

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

ISSN 2410-4914



ПРЕПРИНТ

2

Р. М. ФЕЩЕНКО, А. В. ВИНОГРАДОВ,
И. А. АРТЮКОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТОВ
ПАРАМЕТРОВ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
ЛАЗЕРО-ЭЛЕКТРОННОГО ГЕНЕРАТОРА**

Москва — 2016

ПРЕПРИНТЫ ФИАН им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА

ISSN 2410-4914

Главный редактор В. И. Ритус, *зам. главного редактора* А. А. Гиппиус,
научный секретарь С. А. Богачев, *ответственный секретарь* Л. В. Селезнев

Редакционная коллегия: В. С. Бескин, А. А. Горбацевич, О. Д. Далькаров,
Е. И. Демихов, И. Г. Зубарев, К. П. Зыбин, А. А. Ионин, Н. Н. Колачевский,
Е. Р. Корешева, С. Ф. Лихачев, А. С. Насибов, И. Д. Новиков, В. Н. Очкин,
Н. Г. Полухина, В. С. Лебедев, Н. Н. Сибельдин, Д. Р. Хохлов, С. А. Чайковский

Информация

Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева издаются с 1964 г.

Издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН)

Адрес редакции: Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53, ФИАН

Тел.: +7 (499) 132-6137, +7 (499) 783-3640;

E-mail: preprins@sci.lebedev.ru, irinakh@sci.lebedev.ru

Страница сборника «Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева» в интернете:

<http://preprints.lebedev.ru/>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА

Р.М. Фещенко, А.В. Виноградов, И.А. Артюков

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕОВ ПАРАМЕТРОВ
РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРО-ЭЛЕКТРОНОГО
ГЕНЕРАТОРА**

№ 2

Москва 2016

Аннотация

В данной работе рассматривается математическая модель взаимодействия лазерного и электронного пучков в Томсоновском лазеро-электронном генераторе (ЛЭГ) рентгеновского излучения. Приводятся формулы для расчета полного потока рентгеновских фотонов, потока в заданном направлении для заданной энергии, спектральной яркости в заданном направлении для заданной энергии, а также поляризация рентгеновского излучения. Рассматривается ряд частных случаев для которых возможно получение аналитических выражений. Помимо этого в работе рассматриваются особенности и проблемы программной реализации алгоритма расчета указанных выше параметров рентгеновского излучения и приводятся результаты расчетов для реалистичных параметров ЛЭГ.

Содержание

1	Введение	4
2	Модель взаимодействия электронного и лазерного пучков	6
2.1	Основные приближения	6
2.2	Взаимодействие двух потоков частиц	8
2.3	Дифференциальное сечение рассеяния	11
2.4	Объемные плотности частиц в электронном и фотонном пучках	14
2.5	Итоговые выражения для параметров рентгеновского излучения	17
3	Примеры и частные случаи	21
3.1	Вопросы программной реализации	21
3.2	Примеры расчетов ЛЭГ	22
4	Заключение	30

1 Введение

Среди существующих источников рентгеновского излучения только два имеют широкое практическое применение: это рентгеновские трубки (РТ) и источники синхротронного излучения (ИСИ). Первые являются мощными и компактными, но обладают малой спектральной яркостью ($< 10^6 \text{ с}^{-1} \text{ мм}^{-2} \text{ мрад}^{-2} 0,1\%$). По этой причине рентгеновское излучение РТ сложно сфокусировать в маленькое пятно. С другой стороны ИСИ генерируют рентгеновское излучение обладающее как высокой мощностью, так и высокой спектральной яркостью ($> 10^{20} \text{ с}^{-1} \text{ мм}^{-2} \text{ мрад}^{-2} 0,1\%$) [1], но имеют большие размеры, стоимость и сложны в эксплуатации. ИСИ существуют только в крупных специализированных центрах синхротронного излучения, что серьезно ограничивает и затрудняет их использование для удаленных пользователей. Очевидно, что эта проблема может быть решена при создании компактного рентгеновского источника, который будучи достаточно мощным, обеспечивал бы спектральную яркость если не на уровне ИСИ, то хотя бы существенно выше, чем у РТ. Такой источник нашел бы многочисленные применения в медицине, материаловедении и в других областях науки и техники [2].

Наиболее подходящим кандидатом на эту роль является так называемый лазеро-электронный генератор (ЛЭГ), в котором рентгеновское излучение получается в результате обратного Томсоновского (комптоновского) рассеяния лазерного излучения на релятивистских электронах [2, 3, 4]. Рентгеновское излучение ЛЭГ схоже по своим свойствам с ондуляторным излучением ИСИ, но генерируется на “решетке” со значительно меньшим периодом равным длине волны лазерного излучения, что позволяет существенно уменьшить требуемую энергию электронов и, следовательно, геометрические размеры электронного накопительного кольца и всего источника. В то же время рентгеновское излучение концентрируется в узком конусе вокруг направления движения электронного пучка, что обеспечивает высокую спектральную яркость. Перестрой-

ка энергии рентгеновского излучения может осуществляться как изменением энергии электронов в кольце так и изменением длины волны лазерного излучения. Впервые идея использовать обратное рассеяние оптических фотонов на быстрых электронах для генерации рентгеновского и гамма излучения появилась еще в 1963 г. В течение 70–80-ых годов было создано большое число источников гамма излучения, работающих в диапазоне более 30 МэВ и предназначенных для исследования фотоядерных реакций [5]. В дальнейшем в 90-ых годах и в начале XXI века были созданы новые мощные источники гамма излучения для нужд ядерной физики на основе обратного комптоновского рассеяния, обладающие высокой яркостью и высокой монохроматичностью излучения диапазоне 1–100 МэВ [6]. Идея применить обратное Томсоновское рассеяние для генерации рентгеновского излучения с энергией фотонов в диапазоне от нескольких до несколько десятков кэВ появилась в 1990-е годы [3]. В настоящее время несколько проектов таких источников в целом ряде стран находятся на различных стадиях реализации, начиная с предварительных и заканчивая работающими экспериментальными источниками [3, 7, 8, 9, 10].

Для точной оценки влияния различных параметров как лазерного излучения, так электронного пучка на свойства выходящего рентгеновского излучения ЛЭГ необходима надежная математическая модель взаимодействия электронов с лазерным излучением. Она должна учитывать особенности ЛЭГ, позволяя вычислять параметры рентгеновского излучения с минимальными вычислительными затратами, избегая учета несущественных эффектов. С другой стороны она должна быть реалистичной, т.е. учитывать все основные параметры влияющие на генерируемое излучение. Настоящая работа посвящено построению такой модели примерам ее применения в расчетах ЛЭГ.

2 Модель взаимодействия электронного и лазерного пучков

2.1 Основные приближения

Для описания рассеяния пучка лазерного излучения на пучке релятивистских электронов существуют различные подходы, имеющие различную область применимости. В типичном ЛЭГ (см. Таблицу 1) импульсы фотонов и релятивистских электронов достаточно малы, чтобы квантовыми эффектами можно пренебречь и рассматривать рассеяние как чисто классический процесс. С другой стороны, геометрические размеры пучков в точке их взаимодействия много больше длины волны, что позволяет пренебречь и волновыми эффектами. Таким образом, рассеяние фотонов на электронах в ЛЭГ может рассматриваться как классическое (Томсоновское) рассеяние потока оптических фотонов на потоке ультрарелятивистских электронов. Данный процесс характеризуется определенным сечением, зависящим в общем случае от энергий, импульсов и поляризации, как фотонов, так и электронов. Все практически важные характеристики ЛЭГ такие как полный поток рентгеновских фотонов, спектральная яркость и поляризация рентгеновского излучения могут быть вычислены интегрированием пространственной функции плотности источников рентгеновского излучения (с учетом поляризации при необходимости) [11, 12, 13].

Полный перечень используемых приближений приведен ниже:

1. Взаимодействие электромагнитного поля с электронами описывается классической электродинамикой, т.е квантовые эффекты включая спин электрона не учитываются. Это возможно поскольку $E_e \hbar \omega_l / m_e^2 c^2 \ll 1$, где E_e – энергия электронов, $\hbar \omega_l$ – энергия лазерных фотонов, а m_e – масса электрона.
2. Взаимодействие электромагнитного поля с электронами линейно, по-

скольку в ЛЭГ плотность потока лазерного излучения много меньше релятивистской плотности ($\ll 10^{16}$ Вт/см²).

