

**Физический
ИНСТИТУТ**



*имени
П.Н. Лебедева*

Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

5

И. М. СИЗОВА

**АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПОТОКА
ЭНЕРГИИ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ ФРАУНГО-ФЕРА
ПРИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ
ВОЛНЫ НА ПЛОСКИХ АПЕРТУРАХ
СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Москва — 2015

ПРЕПРИНТЫ ФИАН им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА

ISSN 2410-4914

Главный редактор В. И. Ритус, *зам. главного редактора* А. А. Гиппиус,
научный секретарь С. А. Богачев, *ответственный секретарь* Л. В. Селезнев

Редакционная коллегия: В. С. Бескин, А. А. Горбацевич, О. Д. Далькаров,
Е. И. Демихов, И. Г. Зубарев, К. П. Зыбин, А. А. Ионин, Н. Н. Колачевский,
Е. Р. Корешева, С. Ф. Лихачев, А. С. Насибов, И. Д. Новиков, В. Н. Очкин,
Н. Г. Полухина, В. С. Лебедев, Н. Н. Сибельдин, Д. Р. Хохлов, С. А. Чайковский

Информация

Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева издаются с 1964 г.

Издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН)

Адрес редакции: Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53, ФИАН

Тел.: +7 (499) 132-6137, +7 (499) 783-3640;

E-mail: preprins@sci.lebedev.ru, irinakh@sci.lebedev.ru

Страница сборника «Препринты ФИАН им. П. Н. Лебедева» в интернете:

<http://preprints.lebedev.ru/>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА

И.М. Сизова

**АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ
В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ ФРАУНГО-ФЕРА ПРИ ДИФРАКЦИИ
ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКИХ АПЕРТУРАХ
СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

№ 5

Москва 2015

И.М.Сизова

Аппроксимация функции потока энергии в дальней зоне Фраунгофера при дифракции плоской световой волны на плоских апертурах сложной формы

АННОТАЦИЯ

В классической задаче дифракции света на ограниченных апертурах расчет потока излучения в конусе заданного угла раствора в дальней зоне Фраунгофера сводится к интегральному преобразованию так называемой автокорреляционной функции (АФ), определяемой интегралом перекрытия по плоскости апертуры двух сдвинутых функций интенсивности поля на апертуре, с функцией Бесселя первого порядка в качестве ядра. Расчеты такого типа для апертур сложных форм и произвольных полей на них являются непростой задачей. Поэтому там, где нужна функция потока (астрономия, лазерная техника), обычно ищут приближенные методы расчетов или делают оценки по аналитическим функциям для простых полей и апертур, которых известны буквально единицы. В работе предложен метод аппроксимации функции потока путем моделирования производной от АФ простыми функциями, допускающими аналитический расчет или выражение функции потока через однократный интеграл. Модели содержат параметры. Часть их задается правильным разложением функции потока в начале координат и на бесконечности (по углу), остающиеся свободные параметры позволяют хорошее воспроизведение функции в промежуточной области определения. Обсуждаются источники этих свободных параметров.

I.M.Sizova

Approximation of encircled energy function in the far-field Fraunhofer zone under the diffraction of plane light wave on plane apertures of complicated shapes

ABSTRACT

In a classical problem of light diffraction by restricted apertures the evaluation of encircled energy in a definite solid angle in the far-field Fraunhofer zone leads to the integral transformation of a so-called optical transfer function (OTF), where OTF is a plane integral over the overlapping area between two displaced field intensity aperture functions averaged overall azimuths, with Bessel function of the first kind as a kernel. Such calculation for complicated apertures and arbitrary field intensities on them is not an easy task. Therefore, the usual way to estimate the encircled energy in necessity (astronomy, laser technology) is to find approximate calculation methods or use very few known analytical solutions for simple apertures and field structures. In this paper a method of encircled energy approximation by simulation of the OTF derivative with simple model functions is proposed that allows an analytical calculation or reduce the encircled energy to single integrals. These models contain parameters. Some of them come from true expansion of an encircled energy in the origin of the angle coordinate and at infinity; the rest free parameters allow one to obtain good approximation in intermediate domain. The sources of these free parameters are discussed.

Введение

Поток излучения в заданном конусе угла в дальней зоне Фраунгофера при дифракции света на плоской ограниченной апертуре произвольной формы при произвольном падающем на нее поле вычисляется как интегральное преобразование функции - интеграла по поверхности апертуры, определяемого формой апертуры и распределением излучения по ней. Ядром преобразования служит функция Бесселя первого порядка. Задачи такого рода возникают во многих областях физики - в астрономии, в фотодиссоционных лазерах с накачкой излучением открытых разрядов [1] и т.д. Расчеты подобных тройных интегралов с осциллирующей функцией непросты, а нередко нужна обработка многих данных или оценка влияния на результат параметров эксперимента. Еще труднее решать обратные задачи оценки параметров эксперимента для получения данных величин потока. Т.к. часто вполне приемлема точность расчетов потока в 10-15%, то актуальна задача хорошей аппроксимации этой функции на базе информации о граничных условиях задачи. В [2-5] предложена феноменологическая оценка функции потока, но точность ее допустима при ряде ограничений на форму апертуры и структуру падающего на нее поля. Поле должно быть плавным (зависимости типа гаусса, экспоненты), а апертура не слишком изрезанной.

В настоящей работе предложено приближение для функции потока на основе совсем другой модели, чем в [2-5]. Оно позволяет получить бóльшую точность аппроксимации в более широком диапазоне полей и апертур и, по-видимому, имеет перспективу дальнейшего улучшения в рамках развития предложенной методики.

Основные соотношения

Рассмотрим классическую задачу дифракции излучения, падающего вдоль оси z перпендикулярно на плоскую апертуру. Будем считать, что фаза излучения на апертуре постоянна (плоская волна), а распределение интенсивности произвольное.

Нас интересует функция $\varepsilon(\mathcal{G})$ - нормированный на полный поток дифрагирующего излучения E_Σ поток излучения в конусе, образующая которого составляет угол \mathcal{G} с осью z , которая в рамках физической оптики вычисляется по формуле

$$\varepsilon(\mathcal{G}) = \frac{E(\mathcal{G})}{E_\Sigma} = \frac{\int_0^{\mathcal{G}} \mathcal{G}' d\mathcal{G}' \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta, 0) e^{-i \frac{2\pi \mathcal{G}'}{\lambda} (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)} d\xi d\eta \right|^2}{\lambda^2 \iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta, 0)|^2 d\xi d\eta}. \quad (1)$$

Вывод известной формулы (1) подробно описан в [2]. Здесь $E(\mathcal{G})$ - ненормированный поток; $(r, \mathcal{G}, \varphi)$ - сферические координаты пространства за апертурой, соответствующие декартовым координатам $\vec{r} = \{x, y, z\}$ (зенитный угол \mathcal{G} считается от

оси z , а азимутальный угол φ - от оси x); $U(\xi, \eta, 0)$ - поле на апертуре ($z = 0$), где декартовы координаты x, y совпадают с ξ, η); λ - длина волны излучения;

$$E_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta, 0)|^2 d\xi d\eta - \quad (2)$$

полный поток излучения через апертуру. В (2) Σ - знак интегрирования по площади апертуры; который будет также использоваться и для обозначения самой площади.

Если поле на апертуре однородно, т.е. $U(\xi, \eta, 0) = Const$, то (1) переходит в

$$\varepsilon(\vartheta) = \frac{\int_0^{\vartheta} \vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \iint_{\Sigma} e^{-i \frac{2\pi\vartheta'}{\lambda} (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)} d\xi d\eta \right|^2}{\lambda^2 \Sigma}, \quad (3)$$

Выражения (1,3) для дифракционного излучения за плоской апертурой получены в рамках физической оптики методом Кирхгофа в параксиальной области в приближении Френеля в дальней зоне Фраунгофера [6-7]. При этом предполагается выполнение следующих условий:

монохроматичность излучения: позволяет вместе с условием ниже на отношение размера апертуры a и λ перейти от волнового уравнения к скалярному уравнению Гельмгольца $\Delta U(x, y, z) + k^2 U(x, y, z) = 0$, где $k = 2\pi / \lambda$ - волновое число;

неравенство $\lambda / a \ll 1$: позволяет пренебречь краевыми эффектами на апертуре и рассматривать вместо векторной задачи скалярную с использованием граничных условий геометрической оптики Кирхгофа, заключающихся в равенстве поля и нормальной составляющей его производной на апертуре соответствующим значениям падающего поля, а в области геометрической тени - нулю. Скалярное уравнение Гельмгольца вместе с граничными условиями Кирхгофа и дополнительным условием

излучения Зоммерфельда $\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right) = 0$, обеспечивающим необходимую скорость убывания поля на бесконечности за апертурой, имеет точное интегральное решение с помощью так называемой вспомогательной функции Грина. Для (1) взята первая функция Грина для плоской апертуры, позволяющая устранить математическую нестрогость граничных условий Кирхгофа и выразить решение уравнения лишь через поле на апертуре, не учитывая значение его производной по нормали;

неравенство $\vartheta \ll (\lambda / a)^{1/3}$: условие параксиальности, где можно перейти от уравнения Гельмгольца к параболическому уравнению $2ik \frac{\partial U}{\partial z} + \Delta_{x,y} U = 0$ ($\Delta_{x,y}$ - поперечный лапласиан), точное решение которого называется приближением Френеля;

условие на волновой параметр $D = \lambda z / \Sigma \gg 1$: определяет область расстояния Z от апертуры, называемую областью дифракции Фраунгофера (Σ - площадь апертуры), где приближение Френеля дополнительно упрощается к виду

$$U(r, \vartheta, \varphi) = \frac{e^{ikr+i\pi\vartheta^2/\lambda}}{i\lambda r} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta, 0) e^{-i\frac{2\pi\vartheta'}{\lambda}(\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)} d\xi d\eta,$$

откуда и получается выражение (1).

