ISSN 2410-4914

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
Физический институт имени П.Н.Лебедева Российской академии наук
ФИАН

ПРЕПРИНТ

6

А. А. КОЛОГРИВОВ

ОБ ОДНОЙ ОШИБКЕ Я.И. ПЕРЕЛЬМАНА

Москва — 2015

Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева
ISSN 2410-4914

Информация

Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева издаются с 1964 г.

Издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН)

Адрес редакции: Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53, ФИАН
Тел.: +7 (499) 132-6137, +7 (499) 783-3640;
E-mail: *preprins@sci.lebedev.ru, irinakh@sci.lebedev.ru*

Страница сборника «Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева» в интернете:
http://preprints.lebedev.ru/

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА

А.А. Кологривов

ОБ ОДНОЙ ОШИБКЕ Я.И. ПЕРЕЛЬМАНА

№ 6

Москва 2015

Об одной ошибке Я.И. Перельмана

А.А.Кологривов

В популярной книге Я.И. Перельмана "Занимательная астрономия"[1] обнаружена ошибка: при описании решения задачи о месте падения снаряда, выстреленного из пушки вертикально вверх, была использована формула, не учитывающая уменьшение ускорения свободного падения с высотой. Для корректного решения указанной задачи требуется рассчитывать траекторию снаряда как небесного тела, что приводит к значительному усложнению расчётов. В данной работе проведены такие расчёты для различных начальных условий. Результаты этих расчётов значительно отличаются от результатов, приведенных в [1].

About a mistake of Ya.I.Perelman

A.A.Kologrivov

The popular book "The Entertaining astronomy" by Ya.I.Perelman [1] has an error: at the description of the solution of the problem about the point of touchdown of a gun shell, provided that the gun has shot strictly upwards, the formula which is not taking into account decreasing of acceleration of gravity at large height was used. For the correct solution of the indicated problem one has to calculate the traectory of the shell as a celestial body, that causes significant complication of calculations. In the given article such calculations are conducted for different initial conditions. The results of these calculations considerably differ from results, given in [1].

Введение

В популярной книге Я.И. Перельмана ”Занимательная астрономия”[1] с 1930-х годов много раз переизданной тиражами порядка 100 тыс. экземпляров, имеется задача, названная "Из пушки вверх" . Для понимания сути задачи процитируем несколько соответствующих страниц "Занимательной астрономии" издания 1956 года.

"Куда упал бы снаряд, пущенный отвесно вверх из пушки, установленной на экваторе (рис.1)?

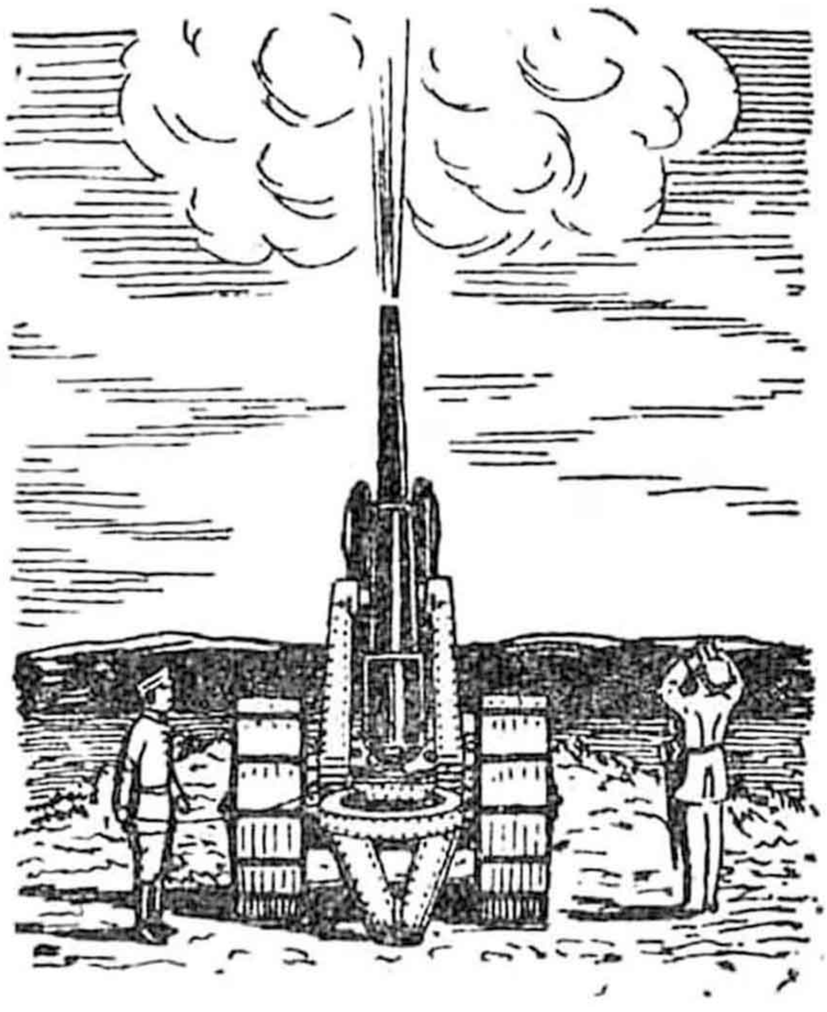

Рис. 1 – Задача о пушечном ядре, брошенном отвесно.

Такая задача обсуждалась лет двадцать назад в одном журнале применительно к воображаемому снаряду, пущенному со скоростью 8000 *м* в первую секунду; снаряд этот должен через 70 минут достичь высоты 6400 *км* (земного радиуса). Вот что писал журнал: "Если снаряд выпущен отвесно вверх на экваторе, то он при вылете из орудия обладает ещё и круговой скоростью точек экватора по направлению на восток (465 *м/сек*). С этой скоростью снаряд будет переноситься параллельно экватору. Точка на высоте 6400 *км*,находившаяся в момент выстрела отвесно над точкой отправления снаряда, перемещается по кругу двойного радиуса с двойной скоростью. Она, следовательно, опережает снаряд в восточном направлении. Когда снаряд достигнет высшей точки своего пути, он будет находиться не отвесно над пунктом отправления, а отстанет от него к западу. То же произойдёт и при обратном падении снаряда. В результате снаряд за 70 минут полёта вверх и обратно отстанет примерно па 4000 *км* к западу. Здесь и следует ожидать его падения. Чтобы заставить снаряд возвратиться в точку отправления, следует выпустить его не отвесно, а немного наклонно, в нашем случае - с наклоном в 5° ".

