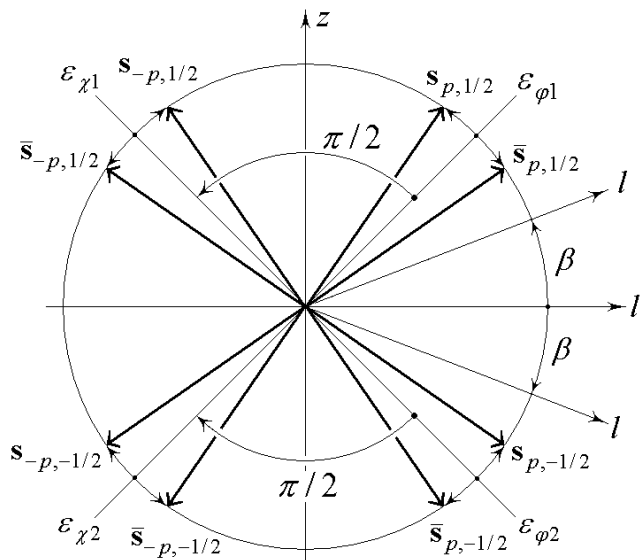


Рис.5. Взаимное положение спиновых векторов, отвечающих биспинорам Дирака и дираковски сопряжённым биспинорам в плоскости осей l и z .

Спиновые вектора, образующие положительные решения уравнения Дирака, лежат в правой полуплоскости, а спиновые вектора образующие отрицательные решения уравнения Дирака, лежат в левой полуплоскости.

Спиновые вектора и соответствующие им спиновые вектора дираковски сопряжённых биспиноров лежат в одной четверти, но по разные стороны от базисных векторов $\epsilon_{\phi1}$, $\epsilon_{\phi2}$, $\epsilon_{\chi1}$, $\epsilon_{\chi2}$. В случае положительных решений, то есть в правой полуплоскости, спиновые вектора повернуты против часовой стрелки

относительно базисных векторов. Спиновые же вектора отвечающих им дираковски сопряжённых биспиноров повернуты по часовой стрелке относительно базисных векторов.

В случае отрицательных решений, то есть в левой полуплоскости спиновые вектора повернуты по часовой стрелке относительно базисных векторов. Спиновые же вектора отвечающих им дираковски сопряжённых биспиноров повернуты против часовой стрелки относительно базисных векторов.

Спиновые вектора в левой полуплоскости являются зеркальным отражением спиновых векторов в правой полуплоскости. Однако, переход из правой полуплоскости в левую сопровождается сдвигом фазы биспиноров, причём при переходе из первой четверти во вторую сдвиг фазы равен $\pi/2$ и описывается множителем $e^{i\pi/2} = i$ (вращение против часовой стрелки). При переходе из четвертой четверти в третью сдвиг фазы $-\pi/2$. Он описывается множителем $e^{-i\pi/2} = -i$ (вращение по часовой стрелке).

4. Спиорное представление решений в евклидовом пространстве событий

В спиорном представлении волновая функция записывается в виде $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, где $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ - спиор с координатами ξ^1, ξ^2 , а $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ - коспиор с координатами η_1, η_2 . Стандартное представление $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ связано со спиорным как $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$, $\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$ [8, С.102]. Отсюда видно, что спиорное представление может быть получено из стандартного представления по правилу:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \chi), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - \chi). \quad (29)$$

Используя это правило, получаем для биспиноров $\psi_{p,1/2}$, $\psi_{p,-1/2}$, $\psi_{-p,1/2}$, $\psi_{-p,-1/2}$ и $\bar{\psi}_{p,1/2}$, $\bar{\psi}_{p,-1/2}$, $\bar{\psi}_{-p,1/2}$, $\bar{\psi}_{-p,-1/2}$ в спиорном представлении следующие выражения:

$$\psi_{p,1/2} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\cos(\beta/2) - \sin(\beta/2)}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \\ 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (30)$$

$$\psi_{p,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\cos(\beta/2) - \sin(\beta/2)}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \\ 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (31)$$

$$\psi_{-p,1/2} = i \begin{pmatrix} \frac{\sin(\beta/2) + \cos(\beta/2)}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\sin(\beta/2) - \cos(\beta/2)}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)} = i \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \\ 0 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)}, \quad (32)$$

$$\psi_{-p,-1/2} = -i \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\sin(\beta/2) + \cos(\beta/2)}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-\sin(\beta/2) - \cos(\beta/2)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)} = -i \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \\ 0 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)} \quad (33)$$

$$\bar{\psi}_{p,1/2} = \left(\frac{\cos(\beta/2) - \sin(\beta/2)}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)}{\sqrt{2}}, 0 \right) e^{i(kl-k_z z)} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), 0, \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), 0 \right) e^{i(kl-k_z z)}, \quad (34)$$

$$\bar{\psi}_{p,-1/2} = \left(0, \frac{\cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\cos(\beta/2) - \sin(\beta/2)}{\sqrt{2}} \right) e^{i(kl-k_z z)} = \left(0, \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), 0, \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right) e^{i(kl-k_z z)}, \quad (35)$$

$$\bar{\psi}_{-p,1/2} = e^{i\pi/2} \left(\frac{-\sin(\beta/2) + \cos(\beta/2)}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-\sin(\beta/2) - \cos(\beta/2)}{\sqrt{2}}, 0 \right) \times$$

$$\times e^{-i(kl-k_z z)} = e^{i\pi/2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), 0, -\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), 0 \right) e^{-i(kl-k_z z)} \quad (36)$$

$$\bar{\psi}_{-p,-1/2} = e^{-i\pi/2} \left(0, \frac{\sin(\beta/2) + \cos(\beta/2)}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sin(\beta/2) - \cos(\beta/2)}{\sqrt{2}} \right) e^{-i(kl-k_z z)} =$$

$$= e^{-i\pi/2} \left(0, \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), 0, -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right) e^{-i(kl-k_z z)} \quad (37)$$