3. Фокусировка лазерного пучка сравнительно мягкая. Это позволяет считать лазерный пучок Гауссовым и пренебречь волновыми эффектами. Взаимодействие электромагнитного поля с электронами рассматривается как классическое линейное рассеяние потока фотонов на потоке электронов.
4. Форма электронного пучка считается Гауссовой. Диаметр перетяжки определяется заданной бэ́та-функцией и эмиттансом.
5. Разброс электронов по поперечным импульсам описывается Гауссовым распределением с бэ́та-функцией и эмиттансом из предыдущего пункта.
6. В продольном направлении как лазерный импульс так и электронный банч считаются имеющими форму Гауссовых импульсов с заданными длинами. Лазерные импульсы и электронные банчи следуют с определенной частотой.
7. Энергетический спектр электронов также описывается Гауссовой функцией с заданной шириной.
8. Лазерный и электронный пучки движутся на встречу друг другу практически в лобовом направлении. Сечение Томсоновского рассеяния считается независимым от угла столкновения фотонов и электронов.
9. Спектр лазерного импульса и угловой разброс импульсов фотонов не вносят существенного вклада в свойства рентгеновского излучения и ими можно пренебречь. Это возможно, поскольку дифференциальное сечение Томсоновского рассеяния практически не зависит от угла столкновения фотонов с электронами (см. выше), а спектр лазерных импульсов достаточно узкий ($\Delta\lambda/\lambda < 0.005$).

10. Электроны могут рассматриваться как ультррелятивистские. Рентгеновские фотоны испускаются в узком конусе в направлении движения электронов.
11. Поляризация рентгеновского излучения определяется поляризацией лазерного излучения через определенную вещественную матрицу преобразования усредненную по поперечному разбросу импульсов, т.е. электронный пучок не меняет фазу излучения.

2.2 Взаимодействие двух потоков частиц

Общее выражение для числа актов рассеяния частицы с импульсом p_1 на частице с импульсом p_2 в направления \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$), в интервал энергий dE и на единицу четырехмерного объема $dx^4 = dr^3 dt^1$ имеет следующий вид [12]

$$\frac{dN}{d\Omega dE dx^4 dp_1^3 dp_2^3} = D\sigma_E \sqrt{(j_{p_1}^k j_{k,p_2})^2 - j_{p_1}^2 j_{p_2}^2}, \quad (1)$$

где по индексу k подразумевается суммирование, $d\Omega$ – это элемент телесного угла в направлении \mathbf{n} , $D\sigma_E$ – дифференциальное сечение рассеяния частицы с импульсом p_1 на частице с импульсом p_2 в интервал энергий dE . Потоки двух разных частиц с импульсами p_1 и p_2 описываются четырех-векторами $j_{p_1}^k = j_{p_1}^k(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)$ и $j_{p_2}^k = j_{p_2}^k(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t)$.

Из (1) можно получить число фотонов с импульсом $\mathbf{p}_1 = \hbar\mathbf{k}$ ($k = \omega_l$) рассеянных электронным пучком с импульсом $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} = m_e\gamma\mathbf{v}$ в направлении \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$) из единицы четырехмерного объема dx^4 в интервал частот $d\omega = dE/\hbar$ [11]

$$\frac{dN}{d\Omega d\omega dx^4 dp^3 dk^3} = D\sigma j_{ph}^k j_{k,e}, \quad (2)$$

где $j_e^k = j_{ph}^k(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ – четырехмерный поток электронов с импульсом \mathbf{p} , $j_{ph}^k = j_{ph}^k(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ – четырехмерный поток фотонов с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ (его квадрат равен

¹Здесь и в дальнейшем мы считаем, что скорость света $c = 1$

нулю), $\gamma = E_e/m_e$ – фактор-гамма электрона с энергией E_e , а $D\sigma$ – дифференциальное сечение рассеяния фотона на электроне в интервал частот $d\omega$

$$D\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{E}_0) = \frac{d\sigma}{d\Omega d\omega}, \quad (3)$$

где \mathbf{E}_0 – это вектор электрического поля электромагнитной волны. Принимая во внимание определение четырехмерного потока [12] выражение (2) можно переписать как

$$\frac{dN}{d\Omega d\omega dx^4 dp^3 dk^3} = D\sigma(1 - \mathbf{v}\mathbf{n}_l)n_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)n_{ph}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad \mathbf{n}_l = \frac{\mathbf{k}}{\omega_l}, \quad (4)$$

где \mathbf{v} – это скорость электронов с импульсом \mathbf{p} , а n_e и n_{ph} – это объемные плотности электронов и фотонов в 6-мерном фазовом пространстве, соответственно. Выражение (4) полностью определяет число излученных фотонов на каждый элемент 13-мерного фазового пространства задачи. Однако для практических применений полезно проинтегрировать (4) по импульсам электронов и оптических фотонов, а также по времени. Получившаяся величина

$$I_{V,\Omega,\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega) = \nu \int_{V_{\mathbf{k}}} \int_{V_{\mathbf{p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} D\sigma(1 - \mathbf{v}\mathbf{n}_l)n_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)n_{ph}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) dt dp^3 dk^3, \quad (5)$$

где ν – это частота следования лазерных импульсов и электронных банчей, выражает усредненный по большому числу лазерных импульсов поток рентгеновских фотонов из элемента объема dr^3 в элемент телесного угла $d\Omega$ и частотный интервал $d\omega$.

Используя величину (5) можно выразить полный средний поток рентгеновского излучения в элемент телесного угла $d\Omega$ и частотный интервал $d\omega$

$$I_{\Omega,\omega} = \nu \int_V I_{V,\Omega,\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega) dr^3, \quad (6)$$

а также среднюю по времени спектральную яркость рентгеновского излучения

в направлении \mathbf{n} на частоте ω

$$B_{\mathbf{n},\omega} = \nu\delta\omega \int_{-\infty}^{+\infty} I_{V,\Omega,\omega}(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{n}, \mathbf{n}, \omega) ds, \quad (7)$$

где \mathbf{r}_0 – положение точки наблюдения, а $\delta\omega$ – достаточно узкий частотный интервал, обычно принимаемый равным $10^{-3}\omega$.

Мы до сих пор не учитывали поляризацию фотонов и электронов. В классическом приближении, в котором мы работаем, поляризация электронов не имеет значения, поскольку спин электрона это его чисто квантовое свойство. Для учета поляризации лазерного излучения и вычисления поляризации получающегося рентгеновского излучения необходимо перейти от скалярных величин к эрмитовым матрицам размера 2×2 . Тогда сечение рассеяния станет матрицей сечений $D\boldsymbol{\sigma}$, а $I_{V,\Omega,\omega}$ станет матрицей объемной плотности (поляризованных) интенсивностей $\mathbf{I}_{V,\Omega,\omega}$:

$$\mathbf{I}_{V,\Omega,\omega} = \frac{I_{V,\Omega,\omega}}{2} \begin{pmatrix} 1 - \xi_3 & \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi_1 - i\xi_2 & 1 + \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 – это параметры Стокса для рентгеновского излучения. Степень поляризации излучения при этом равна $p = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = \sqrt{1 - 4|\mathbf{I}|/I^2}$. Матрица сечений может быть выражена через матрицу поляризации лазерного излучения Ξ следующим образом

$$D\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M}_\sigma^T \Xi \mathbf{M}_\sigma, \quad (9)$$

где \mathbf{M}_σ – это симметричная (не эрмитова) матрица преобразования амплитуд поля, которая определена в следующем разделе, а Ξ имеет следующий вид

$$\Xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \xi_{L1} & \xi_{L2} + i\xi_{L3} \\ \xi_{L2} - i\xi_{L3} & 1 + \xi_{L1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где ξ_{L1} , ξ_{L2} и ξ_{L3} – это параметры Стокса для лазерного излучения. Теперь вместо выражения (5) для объемной плотности источников будем иметь

$$\mathbf{I}_{V,\Omega,\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega) = \nu \int_{V_{\mathbf{k}}} \int_{V_{\mathbf{p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} D\sigma(1 - \mathbf{v}\mathbf{n}_l)n_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)n_{ph}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)dt dp^3 dk^3, \quad (11)$$

из которого можно получить матричные эквиваленты выражений (6) и (7).

2.3 Дифференциальное сечение рассеяния

Введем следующие две неподвижные системы координат. Первая из них (x, y, z) является связанной с электронным пучком. Ее ось z строго параллельна средней скорости электронного банча. Вторая из них (x', y', z') является связанной с лазерным пучком. Ее ось z' строго параллельна направлению движения лазерного импульса. Тогда при учете сделанных выше приближений угол между направлением движения электрона и оптического фотона будет мало отличаться от π .