Совершенно иначе решается подобная задача К. Фламмарионом в его "Астрономии" : "Если выстрелить из пушки, обратив её прямо вверх, к зениту, то ядро снова упадёт в жерло пушки, хотя за время его подъёма и нисхождения пушка передвинется с Землёй к востоку. Причина очевидна. Ядро, поднимаясь вверх, ничего не теряет из скорости, сообщённой ему движением Земли. Полученные им два толчка не противоположны: оно может пройти километр вверх и в то же время сделать, например, 6 *км* к востоку. Движение его в пространстве будет совершаться по диагонали параллелограмма, одна сторона которого 1 *км*, другая - 6 *км*. Вниз под влиянием тяжести оно будет двигаться по другой диагонали (вернее, по кривой, вследствие того, что падение ускоренное) и как раз упадёт снова в жерло пушки, которая по-прежнсму остаётся в вертикальном положении" .

"Произвести такой опыт было бы, однако, довольно трудно, - прибавляет Фламмарион, - потому что редко можно найти пушку, хорошо калиброванную, и очень не легко установить её совершенно отвесно. Мерсен и Пти пытались это сделать в XVII в., но они даже и вовсе не нашли своего ядра после выстрела." < ... >

Два решения задачи, как видим, находятся в резком разногласии. Один автор утверждает, что ядро упадёт далеко к западу от места выстрела, другой - что оно должно упасть непременно в жерло орудия. Кто же прав? Строго говоря, неверны оба решения, по фламмарионово гораздо ближе к истине. Ядро должно упасть к з а п а д у от пушки, однако не столь значительно, как утверждает первый автор, и не в самое жерло, как был убеждён второй. Задача, к сожалению, не может быть решена средствами элементарной математики [1] . Поэтому ограничусь лишь тем, что приведу здесь окончательный результат. Если обозначим начальную скорость ядра через v, угловую скорость вращения земного шара через ω, а ускорение силы тяжести через g, то для расстояния x точки падения ядра к западу от пушки получаются выражения:

[1] Для этой цели необходим специальный обстоятельный расчёт, который по моей просьбе был выполнен специалистами. В подробности этого расчёта я здесь входить не могу.

на экваторе

$$x = \frac{4}{3}\,\omega\,\frac{v^3}{g^2}\ , \tag{1}$$

а на широте φ

$$x = \frac{4}{3}\,\omega\,\frac{v^3}{g^2}\,\cos\varphi \tag{2}$$

Применяя формулу к задаче, поставленной первым автором, имеем

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \qquad ,$$

$$v = 8000 \quad \textit{м/сек,}$$

$$g = 9,8 \quad \textit{м/сек}^2\textit{.}$$

Подставив эти величины в первую формулу, получаем $x = 520$ *км:* ядро упадёт в 520 *км* к западу от пушки (а не в 4000 *км,*как думал первый автор).

Что же даёт формула для случая, рассмотренного Фламмарионом? Выстрел произведён был не на экваторе, а близ Парижа па широте 48°. Начальную скорость ядра старинной пушки примем равной 300 *м/сек.* Подставив во вторую формулу

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \qquad ,$$

$$v = 300 \quad \textit{м/сек,}$$

$$g = 9,8 \quad \textit{м/сек}^2\textit{,}$$

$$\varphi = 48^o \qquad ,$$

> получаем $x = 18$ *м;* ядро упадёт на 18 *м* к западу от пушки (а не в самое жерло, как полагал французский астроном). При этом, конечно, нами не было принято во внимание возможное отклоняющее действие воздушных течений, способное заметно исказить этот результат."

Последнюю фразу надо понимать так, что сопротивлением воздуха Перельман пренебрегает. В противном случае надо было ввести параметры, характеризующие зависимость сопротивления воздуха от скорости снаряда и его высоты, о чём нигде в рассматриваемом параграфе нет речи.

В следующей главе Перельман отмечает, что при проведении данного расчёта необходимо учитывать, что сила притяжения снаряда Землёй по мере увеличения его высоты ослабевает. Ввиду важности данного обстоятельства приведём точную цитату:

> "В расчётах предыдущей статьи принималось, между прочим, в соображение одно обстоятельство, на которое мы не обратили до сих пор внимания читателя. Речь идёт о том, что по мере удаления от Земли сила тяжести ослабевает. Тяжесть есть не что иное, как проявление всемирного тяготения, а сила взаимного притяжения двух тел при возрастании расстояния между ними быстро ослабевает. Согласно закону Ньютона сила притяжения убывает пропорционально квадрату расстояния; при этом расстояние следует считать от центра земного шара, потому что Земля притягивает все тела так, словно вся её масса сосредоточена в центре."

После этого справедливого замечания формулы (1) и (2) вызывают недоумение: по их виду можно заключить, что подразумевается ускорение свободного падения $g = const$, а значит, и сила тяжести не зависит от высоты.

Удивительно, что проводившие расчёт "специалисты" , сам Перельман и многочисленные читатели книги (среди которых, конечно, было немало истинных специалистов) этого не заметили.

Предварительный расчёт траекторий снарядов, запущенных на экваторе и в Париже

Попробуем провести сначала грубый расчёт траектории снаряда, запущенного на экваторе и посмотрим, совпадёт ли результат с полученным по формуле (1).