Как и в случае стандартного представления представим решения в виде аналогичном (25) – (28). Но теперь вместо $\varphi_1, \varphi_2, \chi_1, \chi_2$ надо подразумевать координаты спиноров и коспиноров $\xi^1, \xi^2, \eta_1, \eta_2$:

$$\text{для } \psi_{p,\sigma} - \xi^1 = s_{p,\sigma}^1 e^{-i(kl-k_z z)}, \xi^2 = s_{p,\sigma}^2 e^{-i(kl-k_z z)},$$

$$\eta_1 = s_1^{p,\sigma} e^{-i(kl-k_z z)}, \eta_2 = s_2^{p,\sigma} e^{-i(kl-k_z z)};$$

$$\text{для } \psi_{-p,\sigma} - \xi^1 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} s_{-p,\sigma}^1 e^{-i(kl-k_z z)}, \xi^2 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} s_{-p,\sigma}^2 e^{-i(kl-k_z z)},$$

$$\eta_1 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} s_1^{-p,\sigma} e^{-i(kl-k_z z)}, \eta_2 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} s_2^{-p,\sigma} e^{-i(kl-k_z z)};$$

$$\text{для } \bar{\psi}_{p,\sigma} - \xi^1 = \bar{s}_{p,\sigma}^1 e^{i(kl-k_z z)}, \varphi_2 = \bar{s}_{p,\sigma}^2 e^{i(kl-k_z z)},$$

$$\eta_1 = \bar{s}_1^{p,\sigma} e^{i(kl-k_z z)}, \eta_2 = \bar{s}_2^{p,\sigma} e^{i(kl-k_z z)};$$

$$\text{для } \bar{\psi}_{-p,\sigma} - \xi^1 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} \bar{s}_{-p,\sigma}^1 e^{i(kl-k_z z)}, \xi^2 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} \bar{s}_{-p,\sigma}^2 e^{i(kl-k_z z)},$$

$$\eta_1 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} \bar{s}_1^{-p,\sigma} e^{i(kl-k_z z)}, \eta_2 = e^{\frac{\sigma}{|\sigma|} i\pi/2} \bar{s}_2^{-p,\sigma} e^{i(kl-k_z z)}.$$

5. Геометрическая интерпретация спинорного представления

Правило (29) представляет собой поворот базисных векторов $\varepsilon_{\varphi_1}, \varepsilon_{\chi_1}$ на угол $\pi/4$ по часовой стрелке, а базисных векторов $\varepsilon_{\varphi_2}, \varepsilon_{\chi_2}$ на угол $\pi/4$ против часовой стрелки. Поворот в разных направлениях связан с тем, что ориентация базисных векторов $\varepsilon_{\varphi_1}, \varepsilon_{\chi_1}$ и $\varepsilon_{\varphi_2}, \varepsilon_{\chi_2}$ разная. В результате поворота базисных векторов $\varepsilon_{\varphi_1}, \varepsilon_{\chi_1}$ новый базис, орты которого обозначим как $\varepsilon_1, \varepsilon^1$ будет

выглядеть так, как показано на рис. 6а. В результате же поворота базисных векторов $\varepsilon_{\varphi 2}$, $\varepsilon_{\chi 2}$ новый базис, орты которого обозначим как ε_2 , ε^2 будет выглядеть так, как показано на рис. 6б.