Поправки к сечению, связанные с отличием угла взаимодействия оптического фотона с электроном от π будут пропорциональны $\sim \delta\varphi^2$, где $\delta\varphi^2 = 2(\mathbf{v}\mathbf{n}_l + 1) \ll 0$ и будут, соответственно, крайне малы. Это позволяет использовать в качестве дифференциального сечения его выражение в случае лобового столкновения электрона с фотоном при $\mathbf{v}\mathbf{n}_l = -1$. Как было показано в работе [14] с учетом указанных выше предположений, а также запаздывания, дифференциальное сечение для линейной поляризации лазерного излучения равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\omega} = \frac{3}{8\pi} \frac{\sigma_T}{\gamma^2} \delta(\omega - \omega') \frac{1}{(1 - v \cos \theta)^2} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \alpha}{\gamma^2 (1 - v \cos \theta)^2} \right], \quad (12)$$

$$\frac{\omega'}{\omega_l} = \frac{1 + v}{1 - v \cos \theta}, \quad v = |\mathbf{v}|, \quad \mathbf{v}\mathbf{n} = v \cos \theta, \quad (13)$$

где частота ω' связана с лазерной частотой соотношением (13), α – это угол

задающий ориентацию вектора электрического поля лазерного излучения относительно оси y , а $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ см}^2$ – это Томсоновское сечение.

Если излучение обладает круговой или естественной поляризацией, то в (12) следует заменить $\sin^2 \alpha$ его средним значением $1/2$ (т.е. усреднить по поляризации). Тогда можно получить следующее выражение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\omega} = \frac{3}{8\pi} \frac{\sigma_T}{\gamma^2} \delta(\omega - \omega') \frac{1}{(1 - v \cos \theta)^2} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta}{2\gamma^2(1 - v \cos \theta)^2} \right], \quad (14)$$

В ультрарелятивистском случае, когда $\gamma \gg 1$, а угол θ между векторами \mathbf{n} и \mathbf{v} может считаться маленьким, $v \approx 1 + 1/(2\gamma^2)$, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ и выражения (14) и (13) приобретают вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\omega} \approx \frac{3}{2\pi} \sigma_T \gamma^2 \delta(\omega - \omega') \frac{1 + \gamma^4 \theta^4}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^4}, \quad (15)$$

$$\frac{\omega'}{\omega_l} \approx \frac{4\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2}, \quad \theta^2 = 2(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}). \quad (16)$$

Изменение индикатриссы рассеяния и поляризации рентгеновского излучения при изменении угла между лазерным импульсом и электронным банчем будет вызываться только геометрическим поворотом одночастичной индикатриссы рассеяния при изменении направления движения электрона.

Для расчета поляризации рентгеновского излучения необходимо, как было показано выше, вместо скалярного сечения необходимо использовать матрицу 2×2 преобразования интенсивностей и поляризации (см. (9)), которая может быть выражена через сечения как

$$\mathbf{M}_\sigma = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\Omega d\omega} = \mathbf{O}^T \mathbf{M} \mathbf{O}, \quad (17)$$

где \mathbf{O} – это ортогональная матрица поворота на некоторый угол ε равный углу между плоскостью векторов \mathbf{v} и \mathbf{n} и плоскостью осей y и z , а диагональная матрица \mathbf{M} равна

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_{11}} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_{22}} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где m_{11} и m_{22} получаются из (12) при $\sin \alpha = 1$ и $\sin \alpha = 0$, соответственно. Несложно показать используя (9) и (17), что элементы матрицы сечений

$$D\sigma = \frac{\sigma_0}{2} \begin{pmatrix} 1 - \eta_3 & \eta_1 + i\eta_2 \\ \eta_1 - i\eta_2 & 1 + \eta_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

выражаются следующим образом

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} - (\xi_{L3} \cos 2\varepsilon + \xi_{L1} \sin 2\varepsilon)(m_{11} - m_{22})), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0 \eta_3 = & -\frac{1}{2}(m_{11} - m_{22}) \cos 2\varepsilon + \frac{\xi_{L3}}{2}((m_{11} + m_{22}) \cos^2 2\varepsilon + 2\sqrt{m_{11}m_{22}} \sin^2 2\varepsilon) + \\ & \frac{\xi_{L1}}{2}(m_{11} + m_{22} - 2\sqrt{m_{11}m_{22}}) \sin 2\varepsilon \cos 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0 \eta_1 = & -\frac{1}{2}(m_{11} - m_{22}) \sin 2\varepsilon + \frac{\xi_{L1}}{2}((m_{11} + m_{22}) \sin^2 2\varepsilon + 2\sqrt{m_{11}m_{22}} \cos^2 2\varepsilon) + \\ & \frac{\xi_{L3}}{2}(m_{11} + m_{22} - 2\sqrt{m_{11}m_{22}}) \sin 2\varepsilon \cos 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\sigma_0 \eta_2 = \xi_{L2} \sqrt{m_{11}m_{22}}. \quad (23)$$

Из выражений (9)–(10) и (17)–(18), а также из скалярности фазовых плотностей фотонов и электронов следует, что степень поляризации рентгеновского излучения в пренебрежении угловым разбросом импульсов электронов в банче преобразуется следующим образом

$$p = \sqrt{1 - \frac{m_{11}m_{22}}{I^2}(1 - \xi_{1L}^2 - \xi_{2L}^2 - \xi_{3L}^2)}. \quad (24)$$

Выражение (24) можно получить и непосредственно из (20)–(23). Из (24), в частности следует, что полностью поляризованное лазерное излучение ($p_L = 1$) в пренебрежении поперечным разбросом импульсов электронов порождает полностью поляризованное рентгеновское излучение. Выражения (20)–(23) аналогичны формулам (35) из [15].

2.4 Объемные плотности частиц в электронном и фотонном пучках

В достаточно общем случае бетатронные и синхротронные колебания электронов в накопительном кольце можно считать независимыми друг от друга. Поэтому объемные плотности n_e и n_{ph} в общем случае факторизуются и представляются в виде произведения поперечной части (\perp), определяющей распределение по поперечному импульсу и координате, и продольной части (\parallel), определяющей распределение по энергии и продольной координате. Их можно представить как

$$n_e = N_e f_{e\parallel}(z - z_0 - t, \gamma) f_{e\perp}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{p}_\perp), \quad (25)$$

$$n_{ph} = N_{ph} f_{ph\parallel}(z' - t - \Delta t, \omega_l) f_{ph\perp}(\boldsymbol{\rho}', \mathbf{k}_\perp), \quad (26)$$

где N_e и N_{ph} – это полное число частиц (электронов или фотонов) в электронном банче и лазерном импульсе, соответственно, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ и $\boldsymbol{\rho}' = (x', y')$ – это поперечные координаты в системе координат связанной с электронным и лазерным пучком, соответственно, Δt – это временная отстройка в движении электронного банча и лазерного импульса и $(\boldsymbol{\rho}_0, z_0)$ – это вектор смещения перетяжки электронного банча относительно перетяжки лазерного импульса. Заметим, что продольный размер как электронного банча так и лазерного импульса намного превосходит их размер в поперечном направлении.

Продольная компонента фотонной функции распределения в (26) в Гауссовом приближении будет

$$f_{ph\parallel}(z', \omega_l) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ - \left(\frac{z'}{\tau} \right)^2 \right\} \delta(\omega_l - \omega_0), \quad (27)$$

где τ – это длительность лазерного импульса, ω_0 – это средняя частота лазерных фотонов. В выражении (27) спектральное распределение лазерных фотонов представляются в виде дельта-функции, что оправдано в случае доста-

точно длинного лазерного импульса (> 10 пс), как в рассматриваемом здесь ЛЭГ.

Продольная компонента электронной функции распределения в (25) по координате z и по энергии (γ) в рассматриваемом приближении будет

$$f_{e\parallel}(z, \gamma) = \frac{1}{\pi l_e \Delta\gamma} \exp \left\{ - \left(\frac{z}{l_e} \right)^2 \right\} \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{\Delta\gamma} \right)^2 \right\}, \quad (28)$$

где l_e – это длина электронного банча, γ_0 – средний фактор-гамма электронного банча, $\Delta\gamma$ – разброс фактора-гамма электронного пучка. В (28) распределение электронов по энергии считается не зависящим от пространственного положения, что в общем случае не верно, но оправдано в нашем случае, поскольку поправки будут следующего порядка малости по сравнению с учитываемыми в данной работе.