Начальная точка траектории нам известна. Известна также и начальная скорость. Из закона тяготения Ньютона можно рассчитать в каждой точке траектории проекции ускорения на направления "вертикали"(оси h), то есть оси, проходящей через центр Земли и точку старта и "горизонтали"(оси s), то есть оси, проходящей перпендикулярно первой оси и направленной на "восток" [2] . Затем можно рассчитать проекции скорости снаряда на эти направления в каждый момент времени методом суммирования проекции скорости в какой-то предыдущий момент времени и произведения проекции ускорения на разность этих моментов времени. Аналогично можно рассчитать координаты снаряда суммированием соответствующего значения в предыдущий момент времени и произведения проекции скорости на разность моментов времени. Такие расчёты и были проведены, моменты времени считались с интервалом в 1 секунду.

[2]Так как начало координат находится в центре Земли, где нет никакого востока, это слово поставлено в кавычки. Имеется в виду, что ось, параллельная указанной и проходящая через точку старта, направлена на восток.

Точка (и время) падения снаряда на Землю определялись из условия

$$h^2 + s^2 = R^2 \, , \tag{3}$$

где, так же как и ранее, h – "расстояние" от центра Земли до снаряда "по вертикали", то есть проекция этого расстояния на ось, проходящую через центр Земли и точку старта; s – смещение снаряда "по горизонтали", то есть проекция расстояния от центра Земли до снаряда на ось, проходящую через точку старта перпендикулярно предыдущей оси; R – радиус Земли.

Так как формула (3) есть уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат, а наша система координат имеет начало в центре Земли, то выполнение условия (3) означает, что наше тело находится на поверхности Земли.

Результаты такого грубого расчёта таковы:

1. Максимальная высота 6 725 523 метра достигается через 2181 секунду после старта (36 мин. 21 сек.)

2. На этой высоте ускорение силы тяжести 2.32 м/с^2. Если его приравнять к 9.8 м/с^2, будет грубая ошибка!

3. На высоте 6 378 000 метров снаряд будет через 1638 сек. (27 мин. 18 сек.) и, повторно, через 2728 сек. (45 мин. 28 сек.)

4. Падение снаряда на Землю произойдёт через 4367 сек. (72 мин. 47 сек.)

5. в точке с координатами s =759 736 м; h =6 332 158 м.

6. Эта точка отстоит от точки старта на угол

$$2 \cdot \arcsin\left(\sqrt{(s-s_0)^2 + (h-h_0)^2}/2R\right)$$

7. Этот угол равен 0.119406 радиан.

8. Что соответствует длине дуги 761 570 метров.

9. Земля за 4367 секунд повернётся на угол 0.318447 радиан.

10. Что соответствует длине дуги 2 031 053 метра.

11. То есть снаряд упадёт на 1 269 483 метра к западу.

(По формуле (3) Перельмана – на 517 781 метр к западу – огромное несовпадение!)

Для наглядности на рис. 2 изображена траектория снаряда на фоне земного шара в инерциальной системе отсчёта. Здесь A - положение точки, откуда производится выстрел, в момент выстрела; B - положение точки падения снаряда в момент падения; C - положение точки на поверхности Земли, откуда был произведён выстрел, в момент падения снаряда.

Максимальная высота, на которую поднимется снаряд, запущенный в Париже, составляет, по аналогичным грубым расчётам, 4754 м [3]. На такой высоте ускорение свободного падения $g = 9.784$ м/с^2. То есть большой ошибки не будет, если считать его не зависящим от высоты (известно, что на поверхности Земли, на широте Парижа $g_0 = 9.805$ м/с^2). Тогда имеет место приведённая в книге формула (2) , которая и даёт указанный результат. Но, в случае, когда снаряд запускается на экваторе с начальной скоростью 8000 м/с, отличие g от g_0 нельзя считать малым. Это понимает Перельман, когда в начале следующей главы пишет: "В расчётах … принималось … в соображение … что, по мере удаления от Земли сила тяжести ослабевает".

[3]Для второй задачи нужно дополнительно определить широту Парижа, которую Перельман принимает равной 48°. Далее, ввиду того, что вторая задача является существенно трёхмерной, а первая задача была двумерная, необходимо было ввести новую систему координат. Это было сделано так: ось z направлена от центра Земли к Северному полюсу; ось x – от центра Земли к точке пересечения Парижского меридиана с экватором; ось y от оси x повёрнута к востоку на 90 градусов. За счёт трёхмерности получается больше переменных, но из-за существенно меньшей начальной скорости объём всего процесса вычислений будет намного меньше.