Выражения (1,3) можно переписать в виде [2,8]

$$\varepsilon(\vartheta) = \frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \int_0^{\infty} T(\rho) J_1\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \rho\right) d\rho, \quad (4)$$

где J_1 – функция Бесселя первого порядка. В (4) введена так называемая автокорреляционная функция (АФ) $T(\xi, \eta)$ от координат ξ, η в плоскости апертуры,

$$T(\xi, \eta) = \left(\iint_{\Sigma} U^*(\bar{\xi}, \bar{\eta}, 0) U(\bar{\xi} + \xi, \bar{\eta} + \eta, 0) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \right) / E_{\Sigma}, \quad (5)$$

усредненная по полярному углу ϕ , если вместо декартовых координат ξ, η ввести в плоскости апертуры полярные координаты ρ, ϕ ($\xi = \rho \cos \phi$; $\eta = \rho \sin \phi$),

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\rho, \phi) d\phi. \quad (6)$$

АФ при однородном поле на апертуре равна площади перекрытия двух сдвинутых относительно друг друга на вектор (ξ, η) одинаковых апертур, нормированной на площадь апертуры. А $T(\rho)$ – среднее АФ по углу направления сдвига на ρ . То есть $T(\xi, \eta)$ и $T(\rho)$ при однородном поле – геометрические характеристики формы апертуры. Если поле неоднородно, то $T(\xi, \eta)$ и $T(\rho)$ уже будут усредненными полями $U(\xi, \eta, 0)$ характеристиками. Выражение (4) получается из (1,3) с помощью прямых и обратных Фурье-преобразований АФ и $U(\xi, \eta, 0)$. Из (5) следует, что $T(0) = 1$.

Из (1,3-4) при малых ϑ (точнее, малых значениях $2\pi\vartheta/\lambda$) верно приближение

$$\varepsilon(\vartheta) \underset{\vartheta \rightarrow 0}{\cong} \pi \Sigma_{eff} \vartheta^2 / \lambda^2 = \frac{1}{4} \left(2\pi \frac{\rho_1}{\lambda} \vartheta \right)^2, \quad (7)$$

где величина

$$\Sigma_{eff} = \frac{\left| \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta \right|^2}{\iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta, 0)|^2 d\xi d\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(\xi, \eta) d\xi d\eta = 2\pi \int_0^{\infty} \bar{T}(\rho) \rho d\rho \quad (8)$$

при неоднородном поле играет роль эффективной площади, а при однородном равна Σ . Очевидно, что $\Sigma_{eff} \leq \Sigma$ и равенство достигается лишь при однородном поле.

В (7) введена первая, важная в дальнейшем, величины размерности длины

$$\rho_1 = \sqrt{\Sigma_{eff} / \pi} . \quad (9)$$

В [8] из разложения интеграла (4) в ряд по методу Виллиса [9] было показано, что асимптотическое приближение $\varepsilon(\vartheta)$ при больших значениях $2\pi\vartheta/\lambda$ имеет вид

$$\varepsilon(\vartheta) \underset{\vartheta \rightarrow \infty}{\cong} 1 - \frac{(2/\pi)}{(2\pi\rho_2\vartheta/\lambda)} , \quad (10)$$

где вторая величина размерности длины, ρ_2 , определяется как

$$\rho_2 = \frac{2E_\Sigma}{\oint_c |U|^2 dl} . \quad (11)$$

В знаменателе (11) берется интеграл от поля по периметру апертуры. В случае однородного поля выражение (11) переходит в

$$\rho_2 = 2\Sigma / P , \quad (12)$$

где P – периметр апертуры.

Числовые множители в (9,11) обеспечивают для круглой апертуры и однородного поля равенство $\rho_{1,2}$ радиусу апертуры. У любой апертуры при однородном поле

$$\rho_2 = 2\Sigma / P \leq \sqrt{\Sigma / \pi} = \rho_1 \quad (13)$$

и равенство имеет место лишь для круга. Тем более отношение (13) для $\rho_{1,2}$ верно при неоднородном поле, когда даже для круга выполнено строгое неравенство.

Итак, для $\varepsilon(\vartheta)$ есть приближения при малых и больших значениях аргумента. При этом поведение функции $\varepsilon(\vartheta)$ в промежуточной области может быть очень разным; а это, как правило, наиболее интересная для приложений область углов.

Аналитические выражения для $\varepsilon(\vartheta)$ получены буквально для единичных апертур, например, для круглой при однородном поле. Это известная функция Релея

$$\varepsilon_{circ}(\vartheta) = 1 - J_0^2(\Delta) - J_1^2(\Delta) , \quad (14)$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков. Здесь через

$$\Delta = 2\pi(\rho/\lambda)\vartheta \quad (15)$$

обозначен аргумент функции Релея (ρ – радиус круга). Приближения (7) и (10) хорошо описывают (14) при, соответственно, малых и больших значениях аргумента, и совокупность их, соединенная в точке пересечения, хорошо аппроксимирует всю функцию Релея (см. рис.2 в [2] и рис.2 в [5]). Для круга и однородного поля $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Численный расчет (4) через (5-6) в силу осцилляции J_1 и необходимости считать тройной интеграл, – непростая задача, требующая значительного времени счета. А потребности таких расчетов для некруговых апертур и неоднородных полей велики

и в астрономии [10], и в других областях физики, например, в конструкциях некоторых лазеров [1]. Во многих из этих случаев расчет (4) допустим приближенно. В [2] было показано, что при однородном поле и небольших значениях параметра μ , равного

$$\mu = \rho_1 / \rho_2, \quad (16)$$

неплохой аппроксимацией $\varepsilon(\mathcal{G})$ является (14) от аргумента $\Delta_2 = 2\pi(\rho_2 / \lambda)\mathcal{G}$, где ρ_2 определено (12). Чем меньше μ , тем это приближение лучше (согласно (13), $\mu \geq 1$).

При неоднородном поле μ (16) больше, чем при однородном. И если параметр ρ_2 (11) очень велик (частично «мягкие» апертуры, когда поле где-то по краям исчезающее мало), то приближение (10) «работает» лишь вблизи $\varepsilon(\mathcal{G}) \approx 1$, и ρ_2 мало определяет поведение $\varepsilon(\mathcal{G})$ в наиболее интересной промежуточной области значений.

Для этой ситуации в [2-5] было показано, что если поле внутри апертуры меняется плавно (зависимости типа гаусса, экспоненты), то как приближение $\varepsilon(\mathcal{G})$ можно взять функцию (14) от аргумента $\Delta_2 = 2\pi(\rho_{2,eff} / \lambda)\mathcal{G}$, где $\rho_{2,eff}$ рассчитывается как (12), но вместо Σ взята Σ_{eff} (8), а вместо P – соответствующий Σ_{eff} периметр P_{eff} , получаемый как длина границы по горизонтали рельефа амплитуды поля на апертуре $\rho_{2,eff} = 2\Sigma_{eff} / P_{eff}$. (17)

Оказалось также, что в рассмотренных случаях почти без потери точности приближения можно не считать точно P_{eff} через Σ_{eff} , решая соответствующее трансцендентное уравнение, а взять площадь и периметр апертуры, соответствующей уровню амплитуды поля $1/e^2$ от максимального значения (если поле где-то на границе еще не спадает до указанного уровня, то в этих местах берется граница апертуры).

Параметр (17) (и тем более приближение «по уровню $1/e^2$ ») никак не вытекает из выражения для $\varepsilon(\mathcal{G})$, получен феноменологически, и применимость его предложена из расчета $\varepsilon(\mathcal{G})$ для разных апертур, в том числе, в йодных фотодиссоционных лазерах с гауссовыми или экспоненциальными полями на апертурах [1-2]. В [3] была сделана безуспешная попытка обосновать или улучшить предложенное в [2] феноменологическое приближение. Оказалось, что оно близко к оптимальному в рассмотренных условиях, но не может рекомендоваться в других ситуациях. Например, если поле в небольшой области апертуры («керна») велико, а в остальной, много большей области («периферия»), - мало, но энергии в «керна» и на периферии сравнимы.

Параметр длины (17) не удалось приближенно вывести из функции (6), от которой только и зависит $\varepsilon(\mathcal{G})$, в частности, через комбинаций моментов функции $T(\rho)$.

В настоящей работе предпринята еще одна попытка аппроксимировать $\varepsilon(\mathcal{G})$ на основе моделирования $T(\rho)$, используя другой подход, чем в [2-5].

В [11-14] в численных экспериментах нами было выявлено свойство приближенного подобия ряда функций $F(y)$, являющихся интегральным преобразованием (ИП) функций $f(x)$ с ядрами $G_{osc}(z)$ в виде некоторых осциллирующих функций от аргумента $z = xy$ (преобразования типа (4)):

$$F(y) = \int G_{osc}(xy) \cdot f(x) dx \quad (18)$$

Оказалось, ядро G_{osc} в (18) может сгладить влияние индивидуальных черт $f(x)$ на $F(y)$, из-за чего в основном $F(y)$ определяется не точным видом $f(x)$, а набором ее числовых параметров (инвариантов). И модель $f(x)$ в (18), даже не обязательно хорошо воспроизводящая $f(x)$, но сохраняющая упомянутые инварианты, может дать хорошую аппроксимацию $F(y)$, зависящую от этих инвариантов.