Заметим, что время входит в выражение (5) для матрицы $\mathbf{I}_{V, \Omega, \omega}$ только через продольные компоненты функций распределения $f_{e\parallel}$ и $f_{ph\parallel}$, поэтому интеграл по времени в (5) может быть вычислен аналитически. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{e\parallel}(z - z_0 - t, \gamma) f_{ph\parallel}(z' - t - \Delta t, \omega_l) dt = \frac{1}{\pi \Delta\gamma \sqrt{l_e^2 + \tau^2}} \exp \left\{ - \frac{(z - z' - z_0 + \Delta t)^2}{l_e^2 + \tau^2} \right\} \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{\Delta\gamma} \right)^2 \right\} \delta(\omega_l - \omega_0). \quad (29)$$

Далее для поперечных функций распределения в (25) и (26) можно напи-

сать

$$f_{e\perp}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\perp) = \frac{1}{\pi^2 w_{e,x}(z-z_0) w_{e,y}(z-z_0) \Delta p_{\perp,x} p_{\perp,y}} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{w_{e,x}(z-z_0)} \right)^2 - \left(\frac{y}{w_{e,y}(z-z_0)} \right)^2 \right\} \\ \times \exp \left\{ - \left(\frac{p_{\perp,x}}{\Delta p_{\perp,x}} \right)^2 - \left(\frac{p_{\perp,y}}{\Delta p_{\perp,y}} \right)^2 \right\}, \quad (30)$$

$$f_{ph\perp}(\boldsymbol{\rho}', \mathbf{n}_l) = \frac{1}{\pi w_{ph}^2(z')} \exp \left\{ - \left(\frac{\boldsymbol{\rho}'}{w_{ph}(z')} \right)^2 \right\} \delta(\mathbf{n}_l - \mathbf{n}_0), \quad (31)$$

где $\Delta p_{\perp,x}$ и $\Delta p_{\perp,y}$ – это разброс поперечных импульсов электронов в банче в направлении осей x и y , соответственно, а \mathbf{n}_0 – это единичный вектор в направлении движения лазерного импульса. Можно показать, что

$$\Delta p_{\perp,x} = \left(\frac{\varepsilon}{\beta_x \gamma} \right)^{1/2}, \quad (32)$$

$$\Delta p_{\perp,y} = \left(\frac{\varepsilon}{\beta_y \gamma} \right)^{1/2}, \quad (33)$$

а функции $w_{e,x}$, $w_{e,y}$ и w_{ph} равны

$$w_{e,x(y)}^2(z) = \frac{\varepsilon}{\gamma} \left(\beta_{x(y)} + \frac{z^2}{\beta_{x(y)}} \right), \quad (34)$$

$$w_{ph}^2(z') = \frac{1}{2\omega_l} \left(l_r + \frac{z'^2}{l_r} \right), \quad (35)$$

где $\beta_{x(y)}$ – это бета-функция электронного пучка в точке взаимодействия в направлении оси $x(y)$, ε – это поперечный эмиттанс электронного пучка, а l_r – это рэлеевская длина лазерного пучка. Распределение по поперечным импульсам фотонов в (31) имеет вид дельта-функции, что соответствует рассматриваемому приближению, где сечение рассеяния не зависит от угла между падающим фотоном и электроном.

Заметим, что как и для продольных функций распределения мы не учитываем зависимость распределения по поперечным импульсам от пространственного положения.

2.5 Итоговые выражения для параметров рентгеновского излучения

Выражение (5) для объемной функции $I_{V,\Omega,\omega}$ в сделанных в разделах 2.3 и 2.4 приближениях с учетом интеграла (29) и дифференциального сечения (15) может быть записано как

$$\begin{aligned}
 I_{V,\Omega,\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega) &= \frac{2\nu N_e N_{ph}}{\pi^4 \Delta\gamma \sqrt{l_e^2 + \tau^2} \Delta p_{\perp,x} \Delta p_{\perp,y} w_{e,x}(z - z_0) w_{e,y}(z - z_0) w_{ph}^2(z')} \times \\
 &\exp \left\{ -\frac{(z - z' - z_0 + \Delta t)^2}{l_e^2 + \tau^2} - \left(\frac{x - x_0}{w_{e,x}(z - z_0)} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{w_{e,y}(z - z_0)} \right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{\rho}'}{w_{ph}(z')} \right)^2 \right\} \times \\
 &\int_{V_{\mathbf{p}_{\perp}}} \int_{-\infty}^{+\infty} D\sigma(\mathbf{nv}) \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma - \gamma_0}{\Delta\gamma} \right)^2 \right\} \exp \left\{ -\left(\frac{p_{\perp,x}}{\Delta p_{\perp,x}} \right)^2 - \left(\frac{p_{\perp,y}}{\Delta p_{\perp,y}} \right)^2 \right\} dp_{\perp}^2 d\gamma,
 \end{aligned} \tag{36}$$

где можно показать, что координаты переход от системы координат электронного пучка к системе координат лазерного пучка при учете аксиальной симметрии лазерного пучка имеет вид двух последовательных поворотов относительно осей x и z

$$z' = (\mathbf{v}_0 \mathbf{n}_0) z'' - \sqrt{1 - (\mathbf{v}_0 \mathbf{n}_0)^2} y'' = \cos \theta_0 z'' - \sin \theta_0 y'', \tag{37}$$

$$y' = \sqrt{1 - (\mathbf{v}_0 \mathbf{n}_0)^2} z'' + (\mathbf{v}_0 \mathbf{n}_0) y'' = \sin \theta_0 z'' + \cos \theta_0 y'', \tag{38}$$

$$x' = x'', \tag{39}$$

$$z'' = z, \tag{40}$$

$$y'' = \cos \alpha_0 x - \sin \alpha_0 y, \tag{41}$$

$$x'' = \sin \alpha_0 x + \cos \alpha_0 y, \tag{42}$$

где \mathbf{v}_0 ($|\mathbf{v}_0| = 1$) – это средняя скорость движения электронов в банче, а угол α_0 соответствует повороту плоскости в которой лежат вектора \mathbf{n}_0 и \mathbf{v}_0 вокруг оси z . В выражениях (37) и (38) угол между средними скоростями

движения электронов и фотонов $\cos \theta_0 = \mathbf{v}_0 \mathbf{n}_0$ уже не считается равным π как в дифференциальном сечении (15).

Далее учитывая, что в сечение (15) входит дельта-функция, интеграл по γ в (36) может быть вычислен и выражение (36) для усредненного по поляризации потока может быть переписано как

$$I_{V,\Omega,\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega) = \frac{2\nu N_e N_{ph}}{\pi^{7/2} \sqrt{l_e^2 + \tau^2} \Delta p_{\perp,x} \Delta p_{\perp,y} w_{e,x}(z - z_0) w_{e,y}(z - z_0) w_{ph}^2(z')} \times \\ \exp \left\{ -\frac{(z - z' - z_0 + \Delta t)^2}{l_e^2 + \tau^2} - \left(\frac{x - x_0}{w_{e,x}(z - z_0)} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{w_{e,y}(z - z_0)} \right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{\rho}'}{w_{ph}(z')} \right)^2 \right\} \times \\ \int_{V_{p\perp}} D\sigma_\gamma(\mathbf{nv}) \exp \left\{ -\left(\frac{p_{\perp,x}}{\Delta p_{\perp,x}} \right)^2 - \left(\frac{p_{\perp,y}}{\Delta p_{\perp,y}} \right)^2 \right\} dp_{\perp}^2, \quad (43)$$

где усредненное по γ сечение выражается как

$$D\sigma_\gamma(\mathbf{nv}) = \frac{3\sigma_T}{64\pi\sqrt{\pi}\Delta\gamma\omega_l} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_l}} \frac{\left(1 - \frac{\omega\theta^2}{\omega_l 2}\right)^2 + 1}{\sqrt{1 - \frac{\omega\theta^2}{\omega_l 4}}} e^{-K}, \quad (44)$$

$$K = \frac{\left[\sqrt{\frac{\omega}{\omega_l} \frac{1}{1 - \omega\theta^2/(4\omega_l)}} - 2\gamma_0 \right]^2}{4\Delta\gamma^2}, \quad \theta^2 = 2(1 - \mathbf{vn}). \quad (45)$$

Теперь заметим, что относительная ширина спектра рентгеновского излучения из (44) в заданном направлении определенная по полу-высоте будет равна

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{D\sigma_\gamma}{D\sigma_{int}} = 2\sqrt{\pi} \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \frac{1}{1 + \theta^2\gamma^2}, \quad (46)$$

где усредненное сечение $D\sigma_\gamma$ берется на частоте максимума, а $D\sigma_{int}$ – это сечение из (15) (проинтегрированное по частоте).