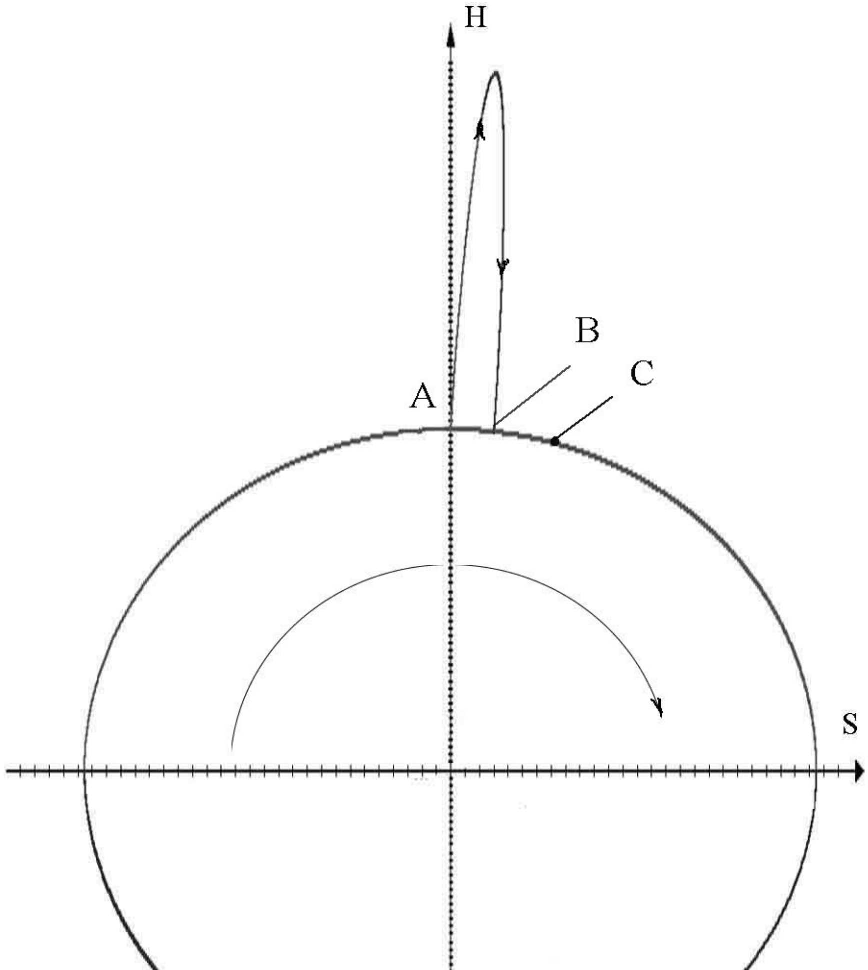

Рис. 2 – Траектория полёта снаряда, запущенного на экваторе. Вид со стороны южного полюса.

Писать-то он, пишет, да, на поверку, как раз и не "принимает в соображение": достаточно бросить взгляд на формулу (1), чтобы понять, что в ней подразумевается $g = const$; в противном случае вид этой формулы был бы намного сложнее: в ней должны были присутствовать такие параметры как масса Земли и её радиус. Кроме того, вызывает недоумение, что время, за которое снаряд достигнет высоты, равной радиусу Земли (обозначим его t_r), составляет 70 минут, а время полёта "вверх и обратно" (которое обозначим t_{u-d}) тоже оказывается равным 70 минутам. Но очевидно,что $t_{u-d} > t_r$. Правда, значение t_r дано Перельманом, а значение t_{u-d} содержится в закавыченном тексте, взятом из "одного журнала"; причём результаты, приведённые в этом журнале, Перельман объявляет ошибочными. Всё же это не уменьшает недоумение, которое возникает вследствие приведённых выше рассуждений, что и побудило рассмотреть эту проблему основательно, не полагаясь на данные анонимных "специалистов".

Точный расчёт траектории снаряда, запущенного на экваторе

Снаряд, выпущенный из пушки со скоростью 8 км/с, следует рассматривать уже как небесное тело, то есть его движение надо описывать (конечно, если пренебречь сопротивлением воздуха) по законам Кеплера. Подобные (и намного более сложные) расчёты описаны в книге П. Эскобала [2] (русский перевод [3]). Применительно к нашему случаю последовательность действий будет следующей.

1. Для начала отметим, что все расчёты будут производиться не в привычных системах СГС или СИ, а в модифицированной геоцентрической системе *единиц,*в которой основными единицами являются *эр, зем*

и *минута* (будем в дальнейшем обозначать её ЭЗМ). В этой системе единицей длины является эр, определяемый как 1 эр = 6 371 000 м. Название "эр" произошло от сокращения слов "экваториальный радиус (Земли)". Однако, экваториальный радиус Земли равен 6 378 000 м. В действительности 1 эр – это радиус такого шара, объём которого равен объёму Земли. Из-за несферичности формы Земли её экваториальный радиус оказывается больше 1 эр. Возможно, логичнее было бы расшифовывать сокращение "эр" как "эквивалентный радиус". Впрочем, понятно, что на ход и результаты расчёта это никак не влияет.

Единицей массы является 1 зем $= 5.9736 \cdot 10^{24}$ кг. Сокращение "зем" расшифровывается как "земная масса (масса Земли)", что, на этот раз, совпадает с действительной массой Земли. В нашем случае масса снаряда несравнимо меньше массы Земли, поэтому размерность массы из всех уравнений исключается, и единица массы "зем" здесь упомянута исключительно для полноты описания системы ЭЗМ.

Наконец, единица времени – минута. Как и в обычной жизни,
1 мин. = 60 сек.

В модифицированной геоцентрической системе *координат* за начало координат принимается центр Земли. Для нашей задачи примем ось h направленной от центра Земли в точку, откуда был произведён выстрел (назовём её точкой старта), ось s – лежащей в плоскости экватора перпендикулярно оси h и направленной на "восток" (так же, как и ранее).

И наконец, модифицированная геоцентрическая система *отсчёта* является инерциальной [4] . То есть в этой системе точка на поверхно-

[4] Точнее говоря, инерциальной будет система отсчёта, в которой Земля вращается вокруг неподвижного Солнца. Но для наших расчётов слабой неинерциальностью системы отсчёта, в которой Земля вращается только вокруг собственной оси, не перемещаясь в

сти Земли совершает вращательное движение, делая 1 оборот за одни *звёздные* сутки [5].

2. Введём обозначения. Их будет достаточно много.

   (a) Прежде всего, вводится новая физическая величина – *модифицированное время,* обозначаемое через τ .
   $\tau = k \cdot (t - t_0)$, где k – коэффициент Гаусса $k = \sqrt{GM}$, G – гравитационная постоянная, M – масса Земли; t – обычное время, t_0 – начальный момент времени (в нашем случае – момент старта). В системе ЭЗМ $k = 0.07436574$ эр$^{3/2}$/мин., и размерность модифицированного времени, таким образом, будет эр$^{3/2}$.

   (b) $\mathbf{r}$ – радиус-вектор нашего снаряда. Соответственно, $\mathbf{r_0}$ – радиус-вектор в точке старта. Его модуль равен экваториальному радиусу Земли, который мы приняли равным 6378 км = 1.0010987 эр, направление – по оси h.

   (c) $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}$ – точка над символом означает дифференцирование по *модифицированному* времени, можно назвать это модифицированной скоростью. Таким образом, размерность модифицированной скорости будет эр$^{-1/2}$. Значение модифицированной скорости в момент старта: $\dot{r}_h = 1.013120$ эр$^{-1/2}$; $\dot{r}_s =$ 0.058899 эр$^{-1/2}$.