Результат, полученный в [11-14] при вычислении статистических характеристик узкополосного случайного процесса, и вдохновил на предпринятую здесь попытку применить аналогичную методику для аппроксимации $\varepsilon(\vartheta)$ при дифракции плоской волны на плоской апертуре. Хотя при этом и $f(x)$ имеют другой смысл (и, вероятно, должны характеризоваться другими инвариантами), и ядра $G_{osc}(xy)$ в (18) другие. Отметим, что подход в обоих случаях не столько математический (и строгий), сколько физический. Функции $f(x)$ в (18) описывают определенные физические объекты. И выбор инвариантов $f(x)$ определялся свойствами именно этих объектов.

Интеграл (4) по структуре похож на (18), поэтому резонно попробовать аппроксимировать $\varepsilon(\vartheta)$ через характеристики $T(\rho)$.

Но сначала учтем одно соображение. В [11-14] $f(x)$ из (18) вблизи нуля аргумента имеет свой максимум. Аналогичным свойством обладают и ядра $G_{osc}(z)$ - в начале координат у них максимум, а осцилляции «обрезают» в (18) «хвосты» $f(x)$.

В (4) ситуация другая. У $T(\rho)$ тоже максимум в нуле. Однако функция Бесселя J_1 в нуле равна нулю; тем самым она «обрезает» не «хвост», а важную часть $T(\rho)$. Поэтому для аппроксимации $\varepsilon(\vartheta)$ по методу [11-14] формула (4) на основе свойств функций Бесселя была преобразована к виду

$$\varepsilon(\vartheta) = 1 - \int_0^{\infty} \Gamma(\rho) J_0\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \rho\right) d\rho, \quad (19)$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка, а функция $\Gamma(\rho)$ определяется как $\Gamma(\rho) = -T'(\rho)$. (20)

При выводе (19) из (4) учтено также равенства $J_0(0) = 1$ и

$$T(0) = 1; T(\infty) = 0. \quad (21)$$

Функция Бесселя нулевого порядка имеет уже нужный вид – абсолютный максимум в нуле и убывание экстремумов с ростом аргумента. Т.е. интегральное преобразование (19) по структуре теперь аналогично интегралам в [11-14].

Заметим, что численный расчет $\varepsilon(\mathcal{G})$ по (19) вместо (4) бессмысленен, т.к., если $T(\rho)$ - это численный расчет тройного интеграла, то $\Gamma(\rho)$ - расчет тройного интеграла плюс численный расчет производной от $T(\rho)$, что само по себе отдельная задача. Поэтому для получения точных $\varepsilon(\mathcal{G})$ использовались либо аналитически известные $\Gamma(\rho)$, либо численный счет по формуле (4).

Итак, будем искать приближение для $\varepsilon(\mathcal{G})$ на базе интеграла (19). Функция $\Gamma(\rho)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\Gamma(0) = \frac{2}{\pi\rho_2}; \quad \int_0^\infty \Gamma(\rho)d\rho = 1; \quad \int_0^\infty \Gamma(\rho)\rho^2 d\rho = \Sigma_{eff} / \pi. \quad (22)$$

Третье равенство в (22) вытекает из (8), второе – из определения (20) с учетом (21), а первое - из равенства $\bar{T}'(0) = -\frac{2}{\pi\rho_2}$, полученного в [8] для однородного поля на апертуре и обобщенного в [2] для неоднородного (использовано в (10)).

Из (20-21) также следуют равенства, связывающие моменты функций $\Gamma(\rho)$ и $T(\rho)$, играющих роли плотностей вероятности в определении этих моментов

$$\int_0^\infty \Gamma(\rho)\rho^n d\rho = n \int_0^\infty T(\rho)\rho^{n-1} d\rho = \tilde{I}_n. \quad (23)$$

Моменты в (23) помечены тильдой для отличия их от используемых далее нормированных моментов (37).

Возьмем сначала случай однородного поля, когда многие характеристики имеют ясную геометрическую интерпретацию. А потом перейдем к неоднородному полю.

Однородное поле на апертуре

Для удобства сравнения функций введем вместо (20) безразмерную функцию

$$\tilde{\Gamma}(\zeta) = \frac{\pi\rho_2}{2}\Gamma(\rho = \rho_2\zeta) = -\frac{\pi}{2}T'_\zeta(\rho = \rho_2\zeta) \quad (24)$$

от безразмерного аргумента

$$\zeta = \rho / \rho_2, \quad (25)$$

где ρ_2 определено (11) и равно здесь (12). Тогда равенства (22) перейдут в

$$\tilde{\Gamma}(0) = 1; \quad \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\zeta)d\zeta = \pi/2; \quad \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\zeta)\zeta^2 d\zeta = \mu^2\pi/2. \quad (26)$$

Во всех моделях $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ будем считать, что параметр μ (16) известен и модель $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ удовлетворяет (26). Тогда у аппроксимации (19) будет с точной функцией одинаковое поведение (7) в начале координат и одинаковая асимптотика (10) на бесконечности.

Формула (19) через (24) переписывается в виде

$$\varepsilon(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) J_0(\Delta_2 \zeta) d\zeta, \quad (27)$$

где по аналогии с (15) для $\varepsilon(\vartheta)$ введен безразмерный аргумент $\Delta_2 = 2\pi(\rho_2/\lambda)\vartheta$.

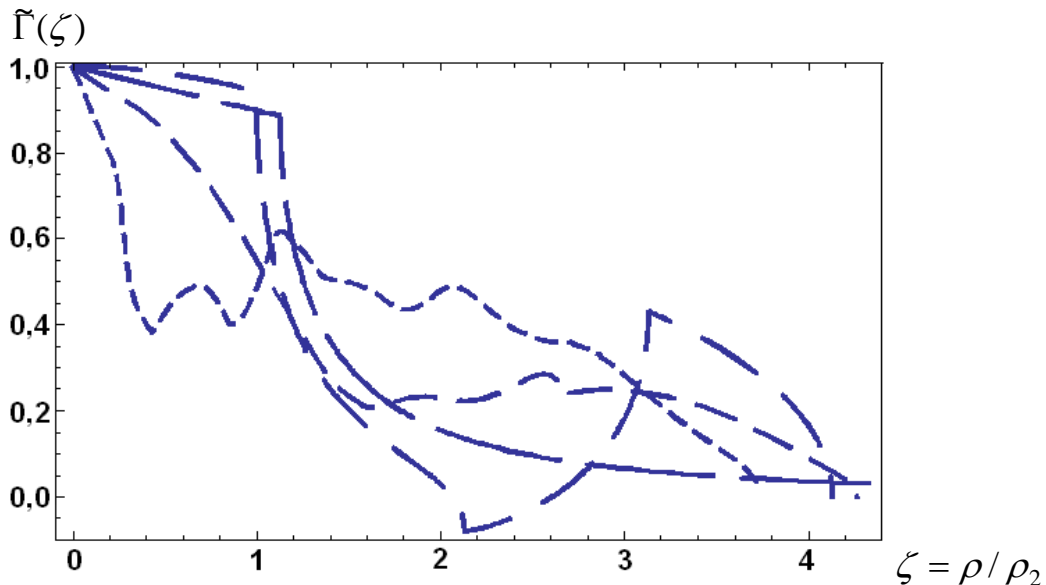


Рис.1

Функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для четырех разных апертур при значении параметра $\mu = \rho_1/\rho_2 = 1,77$. Формы апертур (по возрастанию длины штрихов кривых): 3O1 ($d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$); 3O2 ($d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$); прямоугольник с отношением сторон $a/b = 9,84$ («хвост» кривой простирается до $\zeta = 8,8$); кольцо с отношением диаметров $d = 0,516$. Вид 3O показан на рис.3.

Согласно (7,10), $\varepsilon(\Delta_2)$ имеет при малых и больших Δ_2 вид, соответственно,

$$\varepsilon(\Delta_2) \underset{\Delta_2 \rightarrow 0}{\cong} \frac{1}{4} (\Delta_2 \mu)^2 \quad \text{и} \quad \varepsilon(\Delta_2) \underset{\Delta_2 \rightarrow \infty}{\cong} 1 - \frac{(2/\pi)}{\Delta_2}. \quad \text{И, если на графике с абсциссой } \Delta_2$$

начертить две функции (14) от $\Delta_1 = \mu\Delta_2$ и Δ_2 , то точная $\varepsilon(\Delta_2)$ в начале координат пойдет по первой кривой, а в конце перейдет на вторую. Как следует из (4), $\varepsilon(\Delta_2)$ неубывающая, стремится к единице и может иметь точки перегиба вдоль всей области определения (темные кольца Фраунгофера на дифракционной картине). Характер перехода $\varepsilon(\Delta_2)$ с одной кривой (14) на другую при данном μ может быть разным - плавным постепенным, почти горизонтальным перескоком вблизи верхнего «плато» или переходом с несколькими точками перегиба. На рис.1 приведены 4 функции (24) для разных форм апертур при $\mu = 1,77$. Для этого из [2] выбраны апертуры с качественно разным видом функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (см. рис.2): прямоугольная, кольцевая и два

зубчатых отверстия 3О (см. рис.3). На рис.2 функции для 3О приведены в ограниченной области, т.к. их численный расчет требует много времени.

