ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
Физический институт имени П.Н.Лебедева Российской академии наук
ФИАН

ISSN 2410-4914

ПРЕПРИНТ

1

Е. П. ОРЛОВ

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ ФОТОНОВ НА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНАХ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Москва — 2016

Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева
ISSN 2410-4914

Информация

Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева издаются с 1964 г.

Издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН)

Адрес редакции: Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53, ФИАН
Тел.: +7 (499) 132-6137, +7 (499) 783-3640;
E-mail: *preprins@sci.lebedev.ru, irinakh@sci.lebedev.ru*

Страница сборника «Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева» в интернете:
http://preprints.lebedev.ru/

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА

Е.П. Орлов

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ ФОТОНОВ НА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНАХ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

№ 1

Москва 2016

Е.П. Орлов

Метод решения задачи о рассеянии фотонов на релятивистских электронах на основе концепции дополнительного пространственного измерения

АННОТАЦИЯ

На основе концепции дополнительного пространственного измерения, и, вытекающего из него понятия о евклидовом пространстве событий с косоугольными системами координат, предложен метод решения задачи о рассеянии фотонов на релятивистских электронах. В отличие от стандартных подходов в предложенном методе для решения указанной задачи не используются законы сохранения импульса и энергии системы частиц – фотонов и электронов. Наоборот, этот метод позволяет вывести эти законы. Полученная формула для энергии рассеянных фотонов совпадает с известной формулой, приведённой в литературе. Отличительная особенность метода в том, что решение задачи может быть выполнено исключительно в рамках геометрических построений, а уже потом переведено на алгебраический язык. Это придаёт ему наглядность и прозрачность, что, по-видимому, может сильно облегчить расчёт характеристик пучков релятивистских частиц при их рассеянии друг на друге.

E.P. Orlov

The problem-solving procedure of the photons scattering on the relativistic electrons based on the concept of extra space dimension

ABSTRACT

On the concept of extra space dimension, as well as the notion of the Euclidian space with the oblique-angled space-time bases, which follows from this concept, the problem-solving procedure of the photons scattering on the relativistic electrons was suggested. This problem-solving procedure, as distinct from the standard methods, does not use the laws of conservation of momentum and energy of photon and electron system. And on the contrary, this procedure allows one to work out these laws. The formula obtained for the scattered photons energy coincides with that known from literature. A distinctive feature of this procedure is that solving of the problem can be made exclusively geometrically and then be expressed by algebraic language. This makes the proposed procedure more obvious and clear, and probably one could calculate more easily the characteristics of a bunch of relativistic particles being under scattering on each other.

Е.П. Орлов

Метод решения задачи о рассеянии фотонов на релятивистских электронах на основе концепции дополнительного пространственного измерения

1. Введение

В работах [1, 2] было показано, что для описания кинематических эффектов специальной теории относительности можно использовать косоугольные системы координат евклидова пространства событий, обладающие спецификой, которая кардинальным образом отличает их от описанных в литературе [3 – 5].

А именно, в лабораторной системе отсчёта, в которой тело движется в положительном (отрицательном) направлении пространственной оси, временная ось составляет с ней острый (тупой) угол. В системе же отсчёта, связанной с движущимся телом пространственная и временная оси ориентированы друг по отношению к другу под тупым (острым) углом. При этом угол между пространственными осями отличается знаком от угла между временными осями. По модулю эти углы равны и удовлетворяют соотношению $\sin\Theta = v/c$, где Θ - величина углов между указанными осями, v - величина скорости относительного движения.

Подход, использующий такие координаты, даёт ряд преимуществ по сравнению с описанием, использующим прежние косоугольные координаты, и, тем более, по сравнению с координатами пространства Минковского. Он более нагляден, в нём отсутствует мнимая координатная ось, относительное движение систем отсчёта изображается в нём волнами с плоскими волновыми фронтами, распространяющимися под разными углами друг к другу, распространение света описывается с помощью сфер, а не гипербол.

Позже, в работах [6 – 9] этот подход был распространён и на динамические релятивистские эффекты. При этом использовалось риманово, а не псевдориманово, пространство событий, что дало возможность корректным образом построить системы отсчёта как ускоренного, так и неподвижного наблюдателей.

В результате были найдены наиболее общие пространственно-временные преобразования между системами отсчёта, одна из которых связанна с ускоряемым телом, а другая – с неподвижным наблюдателем [3]. Известные до этого преобразования Мёллера [10], Ву и Ли [11, 12], обобщённые преобразования Мёллера-Ву-Ли [13, 14], найденные Ксу и Клефф и усовершенствованные Эрнстом [15], преобразования Подосёнова [16, 17], как было показано в [8], являются частными случаями найденных в [7] общих преобразований.

Кроме того данный подход позволил также найти пространственно-временные преобразования между системами отсчёта, связанными с разлетающимися под действием электрического поля заряженными частицами, а также между системами отсчёта, связанными с частицей и её античастицей [9].

Описываемый подход был разработан на основе гипотезы о существовании дополнительного четвёртого пространственного измерения, компактифицированного до чрезвычайно малых размеров некоторым скалярным потенциалом. Самой простой моделью такого потенциала является бесконечно глубокая потенциальная яма. Наиболее просто в таком случае рассуждать на оптическом языке, представляя этот потенциал в виде плоскопараллельного резонатора со 100% зеркалами. Частица заданной массы покоя ассоциируется с модой с таким продольным индексом, который отвечает её комптоновской длине волны.

В отличие от существующих моделей дополнительных измерений одно из зеркал такого резонатора предполагается шероховатым (шероховатости могут быть нестационарными). В этом случае коэффициент отражения от такой поверхности волн, образующих моду с некоторым продольным индексом в волны этой же моды, не зависит от того, движется эта мода или покоится. Это позволяет ввести временные координаты систем отсчёта, связанных с двумя движущимися параллельно зеркалам друг относительно друга модам резонатора с одинаковыми продольными индексами, которые, как отмечено выше, ассоциируются с двумя движущимися друг относительно друга частицами одинаковой массы покоя.

Евклидово пространство событий с упомянутыми выше специфическими косоугольными координатами получается при замене зеркал резонатора прозрачными перегородками, расположенными вдоль оси дополнительного измерения с периодом, равным расстоянию между зеркалами.

Распространение волн в положительном направлении оси дополнительного измерения, отвечает положительным решениям волновых релятивистских уравнений, т.е. частицам, а в отрицательном направлении – отрицательным решениям, т.е. античастицам [9, 18].

В такой модели пространства с дополнительным компактифицированным измерением удаётся по-новому подойти к рассмотрению многих физических процессов. Например [19], эффект Комптона можно вывести не из релятивистских законов сохранения импульса и энергии, а из совпадения ориентаций и скоростей движения в евклидовом пространстве событий интерференционных картин, одна из которых образована суперпозицией волновых функций начального (до рассеяния фотона) и конечного (после рассеяния) состояний электронного поля. А другая – суперпозицией волновых функций аналогичных состояний фотонного поля. Законы же сохранения импульса и энергии получаются как следствие такого рассмотрения.

В данной работе на основе описываемого подхода разработан метод, позволяющий по-другому по сравнению со стандартным подходом, базирующимся на законах сохранения импульса и энергии, проанализировать процесс рассеяния фотонов на релятивистских электронах. Это процесс, как известно, имеет большое практическое значение при создании источников рентгеновского излучения [20 – 28]. Для того чтобы лучше почувствовать предлагаемый метод его изложение мы начнём с самых простых и наглядных примеров.

2. Лобовое столкновение фотона с релятивистским электроном в пренебрежении эффектом отдачи

Рассмотрим, прежде всего, рассеяние в обратном направлении фотона на электроне, движущемся с релятивистской скоростью, при их лобовом столкновении и в пренебрежении эффектом отдачи. Пренебрежение эффектом отдачи означает, во-первых, что будет рассматриваться так называемое томсоновское рассеяние [29], и, во-вторых, что эта задача эквивалентна хорошо известной задаче [30] об отражении нормально падающего света от зеркала, движущегося с релятивистской скоростью и имеющего практически бесконечную массу покоя. Изобразим этот процесс рассеяния (отражения) в евклидовом пространстве событий следуя подходу, изложенному в работах [1, 2, 31].

Пусть электрон (зеркало) движется в положительном направлении оси z, а фотон движется ему навстречу. В указанном приближении прямая линия Ol на рис.1, иллюстрирующая траекторию электрона (или точки на зеркале) в этом пространстве, не имеет изломов. При этом траекторию и световые лучи, как до рассеяния, так и после него можно расположить в одной плоскости. Следовательно, 4-мерное евклидово пространство событий может быть сведено к двумерному евклидову пространству событий.

Ось дополнительного четвёртого пространственного измерения обозначена буквой s. В отличие от работ [1 – 2, 6 – 9], в которых ось, вдоль которой происходит движение, направлена вверх, а ось дополнительного измерения – вправо, в данной работе для более удобного сопоставления с рисунками работы [32] будут использоваться и другие ориентации осей, в частности, ориентация, представленная на рис.1.