   (d) $D_0 = \mathbf{r_0} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ – динамический параметр. В нашем случае
   $D_0 = 1.0142328$ эр$^{1/2}$.

   (e) $V_0^2 = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ – квадрат модифицированной скорости. В нашем случае $V_0^2 =$ 1.0298805 1/эр.

пространстве как целое, можно пренебречь и считать такую систему отсчёта инерциальной. В этой системе и будут осуществляться все дальнейшие расчёты.

[5] 1 звёздные сутки = 86164.091 секунд

(f) Большая полуось орбиты a определяется по формуле:

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r_0} - V_0^2} \qquad ,$$

где r_0 –модуль радиус-вектора в точке старта. В нашем случае $a = 1.0331385$ эр.

(g) Эксцентриситет $e = \sqrt{(1 - \frac{r_0}{a})^2 + \frac{1}{a} D_0^2}$. В нашем случае $e = 0.9983160$.

(h) Параметр $p = a \cdot (1 - e^2)$. В нашем случае $p = 0.0034767$ эр.

Если $e \neq 1;\ p \neq 1;\ 1/a > 0$ орбита является эллиптической, и её параметры можно вычислять по нижеприведённым формулам.

(i) Для дальнейшего понадобится ввести величину, называемую эксцентрической аномалией, обозначаемую буквой E . Смысл этой величины проясняется из рис. 3.

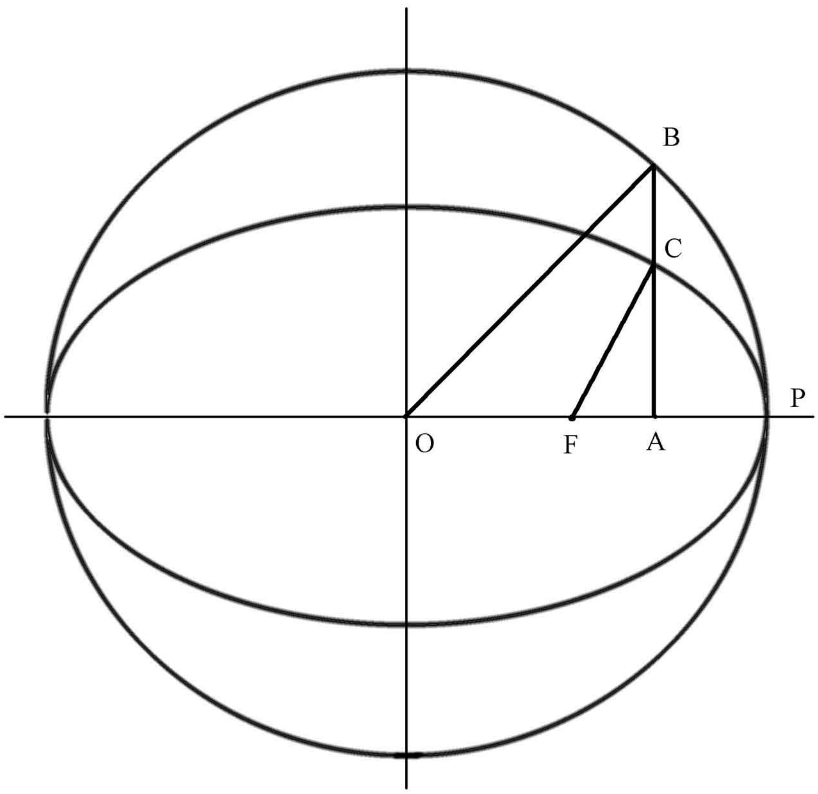

Рис. 3 – К определению понятия эксцентрической аномалии

На рисунке изображена эллиптическая орбита с центром в точке O , фокусом (где находится центр притягивающего тела) в точке F и перигеем в точке P. Вокруг эллипса описана окружность. В рассматриваемый момент времени тело, движущееся по орбите, находится в точке C. Точка B определяется как точка пересечения продолжения радиус-вектора OC с описанной окружностью. Эксцентрической аномалией E называется *угол* (в радианах) $\angle AOB$ (положительным направлением угла считается направление движения тела по орбите). Соответственно, эксцентрическая аномалия в момент старта обозначается E_0. Для её определения вводятся параметры:

(j) $C_e = e\cos E_0 = 1 - r_0/a$
и $S_e = e\sin E_0 = D_0/\sqrt{a}$.
Зная C_e и S_e , можно найти E_0. В общем случае необходимы обе формулы, так как правильное значение E_0 определяется в зависимости от знака функций $\sin E_0$ и $\cos E_0$.

В нашем случае
$C_e = 0.0310120$; $S_e = 0.9978342$; $E_0 = 1.53972697$.

3. Теперь можно приступить собственно к расчёту. Он состоит в следующем. Сначала вычисляем для интересующего нас момента времени t (обычного, не модифицированного), прошедшего с момента старта t_0 так называемое *приращение средней аномалии* $M - M_0$ по формуле $M - M_0 = kt/a^{3/2}$. Напоминаем, что время надо измерять в минутах, величину a – в эрах, а $k = 0.07436574$ эр$^{3/2}$/мин.

Здесь необходимо отметить, что Иоганн Кеплер помимо широко известных трёх законов Кеплера вывел ещё и уравнения Кеплера, описывающие движения планет по орбитам. Для каждого типа движения (эллиптического, параболического, гиперболического и прямолинейного) имеется своё уравнение Кеплера. Для эллиптической орбиты уравнение Кеплера имеет вид (в наших обозначениях):

$$M - M_0 = E - e\ \sin E$$

Будем решать уравнение Кеплера относительно E итерационным методом Ньютона. Для этого сначала вычислим вспомогательный параметр g по следующей формуле:

$$g_{n+1} = g_n - \frac{g_n + S_e\ \sin^2 g_n - C_e\ \sin g_n \cos g_n - (M - M_0)/2}{1 + 2S_e \sin g_n \cos g_n - C_e(1 - 2\sin^2 g_n)}$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots, q$. Последовательные приближения выполняются до тех пор пока не будет выполняться неравенство $\mid g_{n+1} - g_n \mid < \epsilon$ где ϵ – требуемая точность вычислений (Как правило, принимают $\epsilon = 10^{-7}$). На первый взгляд, здесь недоопределено начальное значение g_0. На практике это обычно не делается потому, что почти для любого g_0 процесс либо быстро сходится к одному и тому же значению (достаточно 5-6 шагов), либо резко расходится (что заметно уже на первых 3-4 шагах).