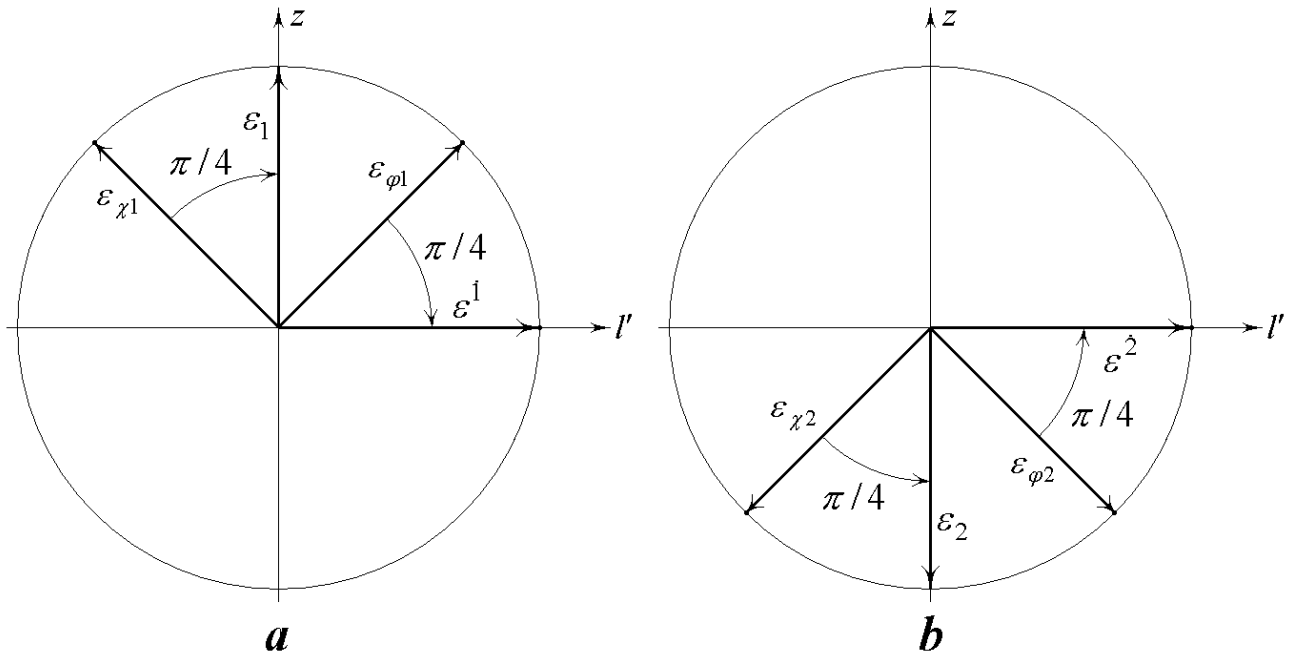


Рис.6. Иллюстрация поворота базисных векторов $\varepsilon_{\varphi 1}$, $\varepsilon_{\chi 1}$ на угол $\pi/4$ по часовой стрелке (а), а базисных векторов $\varepsilon_{\varphi 2}$, $\varepsilon_{\chi 2}$ на угол $\pi/4$ против часовой стрелки (б) и взаимное положение спинорных и коспинорных базисных векторов, возникшее в результате этого поворота

Отметим, что когда мы работаем со спиновыми векторами в верхней полуплоскости, нижнюю полуплоскость мы должны представлять себе, расположенной на обратной стороне листа, и, наоборот. Это соответствует тому, что при заданном импульсе существуют два различных независимых состояния в соответствии с двумя возможными значениями проекции спина.

Рассмотрим теперь разложение спиновых векторов, лежащих во всех четвертях круга по этим новым базисам. Сначала рассмотрим спиновые вектора, отвечающие биспинорам $\psi_{p,1/2}$, $\psi_{p,-1/2}$, $\psi_{-p,1/2}$, $\psi_{-p,-1/2}$. Результат этого разложения показан на рис.7.

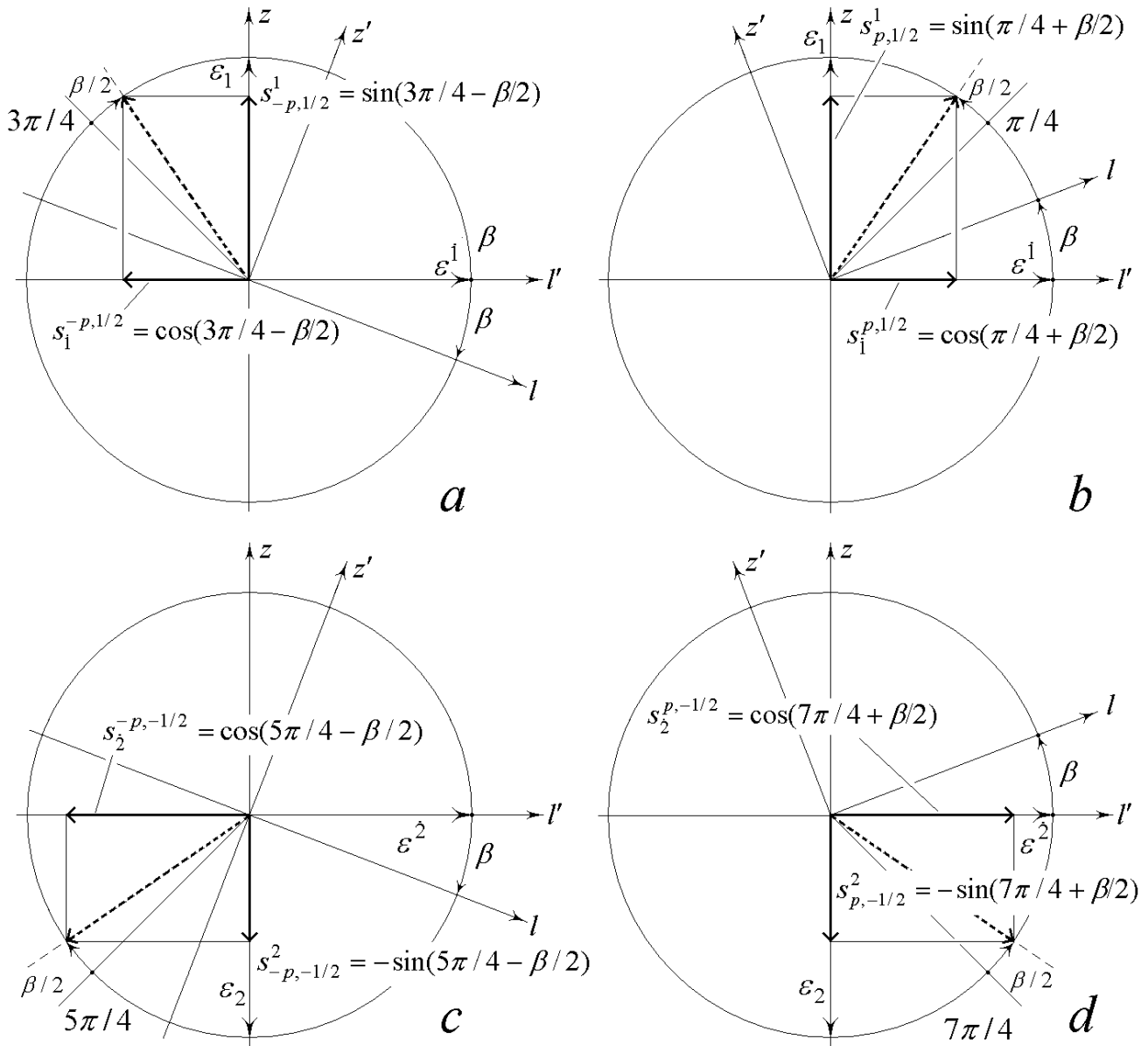


Рис.7. Изображение проекций $s_{p,\sigma}^1$, $s_{p,\sigma}^2$, $s_1^{p,\sigma}$ и $s_2^{p,\sigma}$ спиновых векторов биспиноров $\Psi_{-p,1/2}$ (a), $\Psi_{p,1/2}$ (b), $\Psi_{-p,-1/2}$ (c), $\Psi_{p,-1/2}$ (d) в спинорном представлении. Жирной пунктирной линией изображён спиновой вектор движущейся в положительном направлении оси z моды с определённым знаком частоты и направлением спина вдоль оси z . Жирными сплошными линиями изображены проекции этого спинового вектора на базисные оси неподвижной системы координат.