Если характерный разброс поперечных импульсов электронов в банче ($\Delta\theta =$

$\Delta p/p$) намного меньше, чем характерный угол для спектра с шириной из (46)

$$\Delta\theta \ll \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Delta\omega}{2\omega}} = \pi^{1/4} \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Delta\gamma}{\gamma}}, \quad (47)$$

то функцию распределения электронов (30) по поперечному импульсу можно заменить дельта-функцией. В этом случае выражение (43) переписется как

$$I_{V,\Omega,\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega) = \frac{2\nu N_e N_{ph}}{\pi^{5/2} \sqrt{l_e^2 + \tau^2} w_{e,x}(z - z_0) w_{e,y}(z - z_0) w_{ph}^2(z')} D\sigma_\gamma(\mathbf{nv}) \times \\ \exp \left\{ -\frac{(z - z' - z_0 + \Delta t)^2}{l_e^2 + \tau^2} - \left(\frac{x - x_0}{w_{e,x}(z - z_0)} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{w_{e,y}(z - z_0)} \right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{\rho}'}{w_{ph}(z')} \right)^2 \right\}. \quad (48)$$

Используя (48), усредненный по поляризации полный поток (6) можно записать вводя геометрический фактор G

$$I_{\Omega,\omega}(\mathbf{n}, \omega) = \frac{\nu N_e N_{ph}}{s} D\sigma_\gamma(\mathbf{nv}) G(\boldsymbol{\rho}_0, z_0, \Delta t), \quad (49)$$

где $s = \pi \sqrt{(w_{e,x}^2(0) + w_{ph}^2(0))(w_{e,y}^2(0) + w_{ph}^2(0))}$ – это эффективная площадь взаимодействия, а G вычисляется как

$$G(\boldsymbol{\rho}_0, z_0, \Delta t) = \frac{2}{\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{(w_{e,x}^2(0) + w_{ph}^2(0))(w_{e,y}^2(0) + w_{ph}^2(0))}}{\sqrt{l_e^2 + \tau^2}} \times \\ \int_V \exp \left\{ -\frac{(z - z' - z_0 + \Delta t)^2}{l_e^2 + \tau^2} - \left(\frac{x - x_0}{w_{e,x}(z - z_0)} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{w_{e,y}(z - z_0)} \right)^2 \right\} \\ \exp \left\{ -\left(\frac{\boldsymbol{\rho}'}{w_{ph}(z')} \right)^2 \right\} \frac{dxdydz}{w_{e,x}(z - z_0) w_{e,y}(z - z_0) w_{ph}^2(z')}. \quad (50)$$

Вычисление спектральной яркости производится по формуле (7). Возникающий при этом геометрический фактор G_B будет функцией направления \mathbf{n} в отличие от G , который является функцией только взаимных сдвигов, поворотов и задержек электронного и лазерного пучков.

При учете поляризации излучения матричная величина $\mathbf{I}_{V,\Omega,\omega}$ будет определяться выражением аналогичным (36), которое будет следовать из (11). Следовательно, все выражения усредненные по поляризации, приведенные выше можно обобщить на случай произвольной поляризации. Необходимые для такого обобщения элементы m_{11} и m_{22} диагональной матрицы преобразования поляризации \mathbf{M} из (18) усреднённые по γ будут выражаться как

$$m_{11} = \frac{3\sigma_T}{64\pi\sqrt{\pi}\Delta\gamma\omega_l} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_l}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega}{\omega_l^2}}} e^{-K}, \quad (51)$$

$$m_{22} = m_{11} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_l} \frac{\theta^2}{2}\right)^2. \quad (52)$$

Заметим, что $D\sigma_\gamma = (m_{11} + m_{22})/2$.

Если же соотношение (47) не выполняется и поперечным разбросом импульсов электронов пренебречь нельзя, то для вычисления усредненного по поляризации потока рентгеновского излучения усредненное по γ сечение $D\sigma_\gamma$ в (46) нужно дополнительно усреднить по угловому спектру движения электронов. В выражение (49) при этом войдет усредненное по угловому спектру электронов дифференциальное сечение $D\sigma_\gamma$.

Для вычисления поляризации рентгеновского излучения необходимо усреднить по угловому спектру электронов матрицу сечений $D\sigma_\gamma$. Эта операция сводится к усреднению выражений (20)–(23) и, в общем случае, приведет к частичной деполяризации рентгеновского излучения. В важном частном случае нулевого угла наблюдения θ матричные элементы m_{11} и m_{22} не зависят от угла ε , который представляет собой азимутальный угол движущихся электронов вокруг средней скорости всего банча. Тогда выражения (20)–(23) можно

сначала явным образом усреднить по углу ε , что дает

$$\overline{\sigma_0} = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}), \quad (53)$$

$$\overline{\sigma_0 \eta_3} = \frac{\xi_{L3}}{4}(\sqrt{m_{11}} + \sqrt{m_{22}})^2, \quad (54)$$

$$\overline{\sigma_0 \eta_1} = \frac{\xi_{L1}}{4}(\sqrt{m_{11}} + \sqrt{m_{22}})^2, \quad (55)$$

$$\overline{\sigma_0 \eta_2} = \xi_{L2} \sqrt{m_{11} m_{22}}. \quad (56)$$

Для получения матриц потока \mathbf{I} и \mathbf{B} выражения (53)–(56) необходимо далее усреднить по угловому отклонению импульсов электронов от среднего направления движения банча. Выражения (53)–(56) аналогичны формулам (38) в [15].

3 Примеры и частные случаи

3.1 Вопросы программной реализации

В сделанных в разделах 2.3–2.5 приближениях базовая объемная функция $I_{V,\Omega,\omega}$ (или матричная функция $\mathbf{I}_{V,\Omega,\omega}$ когда поляризация имеет значение) представляет собой произведение двух независимых множителей, один из которых зависит только от пространственных параметров, а второй – только от угловых. Это обстоятельство значительно упрощает расчеты и снижает вычислительные затраты. При необходимости учета угловой дисперсии электронов в банче, что может понадобиться при относительно сильной фокусировке электронного пучка, необходимо усреднить дифференциальное сечение $D\sigma_\gamma$ (или матрицу $D\boldsymbol{\sigma}_\gamma$) по угловому распределению электронов. Тем не менее функция $I_{V,\Omega,\omega}$ (или $\mathbf{I}_{V,\Omega,\omega}$) может быть по-прежнему представлена как произведение пространственной и угловой частей.

Вычисление среднего потока в элемент телесного угла и в интервал частот $I_{\Omega,\omega}$ сводится к вычислению пространственного трехмерного интеграла от

$I_{V,\Omega,\omega}$. С учетом структуры функции $I_{V,\Omega,\omega}$ итоговый результат представляет собой произведение дифференциального сечения $D\sigma_\gamma$ (или среднего от него по угловому распределению электронов) на некоторый геометрический фактор, который учитывает пространственное перекрытие пучков. Такая структура позволяет существенно уменьшить объем необходимых вычислений. Напротив спектральная яркость, вычисленная по формуле (6), не факторизуется на пространственную и угловую части. Однако ее определение сводится к вычислению лишь одномерного интеграла и также не должно вызывать проблем с вычислительной точки зрения.

Для расчета параметров рентгеновского излучения ЛЭГ был разработан комплекс программ TSource, написанных на платформенно-независимом языке Java [16]. Разработанный комплекс обладает графическим интерфейсом и позволяет моделировать параметры рентгеновского излучения ЛЭГ при всех актуальных параметрах электронного и фотонного пучков и с учетом всех факторов, оказывающих реальное влияние на параметры рентгеновского излучения.

3.2 Примеры расчетов ЛЭГ

Типовые параметры ЛЭГ приведены в Таблице 1. При этих параметрах средний разброс углов движения электронов будет около 2, 2 мрад, тогда как характерный угол из (47) будет равен 1, 4 мрад – т.е. условие (47) не выполняется и угловым разбросом импульсов электронов пренебречь нельзя. Напротив, как будет показано далее, именно угловой разброс электронов будет определяющим для спектральной яркости рентгеновского излучения.

На приведенных ниже графиках представлены зависимости спектральной яркости, геометрического фактора и поляризации от различных параметров ЛЭГ (иные параметры соответствуют указанным в Таблице 1).

На Рис.1 показана зависимость усредненной по поляризации спектральной яркости ЛЭГ от угла столкновения θ_0 электронного пучка с лазерным

Параметр	Значение	Примечание
E_e	35–50 МэВ	Энергия электронов
γ	70–100	Гамма-фактор
N_e	$0,6 \times 10^{10}$	Число электронов в банче для заряда 1 нКл
$\Delta\gamma/\gamma$	10^{-2}	Относительный разброс энергий электронов
E_L	20 мкДж	Энергия лазерного импульса
$\hbar\omega_L$	1,1 эВ	Энергия лазерных фотонов
K_c	10^3	Коэффициент усиления оптического резонатора
ν	79 МГц	Частота следования лазерных импульсов
τ	30 ps	Длина электронного и лазерного импульсов
$\hbar\omega_X$	44 кэВ	Энергия рентгеновских фотонов
ϵ	5 мм × мрад	Эмиттанс электронного пучка
β_x, β_y	10 мм	Бэта-функция электронного пучка
l_r	5,4 мм	Рэлеевская длина лазерного пучка

Таблица 1: Основные параметры ЛЭГ

импульсом² и от относительного разброса энергий электронов в банче $\Delta\gamma/\gamma$. Из Рис.1 видно, что уменьшение разброса электронов по энергиям на порядок не приводит к существенному повышению яркости, т.к. она определяется в основном поперечным разбросом электронных скоростей.

На Рис.2 показана зависимость геометрического фактора G от угла столкновения θ_0 (слева) и от радиуса перетяжки электронного пучка (справа), который полагается равным радиусу перетяжки лазерного пучка. Из Рис.2 (справа) видно, что при увеличении радиуса перетяжки, геометрический фактор для случая $\theta_0 = 0$ быстро стремится к единице с ростом радиуса перетяж-

²В данном разделе мы для удобства переопределили угол θ_0 как $\pi - \theta_0$.