Далее вычисления продолжаются по формулам:

$E - E_0 = 2g$;

$C = a[1 - \cos(E - E_0)]$;

$S = \sqrt{a}\ \sin(E - E_0)$;

$f = 1 - \frac{C}{r_0}$;

$g = r_0 S + D_0 C$;

$r = r_0 + \left(1 - \frac{r_0}{a}\right) C + D_0 S$;

$\dot{f} = -\frac{S}{r r_0}$;

$\dot{g} = 1 - \frac{C}{r}$;

$\mathbf{r} = f\mathbf{r_0} + g\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$;

$\dot{\mathbf{r}} = \dot{f}\mathbf{r_0} + \dot{g}\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$;

В результате проведённых таким способом расчётов получаем:

1. Максимальная высота 1.064537 эр (6 775 157 метров) достигается через 36.71 мин. (2202.6 сек.) после старта;
2. На этой высоте ускорение силы тяжести 2.304 м/с^2 ;
3. На высоте 6 378 000 метров (1.0011 эр) снаряд будет через 26.95 минут и, повторно, через 46.10 мин.;
4. Падение снаряда на Землю (главное, что нас интересует) произойдёт через 73.42063 мин. (4405.2378 сек.) после старта.

Ввиду важности последнего параметра приведём значения в момент падения снаряда на Землю всех промежуточных величин, участвовавших в расчёте:

$M - M_0 = 5.1994$

$g_0 = 1.5$; $g_1 = 1.593082$; $g_2 = 1.601787682$; $g_3 = 1.601865740$;

$g_4 = g_5 = \ldots = 1.601865746$;

$E - E_0 = 3.203732$;

$C = 2.064283$ эр;

$S = -0.063119$ эр$^{1/2}$;

$f = -1.062017$;

$g = 2.030475$ эр$^{3/2}$;

$\dot{f} = 6.298094 \cdot 10^{-2}$ эр$^{3/2}$;

$\dot{g} = -1.062018$;

$\dot{r}_h = -1.012901$ эр$^{-1/2}$;

$\dot{r}_s = -6.255191 \cdot 10^{-2}$ эр$^{-1/2}$;

$|\,\dot{\mathbf{r}}\,| = 1.014831$ эр$^{-1/2}$;

$v_h = -7.532512 \cdot 10^{-2}$ эр/мин.$= -7.998272 \cdot 10^{3}$ м/сек.;

$v_s = -4.651719 \cdot 10^{-3}$ эр/мин.$= -4.939350 \cdot 10^{2}$ м/сек.;

$v = 7.546861 \cdot 10^{-2}$ эр/мин.$= 8.013509 \cdot 10^{3}$ м/сек.;

Значения скорости в точке падения вычислялись для проверки правильности всего расчёта, так как из закона сохранения энергии следует, что модуль скорости в точке падения равен модулю скорости в точке старта. Что и получается в результате вычислений.

5. Координаты точки падения:

   $s = 0.993930$ эр;

   $h = 0.119593$ эр.

6. Эта точка отстоит от точки старта на угол

   $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\sqrt{(s-s_0)^2 + (h-h_0)^2}/2r_0\right) = 0.119748$ радиан.

7. Что соответствует длине дуги $X = \alpha R_e = 0.119748 \cdot 6\,378\,000 = 763\,752$ метра (R_e – экваториальный радиус Земли; здесь удобнее перейти от системы ЭЗМ к СИ).

8. Земля за время $t = 4405.2378$ сек. повернётся на угол

   $$\beta = \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi \cdot 4405.2378}{86\,164.091} = 0.321235 \text{ радиан.}$$

   (T – период обращения Земли $=$ 1 звёздные сутки $=$ 86 164.091 секунд).

9. Что соответствует $Y = \beta R_e = 0.321235 \cdot 6\,378\,000 = 2\,048\,837$ метрам.

10. То есть снаряд упадёт на $Y - X = 2\,048\,837 - 763\,752 = 1\,285\,085$ метров к западу.

Итак, по Фламмариону смещение точки падения от точки старта равно нулю; по данным "одного журнала" – 4000 км; по формуле перельмановских "специалистов" – 520 км; по нашему грубому расчёту – 1269 км и по точному расчёту – 1285 км; все смещения к западу.

Сравнение результатов расчётов: точного и по формуле "специалистов" для разных начальных скоростей

Проведя аналогичные расчёты для разных начальных скоростей, получим любопытные результаты, которые для удобства сравнения представим в виде следующей таблицы.

Таблица 1 –

Расстояния на поверхности Земли от точки старта до точки падения снаряда в зависимости от начальной скорости

Начальная скорость, км/сек.	Значение по формуле "специалистов", км	Значение по точному расчёту, км	Разность значений, км
1	1.013	1.036	0.023
2	8.101	8.540	0.439
4	64.811	77.490	12.679
6	218.737	335.985	117.248
8	518.487	1285.085	766.598
9	738	2806	2068
10	1013	8326	7313
10.73	1249	0 [5]	-1249
11 [6]	1348	$\sim$ 27358	$\sim$ 26010
11.151	1404	∞	∞

[5]При таком значении начальной скорости снаряд упадёт на Землю через 24 часа 32 минуты; за это время Земля совершит больше одного полного оборота на величину, как раз равную смещению снаряда; поэтому снаряд упадёт прямо в точку старта.