$\varepsilon(\Delta_2)$

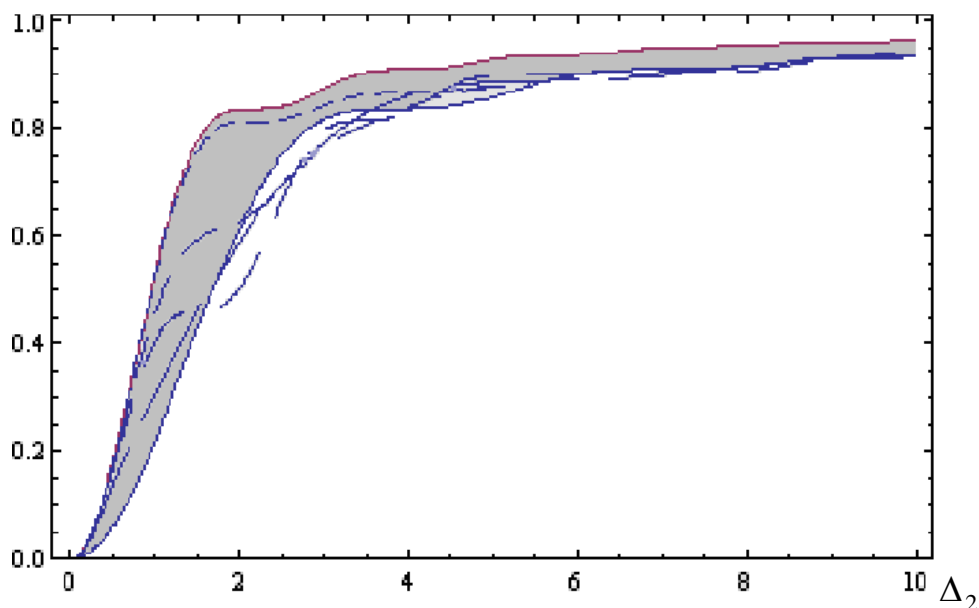


Рис.2

Функции $\varepsilon(\Delta_2)$ для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с рис.1. Штриховые кривые соответствуют кривым на рис.1. Сплошными линиями изображены функции Релея (14) от аргумента $\mu\Delta_2$ (левее) и Δ_2 (правее). Область между ними заштрихована для удобства наблюдения перехода между ними точных $\varepsilon(\Delta_2)$.

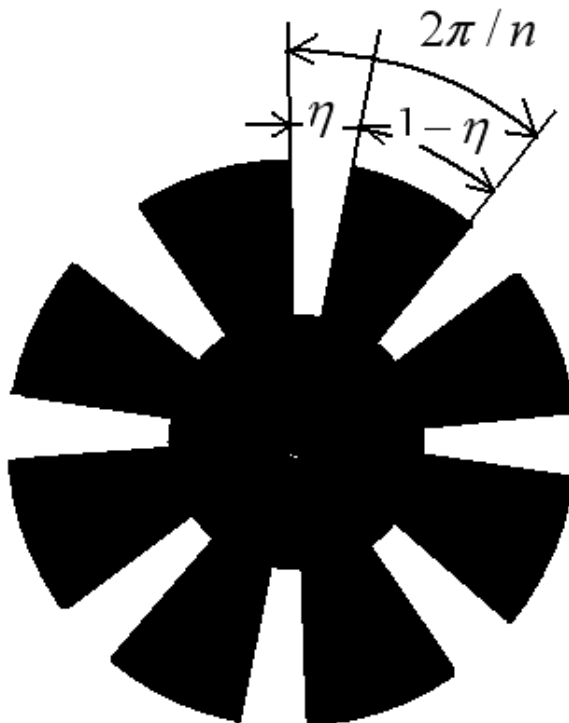


Рис.3

Зубчатое отверстие 3О (закрашено), для которого считались функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon(\Delta_2)$ при однородном поле. Отверстие обладает осью симметрии порядка n . Форма 3О определяется тремя параметрами – отношением радиусов концентрических кругов d , n и коэффициентом заполнения экрана η .

ЗО на рис.3 определены 3-мя параметрами, заметно влияющими на вид функций (24) и (27): отношение диаметров d , число вырезов n и коэффициент заполнения η (экранная доля кольца). Для численного расчета $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ ЗО была написана программа, использованная далее и для расчета $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ кольцевых апертур с неоднородными полями. С ней были получены десятки $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для разных наборов (d, n, η) , из которых для рис.1 выбраны два с $\mu = 1,77$: $d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$ (ЗО1) и $d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3$ (ЗО2). Величина $\mu = 1,77$ довольно большая для однородного поля. У прямоугольника она соответствует отношению измерений $a/b = 9,84$, у кольца – отношению диаметров $d = 0,516$. Для кольца и прямоугольника $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ выражаются аналитически

$$\Gamma_{ring}(\zeta) = \frac{\left\{ \sqrt{(\mu^2 + 1)^2 - \zeta^2}, \zeta \leq \mu^2 + 1 \right\} + \left\{ \sqrt{(\mu^2 - 1)^2 - \zeta^2}, \zeta \leq \mu^2 - 1 \right\} - \left\{ 2\sqrt{\mu^4 - \zeta^2} \sqrt{\zeta^2 - 1} / \zeta, 1 \leq \zeta \leq \mu^2 \right\}}{2\mu^2}, \quad (28)$$

$$\Gamma_{rect}(\zeta) = \begin{cases} 1 - \theta, \theta \leq 0,5 \left(1 - \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right) \\ 0,5 \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} - \sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right)^2 - 4/\zeta^2}}{-\sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right)^2 - 4/\zeta^2}} \right], 0,5 \left(1 - \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right) \leq \theta \leq 0,5 \left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right) \\ \left[\frac{\theta - 0,5 \sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right)^2 - 4/\zeta^2} - \sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right)^2 - 4/\zeta^2}}{-0,5 \sqrt{\left(1 - \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right)^2 - 4/\zeta^2}} \right], 0,5 \left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right) \leq \theta \leq \sqrt{1 - 2/(\pi\mu^2)} \end{cases}, \quad (29)$$

где $\theta = \frac{\zeta}{\pi\mu^2}$. Выражения (28-29) даны от параметра μ , который для прямоугольника

равен $\mu = (a+b)/\sqrt{\pi ab} \in [2/\sqrt{\pi} \approx 1,13, \infty)$, а для кольца - $\mu = \sqrt{(1+d)/(1-d)} \in [1, \infty)$.

Из рис.1 видно, как могут различаться $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ при одном и том же μ , а из рис.2 - как различны переходы точной функции $\varepsilon(\Delta_2)$ с одной функции (14) на другую.

Для аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ опробовались несколько простых моделей $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. Их выбор диктовался тремя соображениями. Во-первых, чтобы модель $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ допускала аналитический расчет ИП (27) с ядром J_0 , или чтобы интеграл (27) сводился к однопараметрическому и мог быть затабулирован. Во-вторых, параметры модели

должны легко считаться через характеристики $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (т.е. $T(\zeta)$). И, в-третьих, лучше брать характеристики $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, подходящие и для неоднородного поля на апертуре.

Функций, допускающих аналитический расчет ИП (27) с ядром $J_0(qx)$, не так уж много. Возьмем постоянную и линейную функции (обе есть в (29) и интегралы от них в произвольных пределах выражаются через известные спецфункции) и функцию

$$f(x) = \sqrt{k^2 - x^2}, \quad (30)$$

определяющую $\tilde{\Gamma}_{circ}(\zeta) = \sqrt{1 - (\zeta/2)^2}$ круглой апертуры и два первых слагаемых в (28) кольцевой апертуры. Интеграл (27) от (30) на интервале $[0; k]$ дает функцию (14). В одной из моделей рассмотрена также функция вида третьего слагаемого в (28)

$$f(x) = \sqrt{k^2 - x^2} \sqrt{x^2 - 1} / x, \quad (31)$$

интеграл от которой с $J_0(qx)$ на интервале $[1; k]$ не рассчитывается аналитически, но зависит от одного параметра и при необходимости может быть затабулирован.

Аналитически интегрируется еще произведение функции (30) с линейной, но в наши модели такие функции не «вписались».

Заметим, что (28-29) целиком аналитически не интегрируются с $J_0(qx)$ (только некоторые их части), и (27) для них рассчитываются через одинарные интегралы.

Взятые модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ удовлетворяли $\tilde{\Gamma}(0) = 1$ (см.(26)) и зависели от 3-5 параметров. Выполнение оставшихся двух равенств (26) для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ сводит число свободных параметров к 1-3. В [15-16] рассмотрено несколько таких моделей и разные источники свободных параметров. Здесь приведены результаты этого анализа и показаны лучшие модели с наиболее удачным выбором свободных параметров.

Первая группа рассмотренных моделей $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ - кусочно-линейные модели с 1-3 (после выполнения (26)) свободными параметрами: три модели с 1-м параметром, две - с 2-мя и две - с 3-мя. Вывод из анализа 4-х примеров рис.1 такой: модели с одним свободным параметром, несмотря на простоту и, соответственно, грубость приближения $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, дают хорошее приближение $\mathcal{E}(\Delta_2)$. Лучшими оказались модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, показанные на рис.4. Назовем их для краткости, соответственно, прямоугольной и треугольной. Параметры их вычисляются из квадратных уравнений. Остальные рассмотренные модели «проигрывают» моделям рис.4 по нескольким пунктам: усложняются уравнения для расчета параметров; для двух-, трехпараметрических моделей требуется больше источников этих параметров; чаще нет решений модели. Это верно и для случаев неоднородных полей на апертуре, рассмотренных ниже.