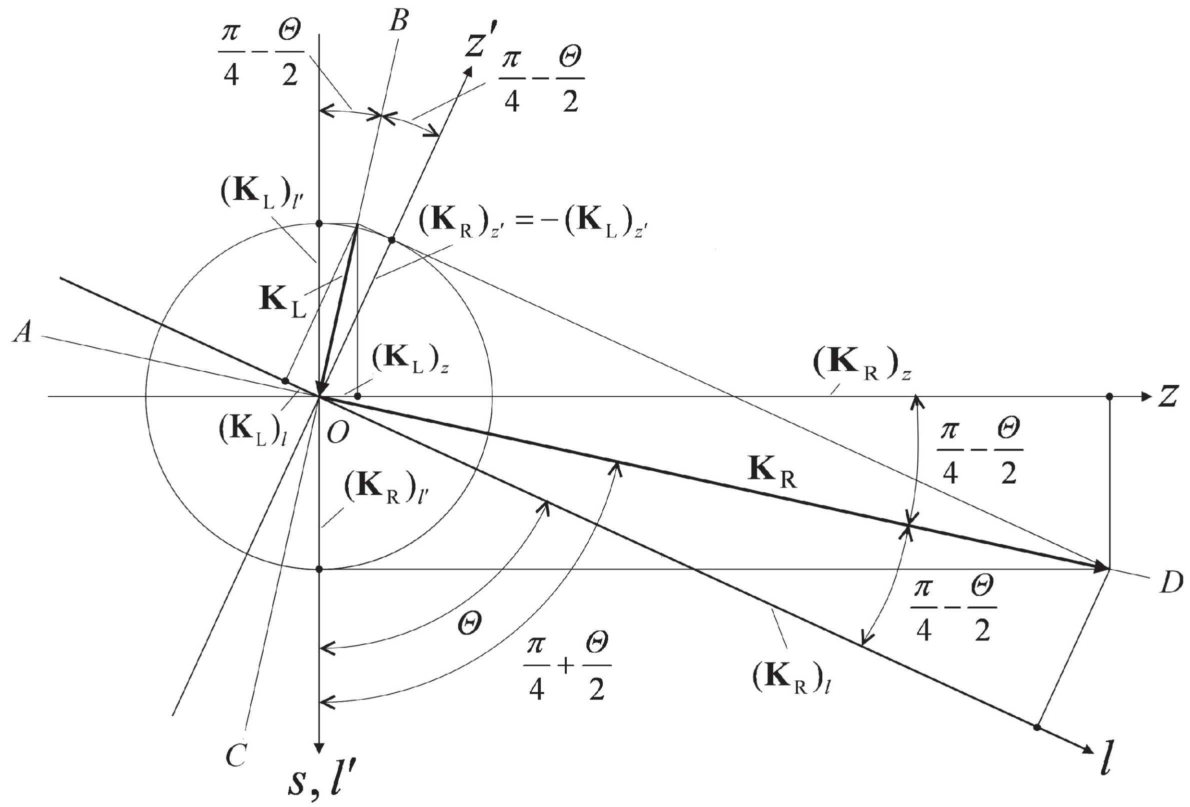

Рис.1. Изображение в евклидовом пространстве событий траектории электрона (или точки на зеркале, линия *Ol*), и световых лучей до отражения от зеркала (прямая, совпадающая с вектором $\mathbf{K}_\mathrm{L}$), и после отражения (прямая, совпадающая с вектором $\mathbf{K}_\mathrm{R}$) в пренебрежении эффектом отдачи.

По оси *Ol* откладывается умноженное на скорость света время в неподвижной системе координат, а по оси Ol' – в системе, жёстко связанной с электроном ($l = ct, l' = ct'$). Соответственно, к этим системам координат относятся пространственные оси z и z'. Напомним, что системы координат в евклидовом пространстве событий косоугольные. Угол Θ характеризует скорость электрона, а именно, в соответствии с [1, 2]

$$\sin\Theta = v / c, \tag{1}$$

где v - скорость электрона (зеркала).

Как известно [29], световые лучи в пространстве событий всегда лежат на световом конусе. В евклидовом пространстве событий в соответствии с [31] сечение светового конуса плоскостью *sOz*, относящегося к фотонам, падающим на электрон (или зеркало) изображено на рис.1 ломаной линией *AOB*, а относящегося к отражённым фотонам – ломаной линией *COD*. Линии *BO* и *OD* относятся к фотонам, движущимся навстречу электрону (зеркалу), а линии AO и OC относятся к фотонам, догоняющим электрон (зеркало). Далее будут рассматриваться только фотоны, движущиеся навстречу электрону (зеркалу). Пусть это будут фотоны, излучаемые лазером с малой расходимостью излучения. Тогда их направления движения и в евклидовом пространстве событий можно считать одинаковыми. На линии BO лежит вектор $\mathbf{K}_{\mathrm{L}}$, а на линии CD – вектор $\mathbf{K}_{\mathrm{R}}$. Направления этих векторов характеризуют, соответственно, траектории падающего лазерного и отражённого от зеркала фотонов в области положительных значений пространственной координаты. Абсолютные значения проекций векторов $\mathbf{K}_{\mathrm{L}}$ и $\mathbf{K}_{\mathrm{R}}$ на оси z и z' дают значения волновых чисел $\left|(K_{\mathrm{L}})_z\right| = k_{\mathrm{L}}$, $\left|(K_{\mathrm{L}})_{z'}\right| = k'_{\mathrm{L}}$, $\left|(K_{\mathrm{R}})_z\right| = k_{\mathrm{R}}$, $\left|(K_{\mathrm{R}})_{z'}\right| = k'_{\mathrm{R}}$ падающего и отражённого фотонов соответственно в неподвижной системе отсчёта и системе отсчёта жёстко связанной с электроном (зеркалом). Проекции же этих векторов на оси l и l' всегда положительны и дают значения частот $\omega_{\mathrm{L}}, \omega'_{\mathrm{L}}, \omega_{\mathrm{R}}, \omega'_{\mathrm{R}}$, делённые на скорость света: $(\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_l = \omega_{\mathrm{L}} / c$, $(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_l = \omega_{\mathrm{R}} / c$, $(\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_{l'} = \omega'_{\mathrm{L}} / c$, $(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_{l'} = \omega'_{\mathrm{R}} / c$. В силу отсутствия дисперсии скорости света эти значения совпадают с волновыми числами. Это хорошо видно из рисунка. Проекции каждого из векторов $\mathbf{K}_{\mathrm{L}}$, $\mathbf{K}_{\mathrm{R}}$ на оси z и l равны по величине: $\left|(K_{\mathrm{L}})_z\right| = (K_{\mathrm{L}})_l$, $\left|(K_{\mathrm{R}})_z\right| = (K_{\mathrm{R}})_l$, то есть $k_{\mathrm{L}} = \omega_{\mathrm{L}} / c$, $k_{\mathrm{R}} = \omega_{\mathrm{R}} / c$. То же самое можно сказать и о проекциях этих векторов на оси z' и l': $\left|(K_{\mathrm{L}})_{z'}\right| = (K_{\mathrm{L}})_{l'}$, $\left|(K_{\mathrm{R}})_{z'}\right| = (K_{\mathrm{R}})_{l'}$ или $k'_{\mathrm{L}} = \omega'_{\mathrm{L}} / c$, $k'_{\mathrm{R}} = \omega'_{\mathrm{R}} / c$.

В системе отсчёта, жёстко связанной с электроном (зеркалом), как показано в [1, 2, 31] и как видно из рис.1

$$(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_{l'} = (\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_{l'} = k_0, \tag{2}$$

$$\left|(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_{z'}\right| = \left|(\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_{z'}\right| = k_0, \tag{3}$$

где k_0 - волновое число фотона в этой системе отсчёта. Из рис.1 видно, что

$$\left|(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_z\right| = \frac{(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_{l'}}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Theta}{2}\right)}, \text{ а } (\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_{l'} = \frac{\left|(\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_z\right|}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Theta}{2}\right)},$$

то есть в силу равенства (2)

$$\left|(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_z\right| = \frac{\left|(\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_z\right|}{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Theta}{2}\right)} = \left|(\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_z\right| \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right). \tag{4}$$

Так как $\left|(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_z\right| = k_{\mathrm{R}}$, а $\left|(\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_z\right| = k_{\mathrm{L}}$, то получаем, что волновое число рассеянного на электроне (отражённого от зеркала) фотона

$$k_{\mathrm{R}} = \frac{k_{\mathrm{L}}}{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Theta}{2}\right)} = k_{\mathrm{L}} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right). \tag{5}$$

Учтём далее, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\Theta}{2}}\,, \tag{6}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\sin\Theta}{2}}\,. \tag{7}$$

Тогда получаем, что

$$k_{\mathrm{R}} = k_{\mathrm{L}} \frac{1+\sin\Theta}{1-\sin\Theta}. \tag{8}$$

С учётом (1), а также соотношений $k_{\mathrm{R}} = \omega_{\mathrm{R}}/c$ и $k_{\mathrm{L}} = \omega_{\mathrm{L}}/c$ мы видим, что получился хорошо известный [29, 30] результат

$$\omega_{\mathrm{R}} = \omega_{\mathrm{L}} \frac{1+\dfrac{v}{c}}{1-\dfrac{v}{c}}. \tag{9}$$

Такой же результат, естественно, получается, если используется равенство (3). Действительно,

$$(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_l = \left|(\mathbf{K}_{\mathrm{R}})_{z'}\right| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right),\ \left|(\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_{z'}\right| = (\mathbf{K}_{\mathrm{L}})_l \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right). \tag{10}$$

Учитывая (3) опять получаем (9).

3. Косое столкновение фотона с релятивистским электроном в пренебрежении эффектом отдачи

Если фотон движется не прямо навстречу электрону, а налетает на него под некоторым углом к вектору его скорости, то евклидово пространство событий будет теперь трёхмерным. Следуя процедуре, изложенной в работе [33], построим в этом трёхмерном пространстве световые конусы для фотона, находящегося в состоянии до столкновения, и для фотона после столкновения в пренебрежении эффектом отдачи. Эти световые конусы изображены на рис.2,*a*.