[6] При таком значении начальной скорости промежуток времени от старта до падения снаряда на Землю составит $\sim$ 4.7 суток. Поэтому, может быть, правильнее было бы добавить к величине смещения снаряда от точки старта "путь, пройденный точкой старта на поверхности Земли за 4 суток", то есть $8\pi R_e = 160\,297$ км; тогда смещение снаряда составит $160\,297 + 27\,358 = 187\,655$ км. Кроме того, за 4.7 суток Земля, вращающаяся вокруг Солнца, сдвинется на заметное угловое расстояние. Поэтому погрешность, вызванная пренебрежением учёта вращения Земли вокруг Солнца, не будет пренебрежимо малой. Наконец, заметную поправку внесёт учёт влияния Луны, так как максимальное

Точный расчёт траектории снаряда, запущенного в Париже

Для полноты картины рассмотрим точное решение второй задачи, где снаряд выстреливается в Париже вертикально вверх с начальной скоростью 300 м/сек. Как уже отмечалось, эта задача является трёхмерной. Введём следующую систему координат:

ось z направлена от центра Земли к Северному полюсу;

ось x - от центра Земли к точке пересечения Парижского меридиана с экватором в момент старта;

ось y от оси x повёрнута к востоку на 90 градусов;

(Как и прежде, считаем, что наша система отсчёта, где Земля не перемещается в пространстве как целое, лишь вращаясь вокруг собственной оси, является инерциальной);

широта Парижа $\varphi = 48^o$ с.ш.$=$ 0.837758 радиан;

радиус Земли на этой широте (по сути, расстояние от центра Земли до Парижа) $R = 6.36680 \cdot 10^6$ м $= 0.999341$ эр.

Определим декартовы координаты точки старта:

$r_{0x} = R\cos\varphi = 4\,260\,221$ м$=$ 0.668689 эр;

$r_{0y} = 0$;

$r_{0z} = R\sin\varphi = 4\,731\,454$ м$=$ 0.742655 эр;

Здесь возникает проблема, отсутствовавшая в случае эксперимента на экваторе: надо определить вертикальное направление. Это делается так (под g_0 здесь понимается ускорение, вызванное действием гравитации Земли[7]). :

удаление снаряда от Земли составляет в этом случае $\sim 1/10$ расстояния от Земли до Луны.

[7]Строго говоря, определяя направление вертикали, необходимо учитывать несферичность формы Земли (см., например, [4]). Однако при этом точка, являющаяся эффек-

Составляющая g_0 по направлению x : $g_{0x} = g_0 \cos\varphi = -6.556516$м/с^2;

Составляющая g_0 по направлению y : $g_{0y} = 0$;

Составляющая g_0 по направлению z : $g_{0z} = g_0 \sin\varphi = -7.281748$м/с^2;

Центробежное ускорение направлено по оси x и составляет $a_x = \omega^2 R^2 \cos\varphi = 0.0226537$м/с^2, где $\omega = 7.29212 \cdot 10^{-5}$ радиан в секунду – угловая скорость вращения Земли.

Таким образом, проекция результирующего ускорения тяжести в Париже на ось x с учётом центробежного ускорения составит $g_x = g_{0x} + a_x = -6.533862$м/с^2, а угол между вертикалью и направлением к центру Земли $\gamma = \arctan(g_{0z}/g_x) - \varphi$.

Тогда угол между осью x и вертикалью
$\varphi_g = \arctan(g_x/g_{0z}) = 0.8394788$ радиан и

составляющая начальной скорости по x : $v_{0x} = v_0 \cos\varphi_g$;

составляющая начальной скорости по y : $v_{0y} = \omega R\, cos\varphi$;

составляющая начальной скорости по z : $v_{0z} = v_0 \sin\varphi_g$.

Продолжим вычисления.

$\dot{r_{0x}} = 2.53730 \cdot 10^{-2}$ эр$^{-1/2}$;

$\dot{r_{0y}} = 3.93420 \cdot 10^{-2}$ эр$^{-1/2}$;

$\dot{r_{0z}} = 2.82773 \cdot 10^{-2}$ эр$^{-1/2}$;

$V_0^2 = 0.0029912$ 1/эр;

$D_0 = 0.0379669$ эр$^{1/2}$;

$a = 0.5004183$ эр;

$e = 0.9984543$ эр;

$p = 0.0015458$ эр.

Значения параметров a, e и p соответствуют эллиптической орбите.

тивным центром притяжения, в инерциальной системе отсчёта со временем будет перемещаться, следовательно орбита будет не только неэллиптической, но даже не кривой второго порядка, а значит, законы Кеплера будут неприменимы. Но, вследствие малости указанного эффекта, пренебрежение им не вносит существенной погрешности в результаты вычислений.

Эксцентрическая аномалия $E_0 = 3.087813$;

$C_e = -0.9970108; \qquad S_e = 0.0536708$.

Расчёт показывает, что падение снаряда произойдёт в момент времени $t =$ 1.02298 мин. = 61.3788 сек.

В этот момент времени приращение средней аномалии

$M - M_0 = 0.2149019$;

$g_5 = g_6 = 0.0537800$ (Полагая $g_0 = 0.1$);

$E - E_0 = 0.1075600$ радиан;

$C = 0.0028919\,$эр ; $S = 0.0759416\,$эр$^{1/2}$;

$f = 0.9971062$; $g = 0.0760013\,$эр$^{3/2}$;

$\dot{f} = -0.076041783$ эр$^{-3/2}$; $\dot{g} = 0.997106176$;

$r_x = 0.66868\,$эр; $r_y = 0.00299\,$эр; $r_z = 0.742655\,$эр;

$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = 0.99934\,$эр.

Париж, вследствие суточного вращения Земли, в рассматриваемый момент времени будет находиться в точке с координатами:

$r_{px} = R_P \cos(\omega t) = 0.6686828\,$эр;

$r_{py} = R_P \sin(\omega t) = 0.0029929\,$эр;

$r_{pz} = r_{0z} = 0.742655\,$эр;

Разность координат снаряда и Парижа в этот момент:

$\Delta x = \Delta z = 0$;

$\Delta y = 2.87674 \cdot 10^{-6}$ эр= 18.33 м.

При столь малом значении этой величины кривизной поверхности Земли можно пренебречь и принять, что снаряд упадёт на 18.33 м к западу.