Конечно, чем больше параметров в модели, тем шире возможности аппроксимации. Но указанные недостатки сводят эти преимущества на нет. Потенциальные возможности моделей рис.4 (через ручной подбор свободного параметра) позволяют

еще улучшить приближение $\varepsilon(\Delta_2)$. А улучшения приближения $\varepsilon(\Delta_2)$ за счет усложнения самих моделей при рассмотренных источниках параметров незначительны и то лишь для некоторых моделей для некоторых апертур.

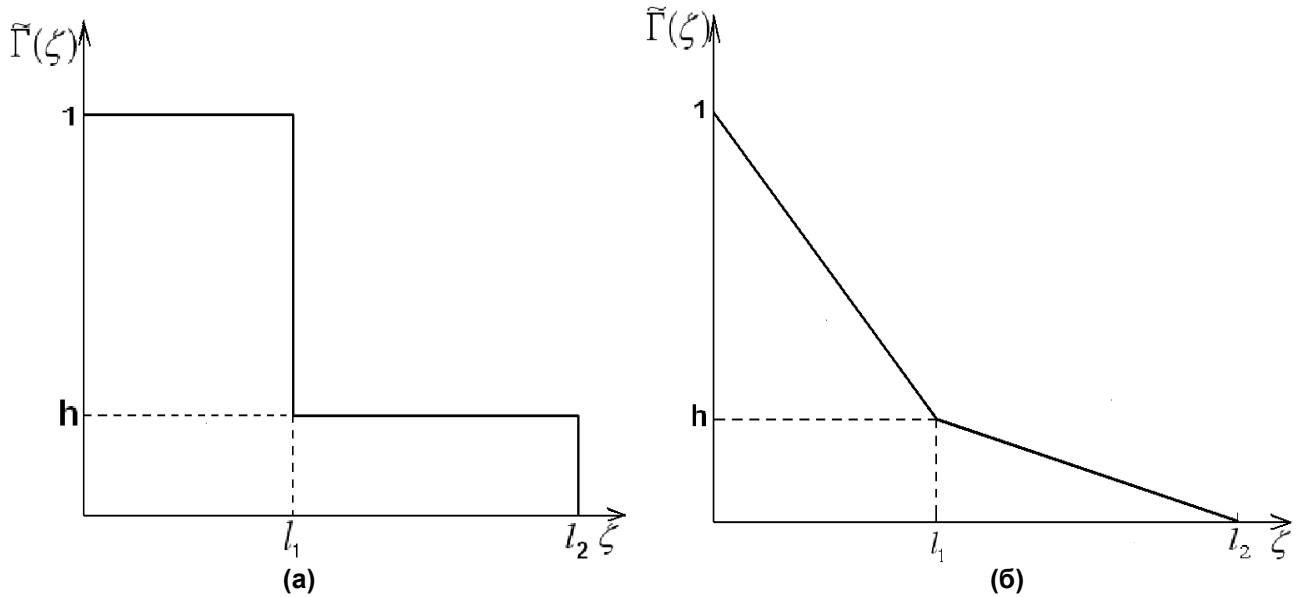


Рис.4

Однопараметрические модели функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. Начальное значение $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и два из трех параметров на графике определяются уравнениями (26), один параметр – свободный. По смыслу $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для обеих моделей $0 < l_1 \leq l_2$, а значение h не регламентировано, - может быть и отрицательное, и нулевое.

Параметры обеих моделей рис.4 рассчитываются по простой схеме. Будем считать искомым свободным параметром величину

$$a = l_1 + l_2, \quad (32)$$

Тогда из уравнений (26) имеем для модели рис.4а

$$b = l_1 l_2 = \frac{\pi(a^2 - 3\mu^2)}{\pi + 2a}; \quad h = \frac{\pi - 2l_1}{2(l_2 - l_1)}, \quad (33)$$

а для модели рис.4б

$$b = l_1 l_2 = \frac{\pi(a^2 - 6\mu^2)}{\pi + a}; \quad h = \frac{\pi - l_1}{l_2}. \quad (34)$$

Для существования двух действительных положительных корней l_1, l_2 в (32-34) необходимо и достаточно, чтобы для a в модели рис.4а выполнялось условие

$$a > \mu\sqrt{3}, \quad (35)$$

а в модели рис.4б - условие

$$\left[\begin{array}{l} a > \mu\sqrt{6}, \mu \geq \pi / \sqrt{6} \approx 1,28 \\ \left[\begin{array}{l} \mu\sqrt{6} < a \leq a_1, 1 \leq \mu < \pi / \sqrt{6} \\ a_2 \leq a \end{array} \right. \end{array} \right. , \quad (36)$$

где $a_{1,2}(\mu)$ - положительные корни уравнения $a^3 - 3\pi a^2 + 24\pi\mu^2 = 0$ (по возрастанию). Т.к. для некруглой апертуры даже при однородном поле часто $\mu \geq 1,28$, важна первая строчка в (36). Все примеры данной работы относятся к $\mu \geq 1,28$. Минимальные значения (32), удовлетворяющие (35,36), в таблице 2 обозначены как a_{\min} .

Параметр (32) можно взять из разных источников. В [15-16] рассмотрены некоторые из них.

Отталкиваясь от (26), логично в качестве источника (32) использовать незадействованные в (26) моменты $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (или, согласно (23), моменты $T(\zeta)$), а именно

$$I_1 = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta)\zeta d\zeta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} T(\zeta)d\zeta; I_3 = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta)\zeta^3 d\zeta = 3\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} T(\zeta)\zeta^2 d\zeta; I_4 = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta)\zeta^4 d\zeta = 4\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} T(\zeta)\zeta^3 d\zeta, \quad (37)$$

где (37) выражаются через (23) формулой $I_n = (0,5\pi / \rho_2)^n \tilde{I}_n$. Значения I_n (37) для рассмотренных апертур приведены в таблице 1.

Через I_1 (32) (обозначим как a_{I_1}) для моделей рис.4 вычисляется формулами

$$a_{I_1}^a = 2\pi \frac{3\mu^2 - 2I_1}{8I_1 - \pi^2}; a_{I_1}^b = 6\pi \frac{\mu^2 - I_1}{6I_1 - \pi^2}. \quad (38)$$

Далее покажем, что (38) вполне удачны для моделей рис.4 для всех рассмотренных в работе апертур и полей. Но сравним с (38) и другие варианты (32).

Если в (19) $J_0(x)$ под интегралом разложить в ряд в нуле до третьего члена

$$J_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\cong} 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \dots, \text{ то к (7) добавится следующий член разложения } \varepsilon(\Delta_2)$$

$$\varepsilon(\Delta_2) \underset{\Delta_2 \rightarrow 0}{\cong} \frac{\Delta_2^2 \mu^2}{4} - \frac{\Delta_2^4}{32\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta)\zeta^4 d\zeta = \frac{\Delta_2^2 \mu^2}{4} - \frac{\Delta_2^4}{32\pi} I_4. \quad (39)$$

То есть как источник (32) можно использовать и I_4 из (37). Согласно (39), сохранение I_4 в модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ должно улучшить приближение $\varepsilon(\Delta_2)$ в начале координат. Расчеты показали, что эта поправка мала; замена a_{I_1} на a_{I_4} нигде не улучшила приближение $\varepsilon(\Delta_2)$, хотя везде эти два варианта мало отличались.

Взяв I_4 , для a_{I_4} (32) вместо (38) получим уравнения 4-й степени

$$a^4 - (3\mu^2 + 4A)a^2 - 4\pi Aa - A\pi^2 = 0; A = \frac{10I_4 - 9\pi\mu^4}{(12\mu^2 - \pi^2)\pi} \quad (\text{для модели рис.4а}); \quad (40)$$

$$a^4 - (6\mu^2 + A)a^2 - 2\pi Aa - A\pi^2 = 0; A = \frac{6(5I_4 - 6\pi\mu^4)}{(6\mu^2 - \pi^2)\pi} \quad (\text{для модели рис.4б}). \quad (41)$$

Действительные решения (40-41), удовлетворяющие, соответственно, (35-36), обозначим как $a_{I_4}^{a,\bar{b}}$. Формулы (40-41) применимы при любом поле на апертуре.

Для получения (32) можно также потребовать $l_2 = \zeta_{\max}$, где $\zeta_{\max} = \rho_{\max} / \rho_2$ - наименьшее ζ , для которого $\tilde{\Gamma}, \bar{T}(\zeta \geq \zeta_{\max}) = 0$. Тогда (32) (обозначим его a_ζ) равен $a_\zeta = 0,5 \cdot (\zeta_{\max} + \sqrt{\zeta_{\max}^2 + D})$, где для рис.4а $D^a = 4\pi \frac{\zeta_{\max}^2 - 3\mu^2}{2\zeta_{\max} - \pi}$, а для рис.4б

$D^b = 4\pi \frac{\zeta_{\max}^2 - 6\mu^2}{\zeta_{\max} - \pi}$. Для выполнения $a_\zeta \geq l_2$ необходимо $D^{a,b} \geq 0$. Вместе с (35-

36) это приводит к ограничениям на ζ_{\max} :

$$\zeta_{\max} \geq \sqrt{3}\mu; 0 < \zeta_{\max} < \pi/2 \quad (\text{для модели рис.4а}); \quad (42)$$

$$\left[\begin{array}{l} \zeta_{\max} \geq \sqrt{6}\mu \\ 0 < \zeta_{\max} < \pi \end{array} \right], \quad \mu \geq \pi/\sqrt{6} \quad (\text{для модели рис.4б}). \quad (43)$$

$$\left[\begin{array}{l} \zeta_{\max} > \pi \\ 0 < \zeta_{\max} \leq \sqrt{6}\mu \end{array} \right], \quad 1 \leq \mu \leq \pi/\sqrt{6}$$

Так как все наши примеры соответствуют $\mu \geq \pi/\sqrt{6}$, то в (43) важна первая строчка.