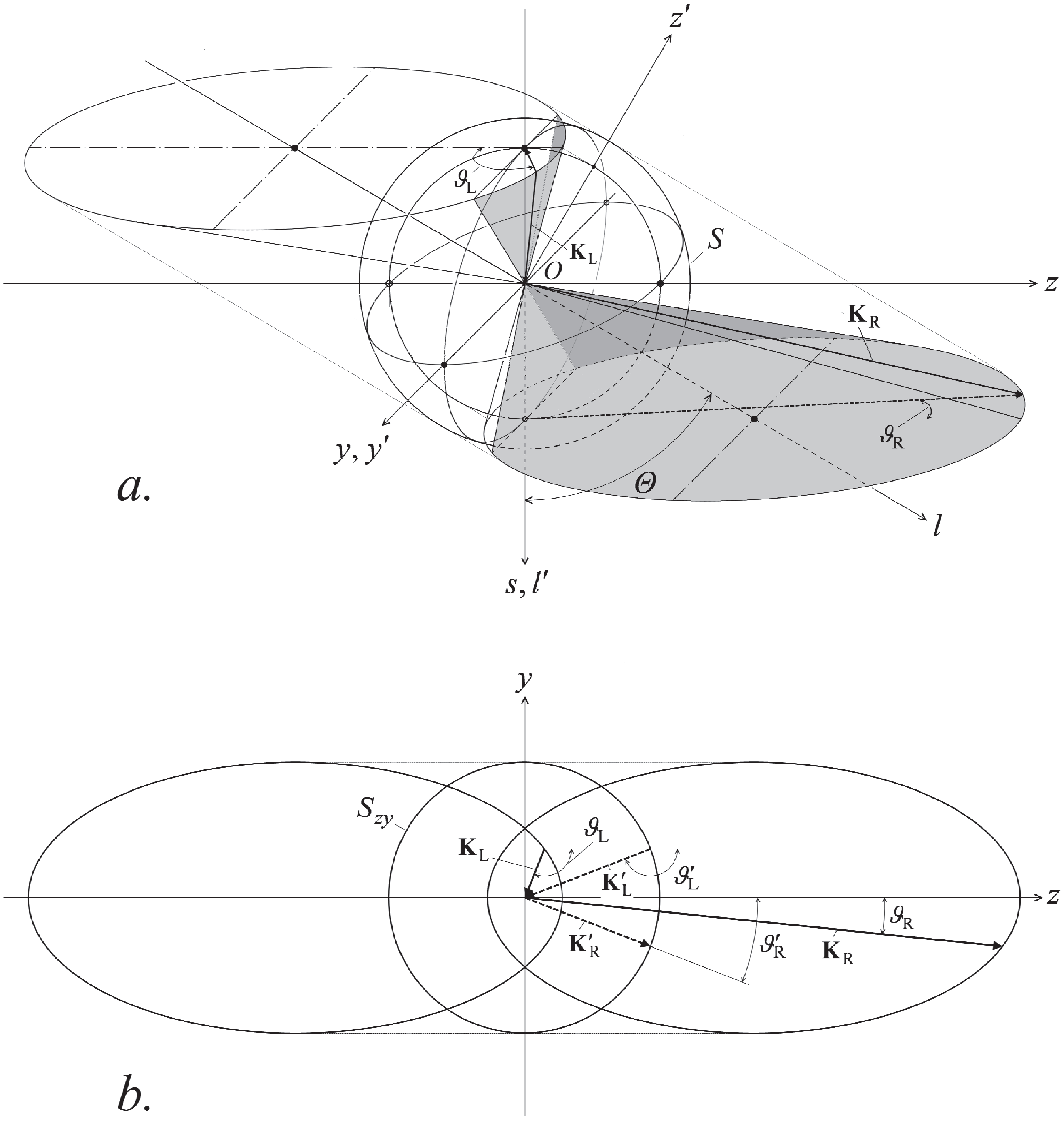

Рис.2. Сфера *S* и световые конусы в трёхмерном евклидовом пространстве событий (*a*) и их проекции на плоскость *yz* (*b*). В верхней полуплоскости изображён конус, отвечающий состояниям фотона и электрона до их столкновения, в нижней полуплоскости – после столкновения. Величины углов ϑ_L, ϑ'_L и ϑ_R, ϑ'_R подчиняются релятивистским соотношениям, описывающим аберрацию света, а величины векторов $\mathbf{k}_L$, $\mathbf{k}'_L$ и $\mathbf{k}_R$, $\mathbf{k}'_R$ – соотношениям, описывающим релятивистский эффект Доплера.

Как видно из рисунка их основания образованы сечениями кругового цилиндра. Его ось лежит в плоскости sOz и составляет с осью Oz угол Θ такой, что $\sin\Theta = v/c$. Секущие плоскости параллельны плоскости yz и касаются сферы S с радиусом k_0, равным, как и прежде волновому числу $k'_\mathrm{L} = k'_\mathrm{R}$ фотона в системе отсчёта, жёстко связанной с электроном. Основания световых конусов представляют собой эллипсы, через центры которых проходит ось l, а через фокусы ось l', совпадающая с осью дополнительного измерения s.

В верхней полуплоскости изображён световой конус, отвечающий состояниям фотона и электрона до их столкновения, а в нижней полуплоскости изображён световой конус, отвечающий состояниям фотона и электрона после их столкновения. Падающий на электрон световой луч определяется вектором $\mathbf{K}_\mathrm{L}$, направленным вдоль какой-либо образующей верхнего конуса к точке столкновения O, величина которого определяется длиной отрезка прямой между точкой O и точкой пересечения образующей с верхним эллипсом. Затемнённая часть конуса отвечает такому состоянию фотона, когда проекция его скорости на ось z направлена навстречу электрону.

Световой луч рассеянного света определяется вектором $\mathbf{K}_\mathrm{R}$, направленным вдоль образующей нижнего конуса от точки столкновения O. Его величина определяется длиной отрезка прямой между точкой O и точкой пересечения образующей с нижним эллипсом, а положение зависит от $\mathbf{K}_\mathrm{L}$ и Θ.

Составляющие векторов $\mathbf{K}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{K}_\mathrm{R}$ лежащие в плоскостях оснований конусов представляют собой волновые вектора $\mathbf{k}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{k}_\mathrm{R}$ падающего и рассеянного фотонов. Проекции векторов $\mathbf{K}_\mathrm{L}$ и $\mathbf{K}_\mathrm{R}$ на ось дополнительного измерения равны k_0.

Найдём аналог формул (4) и (5) в рассматриваемом случае. Для этого используем уравнение эллипса в полярных координатах

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\alpha}, \tag{1}$$

где ρ – величина радиус вектора, направленного из правого полюса в рассматриваемую точку на эллипсе; $p = b^2/a$ – фокальный параметр; $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ – эксцентриситет; a – большая, а b – малая полуоси эллипса; α – угол, отсчитываемый от положительного направления полярной оси. В случае, когда за полюс принимается левый фокус, то уравнение эллипса имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\alpha}. \tag{2}$$

Как видно из рис.2,*a* $b = k_0$. Заметим, что большая полуось лежит в плоскости рисунка, и, поэтому, для её вычисления можно воспользоваться рис.1, из которого видно, что

$$a = \frac{k_0}{2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2}\right)\right] = \frac{k_0}{\cos\Theta}. \tag{3}$$

Используя выражения для *b* и *a*, находим, что $p = k_0\cos\Theta$, $e = \sin\Theta$.

Если теперь на рис.2,*a* принять фокус верхнего эллипса, через который проходит ось дополнительного измерения (правый фокус), за полюс, а ось *z* – за полярную ось, то $\alpha = \pi - \vartheta_{\mathrm{L}}$ и $\cos\alpha = -\cos\Theta_{\mathrm{L}}$. Учитывая, что проекция вектора $\mathbf{K}_{\mathrm{L}}$ на основание верхнего конуса $k_{\mathrm{L}} = |\mathbf{k}_{\mathrm{L}}|$, получаем связь вида

$$k_{\mathrm{L}} = \frac{k_0\cos\Theta}{1 - \sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{L}}}. \tag{4}$$

Аналогично тот фокус нижнего эллипса, через который проходит ось дополнительного измерения (левый фокус), примем за полюс полярной системы координат, а ось *z*, по-прежнему, за полярную ось. Тогда $\alpha = \vartheta_{\mathrm{R}}$ и для волнового числа рассеянного света получаем формулу

$$k_{\mathrm{R}} = \frac{k_0\cos\Theta}{1 - \sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{R}}}. \tag{5}$$

Комбинируя (4) и (5) получаем соотношение

$$k_{\mathrm{R}} = k_{\mathrm{L}}\frac{1 - \sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{L}}}{1 - \sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{R}}}. \tag{6}$$

Формула (6) совпадает с формулой, полученной в [32] в пренебрежении эффектом отдачи, то есть при условии, что

$$\frac{k_{\mathrm{L}}}{K_{\mathrm{b}}} << \frac{1 - \sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{R}}}{2\sin^2\dfrac{\vartheta_{\mathrm{L}} - \vartheta_{\mathrm{R}}}{2}}. \tag{7}$$

Чтобы выразить k_{R} через исходные параметры задачи найдём связь между ϑ_{R} и ϑ_{L}. Для этого обратимся к геометрической иллюстрации аберрации света, предложенной в [33]. В соответствии с работой [33] изобразим сечение сферы *S* плоскостью *yz* и спроецируем два эллипса, изображённые на рис.2,*a*, на эту же плоскость, и посмотрим на это сечение и эти проекции со стороны положительного направления оси дополнительного измерения, рис.2,*b*.

Как показано в работе [33], если теперь через начало вектора $\mathbf{k}_{\mathrm{L}}$ провести прямую параллельную оси z, то точка её пересечения с проекцией сферы S на плоскость yz даст начало вектору $\mathbf{k}'_{\mathrm{L}}$ ($|\mathbf{k}'_{\mathrm{L}}| = k_{\mathrm{L}} = k_0$), который является волновым вектором в системе отсчёта жёстко связанной с электроном. В этой системе угол падения должен быть равен углу отражения, то есть $\pi - \vartheta'_{\mathrm{L}} = \vartheta'_{\mathrm{R}}$. Это условие позволяет построить вектор $\mathbf{k}'_{\mathrm{R}}$. Проводя через его конец прямую параллельную оси z до пересечения с правым эллипсом, получаем точку являющуюся концом волнового вектора $\mathbf{k}_{\mathrm{R}}$.

Величины углов ϑ_{L}, ϑ'_{L} и ϑ_{R}, ϑ'_{R}, как показано в [33], подчиняются релятивистским соотношениям, описывающим аберрацию света, а величины векторов $\mathbf{k}_{\mathrm{L}}$, $\mathbf{k}'_{\mathrm{L}}$ и $\mathbf{k}_{\mathrm{R}}$, $\mathbf{k}'_{\mathrm{R}}$ – соотношениям, описывающим релятивистский эффект Доплера. Из проведённого построения на рис.2,*b* получаем связь между углами ϑ_{R}, ϑ_{L} и волновыми числами k_{R}, k_{L}:

$$k_{\mathrm{R}} \sin\vartheta_{\mathrm{R}} = k_{\mathrm{L}} \sin\vartheta_{\mathrm{L}}. \tag{8}$$

Система уравнений (6), (8) позволяет выразить k_{R} через исходные параметры задачи. Для этого, используя (8), получаем выражение $\cos\vartheta_{\mathrm{R}} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sin\vartheta_{\mathrm{L}}}{k_{\mathrm{R}}/k_{\mathrm{L}}}\right)^2}$, которое подставляем в (6). В результате получаем квадратное уравнение относительно $k_{\mathrm{R}}/k_{\mathrm{L}}$:

$$\left(\frac{k_{\mathrm{R}}}{k_{\mathrm{L}}}\right)^2 - 2\frac{1-\sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{L}}}{\cos^2\Theta}\frac{k_{\mathrm{R}}}{k_{\mathrm{L}}} + \frac{2(1-\sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{L}}) - \cos^2\Theta}{\cos^2\Theta} = 0. \tag{9}$$

Решая это уравнение, получаем

$$\left(\frac{k_{\mathrm{R}}}{k_{\mathrm{L}}}\right)_{1,2} = \frac{1-\sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{L}} \pm \left|1-\sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{L}} - \cos^2\Theta\right|}{\cos^2\Theta}. \tag{10}$$

Поскольку мы рассматриваем случай, когда z-составляющая волнового вектора фотона до столкновения с электроном направлена навстречу ему, то выражение под знаком модуля $1-\sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{L}} - \cos^2\Theta = \sin\Theta(\sin\Theta - \cos\vartheta_{\mathrm{L}})$ всегда положительно. В результате получаем

$$k_{\mathrm{R}} = k_{\mathrm{L}}\frac{1-2\sin\Theta\cos\vartheta_{\mathrm{L}} + \sin^2\Theta}{\cos^2\Theta}. \tag{11}$$

При лобовом столкновении ($\vartheta_{\mathrm{L}} = \pi$) $\cos\vartheta_{\mathrm{L}} = -1$ и мы возвращаемся к формуле (8) раздела 2.