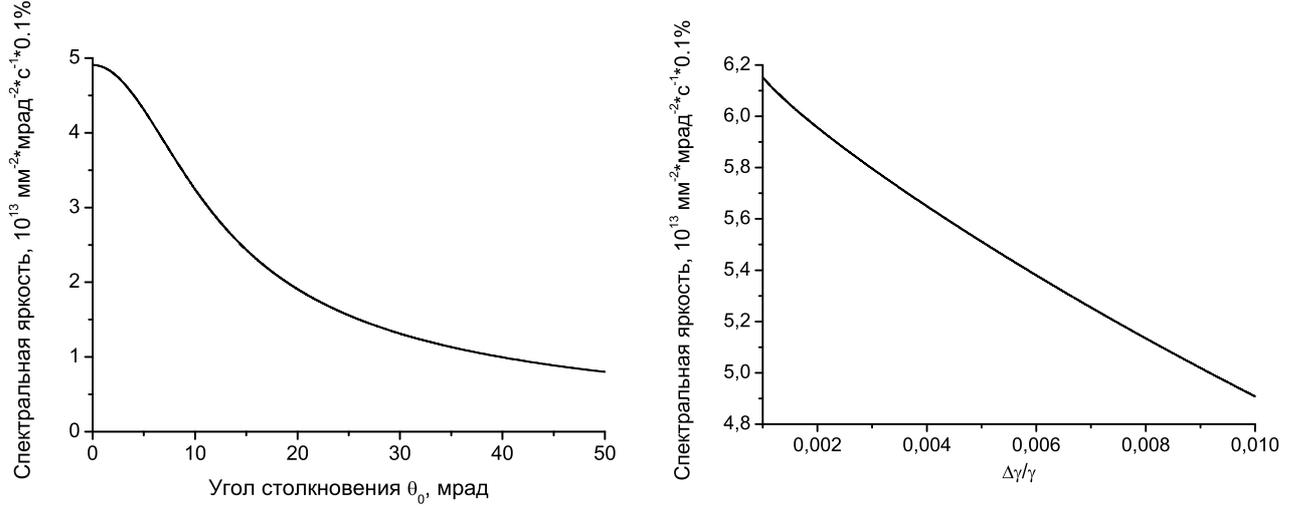


Рис. 1: Зависимость спектральной яркости рентгеновского излучения в направлении движения электронов при $E_e = 51,2$ МэВ от угла взаимодействия электронного банча с лазерным импульсом (слева) и от относительного разброса $\Delta\gamma/\gamma$ энергий электронов в банче при $\theta_0 = 0$ (справа).

ки, т.е. так называемый эффект “песочных часов”, т.е. зависимость диаметра Гауссовых пучков от продольной координаты, не является значительным.

В пренебрежении же эффектом песочных выражение (50) можно вычислить точно и получить приближенную формулу для геометрического фактора. В этом случае при $w_{e,x} = w_{e,x}(0)$, $w_{e,y} = w_{e,y}(0)$ и $w_{ph} = w_{ph}(0)$, а также считая что $\alpha_0 = 0$ в (41–42), вычисление интеграла в (50) дает:

$$G = \frac{\sqrt{w_{e,y}^2 + w_{ph}^2}}{\cos \theta_0/2 \sqrt{(l^2 + \tau^2) \sin^2 \theta_0/2 + (w_{e,y}^2 + w_{ph}^2) \cos^2 \theta_0/2}}. \quad (57)$$

Из выражения (57) следует, что $G = 1$ при $\theta_0 = 0$, что соответствует лобовому столкновению лазерного импульса с электронным пучком. С увеличением угла G сначала резко убывает за счет уменьшения перекрытия пучков, а затем начинает нарастать до бесконечности при $\theta_0 = \pi$. Этот рост объясняется тем, что мы пренебрегли зависимостью фактора $1 - \mathbf{vn}_l$ в (4) от угла

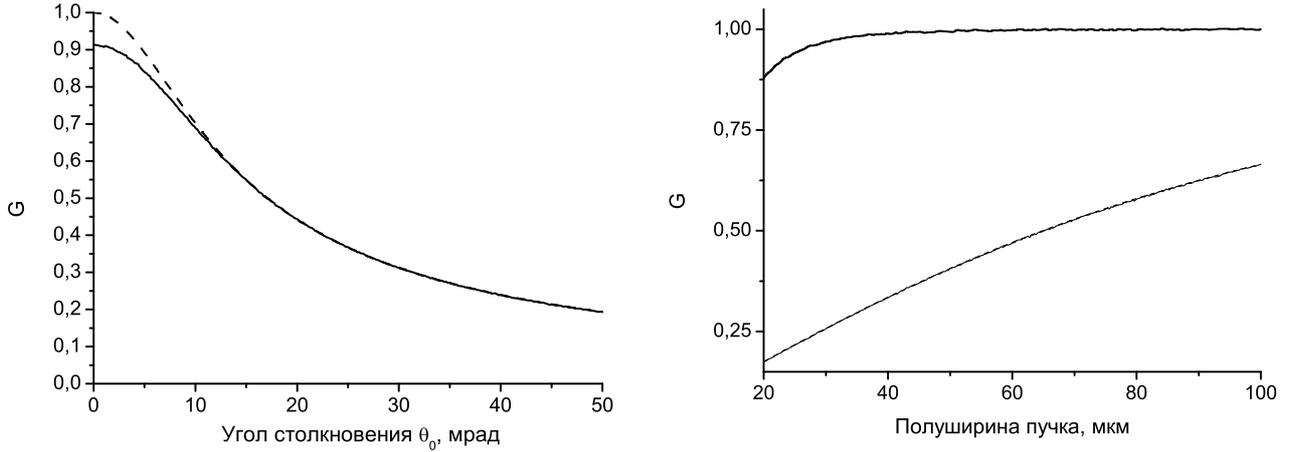


Рис. 2: Зависимость геометрического фактора G от угла столкновения электронного банча с лазерным импульсом θ_0 (слева) и от радиуса перетяжки при $\theta_0 = 0$ (справа, верхняя кривая) и $\theta_0 = 50$ мрад (справа, нижние кривые). Пунктирные линии обозначают приближенный геометрический фактор согласно формуле (57), тогда как сплошная линия это результат численного интегрирования. На правом графике при $\theta_0 = 0$ приближенный геометрический фактор строго равен 1 для любого радиуса и поэтому не показан.

столкновения, считая его равным 2. Выражение (57) совпадает с формулой (12) из [17]. Кривые рассчитанные по приближенной формуле (57) изображены пунктирными линиями на Рис.2. Приближенная кривая на левом графике немного отклоняется от точного расчета при малых углах столкновения, там где, упомянутый выше эффект песочных часов наиболее значителен. На правом графике тот же эффект наблюдается при $\theta_0 = 0$ мрад и малых радиусах перетяжки. Для случая же $\theta_0 = 50$ мрад совпадение точной и приближенной кривых идеальное, т.е. в этом случае эффект “песочных часов” пренебрежимо мал.

На Рис.3 показаны усредненные по поляризации спектры рентгеновского излучения для трех углов наблюдения θ и соответствующих им энергий электронов E_e . Угол столкновения θ_0 считался равным 50 мрад. Из Рис.3 видно,