Значения ζ_{\max} для рассмотренных примеров также приведены в таблице 1. Условиям (42) удовлетворяет все апертуры рис.1, а (43) - только прямоугольник.

Таблица 1

Численно рассчитанные параметры функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для 7 апертур и полей на них.

	μ	I_1	I_3	I_4	ζ_{\max}	\varkappa
Прямоугольник $a/b = 9,84$	1,77	1,852	21,956	126,624	8,786	0,102
Кольцо $d = 0,516$	1,77	1,996	15,541	53,223	4,133	0
Зубчатое отверстие 1	1,77	2,316	12,014	31,913	3,735	1,017
Зубчатое отверстие 2	1,77	2,124	13,934	43,410	4,265	0,305
Пример 1	3,367	3,606	112,183	781,281	20,833	0,754
Пример 2	5,335	4,352	701,305	12009,90	17,896	0,768
Пример 3	12,033	10,045	8553,33	336280,5	34,307	-

Еще один возможный источник (32) (только для модели рис.4б) – коэффициент при втором члене разложения $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в ряд; обозначим его как \varkappa :

$$\tilde{\Gamma}(\zeta) = 1 - \varkappa\zeta + \dots \quad (44)$$

Ряд, полученный для (27) в [9] (и подробно исследованный в [17]), представлен лишь нечетными производными $\bar{T}(\zeta)$ (четными производными $\tilde{\Gamma}(\zeta)$), в нем нет \mathfrak{A} из (44)

$$\varepsilon(\Delta_2) \cong 1 + \frac{\bar{T}'_\zeta(0)}{\Delta_2} - \frac{1}{2} \frac{\bar{T}''_\zeta(0)}{\Delta_2^3} + \dots = 1 - \frac{2}{\pi\Delta_2} + \frac{\tilde{\Gamma}''_\zeta(0)}{\pi\Delta_2^3} + \dots \quad (45)$$

Известно, что в ряду (45) только два первых члена является асимптотическим разложением (27) на бесконечности (ср. (10)). Это видно и на примере асимптотического разложения функции (14) [18]

$$\varepsilon_{circ}(\Delta) \cong 1 - \frac{2}{\pi\Delta} + \frac{\cos 2\Delta}{\pi\Delta^2} - \frac{1 - \sin 2\Delta}{4\pi\Delta^3} + \dots,$$

для которого ряд (45) не содержит членов с тригонометрическими функциями, т.е. в нем полностью выпадает слагаемое вида Δ^{-2} .

Поэтому \mathfrak{A} (44) тоже может задавать (32). Но есть трудности его расчета в общем виде. При однородном поле \mathfrak{A} определяются в (6) апертурой (как и второе слагаемое (45), согласно [8]) и при данном μ могут быть очень различны (см. рис.1).

В [3] было показано, что неоднородность поля дает вклады лишь в четные члены разложения $\bar{T}(\zeta)$ в ряд Тейлора в нуле; значит, и в \mathfrak{A} . Тогда линейный член от апертуры и квадратичный член из неоднородностей дадут в сумме (см. также [16])

$$\bar{T}(\zeta) = 1 - \zeta \frac{2}{\pi} + \zeta^2 \frac{\rho_2^2 \cdot \iint_{\Sigma} U^*(\vec{r}) \nabla_{\perp} U(\vec{r}) d^2\vec{r}}{4E_{\Sigma}} + \dots \quad (46)$$

Но в (46) отсутствует вклад в ζ^2 от апертуры. Не имея в общем виде выражения для этого вклада, получим \mathfrak{A} в данной работе следующим образом. При однородном поле для апертур рис.1 возьмем \mathfrak{A} из (28-29) и численно из $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для ЗО рис.3. А при неоднородном поле для трех рассмотренных далее примеров в силу радиальной симметрии поля и апертуры вклад в \mathfrak{A} дает лишь третье слагаемое (46), т.е.

$$\mathfrak{A} = \pi E_{\Sigma} \iint_{\Sigma} U^*(\vec{r}) \nabla_{\perp} U(\vec{r}) d^2\vec{r} / \left(\oint_C |U|^2 dl \right)^2. \quad (47)$$

Через \mathfrak{A} параметр (32) выражается формулой

$$a_{\mathfrak{A}} = \sqrt{\pi(6\mu^2\mathfrak{A} - \pi) / (\pi\mathfrak{A} - 1)}. \quad (48)$$

Значения \mathfrak{A} для апертур рис.1 тоже приведены в таблице 1 (для прямоуголь-

ника $\mathfrak{A} = 1/(\pi\mu^2)$, для зубчатых отверстий $\mathfrak{A} = \frac{n(1-\eta + d^2\eta)}{\pi[1-\eta + d\eta + n(1-d)/\pi]^2}$). Для

прямоугольника и кольца (48), не удовлетворяют (36), а для ЗО2 под корнем в (48) отрицательное число. Т.е. из рис.1 только у ЗО1 есть модель рис.4б через \mathfrak{A} .

Все описанные значения параметра (32) для апертур рис.1 (и для примеров с неоднородным полем, рассмотренных ниже) собраны в таблице 2.

Функции $\varepsilon_{\text{mod}}^{a,\delta}(\Delta_2)$ из (27) для моделей $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис.4а,б равны, соответственно,

$$\varepsilon_{\text{mod}}^a(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi} [l_1(1-h)F(l_1\Delta_2) + l_2hF(l_2\Delta_2)]; \quad (49)$$

$$\varepsilon_{\text{mod}}^\delta(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi(l_2-l_1)} \left[l_1((1-h)l_2-l_1)F(l_1\Delta_2) + l_2^2hF(l_2\Delta_2) - \frac{((1-h)l_2-l_1)J_1(l_1\Delta_2) + l_2hJ_1(l_2\Delta_2)}{\Delta_2} \right], \quad (50)$$

где $F(x) = J_0(x) + \frac{\pi}{2}(J_1(x)H_0(x) - J_0(x)H_1(x))$; $J_i(x)$ и $H_i(x)$ - функции Бесселя и Струве порядка i .

Таблица 2

Значения a (32) для 7 апертур и полей на них для моделей рис.4а,б: минимально допустимые a_{\min} ; a_{I_1} - соответствующие сохранению момента I_1 ; a_{I_4} - соответствующие сохранению момента I_4 ; a_ζ - соответствующие условию $l_2 = \zeta_{\max}$; a_ε - соответствующие сохранению ε (только для рис.4б); диапазон оптимальных значений a_\approx (рассчитан только для модели рис.4б). Прочерки означают, что соответствующий параметр не существует или не удовлетворяет условиям (35-36).

		a_{\min}	a_{I_1}	a_{I_4}	a_ζ	a_ε	a_\approx
Прямоугольник $a/b = 9,84$	рис.4а	3,07	7,23	8,55	10,23		
	рис.4б	4,34	19,45	12,92	11,59	—	13-15
Кольцо $d = 0,516$	рис.4а	3,07	5,57	5,38	5,06		
	рис.4б	4,34	10,16	7,36	—	—	7-9
Зубчатое отверстие 1	рис.4а	3,07	3,46	3,65	4,47		
	рис.4б	4,34	—	—	—	4,78	4,34-4,7
Зубчатое отверстие 2	рис.4а	3,07	4,54	4,71	5,24		
	рис.4б	4,34	6,62	5,91	—	—	6,5-7
Пример 1	рис.4а	5,83	8,87	9,55	22,30		
	рис.4б	8,25	12,38	12,06	23,59	10,51	12-13
Пример 2	рис.4а	9,24	19,31	22,63	19,08		
	рис.4б	13,07	27,98	28,72	19,53	16,87	20-22
Пример 3	рис.4а	20,84	36,93	51,02	35,32		
	рис.4б	29,48	50,40	63,40	35,19	—	39-40

Расчеты (49-50) для апертур рис.1 при (32) из табл.2 показали (см. [15-16]), что обе модели хорошо и близко по точности воспроизводят реальную $\varepsilon(\Delta_2)$. Треугольная модель предпочтительней, т.к. в рассчитанных примерах (50) неубывает, что соответствует свойству $\varepsilon(\Delta_2)$. А (49) как правило имеет локальные экстремумы.