4. Лобовое столкновение фотона с релятивистским электроном с учётом эффекта отдачи

Учтём теперь эффект отдачи. Пусть, как и в разделе 2, электрон движется в положительном направлении оси z, рис.3, а фотон летит вдоль оси z ему навстречу. Траектория электрона в евклидовом пространстве событий до столкновения с фотоном изображена отрезком прямой AO, составляющим с осью дополнительного измерения угол Θ_{b}, ($\sin\Theta_{\mathrm{b}} = v_{\mathrm{b}} / c$, где v_{b} – скорость электрона до столкновения).

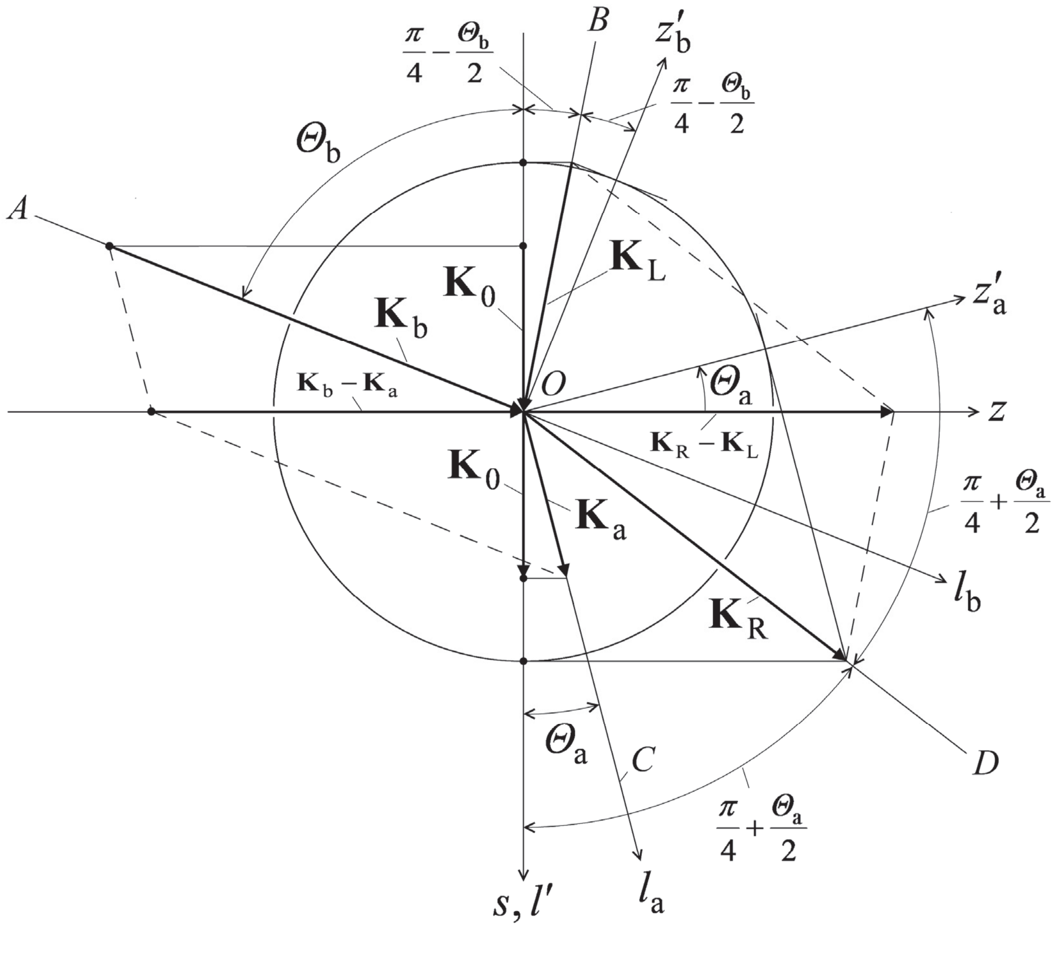

Рис.3. Изображение в евклидовом пространстве событий рассеяния в обратном направлении фотона при его лобовом столкновении с частицей с учётом эффекта отдачи.

Линия сечения плоскостью рисунка светового конуса, отвечающего системе координат жёстко связанной с электроном, в области положительных значений z представляет собой биссектрису угла между отрицательным направлением оси Os и осью Oz'_{b}, и обозначена как OB. Таким образом, задав скорость электрона, то есть направление его траектории в евклидовом пространстве событий, мы тем самым задаём в этом пространстве и направление распространения фотона.

В точке столкновения O фотона с электроном траектория электрона теперь из-за эффекта отдачи претерпевает излом. Пусть траектория электрона составляет с осью дополнительного измерения угол Θ_{a} ($\sin\Theta_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{a}} / c$, где v_{a} – скорость электрона после столкновения, $v_{\mathrm{a}} < v_{\mathrm{b}}$). Тогда линия сечения плоскостью рисунка светового конуса, отвечающего системе координат жёстко связанной с электроном после столкновения, в области положительных значений пространственной координаты представляет собой биссектрису угла OD между осями Os и Oz'_{a}.

Пусть в системе отсчёта жёстко связанной с электроном, движущимся до столкновения, задана длина волны лазерного излучения и отвечающее ей волновое число k_0. Связь между k_0 и k_{L} дана выше (см., например, формулу 4 раздела 3, в которой надо положить $\vartheta_{\mathrm{L}} = \pi$). Для определения частоты рассеянного фотона построим окружность с центром в точке O и с радиусом, равным его волновому числу k_0. Из точки пересечения этой окружности с осью Os в области положительных значений восстановим перпендикуляр до пересечения с биссектрисой OD и построим на ней вектор $\mathbf{K}_{\mathrm{R}}$, величина которого задаётся длиной отрезка прямой между точкой O и указанной точкой пересечения. Проекция этого вектора на ось Oz даёт волновое число рассеянного излучения, а проекция на ось Ol_{a} – частоту, делённую на скорость света.

В проведённом геометрическом построении скорость электрона после столкновения выбиралась произвольным образом. Соответственно и направление биссектрисы OD, а, следовательно, и траектории фотона после столкновения, хотя они и связаны жёстко со скоростью электрона после столкновения, также оказывались произвольными.

Для устранения этого произвола построим на биссектрисе OB вектор $\mathbf{K}_{\mathrm{L}}$, величина которого определяется длиной отрезка прямой между точками O и точкой пересечения перпендикуляра, восстановленного из точки пересечения окружности радиуса k_{L} с осью Os в области её отрицательных значений.

Разность векторов $\mathbf{K}_\mathrm{R} - \mathbf{K}_\mathrm{L}$ задаёт в евклидовом пространстве событий период и ориентацию интерференционной картины, обусловленной суперпозицией двух состояний фотона – до столкновения с электроном и после столкновения. Для того чтобы происходило взаимодействие электронного волнового поля и фотонного волнового поля вектор, равный этой разности векторов, должен совпадать с вектором, равным разности векторов $\mathbf{K}_\mathrm{b} - \mathbf{K}_\mathrm{a}$, которые лежат соответственно на участках траектории электрона до столкновения, и после столкновения, рис.3

$$\mathbf{K}_\mathrm{R} - \mathbf{K}_\mathrm{L} = \mathbf{K}_\mathrm{b} - \mathbf{K}_\mathrm{a} . \qquad (1)$$

Отсюда, в частности, следует закон сохранения импульса. Действительно, из (1) получаем

$$(\mathbf{K}_\mathrm{R})_z - (\mathbf{K}_\mathrm{L})_z = (\mathbf{K}_\mathrm{b})_z - (\mathbf{K}_\mathrm{a})_z . \qquad (2)$$

Но $(\mathbf{K}_\mathrm{R})_z = \mathbf{k}_\mathrm{R} = \mathbf{p}_\mathrm{R} / \hbar$, $(\mathbf{K}_\mathrm{L})_z = \mathbf{k}_\mathrm{L} = \mathbf{p}_\mathrm{L} / \hbar$, $(\mathbf{K}_\mathrm{b})_z = \mathbf{k}_\mathrm{b} = \mathbf{p}_\mathrm{b} / \hbar$, $(\mathbf{K}_\mathrm{a})_z = \mathbf{k}_\mathrm{a} = \mathbf{p}_\mathrm{a} / \hbar$, где $\mathbf{p}_\mathrm{R}$, $\mathbf{p}_\mathrm{L}$ – соответственно импульсы фотона до и после рассеяния, а $\mathbf{p}_\mathrm{b}$, $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ – соответственно импульсы электрона до и после столкновения с фотоном. В результате получаем закон сохранения импульса

$$\mathbf{p}_\mathrm{b} + \mathbf{p}_\mathrm{L} = \mathbf{p}_\mathrm{a} + \mathbf{p}_\mathrm{R} . \qquad (3)$$

Равенство (1) и вытекающее из него равенство (3) достаточно очевидны. Сложнее обстоит дело с геометрическим доказательством закона сохранения энергии. Рассмотрение этого вопроса будет проведено в конце данного раздела.

Итак, отложив слева от точки *O* отрезок прямой, длина которого равна величине разности векторов $\mathbf{K}_\mathrm{R} - \mathbf{K}_\mathrm{L}$, мы восстанавливаем величины векторов $\mathbf{K}_\mathrm{b}$ и $\mathbf{K}_\mathrm{a}$. Их проекции на ось *Oz*, как указано выше, равны импульсам электрона до и после столкновения, делённые на постоянную Планка. Проекции же этих векторов соответственно на оси Ol_b и Ol_a дают значения кинетической энергии электрона до столкновения и после него, делённые на произведение постоянной Планка и скорости света.

Тем самым устанавливается связь скорости электрона после столкновения с его начальной скоростью, энергией покоя и энергией падающего фотона. Либо же связь энергии рассеянного фотона с энергиями фотона и электрона до столкновения.