Из рис.7б видно, что в первой четверти круга

$$\psi_{p,1/2} = \begin{pmatrix} \sin(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \\ \cos(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \text{ что совпадает с (30).}$$

Из рис.7а видно, что во второй четверти круга

$$\psi_{-p,1/2} = \begin{pmatrix} \sin(3\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \\ \cos(3\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)+i\pi/2} = i \begin{pmatrix} \sin(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \\ -\cos(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)}, \text{ что сов-}$$

падает с (32).

Из рис.7с видно, что в третьей четверти круга

$$\psi_{-p,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(5\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \\ \cos(5\pi/4 - \beta/2) \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)-i\pi/2} = -i \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \\ -\cos(\pi/4 - \beta/2) \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)}, \text{ что}$$

совпадает с (33).

Из рис.7д видно, что в четвертой четверти круга

$$\psi_{p,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(7\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \\ \cos(7\pi/4 + \beta/2) \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \\ \cos(\pi/4 - \beta/2) \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \text{ что совпа-}$$

дает с (31).

Обратим внимание на то, что знак синуса в третьей и четвертой четвертях круга отрицательный. Проекция же спиновых векторов на ось с ортом ε_2 совпадает с направлением этого орта. Поэтому перед $\sin(5\pi/4 - \beta/2)$ и $\sin(7\pi/4 + \beta/2)$ стоят знаки минус.

На рис.8 показан результат разложения спиновых векторов, отвечающих дираковски сопряженным биспинорам $\bar{\psi}_{p,1/2}$, $\bar{\psi}_{p,-1/2}$, $\bar{\psi}_{-p,1/2}$, $\bar{\psi}_{-p,-1/2}$.