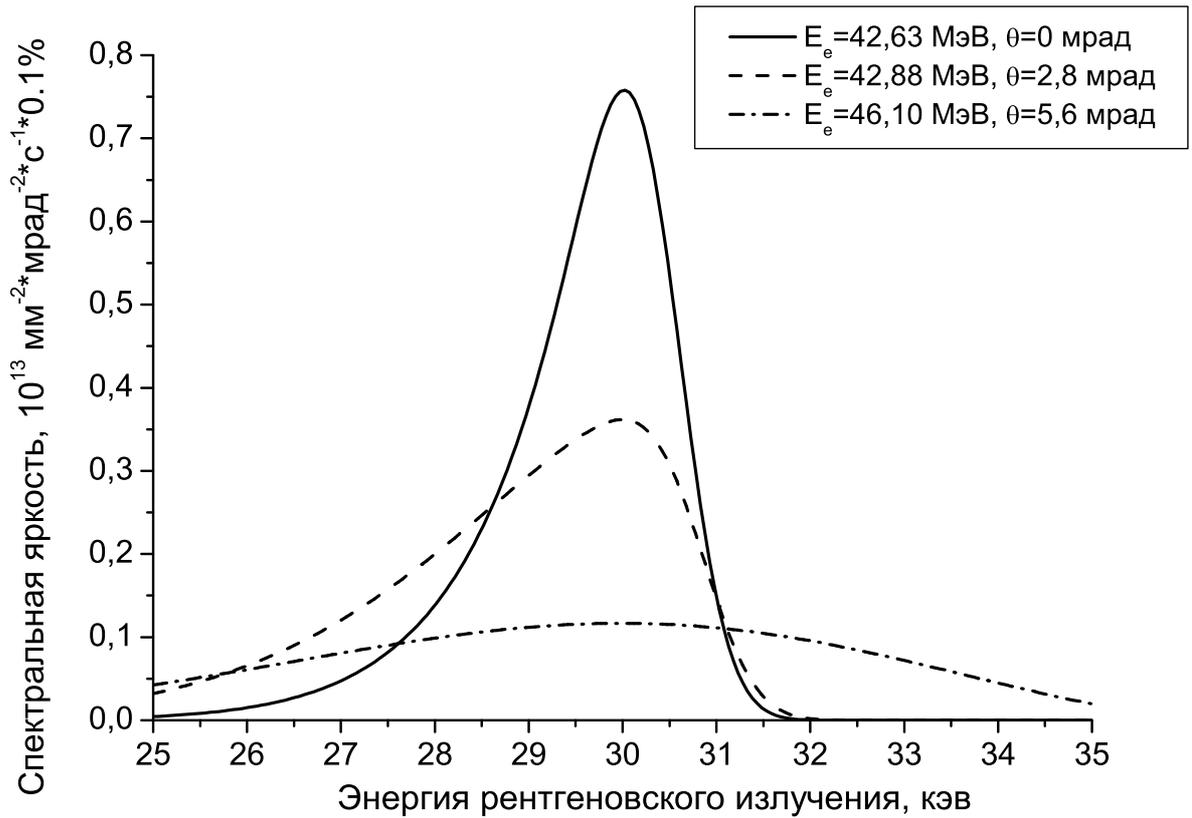


Рис. 3: Спектры рентгеновского излучения для трех углов наблюдения θ и соответствующих им энергий электронов. Энергии и углы подобраны таким образом, чтобы максимумы спектров приходились на энергию 30 кэВ.

что ширина спектра значительно возрастает, а пиковая яркость значительно падает при увеличении угла наблюдения. Сам спектр при нулевом угле наблюдения несимметричен с длинным экспоненциальным “хвостом” в области мягкого рентгеновского излучения. Спектр становится более симметричным при увеличении угла наблюдения.

Несимметричность спектра объясняется тем, что при нулевом угле наблюдения рентгеновское излучения больших энергий испускается электронами движущимися точно навстречу лазерному пучку и имеющими энергию больше средней. Распределение же электронов по энергии является Гауссовым и

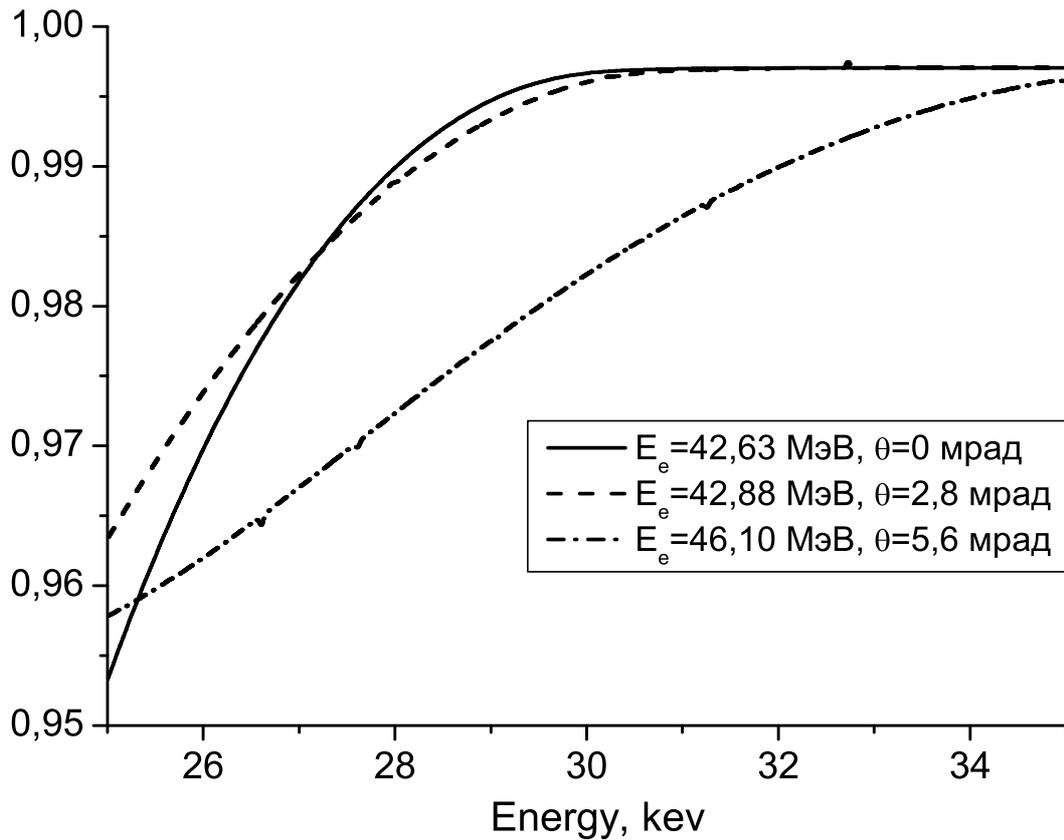


Рис. 4: Степень поляризации рентгеновского излучения для трех углов наблюдения θ и соответствующих им энергий электронов как функции энергии излучения с учётом поперечного разброса импульсов электронов. Энергии и углы подобраны таким образом, чтобы максимумы интенсивностей рентгеновского излучения приходились на энергию 30 кэВ как и на Рис.3.

является относительно узким согласно формуле (28). Напротив длинный экспоненциальный хвост создается электронами движущимися по углом к средней скорости банча. Число таких электронов убывает при увеличении угла экспоненциально согласно (30).

Как уже отмечалось при параметрах ЛЭГ обсуждаемых в данном разделе характерный разброс поперечных импульсов электронов в банче ($\Delta\theta = \Delta p/p$)

намного больше, чем характерный угол для спектра с шириной из (46)

$$\Delta\theta \gg \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Delta\omega}{2\omega}} = \pi^{1/4} \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Delta\gamma}{\gamma}}. \quad (58)$$

Поэтому можно написать приближенное выражение для сечения рассеяния рентгеновского излучения в направлении движения электронов (т.е. при $\theta = 0$) усредненного по поперечным импульсам электронов (для цилиндрически симметричного электронного пучка)

$$\begin{aligned} \overline{D\sigma_\gamma(\mathbf{nv})} &= \int_{V_{\mathbf{p}_\perp}} D\sigma_\gamma(\mathbf{nv}) \exp \left\{ - \left(\frac{p_{\perp,x}}{\Delta p_{\perp,x}} \right)^2 - \left(\frac{p_{\perp,y}}{\Delta p_{\perp,y}} \right)^2 \right\} dp_\perp^2 = \\ &= \frac{3\sigma_T}{4\pi\Delta\theta^2} \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \exp \left[\frac{1}{(\gamma\Delta\theta)^2} \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \frac{1}{(\gamma\Delta\theta)^2} \right) \right] \times \\ &G \left[\frac{\omega'}{\omega} \frac{\gamma}{2\Delta\gamma} \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} + 2 \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \frac{1}{(\gamma\Delta\theta)^2} \right) \right], \quad (59) \end{aligned}$$

где

$$\omega' = 4\gamma^2\omega_l, \quad G(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x'^2} dx'. \quad (60)$$

Сечение (59) ожидаемо асимметрично по частотам: в области высоких частот оно быстро спадает до нуля, тогда как при низких частотах имеет длинный “хвост”. При углах наблюдения отличных от нуля приближенная формула будет слишком громоздкой, чтобы быть полезной.

На Рис.4 показаны степень поляризации как функция энергии рентгеновского излучения для трех углов наблюдения θ и соответствующих им энергий электронов E_e с учётом поперечного разброса импульсов электронов. В пренебрежении разбросом импульсов степень поляризация должна равняться строго единице. Угол столкновения θ_0 считался равным 50 мрад, а лазерное излучение считалось линейно поляризованным ($\xi_1 = \xi_3 = \sqrt{2}$ и $\xi_2 = 0$) в направлении повернутом вокруг оси z на $\pi/4$ относительно оси y .