Переведём эти геометрические построения на алгебраический язык. Из рис.3 видно, что $(\mathbf{K}_\mathrm{b})_z = K_0 \tan \Theta_\mathrm{b}$, $(\mathbf{K}_\mathrm{a})_z = K_0 \tan \Theta_\mathrm{a}$, $(\mathbf{K}_\mathrm{L})_z = -k_\mathrm{L}$, $(\mathbf{K}_\mathrm{R})_z = k_\mathrm{R}$. Тогда из (2) получаем

$$K_0(\tan\Theta_\mathrm{b} - \tan\Theta_\mathrm{a}) = k_\mathrm{L} + k_\mathrm{R}\,. \tag{4}$$

Учтём далее связь между величинами k_R и k_L. Из рис.3 с учётом того, что $|(K_\mathrm{R})_z| = k_\mathrm{R} = \omega_\mathrm{R}/c$, а $|(K_\mathrm{L})_z| = k_\mathrm{L} = \omega_\mathrm{L}/c$ видно, что

$$k_\mathrm{R} = (\mathbf{K}_\mathrm{R})_{l'}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_\mathrm{a}}{2}\right),\ \text{а}\ (\mathbf{K}_\mathrm{L})_{l'} = k_\mathrm{L}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_\mathrm{b}}{2}\right). \tag{5}$$

Далее, из условия, что в системах отсчёта, жёстко связанных с электроном, как до столкновения, так и после, частота фотона одна и та же, то есть $(\mathbf{K}_\mathrm{R})_{l'} = (\mathbf{K}_\mathrm{L})_{l'} = k_0$ (см. также ф-лу (2) раздела 2), из (5) получаем соотношение между частотами фотона до рассеяния и после, аналогичное соотношению (5) раздела 2.

$$k_\mathrm{R} = \frac{k_\mathrm{L}}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta_\mathrm{b}}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta_\mathrm{a}}{2}\right)} = k_\mathrm{L}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_\mathrm{b}}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_\mathrm{a}}{2}\right). \tag{6}$$

Система уравнений (4) и (6) позволяет исключить члены с Θ_a и получить зависимость энергии рассеянного фотона от энергии падающего фотона, скорости электрона и его энергии до столкновения. Для этого, используя тригонометрическую формулу

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right), \tag{7}$$

представим (4) в виде

$$\frac{K_0}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_\mathrm{b}}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta_\mathrm{b}}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_\mathrm{a}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta_\mathrm{a}}{2}\right)\right) = k_\mathrm{L} + k_\mathrm{R}\,. \tag{8}$$

Выражая далее с помощью (6) $\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\Theta_\mathrm{a}}{2}\right)$ через $\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\Theta_\mathrm{b}}{2}\right)$, получаем уравнение

$$\frac{1}{k_\mathrm{R}}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_\mathrm{b}}{2}\right) - \frac{1}{k_\mathrm{L}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta_\mathrm{b}}{2}\right) = \frac{2}{K_0}, \tag{9}$$

из которого, с учётом того, что

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\Theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 \pm \sin\Theta}{1 \mp \sin\Theta}} \tag{10}$$

и $K_0/\cos\Theta_\mathrm{b} = K_\mathrm{b}$, где $K_\mathrm{b} = |\mathbf{K}_\mathrm{b}|$, следует, что

$$k_\mathrm{R} = \frac{(1 + \sin\Theta_\mathrm{b})k_\mathrm{L}}{(1 - \sin\Theta_\mathrm{b}) + 2k_\mathrm{L}/K_\mathrm{b}}. \tag{11}$$

В пренебрежении эффектом отдачи, то есть при условии что $k_{\mathrm{L}} / K_{\mathrm{b}} << (1-\sin\Theta_{\mathrm{b}})/2$, эта формула совпадает с формулой (8) раздела 2. Переходя к энергетическому представлению, получаем формулу, представленную в работе [32] для случая лобового столкновения

$$E_{\mathrm{R}} = \frac{(1+v_{\mathrm{b}}/c)E_{\mathrm{L}}}{(1-v_{\mathrm{b}}/c)+2E_{\mathrm{L}}/E_{\mathrm{b}}}. \tag{12}$$

Получим теперь зависимость скорости электрона после столкновения от его начальной скорости v_{b}, энергии покоя $E_0 = \hbar c K_0 = m_0 c^2$ и энергии падающего фотона $E_{\mathrm{L}} = \hbar c k_{\mathrm{L}}$. Используя связь между k_{R} и k_{L}, задаваемую формулой (6), и формулу (7), преобразуем (4) к виду

$$K_0\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Theta_{\mathrm{a}}}{2}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Theta_{\mathrm{b}}}{2}\right)\right) = 2k_{\mathrm{L}}. \tag{13}$$

Из этой формулы с учётом (10) получаем зависимость скорости электрона после столкновения от его начальной скорости v_{b}, энергии покоя $E_0 = \hbar c K_0 = m_0 c^2$ и энергии падающего фотона $E_{\mathrm{L}} = \hbar c k_{\mathrm{L}}$

$$\sin\Theta_{\mathrm{a}} = \frac{v_{\mathrm{a}}}{\mathrm{c}} = \frac{1-\dfrac{2E_{\mathrm{L}}}{E_0}-\sqrt{\dfrac{1-v_{\mathrm{b}}/c}{1+v_{\mathrm{b}}/c}}}{1+\dfrac{2E_{\mathrm{L}}}{E_0}+\sqrt{\dfrac{1-v_{\mathrm{b}}/c}{1+v_{\mathrm{b}}/c}}}. \tag{14}$$

Отметим, что формула (12) в отличие от стандартного подхода, применяемого, например, в работах [32, 34], а также формула (14) получены без использования законов сохранения импульса и энергии. Наоборот, подход, развиваемый в настоящей работе, позволяет вывести эти законы. Выше с его помощью был получен закон сохранения импульса. Получим теперь закон сохранения энергии. Воспользуемся для этого равенством (13). Так как

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

то (13) преобразуем к виду

$$K_0\left(\frac{1-\sin\Theta_{\mathrm{a}}}{\cos\Theta_{\mathrm{a}}}-\frac{1-\sin\Theta_{\mathrm{b}}}{\cos\Theta_{\mathrm{b}}}\right) = 2k_{\mathrm{L}}. \tag{15}$$

Учитывая, что $K_0/\cos\Theta_{\mathrm{a}} = K_{\mathrm{a}}$ и $K_0/\cos\Theta_{\mathrm{b}} = K_{\mathrm{b}}$, где $K_{\mathrm{b}} = |\mathbf{K}_{\mathrm{b}}|$, $K_{\mathrm{a}} = |\mathbf{K}_{\mathrm{a}}|$, получаем

$$K_{\rm a} - K_{\rm b} + K_{\rm b}\sin\Theta - K_{\rm a}\sin\Theta_{\rm a} = 2k_{\rm L}.$$

Но $(\mathbf{K}_{\rm b})_z = K_{\rm b}\sin\Theta_{\rm b}$, $(\mathbf{K}_{\rm a})_z = K_{\rm a}\sin\Theta_{\rm a}$, $(\mathbf{K}_{\rm L})_z = -k_{\rm L}$, $(\mathbf{K}_{\rm R})_z = k_{\rm R}$ и из (2) следует, что $K_{\rm b}\sin\Theta_{\rm b} - K_{\rm a}\sin\Theta_{\rm a} = k_{\rm L} + k_{\rm R}$ и тогда $K_{\rm a} - K_{\rm b} + k_R = k_{\rm L}$, то есть

$$K_{\rm b} + k_{\rm L} = K_{\rm a} + k_R. \tag{16}$$

В обозначениях единиц энергии это эквивалентно равенству

$$E_{\rm b} + E_{\rm L} = E_{\rm a} + E_R, \tag{17}$$

что и требовалось доказать.

5. Косое столкновение фотона с релятивистским электроном с учётом эффекта отдачи

В случае анализа не лобового столкновении фотона с релятивистским электроном, учитывающим эффект отдачи траектории фотона и электрона изобразятся так, как показано на рис.4. В силу эффекта отдачи электрон после столкновения с фотоном приобретает скорость вдоль оси *y*. Поэтому траектория электрона будет иметь излом не только в плоскости *sz*, но и в плоскости *zy*.

Получим сначала в рассматриваемом случае равенство $K_{\rm b} - K_{\rm a} = k_{\rm R} - k_{\rm L}$ аналогичное равенству (4.16). Для этого выпишем волновые функции электронных состояний до и после столкновения

$$\psi_{\rm b} = \mathbf{S}_{\rm b} e^{i(\mathbf{K}_{\rm b})_{zy}\mathbf{r} - i(\mathbf{K}_{\rm b})_l l_{\rm b}} f(K_0 s),\ \psi_{\rm a} = \mathbf{S}_{\rm a} e^{i(\mathbf{K}_{\rm a})_{zy} r - i(\mathbf{K}_{\rm a})_l l_{\rm a}} f(K_0 s), \tag{1}$$

где $\mathbf{S}_{\rm b}$ и $\mathbf{S}_{\rm a}$ - функции, описывающие спиновые состояния электрона до столкновения и после столкновения с фотоном, $f(K_0 s)$ - функция, характеризующая распределение амплитуды и фазы по оси дополнительного измерения (в простейшем случае бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной ямы (резонатор) $f(K_0 s) = \sqrt{2}\cos(K_0 s)$ [9]), а также волновые функции фотонных состояний до и после столкновения

$$\psi_{\rm L} = \mathbf{e}_{\rm L} e^{i(\mathbf{K}_{\rm L})_{zy}\mathbf{r} - i(\mathbf{K}_{\rm L})_l l_{\rm b}},\ \psi_{\rm L} = \mathbf{e}_{\rm R} e^{i(\mathbf{K}_{\rm R})_{zy}\mathbf{r} - i(\mathbf{K}_{\rm R})_l l_{\rm b}}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{e}_{\rm L}$ и $\mathbf{e}_{\rm R}$ - вектора поляризации падающего и рассеянного фотонов. В случае фотонного поля комптоновское волновое число равно нулю, поэтому множитель, описывающий неоднородность поля вдоль оси дополнительного измерения отсутствует.