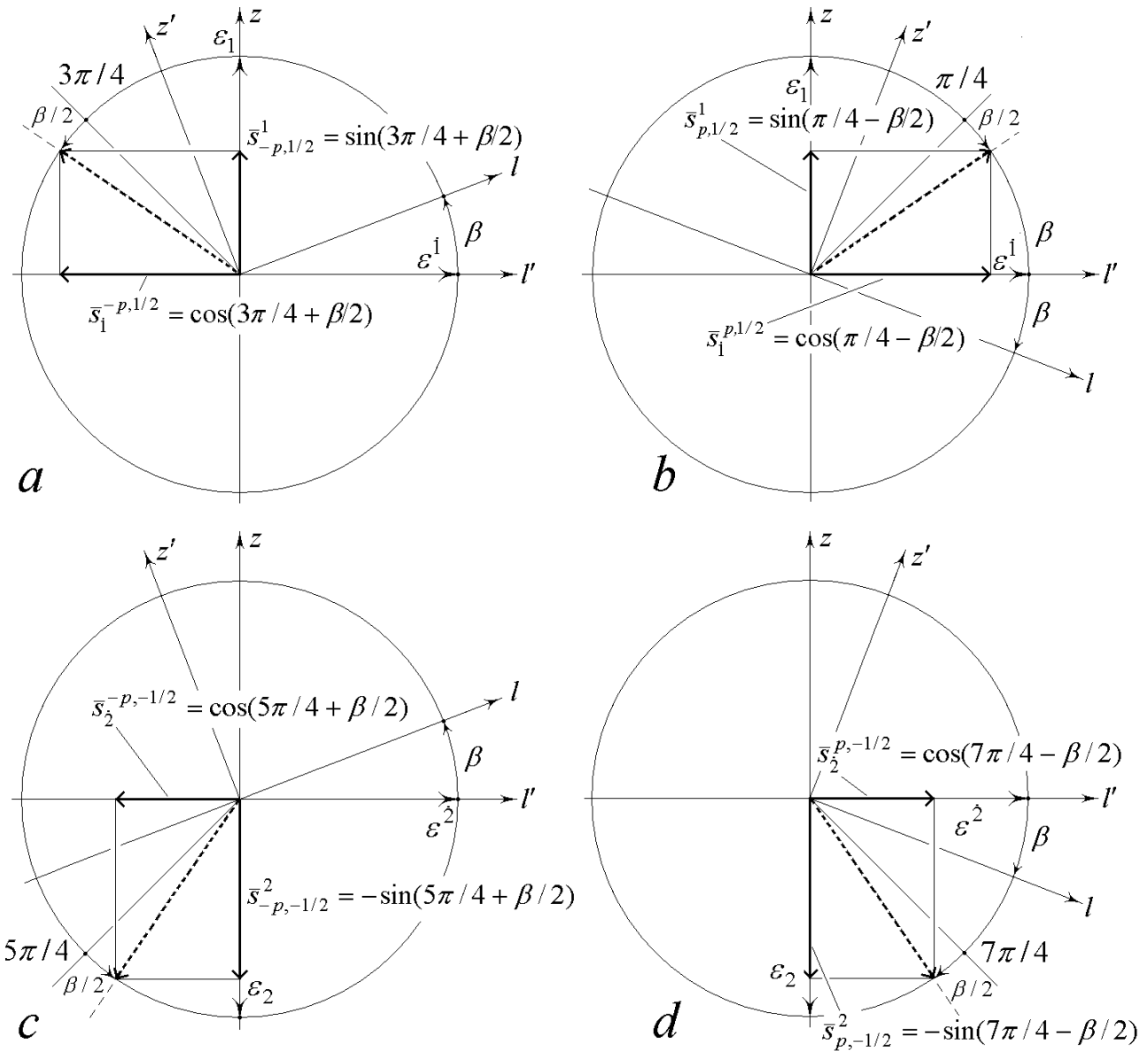


Рис.8. Изображение проекций $\bar{s}_{p,\sigma}^1$, $\bar{s}_{p,\sigma}^2$, $\bar{s}_1^{p,\sigma}$ и $\bar{s}_2^{p,\sigma}$ спиновых векторов биспиноров $\bar{\psi}_{-p,1/2}$ (a), $\bar{\psi}_{p,1/2}$ (b), $\bar{\psi}_{-p,-1/2}$ (c), $\bar{\psi}_{p,-1/2}$ (d) в спинорном представлении. Так же как и на рис.7 жирной пунктирной линией изображён спиновой вектор дираковски сопряжённого биспинора движущейся в положительном направлении оси z моды с определённым знаком частоты и направлением спина вдоль оси z . Жирными сплошными линиями изображены проекции этого спинорного вектора на базисные оси неподвижной системы координат.

Из рис.8b (первая четверть круга) видно, что

$$\bar{\psi}_{p,1/2} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), 0, \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), 0 \right) e^{i(kl-k_z z)}, \text{ что совпадает с (34).}$$

Из рис.8a (вторая четверть круга) видно, что

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{-p,1/2} &= \left(\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), 0, \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), 0 \right) e^{-i(kl-k_z z)+i\pi/2} = \\ &= e^{i\pi/2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), 0, -\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), 0 \right) e^{-i(kl-k_z z)} \end{aligned} \quad , \text{ что совпадает с (36).}$$

Из рис.8c (третья четверть круга) видно, что

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{-p,-1/2} &= \left(0, -\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), 0, \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right) e^{-i(kl-k_z z)-i\pi/2} = \\ &= e^{-i\pi/2} \left(0, \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), 0, -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right) e^{-i(kl-k_z z)} \end{aligned} \quad , \text{ что совпадает с}$$

(37).

Из рис. 8d (четвертая четверть круга) видно, что

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{p,-1/2} &= \left(0, -\sin\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), 0, \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \right) e^{i(kl-k_z z)} = \\ &= \left(0, \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), 0, \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right) e^{i(kl-k_z z)} \end{aligned} \quad , \text{ что совпадает с (35).}$$

6. Обсуждение результатов

Из рис.7 и рис.8 видно, что координаты спиноров ξ^1, ξ^2 в биспинорах Дирака в плоскости осей l, z определяются проекциями спиновых векторов на ось z , то есть на плоскость волнового фронта волн, образующих неподвижную моду. Координаты же коспиноров η_1, η_2 в биспинорах Дирака определяются проекциями спиновых векторов на ось l' , то есть на направление волнового вектора прямой волны неподвижной моды. Таким образом, понятие спинового вектора в евклидовом пространстве событий позволяет придать дополнительный физический смысл понятиям спинора и коспинора.

Кроме того, понятие спинового вектора в евклидовом пространстве событий позволяет легко выписывать решения уравнения Дирака для свободной частицы, находящейся в различных состояниях, используя лишь геометрические

построения. Например, для частицы, движущейся в отрицательном направлении оси z со спином, направленным в положительном направлении этой оси имеем спиновой вектор, изображённый на рис.9.

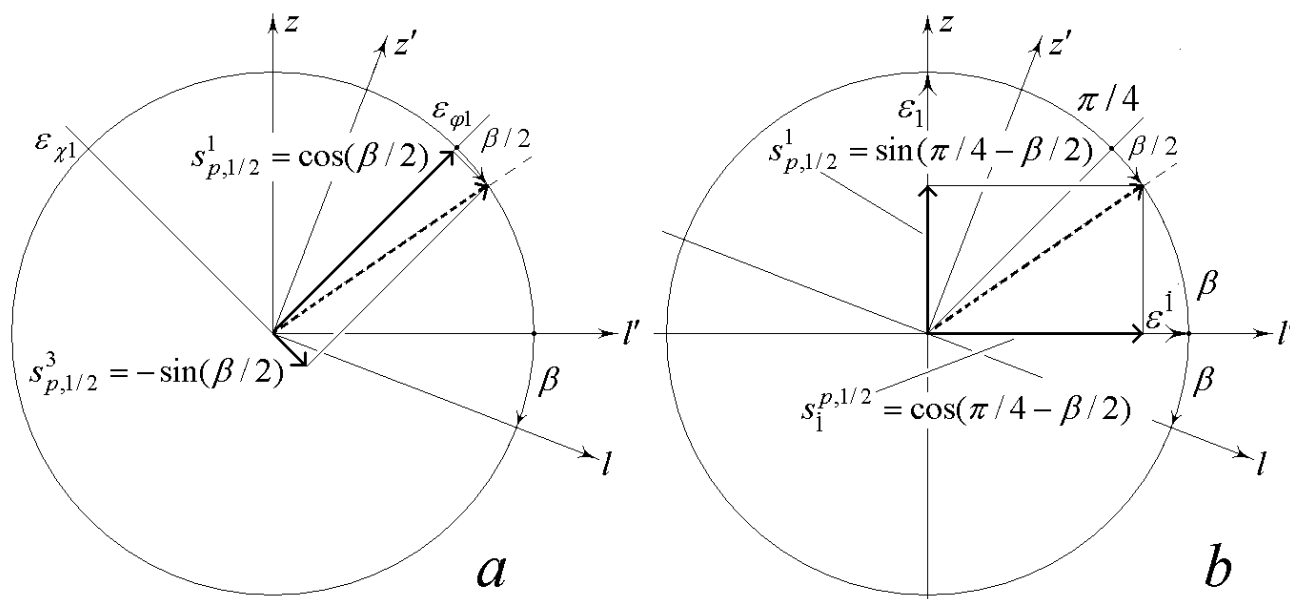


Рис.9. Спиновой вектор и его проекции на базисные оси для частицы со спином, направленным вдоль положительного направления оси z и импульсом, направленным в отрицательном направлении этой оси в стандартном (a) и спинорном (b) представлении.