Как и в случае со снарядом, запущенном на экваторе, проверим сохранение модуля скорости. В момент $t = 1.02298$ мин.:

$\dot{r}_x = -0.025549\,$эр$^{-1/2}$;

$\dot{r}_y = 0.039228\,$эр$^{-1/2}$;

$\dot{r}_z = -0.028277\,$эр$^{-1/2}$;

$\dot{r} = 0.054692\,\text{эр}^{-1/2}$;

$v_x = -0.001900\,\text{эр/мин.} = -201.743\,\text{м/сек.}$

$v_y = 0.002917\,\text{эр/мин.} = 309.761\,\text{м/сек.}$

$v_z = -0.002103\,\text{эр/мин.} = -223.290\,\text{м/сек.}$

$v = 0.004067\,\text{эр/мин.} = 431.869\ \text{м/сек.}$

В момент $t = 0$:

$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2} = 431.868\ \text{м/сек.}$

Значения скорости практически совпадают.

Можно определить и максимальную высоту, на которую поднимется снаряд. Она достигается в момент времени $t_m = 0.51\,\text{мин.} = 30.6\,\text{сек.}$ и составляет $7.223 \cdot 10^{-4}\,\text{эр} = 4602\,\text{м}$. На этой высоте ускорение силы тяжести $g = k^2/r^2 = 9.786\ \text{м/с}^2$.

Сводка результатов расчётов

Подведём итог в виде следующих двух таблиц для каждой из двух задач:

Таблица 2 –

Значения параметров траектории снаряда, запущенного на экваторе

Параметр	Значение по Перельману	Значение по грубому расчёту	Значение по точному расчёту
Начальная скорость, м/сек.	8000	8000	8000
Максимальная высота, км	6400	6726	6775
Время достижения максимальной высоты, мин.	70	36.35	36.71
Время полёта "вверх и обратно", мин.	70	72.78	73.42
Отклонение точки падения к западу, км	520	1269	1285

Таблица 3 –

Значения параметров траектории снаряда, запущенного в Париже

Параметр	Значение по Перельману	Значение по грубому расчёту	Значение по точному расчёту
Начальная скорость, м/сек.	300	300	300
Максимальная высота, км	нет данных	6726	6775
Время достижения максимальной высоты, мин.	нет данных	0.52	0.517
Время полёта "вверх и обратно", мин.	нет данных	1.033	1.023
Отклонение точки падения к западу, км	0.0183	0.0183	0.01833

Откуда взялась формула Перельмана?

Откуда же взялась неверная формула, приведённая Перельманом по данным расчёта "специалистов"? Скорее всего, она получилась в результате следующих рассуждений.

Будем на этот раз решать задачу в *неинерциальной* системе отсчёта, связанной с Землёй. Ради упрощения вычислений, будем решать задачу, где снаряд запускается на экваторе. Для случая, когда снаряд запускается на параллели φ, надо будет всего лишь, как следует из сравнения формул (1) и (2) умножить результат на $\cos\varphi$. Как и прежде, ось h направлена из точки старта вертикально вверх, ось s – из центра Земли перпендикулярно первой в направлении к востоку. Отметим, что так как в нашей системе отсчёта Земля покоится, а начальная горизонтальная скорость снаряда равна нулю, то результат не изменится, если начало координат перенести из центра Земли в точку старта, что более "естественно" для наблюдателя, находящегося на Земле вблизи точки старта. Тогда, обозначая начальную скорость снаряда через v_0, ускорение свободного падения с учётом центробежной составляющей (которое считаем не зависящим от h !) – через g, время – через t, угловую скорость вращения Земли – через ω, текущие значения проекции скорости снаряда на оси координат – через v_h и v_s соответственно, получаем: $v_h = v_0 - gt$; $h = v_0 t - gt^2/2$.

$h = 0$ при $t = 0$ и $t = 2v_0/g$. Последнее значение t, очевидно, есть время полёта снаряда "вверх и обратно". В направлении оси s начальная скорость равна нулю, но имеет место кориолисово ускорение:

$a = -2\omega v_h = -2\omega(v_0 - gt)$ (Поскольку ω и v_h взаимно перпендикулярны, в векторном произведении синус соответствующего угла равен единице).

Таким образом,

$$v_s = \int_0^t a \cdot dt = \int_0^t -2\omega(v_0 - gt) \cdot dt = -2\omega(v_0 t - gt^2/2)$$

Смещение снаряда x по оси s за время t равно:

$$x = \int_0^t v_s \cdot dt = -2\omega \left(\int_0^t v_0 t \cdot dt - \int_0^t \frac{gt^2}{2} \cdot dt \right) = -2\omega(v_0 t^2/2 - gt^3/6) =$$

$$= -2\omega \left(v_0 \cdot \frac{4v_0^2}{2g^2} - \frac{g}{2} \cdot \frac{8v_0^3}{3g^3} \right) = -\frac{4}{3}\,\omega\,\frac{v^3}{g^2}$$

что и является формулой, выведенной "специалистами". Знак "минус" появляется потому, что ось s у нас направлена к востоку, а снаряд смещается к западу.

В заключение хочется ещё раз выразить удивление тому, как могут совершать столь грубые ошибки даже выдающиеся популяризаторы. Уважаемый Я.И.Перельман, доверившись неким "специалистам", не заметил, что их формула не учитывает изменение ускорения падения с высотой, хотя здесь же писал, как важно его учитывать.

Литература

[1] Я.И. Перельман. «Занимательная астрономия», изд. 8-е, М., 1956

[2] P.R.Escobal. «Methods of orbit determination», John Wiley and sons, N.Y.-L., 1965

[3] П. Эскобал. «Методы определения орбит», «Мир», М., 1970

[4] А.А. Михайлов. «Земля и её вращение», «Наука», М., 1984

Андрей Александрович КОЛОГРИВОВ

Об одной ошибке Я.И. Перельмана

Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 140 экз. Заказ №28. П.л. 1,75
Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии РИИС ФИАН
119991 Москва, Ленинский проспект 53