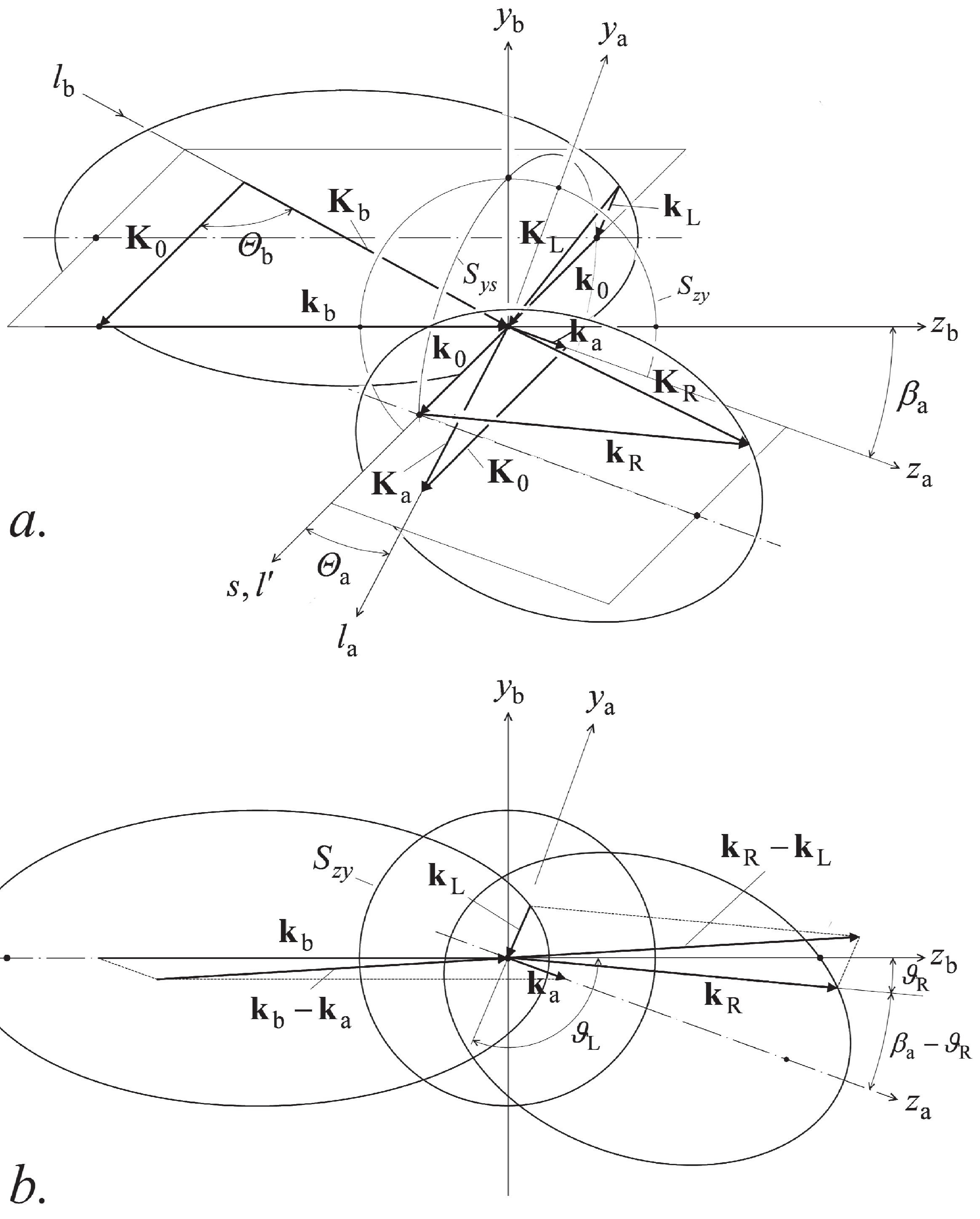

Рис.4. Эллипсы, образованные сечением в трёхмерном евклидовом пространстве событий световых конусов плоскостями параллельными плоскости $z_b y_b$ и касающимися с двух противоположных сторон сферы S (показаны лишь две её проекции – S_{ys} на плоскость $y_b s$ и S_{zy} на плоскость $z_b y_b$) (*a*) и их проекции на плоскость *yz* (*b*).

Так как $(\mathbf{K}_{\text{b}})_{zy} = \mathbf{k}_{\text{b}}$, $(\mathbf{K}_{\text{b}})_l = |\mathbf{K}_{\text{b}}| = K_{\text{b}}$, $(\mathbf{K}_{\text{a}})_{zy} = \mathbf{k}_{\text{a}}$, $(\mathbf{K}_{\text{a}})_l = K_{\text{a}}$, $(\mathbf{K}_{\text{L}})_{zy} = \mathbf{k}_{\text{L}}$, $(\mathbf{K}_{\text{L}})_l = k_{\text{L}}$, $(\mathbf{K}_{\text{R}})_{zy} = \mathbf{k}_{\text{R}}$, $(\mathbf{K}_{\text{R}})_l = k_{\text{R}}$, а при отсчёте времени от точки O $l_{\text{a}} = l_{\text{b}} = l$, то

$$\psi_{\text{b}} = \mathbf{S}_{\text{b}} e^{i\mathbf{k}_{\text{b}}\mathbf{r} - iK_{\text{b}}l} f(K_0 s),\ \psi_{\text{a}} = \mathbf{S}_{\text{a}} e^{i\mathbf{k}_{\text{a}}\mathbf{r} - iK_{\text{a}}l} f(K_0 s), \tag{3}$$

$$\psi_{\text{L}} = \mathbf{e}_{\text{L}} e^{i\mathbf{k}_{\text{L}}\mathbf{r} - ik_{\text{L}}l},\ \psi_{\text{R}} = \mathbf{e}_{\text{R}} e^{i\mathbf{k}_{\text{R}}\mathbf{r} - ik_{\text{R}}l}. \tag{4}$$

Суперпозиция состояний ψ_{b} и ψ_{a} с весовыми коэффициентами $a_{\text{b}} = |a_{\text{b}}| e^{i\varphi_{\text{b}}}$, $a_{\text{a}} = |a_{\text{a}}| e^{i\varphi_{\text{a}}}$, $|a_{\text{b}}|^2 + |a_a|^2 = 1$ даёт интерференционную картину электронного поля, а суперпозиция состояний ψ_{L} и ψ_{R} с весовыми коэффициентами $a_{\text{L}} = |a_{\text{L}}| e^{i\varphi_{\text{L}}}$, $a_{\text{R}} = |a_{\text{R}}| e^{i\varphi_{\text{R}}}$, $|a_{\text{L}}|^2 + |a_R|^2 = 1$ даёт интерференционную картину фотонного (светового) поля. Периоды этих интерференционных картин и их ориентация в евклидовом пространстве событий определяются множителями, входящими в соответствующие перекрёстные члены

$$\cos((\mathbf{k}_{\text{b}} - \mathbf{k}_{\text{a}})\mathbf{r} - (K_{\text{b}} - K_{\text{a}})l + (\varphi_{\text{b}} - \varphi_{\text{a}}), \tag{5}$$

$$\cos((\mathbf{k}_{\text{L}} - \mathbf{k}_{\text{R}})\mathbf{r} - (k_{\text{L}} - k_{\text{R}})l + (\varphi_{\text{L}} - \varphi_{\text{R}})), \tag{6}$$

которые не зависят от поляризации каждого из рассматриваемых полей (см. Приложение).

Для того чтобы фотон рассеивался на электроне интерференционные картины электронного и фотонного полей и в обычном пространстве должны совпадать друг с другом. Для этого, как видно из рис.4,*b*, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\mathbf{k}_{\text{b}} - \mathbf{k}_{\text{a}} = \mathbf{k}_{\text{R}} - \mathbf{k}_{\text{L}},$$

что эквивалентно закону сохранения импульса $\mathbf{p}_{\text{b}} + \mathbf{p}_{\text{L}} = \mathbf{p}_{\text{a}} + \mathbf{p}_{\text{R}}$. Выберем ось ζ, направленную вдоль разности векторов $\mathbf{k}_{\text{b}} - \mathbf{k}_{\text{a}}$ (или $\mathbf{k}_{\text{R}} - \mathbf{k}_{\text{L}}$). Тогда скорость движения каждой из интерференционных картин вдоль этой оси, как следует из формул (5), (6), можно записать в виде

$$V_{\text{e}} = c\frac{K_{\text{b}} - K_{\text{a}}}{(\mathbf{k}_{\text{b}} - \mathbf{k}_{\text{a}})_\zeta},\ V_{\text{P}} = c\frac{k_{\text{L}} - k_{\text{R}}}{(\mathbf{k}_{\text{L}} - \mathbf{k}_{\text{R}})_\zeta}, \tag{7}$$

где $(\mathbf{k}_{\text{b}} - \mathbf{k}_{\text{a}})_\zeta$ и $(\mathbf{k}_{\text{L}} - \mathbf{k}_{\text{R}})_\zeta$ – соответственно проекции разностей векторов на ось ζ. Чтобы фотон рассеивался на электроне достаточно теперь, чтобы скорости движения интерференционных картин вдоль оси ζ были равны друг другу. Но $(\mathbf{k}_{\text{L}} - \mathbf{k}_{\text{R}})_\zeta = -(\mathbf{k}_{\text{b}} - \mathbf{k}_{\text{a}})_\zeta$. Поэтому для равенства скоростей должно выполняться равенство

$$K_{\rm b} - K_{\rm a} = k_{\rm R} - k_{\rm L}\,, \tag{8}$$

что эквивалентно закону сохранения энергии $E_{\rm b} + E_{\rm L} = E_{\rm a} + E_{\rm R}$.

Опять следуя процедуре, изложенной в работе [33], построим световые конусы для фотона, находящегося в состоянии до столкновения, и для фотона после столкновения в пренебрежении эффектом отдачи. Эти световые конусы не показаны на рис.4,*а*, но показаны эллипсы, образованные сечением этих конусов плоскостями параллельными плоскости $z_{\rm b}y_{\rm b}$ и касающимися сферы *S*, которая тоже не показана на рис.4,*а*, а показаны лишь две её проекции – S_{ys} на плоскость $y_{\rm b}s$ и S_{zy} на плоскость $z_{\rm b}y_{\rm b}$.