Из рис.9 сразу можем написать выражения для волновых функций $\psi_{p,1/2}$ как в стандартном

$$\psi_{p,1/2} = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ 0 \\ -\sin(\beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl+k_z z)}, \quad (38)$$

так и в спинорном представлении

$$\psi_{p,1/2} = \begin{pmatrix} \sin(\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \\ \cos(\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl+k_z z)}. \quad (39)$$

Если учесть, что в этих выражениях $k_z = k \sin \beta$, то видно, что решения (38), (39) получаются соответственно из (17), (30) изменением знака β .

Проиллюстрируем изменения, происходящие со спиновым вектором при пространственной инверсии. Как известно [8, С.100] результат пространственной инверсии рассчитывается по формуле $\hat{P}\psi_{p,1/2} = i\gamma^0\psi_{p,1/2}(t,-z)$. При этом надо иметь в виду, что при пространственной инверсии знак импульса меняется, то есть в обозначениях данной работы $k_z \rightarrow -k_z$. В стандартном представлении γ^0 имеет вид, который показан перед формулой (5) и

$$\hat{P}\psi_{p,1/2} = i\gamma^0\psi_{p,1/2}(t,-z) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ 0 \\ \sin(\beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)} = e^{i\pi/2} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ 0 \\ -\sin(\beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)} \quad (40)$$

В спинорном представлении $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (8, С.99) и

$$\psi_{p,1/2}^P = i\gamma^0\psi_{p,1/2}(t,-z) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \\ \cos(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)} = e^{i\pi/2} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \\ \sin(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)} = e^{i\pi/2} \begin{pmatrix} \sin(\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \\ \cos(\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)} \quad (41)$$

Формулы (40) и (41) соответствуют правилу: в стандартном представлении $P: \varphi \rightarrow i\varphi, \chi \rightarrow -i\chi$ [8, С.102], в спинорном представлении $P: \xi^\alpha \rightarrow i\eta_{\dot{\alpha}}, \eta_\alpha \rightarrow i\xi^{\dot{\alpha}}$ [8, С.92].

Сравнивая формулу (40) с первой из формул (17), и формулу (41) с формулой (30), мы видим, что пространственная инверсия хотя и не меняет направления спина, но в евклидовом пространстве событий меняет ориентацию спиново-

го вектора, изменяя его проекции. Это проиллюстрировано на рис.10, на котором показана ориентация спинового вектора до и после пространственной инверсии. Поворот оси l по часовой стрелке на угол 2β отображает изменение знака импульса при пространственной инверсии. Направление же спина при инверсии не меняется, поэтому спиновый вектор остаётся в верхней полуплоскости (как и в исходном состоянии в первой четверти круга). Поскольку он должен быть направлен по биссектрисе угла между осями l и z , то его направление будет отличаться от первоначального на величину угла $\beta = \arcsin(v/c)$. Поворот осуществляется в сторону положительного направления инвертированной оси. Возникающий при инверсии фазовый множитель $e^{i\pi/2}$, по-видимому, связан с тем, что инвертированная ось z повернута относительно первоначального положения на угол π .

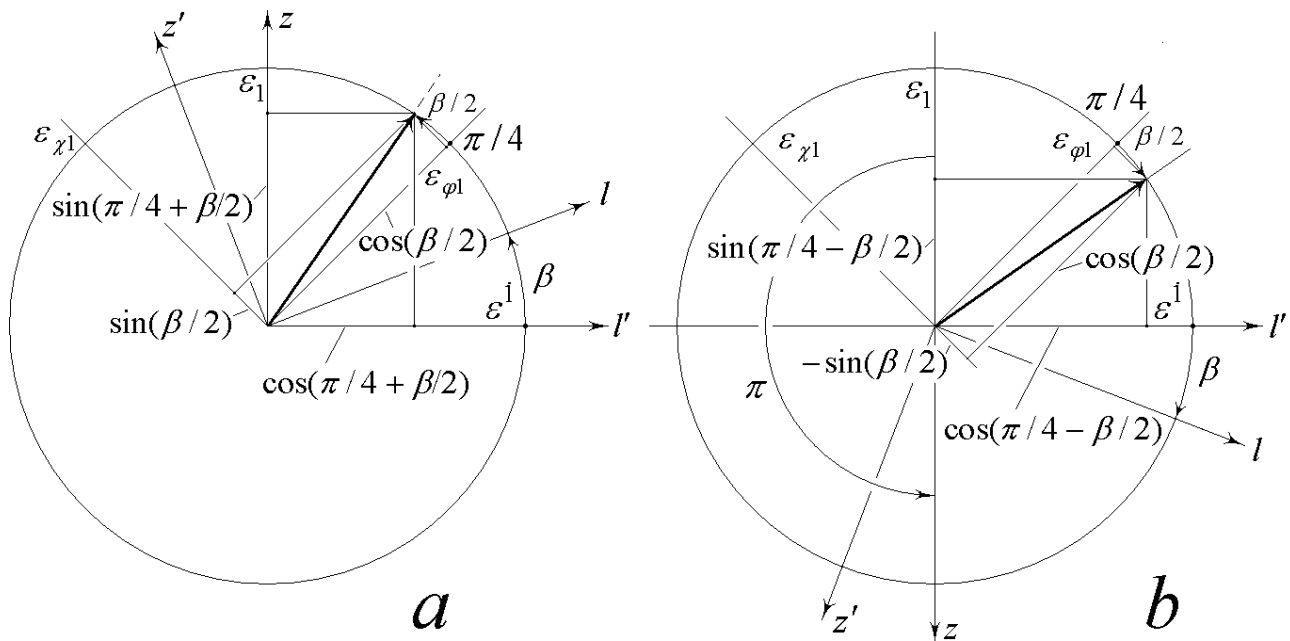


Рис.10. Иллюстрация переориентации спинового вектора частицы со спином и импульсом, направленными в положительном направлении оси z , при пространственной инверсии: ориентация спинового вектора до пространственной инверсии (a) и после пространственной инверсии (b). Проекции спинового вектора показаны как в стандартном, так и в спинорном представлении.