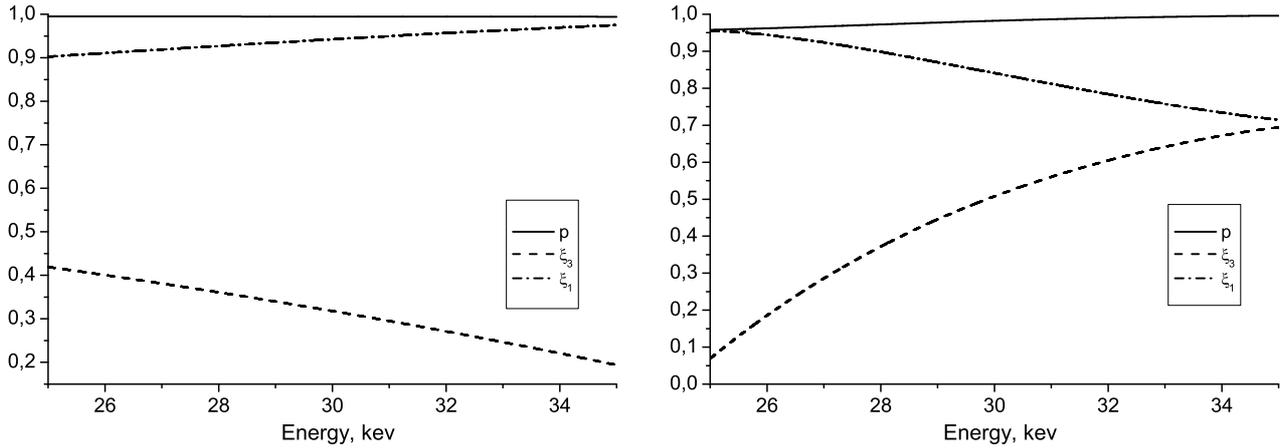


Рис. 5: Зависимость параметров Стокса ξ_1 и ξ_3 , также степени поляризации рентгеновского излучения от энергии рентгеновских фотонов при угле равном 5,6 мрад: угловой разброс импульсов электронов считается равным нулю (слева) или нет (справа).

Видно, что поперечный разброс импульсов (эмиттанс пучка) приводит к деполяризации излучения, которая возрастает при увеличении угла наблюдения. Степень поляризации также приближается к единице при росте энергии излучения, что объясняется тем, что излучение больших энергий является результатом рассеяния на электронах движущихся навстречу наблюдателю.

На Рис.5 приведены зависимости параметров Стокса от энергии рентгеновского излучения при угле наблюдения равном 5,6 мрад в пренебрежении угловым разбросом импульсов электронов (слева) и при его учете (справа). Энергия электронов считалась равной 46,10 МэВ. Остальные параметры такие же как и для Рис.4 при $\theta_0 = 5,6$ мрад. Из Рис.5 видно, что учет разброса направлений импульсов электронов в банче может приводить к радикальному изменению поляризации излучения. На левом графике рентгеновское излучения создается только электронами с импульсами параллельными средней скорости банча (иные электроны отсутствуют), в то время как на правом графике рентгеновское излучение испускается в основном электронами движущимися

в направлении наблюдателя (по крайней мере при высоких энергиях). Это приводит к тому, что на правом графике при высоких энергиях поляризация излучения соответствует таковой при нулевом угле наблюдения, тогда как на левом графике поляризация повернута на угол близкий к $\pi/4$.

4 Заключение

В настоящей работе представлена математическая модель для расчета рентгеновского излучения ЛЭГ, сформулированная с учетом реальных параметров лазерного и электронных пучков ЛЭГ. В рамках построенной модели показано, что основными факторами влияющими на угловой и спектральный поток рентгеновских фотонов, а также на спектральную яркость и поляризацию рентгеновского излучения являются:

- Относительное положение и относительные размеры электронного и лазерного пучков, а также их временная синхронизация;
- Энергетическая дисперсия электронного пучка;
- Угловая дисперсия электронов в электронном пучке, в случае достаточно сильной фокусировки электронного пучка;
- Поляризация лазерного излучения.

При реалистичных параметрах электронного и лазерного пучком достижимы спектральные яркости порядка $10^{13} \text{с}^{-1} \text{мм}^{-2} \text{мрад}^{-2} 0,1\%$, что по крайней мере на шесть порядков превышает яркость лучших рентгеновских трубок. Полный поток рентгеновских фотонов при этом может достигать 2×10^{14} фот/с, т.е. обеспечивать рабочие параметры рентгеновского излучения промежуточные между параметрами рентгеновских трубок и синхротронных источников.

Разработанная математическая модель ЛЭГ и написанный на ее основе программный код позволяют вычислять требуемые параметры рентгеновско-

го излучения с приемлемыми затратами машинного времени и за разумное время не более нескольких часов (для генерации исходных распределений для SHADOW). Отметим, что результаты вычислений могут быть использованы в качестве исходных параметров для программ расчета рентгеновских каналов и рабочих станций таких как SHADOW [18].

Дальнейшее развитие представленной модели возможно в направлении учета конечной спектральной ширины лазерного импульса и других не учтённых параметров, а также расчета когерентности выходящего рентгеновского излучения.

Список литературы

- [1] Donald H Bilderback, Pascal Elleaume, and Edgar Weckert. Review of third and next generation synchrotron light sources. *Journal of Physics B: Atomic, molecular and optical physics*, 38(9):S773, 2005.
- [2] K Achterhold, M Bech, S Schleede, G Potdevin, R Ruth, R Loewen, and F Pfeiffer. Monochromatic computed tomography with a compact laser-driven x-ray source. *Scientific reports*, 3, 2013.
- [3] Zhirong Huang and Ronald D Ruth. Laser-electron storage ring. *Physical review letters*, 80(5):976, 1998.
- [4] Е Г Бессонов, А В Виноградов, М В Горбунков, А Г Турьянский, Р М Фещенко, and Ю В Шабалин. Лазерно-электронный источник рентгеновского излучения для медицинских применений. *Успехи Физических Наук*, 173(8):899–903, 2003.
- [5] A D'Angelo. Review of compton scattering projects. In *EPAC-98 Conference, Stockholm*, 1998.

- [6] PG Thirolf, L Csige, D Habs, M Günther, M Jentschel, A Krasznahorkay, D Filipescu, T Glodariu, L Stroe, O Tesileanu, et al. Perspectives for photofission studies with highly brilliant, monochromatic γ -ray beams. In *EPJ Web of Conferences*, volume 38, page 08001. EDP Sciences, 2012.
- [7] HS Xu, WH Huang, CX Tang, and SY Lee. Design of a 4.8-m ring for inverse compton scattering x-ray source. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 17(7):070101, 2014.
- [8] WS Graves, J Bessuille, P Brown, S Carbajo, V Dolgashev, KH Hong, E Ihloff, B Khaykovich, H Lin, K Murari, et al. Compact x-ray source based on burst-mode inverse compton scattering at 100 khz. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 17(12), 2014.
- [9] SG Anderson, CPJ Barty, SM Betts, WJ Brown, JK Crane, RR Cross, DN Fittinghoff, DJ Gibson, FV Hartemann, J Kuba, et al. Short-pulse, high-brightness x-ray production with the pleiades thomson-scattering source. *Applied Physics B*, 78(7-8):891–894, 2004.
- [10] Piernicola Oliva, Alberto Bacci, Ubaldo Bottigli, Massimo Carpinelli, Pasquale Delogu, Massimo Ferrario, Danilo Giulietti, Bruno Golosio, Vittoria Petrillo, Luca Serafini, et al. Start-to-end simulation of a thomson source for mammography. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 615(1):93–99, 2010.
- [11] F. V. Hartemann, W. J. Brown, D. J. Gibson, S. G. Anderson, A. M. Tremaine, P. T. Springer, A. J. Wootton, E. P. Hartouni, and C. P. J. Barty. High-energy scaling of compton scattering light sources. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 8:100702, Oct 2005.
- [12] Л Ландау and Е Лившиц. Теоретическая физика. Теория поля. 1988.

- [13] WJ Brown, SG Anderson, CPJ Barty, SM Betts, R Booth, JK Crane, RR Cross, DN Fittinghoff, DJ Gibson, FV Hartemann, et al. Experimental characterization of an ultrafast thomson scattering x-ray source with three-dimensional time and frequency-domain analysis. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 7(6):060702, 2004.
- [14] Winthrop J. Brown and Frederic V. Hartemann. Three-dimensional time and frequency-domain theory of femtosecond x-ray pulse generation through thomson scattering. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 7:060703, Jun 2004.
- [15] Changchun Sun and Ying K Wu. Theoretical and simulation studies of characteristics of a compton light source. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 14(4):044701, 2011.
- [16] R.M. Feshchenko. Thomsonsource project. <https://github.com/Rusjava/ThomsonSource>, 2016.
- [17] Eugene Bulyak and Vladislav Skomorokhov. Parameters of compton x-ray beams: Total yield and pulse duration. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 8(3):030703, 2005.
- [18] C Welnak, GJ Chen, and F Cerrina. Shadow: a synchrotron radiation and x-ray optics simulation tool. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 347(1):344–347, 1994.

Александр Владимирович ВИНОГРАДОВ

Игорь Анатольевич АРТЮКОВ

Руслан Михайлович ФЕЩЕНКО

**Математическая модель для расчетов параметров
рентгеновского излучения лазеро-электронного генератора**

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 140 экз. Заказ № 10

Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии РИИС ФИАН

119991 Москва, Ленинский проспект 53