Используя уравнение эллипса в полярных координатах (3.1), аналогично тому, как это было сделано в разделе 3 данной работы, получаем следующие соотношения

$$k_{\rm L} = k_0 \frac{\cos\Theta_{\rm b}}{1 - \sin\Theta_{\rm b}\cos\vartheta_{\rm L}}\,,\; k_{\rm R} = k_0 \frac{\cos\Theta_{\rm a}}{1 - \sin\Theta_{\rm a}\cos(\vartheta_{\rm R} - \beta_{\rm a})}\,.$$

Из этих соотношений следует, что

$$k_{\rm R} = k_{\rm L}\frac{1 - \sin\Theta_{\rm b}\cos\vartheta_{\rm L}}{1 - \sin\Theta_{\rm a}\cos(\vartheta_{\rm R} - \beta_{\rm a})}\frac{\cos\Theta_{\rm a}}{\cos\Theta_{\rm b}}\,. \tag{9}$$

Проекции световых векторов в последовательности на оси *z*, *y*, *s*:

$$\mathbf{K}_{\rm L} = (k_{\rm L}\cos\vartheta_{\rm L},\quad -k_{\rm L}\sin\vartheta_{\rm L},\quad k_0)\,,$$

$$\mathbf{K}_{\rm R} = (k_{\rm R}\cos\vartheta_{\rm R},\quad -k_{\rm R}\sin\vartheta_{\rm R},\quad k_0)\,.$$

Проекции электронных векторов в той же последовательности:

$$\mathbf{K}_{\rm b} = (K_0\tan\Theta_{\rm b},\quad 0,\quad K_0)\,,$$

$$\mathbf{K}_{\rm a} = (K_0\tan\Theta_{\rm a}\cos\beta_{\rm a},\quad -K_0\tan\Theta_{\rm a}\sin\beta_{\rm a},\quad K_0)\,.$$

Чтобы интерференционные картины в евклидовом пространстве событий совпадали, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{K}_{\rm b} - \mathbf{K}_{\rm a} = \mathbf{K}_{\rm R} - \mathbf{K}_{\rm L}\,.$$

Расписывая по компонентам, получаем:

по оси *z*:

$$K_0\tan\Theta_{\rm b} - K_0\tan\Theta_{\rm a}\cos\beta_{\rm a} = k_{\rm R}\cos\vartheta_{\rm R} - k_{\rm L}\cos\vartheta_{\rm L}\,,$$

по оси *y*:

$$K_0\tan\Theta_{\rm a}\sin\beta_{\rm a} = -k_{\rm R}\sin\vartheta_{\rm R} + k_{\rm L}\sin\vartheta_{\rm L}\,,$$

по оси *s* в силу резонанса равенство разностей векторов автоматически выполняется.

Из этих уравнений находим

$$\cos\beta_{\mathrm{a}} = \frac{K_0 \tan\Theta_{\mathrm{b}} - k_{\mathrm{R}}\cos\vartheta_{\mathrm{R}} + k_{\mathrm{L}}\cos\vartheta_{\mathrm{L}}}{K_0 \tan\Theta_{\mathrm{a}}} \tag{10}$$

и

$$\sin\beta_{\mathrm{a}} = \frac{-k_{\mathrm{R}}\sin\vartheta_{\mathrm{R}} + k_{\mathrm{L}}\sin\vartheta_{\mathrm{L}}}{K_0 \tan\Theta_{\mathrm{a}}}. \tag{11}$$

Подставляя эти формулы в (9), и выполняя тождественные преобразования, преобразуем (9) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1-\sin\Theta_{\mathrm{b}}\cos\vartheta_{\mathrm{L}}}{k_{\mathrm{R}}} &= \frac{1-\sin\Theta_{\mathrm{b}}\cos\vartheta_{\mathrm{R}}}{k_{\mathrm{L}}} + \frac{1-\cos(\vartheta_{\mathrm{L}}-\vartheta_{\mathrm{R}})}{K_{\mathrm{b}}} + \\ &+ \frac{1}{k_{\mathrm{L}}}\left(\frac{\cos\Theta_{\mathrm{b}}}{\cos\Theta_{\mathrm{a}}} - 1 + \frac{k_{\mathrm{R}}}{K_{\mathrm{b}}} - \frac{k_{\mathrm{L}}}{K_{\mathrm{b}}}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Покажем, что последнее слагаемое в правой части (12) тождественно равно нулю. Для этого воспользуемся условием резонанса $K_{\mathrm{b}}\cos\Theta_{\mathrm{b}} = K_{\mathrm{a}}\cos\Theta_{\mathrm{a}} = K_0$, из которого получаем, что

$$\frac{\cos\Theta_{\mathrm{b}}}{\cos\Theta_{\mathrm{a}}} = \frac{K_{\mathrm{a}}}{K_{\mathrm{b}}}. \tag{13}$$

С учётом (13) последнее слагаемое правой части (12) принимает вид

$$\frac{1}{k_{\mathrm{L}}}\left(\frac{K_{\mathrm{a}}}{K_{\mathrm{b}}} - 1 + \frac{k_{\mathrm{R}}}{K_{\mathrm{b}}} - \frac{k_{\mathrm{L}}}{K_{\mathrm{b}}}\right) = \frac{-(K_{\mathrm{b}}+k_{\mathrm{L}}) + (K_{\mathrm{a}}+k_{\mathrm{R}})}{k_{\mathrm{L}}K_{\mathrm{b}}},$$

из которого с учётом (8) видно, что оно тождественно равно нулю. В результате получаем соотношение

$$\frac{1-\sin\Theta_{\mathrm{b}}\cos\vartheta_{\mathrm{L}}}{k_{\mathrm{R}}} - \frac{1-\sin\Theta_{\mathrm{b}}\cos\vartheta_{\mathrm{R}}}{k_{\mathrm{L}}} = \frac{1-\cos(\vartheta_{\mathrm{L}}-\vartheta_{\mathrm{R}})}{K_{\mathrm{b}}}. \tag{14}$$

Учитывая, что $\sin\Theta_{\mathrm{b}} = v/c = \beta$ из (14) получаем формулу, приведённую в работе [32]

$$E_R = \frac{(1-\beta\cos\vartheta_{\mathrm{L}})E_{\mathrm{L}}}{(1\text{-}\beta\cos\vartheta_{\mathrm{R}}) + (1-\cos\vartheta_{\mathrm{P}})E_{\mathrm{L}}/E_{\mathrm{e}}},$$

где $E_{\mathrm{L}} = \hbar c k_{\mathrm{L}}$, $E_{\mathrm{R}} = \hbar c k_{\mathrm{R}}$ - соответственно энергии падающего и рассеянного фотонов, $E_{\mathrm{e}} = \hbar c K_{\mathrm{b}}$ энергия электронов до рассеяния, $\vartheta_{\mathrm{P}} = \vartheta_{\mathrm{L}} - \vartheta_{\mathrm{R}}$ - угол между лучами падающего и рассеянного фотонов.

6. Заключение

В настоящей работе на основе концепции дополнительного пространственного измерения, и, вытекающего из него понятия о евклидовом пространстве событий с косоугольными системами координат, предложен метод решения задачи о рассеянии фотонов на релятивистских электронах. Полученные формулы совпадают с известными формулами, приведёнными в соответствующей литературе.

В отличие от стандартных подходов в предложенном методе для решения указанной задачи не используются законы сохранения импульса и энергии системы частиц – фотонов и электронов. Наоборот, этот метод позволяет вывести эти законы из условия совпадения ориентаций и скоростей движения в евклидовом пространстве событий двух интерференционных картин. Одна из них образована суперпозицией волновых функций начального (до столкновения электрона с фотоном) и конечного (после столкновения) состояний электронного поля, а другая – суперпозицией волновых функций аналогичных состояний фотонного поля.

Отличительная особенность метода состоит в том, что решение задачи может быть выполнено исключительно в рамках геометрических построений, а уже потом переведено на алгебраический язык. Это придаёт ему наглядность и прозрачность, что в более сложных случаях, по-видимому, может сильно облегчить расчёт характеристик пучков релятивистских частиц при их рассеянии друг на друге.

Приложение.

Покажем, что ориентация и скорость движения в евклидовом пространстве событий интерференционной картины, образованной суперпозицией двух состояний поляризованного волнового поля не зависит от спиновых состояний поля.

В случае электронного волнового поля имеем

$$\psi_{\mathrm{e}} = (a_{\mathrm{b}}\mathbf{S}_{\mathrm{b}}e^{i\mathbf{k}_{\mathrm{b}}\mathbf{r}-iK_{\mathrm{b}}l} + a_{\mathrm{a}}\mathbf{S}_{\mathrm{a}}e^{i\mathbf{k}_{\mathrm{a}}\mathbf{r}-iK_{\mathrm{a}}l})f(K_0 s)$$

где $a_{\mathrm{b}} = |a_{\mathrm{b}}|e^{i\varphi_{\mathrm{b}}}$, $a_{\mathrm{a}} = |a_{\mathrm{a}}|e^{i\varphi_{\mathrm{a}}}$, $|a_{\mathrm{b}}|^2 + |a_a|^2 = 1$, а спиновые функции $\mathbf{S}_{\mathrm{b}}$ и $\mathbf{S}_{\mathrm{a}}$, например, в случае, когда спиральность равна 1/2, в евклидовом пространстве событий имеют соответственно вид [18]

$$\mathbf{S}_{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_{\mathrm{b}}/2) \\ 0 \\ \sin(\Theta_{\mathrm{b}}/2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

и [33]

$$\mathbf{S}_{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_{\mathrm{a}}/2)\cos(\beta_{\mathrm{a}}/2) \\ \cos(\Theta_{\mathrm{a}}/2)\sin(\beta_{\mathrm{a}}/2) \\ \sin(\Theta_{\mathrm{a}}/2)\cos(\beta_{\mathrm{a}}/2) \\ \sin(\Theta_{\mathrm{a}}/2)\sin(\beta_{\mathrm{a}}/2) \end{pmatrix}.$$

Распределение интенсивности в интерференционной картине, как известно [35], описывается произведением

$$\psi_{\mathrm{e}}^{+}\psi_{\mathrm{e}} = (|a_{\mathrm{b}}|^2\mathbf{S}_{\mathrm{b}}^{+}\mathbf{S}_{\mathrm{b}} + a_{\mathrm{a}}^{*}a_{\mathrm{b}}\mathbf{S}_{\mathrm{a}}^{+}\mathbf{S}_{\mathrm{b}}e^{i(\mathbf{k}_{\mathrm{b}}-\mathbf{k}_{\mathrm{a}})\mathbf{r}-i(K_{\mathrm{b}}-K_{\mathrm{a}})l} +$$
$$+ a_{\mathrm{b}}^{*}a_{\mathrm{a}}\mathbf{S}_{\mathrm{b}}^{+}\mathbf{S}_{\mathrm{a}}e^{-(i(\mathbf{k}_{\mathrm{b}}-\mathbf{k}_{\mathrm{a}})\mathbf{r}-i(K_{\mathrm{b}}-K_{\mathrm{a}})l)} + |a_{\mathrm{a}}|^2\mathbf{S}_{\mathrm{a}}^{+}\mathbf{S}_{\mathrm{a}})|f(K_0 s)|^2,$$