Посмотрим теперь, как преобразуется спиновой вектор при зарядовом сопряжении $\hat{C}\psi(t, z) = \gamma^2\psi^*(t, z)$ [8, С.120]. В стандартном и спинорном представлениях матрица

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

соответственно. В результате зарядового сопряжения волновой функции $\psi_{p,1/2}$ получаем в стандартном представлении

$$\begin{aligned} \hat{C}\psi_{p,1/2}(t, z) = \gamma^2\psi_{p,1/2}^*(t, z) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ 0 \\ \sin(\beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)} = \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\beta/2) \\ 0 \\ \cos(\beta/2) \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)} = \psi_{-p,-1/2}(t, z) \end{aligned}, \quad (49)$$

а в спинорном представлении

$$\begin{aligned} \hat{C}\psi_{p,1/2}(t, z) = \gamma^2\psi_{p,1/2}^*(t, z) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \\ \cos(\pi/4 + \beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)} = \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi/4 - \beta/2) \\ 0 \\ -\cos(\pi/4 - \beta/2) \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)} = \psi_{-p,-1/2}(t, z) \end{aligned} \quad (50)$$

Сравнивая (50) с $\psi_{p,1/2}$ (17) мы видим, что, чтобы из $\psi_{p,1/2}$ получить $\psi_{-p,-1/2}$ надо произвести замены: $\xi^2 \rightarrow e^{-i\pi/2}(\cos(\pi/4 + \beta/2)e^{-i(kl-k_z z)})^*$; $\eta_2 \rightarrow -e^{-i\pi/2}(\sin(\pi/4 + \beta/2)e^{-i(kl-k_z z)})^* = e^{i\pi/2}(\sin(\pi/4 + \beta/2)e^{-i(kl-k_z z)})^*$, что соответствует общему правилу $\xi^1 \rightarrow i\eta_2^*$; $\xi^2 \rightarrow -i\eta_1^*$; $\eta_1 \rightarrow -i\xi^{2*}$; $\eta_2 \rightarrow i\xi^{1*}$ [8, С.120]. Если ξ^1 ; ξ^2 ; η_1 ; η_2 выразить через проекции спиновых векторов, то

приведённое правило преобразования будет выглядеть следующим образом:
 $s^1 f(l, z) \rightarrow s_2 \times if^*(l, z)$, $s^2 f(l, z) \rightarrow -s_1 \times if^*(l, z)$, $s_i f(l, z) \rightarrow -s^2 \times if^*(l, z)$,
 $s_j f(l, z) \rightarrow s^1 \times if^*(l, z)$.