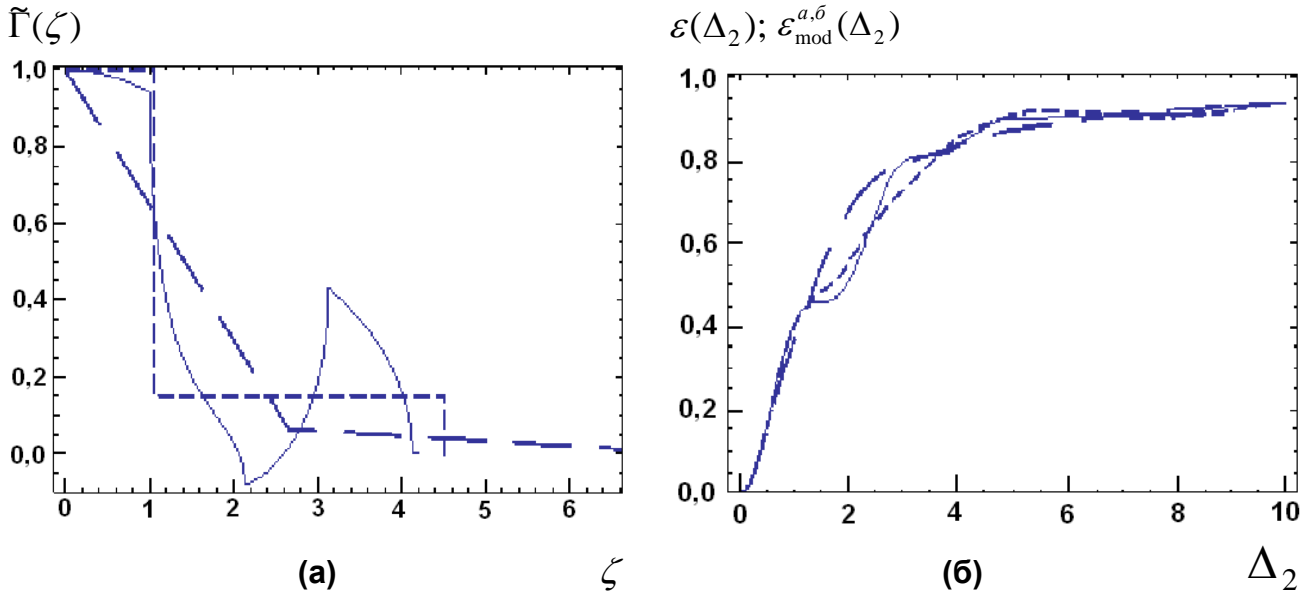


Рис.5

Для кольцевой апертуры с $\mu = 1,77$ ($d = 0,516$):

(а) - графики точной функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых рис.4а,б (штриховые линии), отвечающих параметрам $a = a_{I_1}$ из табл.2. У кривой (50) на графике обрезан «хвост»;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{a,b}(\Delta_2)$ (49-50), рассчитанных для модельных кривых рисунка (а) (типы линий соответствуют).

В прямоугольной модели (49) при $a = a_\zeta$ приближение во всех случаях хуже, чем при $a = a_{I_1}$ или $a = a_{I_4}$, а последние близки по точности. В треугольной модели (50) при любом a из табл.2 получались хорошие приближения.

Для оценки потенциальной возможности модели (50) в рассмотренных примерах параметр (32) подбирался вручную (a_\approx в табл.2) для наилучшей аппроксимации точной $\varepsilon(\Delta_2)$. Подробно $\varepsilon(\Delta_2)$ и (49-50) для апертур рис.1 сравниваются в [15-16]. Здесь на рис.5-6 показаны два наихудших примера - для кольцевой апертуры и ЗО1.

При $a = a_{I_1}$ во всех рассмотренных случаях отклонение $\varepsilon_{\text{mod}}^{\delta}(\Delta_2)$ (50) от $\varepsilon(\Delta_2)$ почти на всем интервале Δ_2 укладывается в диапазон 10-15%.

В [15-16] была рассмотрена еще одна модель $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, взятая из $\tilde{\Gamma}_{\text{ring}}(\zeta)$ (28) для кольцевой апертуры и состоящая из двух функций вида (30), соответствующих $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ круга, и функции вида (31) - интерференционного члена. В $\tilde{\Gamma}_{\text{ring}}(\zeta)$ параметры всех слагаемых определяются μ (16); в модели они предполагались свободными

$$\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta) = \left\{ \alpha \sqrt{a^2 - \zeta^2}, \zeta \leq a \right\} + \left\{ \beta \sqrt{b^2 - \zeta^2}, \zeta \leq b \right\} + \left\{ \gamma \sqrt{c^2 - \zeta^2} \sqrt{\zeta^2 - g^2} / \zeta, g \leq \zeta \leq c \right\}. \quad (51)$$

В (51) 7 параметров, на которые наложим некоторые ограничения по смыслу:
 $0 < a \leq b; 0 < g \leq c; c \leq b; \alpha, \beta > 0,$ (52)

где отношения a и b взяты для определенности; второе неравенство естественно; а третье и четвертое - из типичности вида $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ (см. (56)). Последнее неравенство в (52), возможно, не обязательно, как не обязательно условие $\gamma \leq 0$, соответствующее (28). Но т.к. и с ограничениями (52) для каждого рассмотренного примера нашлись по несколько решений, то не удовлетворяющие (52) были отброшены.

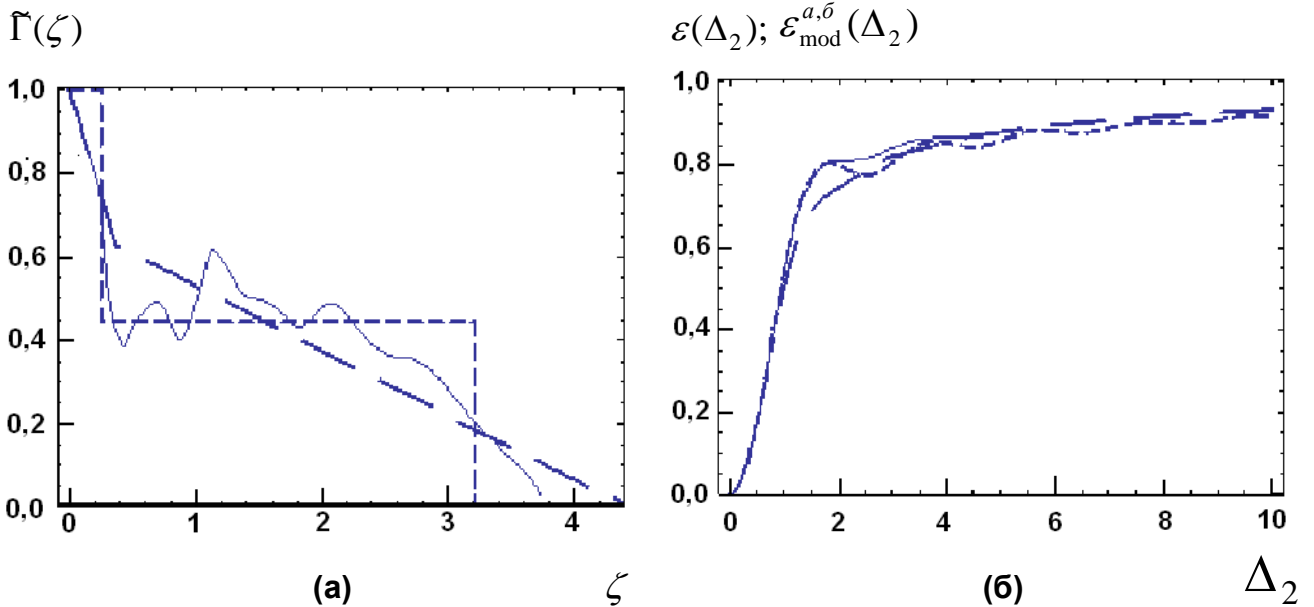


Рис.6

Для зубчатой апертуры 301 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,77; n = 10; \eta = 0,25$):

(а) - графики точной функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых рис.4а (линия с короткими штрихами; $a = a_{I_1}$) и рис.4б (линия с длинными штрихами; $a = a_x$);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{a,\beta}(\Delta_2)$ (49,50), рассчитанных для модельных кривых рисунка (а) (типы линий соответствуют).

Учитывая (26), в (51) остаются 4 свободных параметра. Поиск их через моменты $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (37) приводит к системе уравнений, где в уравнениях сохранения нечетных моментов $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ отношение g/c входит в аргументы эллиптических интегралов, т.е. система становится интегральной. Чтобы избежать этого модель (51-52) была упрощена наложением связи на g и c , соответствующей их связи в $\tilde{\Gamma}_{\text{ring}}(\zeta)$ (28),

$$p = g/c = 1/\mu^2. \quad (53)$$

Тогда эллиптические интегралы, зависящие от p , в уравнениях сохранения $I_{1,3}$ (37) стали числовыми коэффициентами в системе алгебраических уравнений на

3 остальных параметра. Для всех апертур рис.1 было получено по 2-3 действительных решения модели (51-53) через $I_{1,3,4}$ (37), даже для кольцевой апертуры. И все они, несмотря на различие соответствующих функций (51), дали близкие и хорошие аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ (лучше, чем модели рис.4 – см. [15]). Большинство этих решений приблизительно отвечали одному из двух равенств (не имеющих место в (28))

$$c = a \quad (54)$$

или

$$c = b. \quad (55)$$

Поэтому в [15] была рассмотрена модель (51-54) (тогда остаются 2 свободных параметра, вычисляемых из моментов $I_{1,3}$ (37)). Она тоже дала по 1-2 решения для апертур рис.1; причем точность аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ при этом оказалась даже лучше точности аппроксимации трехпараметрической модели (51-53). Ручной подборкой параметров модели (51-54) в [15] удалось добиться почти совпадения модельных функций $\varepsilon(\Delta_2)$ с точной, хотя решения через $I_{1,3}$ им не сильно уступают.

В дополнение к рассмотренным в [15] моделям была рассмотрена двухпараметрическая модель (51-53,55) также с двумя недостающими параметрами из $I_{1,3}$. И однопараметрические модели (51-53), где $b = \zeta_{\max}$ и выполнено одно из условий (54-55). Оставшийся один параметр также рассчитывался из сохранения момента I_1 .