причём $\mathbf{S}_{\mathrm{b}}^{+}\mathbf{S}_{\mathrm{b}} \equiv 1$, $\mathbf{S}_{\mathrm{a}}^{+}\mathbf{S}_{\mathrm{a}} \equiv 1$, $\mathbf{S}_{\mathrm{a}}^{+}\mathbf{S}_{\mathrm{b}} = \mathbf{S}_{\mathrm{b}}^{+}\mathbf{S}_{\mathrm{a}} = \cos\frac{\Theta_{\mathrm{a}}-\Theta_{\mathrm{b}}}{2}\cos\frac{\beta_{\mathrm{a}}}{2}$. В результате имеем

$$\psi_{\mathrm{e}}^{+}\psi_{\mathrm{e}} = \left(1 + |a_{\mathrm{a}}||a_{\mathrm{b}}|\cos\frac{\Theta_{\mathrm{a}}-\Theta_{\mathrm{b}}}{2}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\frac{\beta_{\mathrm{a}}}{2}\cos((\mathbf{k}_{\mathrm{b}}-\mathbf{k}_{\mathrm{a}})\mathbf{r}-(K_{\mathrm{b}}-K_{\mathrm{a}})l+\varphi_{\mathrm{b}}-\varphi_{\mathrm{a}})\right)|f(K_0 s)|^2$$

Так как $|a_{\mathrm{b}}|^2 + |a_a|^2 = 1$, то $|a_{\mathrm{b}}||a_a| \le 1/2$, и $\psi_{\mathrm{e}}^{+}\psi_{\mathrm{e}}$ является положительно определённой функцией. Поскольку в множитель, фигурирующий в интерференционном члене, $\cos((\mathbf{k}_{\mathrm{b}}-\mathbf{k}_{\mathrm{a}})\mathbf{r}-(K_{\mathrm{b}}-K_{\mathrm{a}})l+\varphi_{\mathrm{b}}-\varphi_{\mathrm{a}})$ не входят компоненты спиновых функций, то приходим к выводу, что ориентация и движение интерференционной картины в евклидовом пространстве событий не зависят от спиновых состояний поля.

Соответственно для фотонного поля

$$\psi_{\mathrm{P}} = a_{\mathrm{L}}\mathbf{e}_{\mathrm{L}}e^{i\mathbf{k}_{\mathrm{L}}\mathbf{r}-ik_{\mathrm{L}}l} + a_{\mathrm{R}}\mathbf{e}_{\mathrm{R}}e^{i\mathbf{k}_{\mathrm{R}}\mathbf{r}-ik_{\mathrm{R}}l},$$

где $a_{\mathrm{L}} = |a_{\mathrm{L}}|e^{i\varphi_{\mathrm{L}}}$, $a_{\mathrm{R}} = |a_{\mathrm{R}}|e^{i\varphi_{\mathrm{R}}}$, $|a_{\mathrm{L}}|^2 + |a_R|^2 = 1$ и

$$|\psi_{\mathrm{P}}|^2 = 1 + \mathbf{e}_{\mathrm{R}}\mathbf{e}_{\mathrm{L}}|a_{\mathrm{L}}||a_{\mathrm{R}}|\cos((\mathbf{k}_{\mathrm{L}} - \mathbf{k}_{\mathrm{R}})\mathbf{r} - (k_{\mathrm{L}} - k_{\mathrm{R}})l + (\varphi_{\mathrm{L}} - \varphi_{\mathrm{R}})) \geq 0.$$

Из полученных выражений видно, что законы сохранения обусловлены только координатной частью волновых функций, спинорная часть не влияет на результат. Поэтому законы сохранения справедливы для любых спиновых состояний электрона и фотона.

Литература

1. Орлов Е.П. *Пространственно-временные отношения между модами резонатора с параллельными плоскими зеркалами.* Препринт ФИАН № 16. Москва, 2004. 17 с.
2. Орлов Е.П. *Описание пространственно-временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора с помощью косоугольных систем координат.* Препринт ФИАН № 16. Москва, 2009. 32 с.
3. Неванлинна Р. *Пространство, время и относительность.* // Пер. с нем. Г.А.Вольперта, под ред. И.М.Яглома. М.: Мир, 1966. С.180.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике.* Вып.8 // Под ред. Л.В.Гессен. М.: Мир, 1965. С. 111.
5. Либшер Д.-Э. *Теория относительности с циркулем и линейкой.* // Пер. с нем. В.Е.Маркевич, под ред. Н.В.Мицкевич. М.: Мир, 1980. 152 с.
6. Орлов Е.П. *Вывод уравнений релятивистской механики на основе резонансного условия для мод 4-мерного плоскопараллельного резонатора.* Препринт ФИАН, 2013. 11 с.
7. Орлов Е.П. *Преобразование пространства-времени при прямолинейном релятивистски-ускоренном движении в концепции дополнительного измерения.* Препринт ФИАН № 3. Москва, 2014. 34 с.
8. Орлов Е.П. *Сравнительный анализ преобразований пространства-времени при прямолинейном релятивистски-ускоренном движении.* Препринт ФИАН № 7. Москва, 2014. 41 с.
9. Орлов Е.П. *Преобразование пространства-времени между системами отсчёта, связанными с противоположно заряженными частицами, ускоряемыми электрическим полем.* Препринт ФИАН № 19. Москва, 2014. 41 с.

10. Møller C. *On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox.* Kobenhavn. 1943. (Труды Датской АН. Т. 20. № 19.) P. 1 – 24.
11. Ta-You Wu, Lee Y.C. The clock paradox in the relativity theory. Intern. J. Theoretical Phys. 1972. V. 5. Issue 5. P. 307 – 323.
12. Ta-You Wu. Theoretical Physics. 1978. V. 4. Theory of Relativity. (Lian Jing Publishing Co., Taipei. 1978) P. 172 – 175.
13. Hsu J.P. and Silvia M. Kleff. *Generalized Møller-Wu-Lee Transformations for Accelerated Frames.* Chinese Journal of Physics. 1998. V. 36. No. 6. P. 768 – 777.
14. Jong-Ping Hsu. *General-Linear-Acceleration Transformations of Spacetime, Jerks and Limiting 4-Dimensional Symmetry*. Chinese Journal of Physics. 2002. V. 40. No. 3. P. 265 – 276.
15. Andreas Ernst. *On Hyperbolic Motion and Limiting Four-Dimensional Symmetry*. Chinese Journal of Physics. 2002. V. 40. No. 6. P. 583 – 589.
16. Подосенов С.А. *Геометрические свойства неинерциальных систем отсчёта в релятивистской механике* – В кн: Дискуссионные вопросы теории относительности и гравитации. – М.: Наука, 1982, С. 95 – 103.
17. Подосёнов С. А. *Пространство, время и классические поля связанных структур.* М. 2000, "Компания Спутник+".
18. Орлов Е.П. *О решениях уравнения Дирака для свободной частицы в косоугольных системах координат евклидова пространства событий.* Препринт ФИАН № 1. Москва, 2011. 31 с.
19. Орлов Е.П. *Эффект Комптона: анализ с точки зрения концепции пространства с дополнительным измерением.* Препринт ФИАН, 2013. 15 с.
20. Litvinenko V.N., Madey John M. J. *High-power inverse Compton γ-ray source at the Duke storage ring.* Duke Univ. (United States). Published in Proceedings Volume 2521: Time-Resolved Electron and X-Ray Diffraction. September 1995.
21. Litvinenko V.N., Burnham B., Emamian E., et al. *Gamma-ray production in a storage ring free-electron laser.* Physical review letters. 1997. V. 78, No. 24. P. 4569 – 4572.
22. Ruth Ronald D., Huang Zh. *Compton backscattered collimated X-ray source.* United States Patent. Patent Number: 5,825,847. Date of patent: Oct. 20, 1998.
23. Agafonov A.V., Botman J.I.M., Gladkikh P.I., et al. *Development of an advanced X-ray generator based on Compton back-scattering: a proposal for science for peace sub-programme of NATO.* Problems of atomic science and technology. 2001. No. 1. Series: Nuclear Physics Investigations (37). P. 126 – 127.
24. Vinogradov A., Bessonov E.G., Gorbunkov M.V., et al. *Relativistic Thompson Scattering in Compact Linacs and Storage Rings: a Route to Tunable Laboratory-Scale X-Ray Sources.* International Conference 3rd Moscow Workshop on

Targets and Applications 15 – 19 October, 2007 Moscow, Russia, Book of Abstracts, p. 41.

25. Артюков И.А., Бессонов Е.Г., Виноградов А.В. и др. *Лазерно-электронный генератор рентгеновского излучения.* Поверхность, 2007, №8 С. 3 – 11.
26. Bessonov E.G., Gorbunkov M.V., Ishkhanov B.S., et al. *Laser-electron generator for X-ray applications in science and technology.* Laser and Particle Beams, 2008. V. 26, Issue 03, September, pp 489 – 495.
27. Maslova Yu., Vinogradov A., Gorbunkov M., et al. *Design study of compact Compton X-ray sources for material and life sciences applications.* Compton Sources for X/gamma Rays: Physics and Applications, 7-12 September 2008, Porto Conte, Alghero (Sardinia) – Italy.
28. Bessonov E.G., Gorbunkov M.V., Kostryukov P.V., et al. *Design study of compact Laser-Electron X-ray Generator for material and life sciences applications.* JINST 4 PO7017, 2009.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. С.285.
30. Физический энциклопедический словарь // Под. Ред. А.М.Прохорова. М.: Советская энциклопедия, 1984. С.184.
31. Манкевич С.К., Орлов Е.П. *Теория относительности и метод лазерной локации.* Препринт ФИАН № 7. Москва, 2010. 43 с.
32. Sun C. and Wu Y.K. *Theoretical and simulations studies of characteristics of a Compton light source.* Physical review special topics – accelerators and beams. 2011. V.14, 044701. P. 1 – 17.
33. Орлов Е.П. *Конические сечения, аберрация света, эффект Доплера, и биспиноры Дирака.* Препринт ФИАН 10. Москва, 2012. 33 с.
34. Brown W.J., Anderson S.D., Barty S.P.J., et al. *Experimental characterization of an ultrafast Thomson scattering x-ray source with three-dimensional time and frequency-domain analysis.* Physical review special topics – accelerators and beams. 2004. V. 7. P. 060702-1 – 060792-12.
35. Давыдов А.С. *Квантовая механика.* М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. С. 248.

Евгений Прохорович ОРЛОВ

Метод решения задачи о рассеянии фотонов на релятивистских электронах на основе концепции дополнительного пространственного измерения

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 140 экз. Заказ № 7
Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии РИИС ФИАН
119991 Москва, Ленинский проспект 53