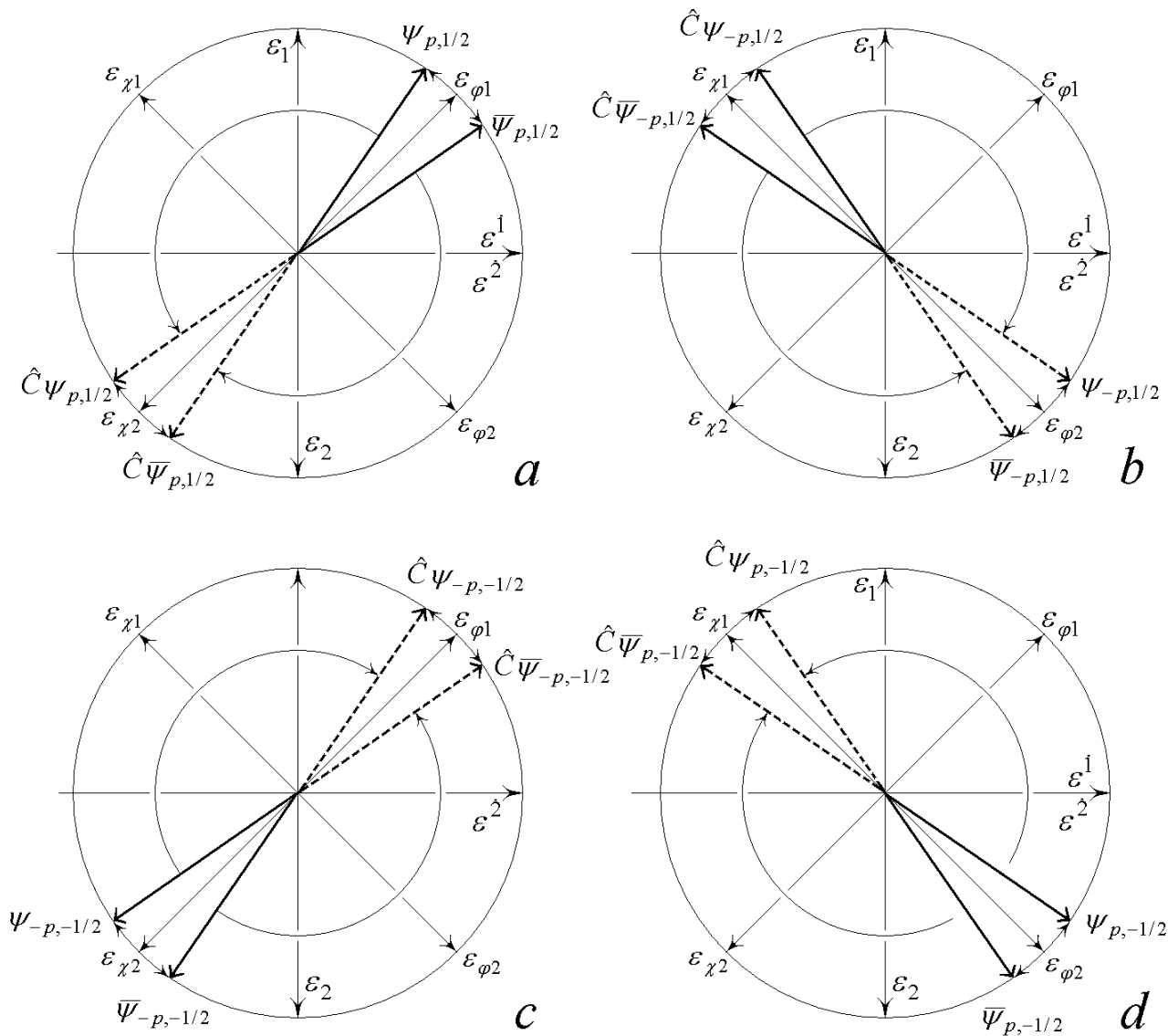


Рис.11. Иллюстрация изменения при зарядовом сопряжении ориентации спиновых векторов, отвечающих волновым функциям $\Psi_{p,1/2}$, $\bar{\Psi}_{p,1/2}$ (a); $\Psi_{-p,1/2}$, $\bar{\Psi}_{-p,1/2}$ (b); $\Psi_{-p,-1/2}$, $\bar{\Psi}_{-p,-1/2}$ (c); $\Psi_{p,-1/2}$, $\bar{\Psi}_{p,-1/2}$ (d).

Это означает, что спиновый вектор, полученный в результате зарядового сопряжения волновой функции со спиновым вектором, расположенным в некоторой четверти круга, является зеркальным отражением этого спинового вектора

относительно линии биссектрис соседних четвертей круга. На рис.11 показано изменение при зарядовом сопряжении ориентации спиновых векторов, отвечающих волновым функциям, описывающим различные состояния частицы.

Аналогично можно рассмотреть преобразования спиновых векторов и при обращении времени. Однако это требует более тщательного анализа, поскольку необходимо рассматривать переориентацию временных осей, а вместе с ней и базисных векторов. Этому вопросу требуется уделить больше внимания и имеет смысл рассмотреть его в отдельной работе.

7. Заключение

В настоящей работе, с точки зрения понятия евклидова пространства событий с косоугольными системами координат, одна из которых жестко связана с неподвижным наблюдателем, а другая с равномерно и прямолинейно движущейся частицей, рассмотрены решения релятивистского уравнения Дирака для свободной частицы. Для простоты рассмотрения из всех пространственных осей рассмотрена только одна, вдоль которой происходит движение.

Показано, что вектора такого пространства, направленные по биссектрисам углов между пространственной и временной осями косоугольных систем координат, описывают спиновые состояния движущихся частиц и античастиц с со спинами, направленными в положительном или отрицательном направлении пространственной оси неподвижной системы координат. Эти вектора названы спиновыми векторами.

С помощью спиновых векторов дана геометрическая интерпретация стандартного и спинорного представления решений релятивистского уравнения Дирака для свободной частицы. Показано, что стандартное представление связано с проекциями спиновых векторов на биссектрисы углов квадрантов плоскости, а спинорное – на пространственную и временную оси. При этом координаты спинора выражаются через проекции спиновых векторов на пространственную ось системы отсчёта, связанной с неподвижным наблюдателем, а координаты коспинора - через проекции спиновых векторов на временную ось движущейся системы координат.

Проиллюстрировано преобразование спиновых векторов при инверсии пространства и при зарядовом сопряжении. Показано, что при инверсии пространства спиновой вектор остаётся в том же квадранте, что и до инверсии, но поворачивается на угол $\beta = \arcsin(v/c)$ в сторону положительного направления

инвертированной пространственной оси координат. Спиновой вектор, полученный в результате зарядового сопряжения волновой функции со спиновым вектором, расположенным в какой-то четверти круга, является зеркальным отражением этого спинового вектора относительно линии биссектрис соседних четвертей круга.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Орлов Е.П.** Пространственно-временные отношения между модами резонатора с параллельными плоскими зеркалами. *Препринт ФИАН № 16*. Москва, 2004 г. 17 с.
2. **Орлов Е.П.** Описание пространственно-временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора с помощью косоугольных систем координат. *Препринт ФИАН № 16*. Москва, 2009 г. 32 с.
3. **Kaluza Th.** Zum Unitatsproblem der Physik. *Sitzungsberichte d. Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)*. 1921, S.966-972.
4. **Румер Ю.Б.** Исследования по 5-оптике. Москва. *Государственное издательство технико-теоретической литературы*. 1956 г. 152 с.
5. **Бергман П.** Единые теории поля. *УФН*. Сентябрь 1980 г., Т. 132, № 1, С. 177-190.
6. **Рубаков В.А.** Большие и бесконечные дополнительные измерения. *УФН*. Сентябрь 2001 г., Т. 171, №9, С. 913-938.
7. **Манкевич С.К., Орлов Е.П.** Теория относительности и метод лазерной локализации. *Препринт ФИАН № 7*. Москва, 2010 г. 43 с.
8. **Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** *Квантовая электродинамика (Серия: «Теоретическая физика», том IV)*. М.: Физматлит. 2001. 720 с.
9. **Давыдов А.С.** Квантовая механика. М.: *Физматгиз*, 1963 г. 748 с.
10. **Дирак П.** Собрание научных трудов. Т.1. Квантовая теория (монографии, лекции). М.: *Физматлит*, 2002. 700 с.
11. **Румер Ю.Б., Фет А.И.** Теория групп и квантованные поля. М.: *Наука*, 1977. 248 с.