Таблица 3

Параметры модели (51-53,55), рассчитанные через моменты $I_{1,3}$ (из уравнений (57-58) в [15]).

	a	$b = c$	g	α	β	γ
Прямоугольник $a/b = 9,84$	1,655	12,533	4,000	0,560	0,00583	-0,00619
	1,610	9,350	2,984	0,556	0,0113	-0,0105
Кольцо $d = 0,516$	1,390	11,215	3,580	0,612	0,0134	-0,0148
Зубчатое отверстие 1	0,136	7,430	2,372	3,447	0,0713	-0,0782
	0,232	3,573	1,141	2,169	0,139	0,0180
Зубчатое отверстие 2	0,891	8,577	2,738	0,749	0,0388	-0,0424
	0,957	4,237	1,353	0,723	0,0726	0,00399
Пример 1	0,530	34,022	3,001	1,331	0,00867	-0,00874
	0,308	9,613	0,848	0,885	0,0756	-0,0660
Пример 2	0,896	100,723	3,539	0,908	0,00185	-0,00185
Пример 3	27,686	87,323	0,603	0,000998	0,0111	-0,0111
	15,663	65,967	0,456	0,00384	0,0142	-0,0142

В двухпараметрической модели (51-53,55) с сохранением $I_{1,3}$ решения находятся из той же системы уравнений (57-58) из [15], что и в модели (51-54), только теперь из действительных решений системы берутся решения, отвечающие вместо первого неравенства из (52) противоположному неравенству $0 < b \leq a$. А в конце

меняются местами a с b , α с β и полагается (55). Эта модель для апертур рис.1 оказалась несколько точнее двухпараметрической модели в предположении (54). Параметры модели для всех рассмотренных апертур при однородном и при неоднородном поле приведены в таблице 3 (аналог таблицы 6 и второй части таблицы 9 в [15])

В однопараметрической модели (51-54) с $b = \zeta_{\max}$ и сохранением I_1 . недостающий параметр a (32) находится из кубического уравнения

$$a^3(2-b)[f_1 - (1-p^2)] + a^2 \{b(2-b)f_1 + (1-p)^2[3I_1p(2+p) - b(2(1+p)^2 - b)]\} + a[f_1(2b^2 - 8\mu^2) + (1-p)^2(8\mu^2 - 3I_1b)] + b(1-p)^2(8\mu^2 - 3I_1b) = 0,$$

откуда остальные параметры вычисляются как $\gamma = \frac{3I_1 - 2b - a(2-b)}{a^2 \{a[f_1 - (1-p)^2] - b(1-p)^2\}}$,

$$\alpha = \frac{b - 2 + \gamma a^2(1-p)^2}{a(b-a)}, \quad \beta = (1 - \alpha a) / b.$$

В однопараметрической модели (51-53,55) с $b = \zeta_{\max}$ и сохранением I_1 . недостающий параметр находится из квадратного уравнения для $x = a + b$

$$x^2[(1-p)^2(b^2 - 3I_1) + b(2-b)f_1] + x\{(1-p)^2(8\mu^2 + 3I_1b - 2b^3) - b^2(2-b)[f_1 + (1-p)^2]\} + b[(2b^2 - 8\mu^2)f_1 - bp(1-p)^2(2+p)(b^2 - 3I_1)] = 0,$$

откуда параметры вычисляются по формулам $\gamma = \frac{3I_1 - b^2 - x(2-b)}{b^2[bf_1 - x(1-p)^2]}$, $a = x - b$,

$$\beta = \frac{2 - a - \gamma b^2(1-p)^2}{b(b-a)}, \quad \alpha = (1 - \beta b) / a.$$

В приведенных уравнениях через $f_1(p) = (1+p^2)E(\sqrt{1-p^2}) - 2p^2K(\sqrt{1-p^2})$ обозначено выражение от двух полных эллиптических интегралов 1 и 2 рода -

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}} \text{ и } E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Параметры однопараметрической модели (51-53) при $b = \zeta_{\max}$ и выполнении (54) или (55), когда недостающий параметр вычисляется через I_1 по выписанным выше формулам, приведены в таблице 4.

Для всех апертур рис.1 все рассмотренные варианты двух- и однопараметрических моделей (51-53) с условием (54) или (55) и сохранением $I_{1,3}$ или выполнением $b = \zeta_{\max}$ плюс сохранение I_1 , имели по 1-2 решения и дали близкие и хорошие

приближения $\varepsilon(\Delta_2)$, точность которых не хуже, а нередко лучше, чем с помощью линейных моделей рис.4. Даже для кольцевой апертуры, точная функция (28) которой не удовлетворяет ни (54), ни (55), поскольку в (28) всегда $a < c < b$.

Таблица 4

Параметры однопараметрической модели «кольца» (51-52), удовлетворяющей условиям $g/c = 1/\mu^2$ (53), $b = \zeta_{\max}$ и $c = a$ (54) или $c = b$ (55), рассчитанные через момент I_1 .

	a	b	c	g	α	β	γ
Прямоугольник $a/b = 9,84$	2,454	8,786	$c = a$	0,783	0,397	0,00287	-0,220
	2,820	8,786	$c = a$	0,900	0,346	0,00278	-0,262
	1,614	8,786	$c = b$	2,804	0,553	0,0122	-0,0107
Кольцо $d = 0,516$	3,233	4,133	$c = a$	1,032	0,102	0,162	-0,379
Зубчатое отверстие 1	0,0178	3,735	$c = b$	1,192	22,201	0,162	-0,041
Зубчатое отверстие 2	1,010	4,265	$c = a$	0,322	0,679	0,0738	-0,0726
	1,824	4,265	$c = a$	0,582	0,376	0,07353	-0,382
	0,930	4,265	$c = b$	1,361	0,716	0,0786	-0,00552

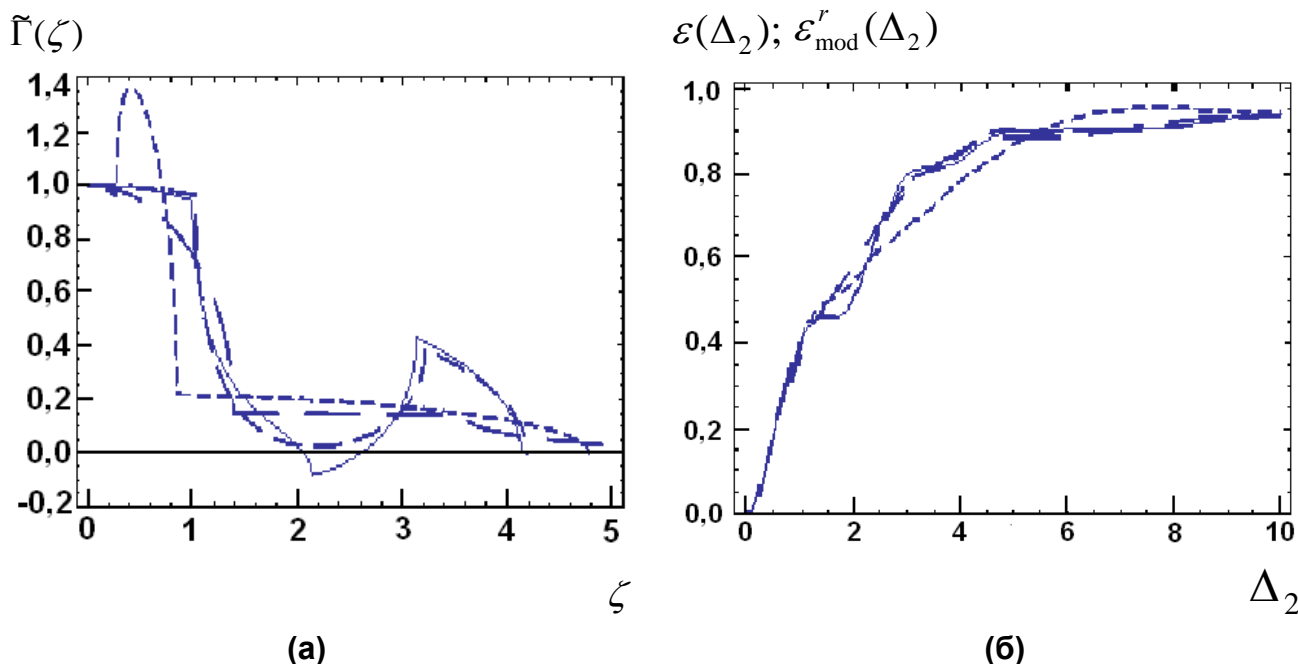


Рис.7

Для кольцевой апертуры с $\mu = 1,77$ ($d = 0,516$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и кривых двухпараметрической модели (51-53) (штриховые линии) в предположении $c = a$ (короткие и средние штрихи) или $c = b$ (длинные штрихи). Недостающие параметры рассчитаны из $I_{1,3}$. Хвост последней кривой обрезан на графике.

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^r(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых рисунка (а) (штриховые линии; типы линий соответствуют).

Функции $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ для (51) имеют вид (первые два слагаемых в (27) интегрируются аналитически и дают функции типа (14), а последнее остается в виде интеграла, который можно свести к интегралу от одного параметра и затабулировать)

$$\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2) = 1 - \frac{1}{2} \{ \alpha a^2 \Phi(\Delta_2 a / 2) + \beta b^2 \Phi(\Delta_2 b / 2) \} - \frac{2\gamma}{\pi} \int_g^c J_0(\Delta_2 \zeta) \frac{\sqrt{c^2 - \zeta^2} \sqrt{\zeta^2 - g^2}}{\zeta} d\zeta, \quad (56)$$

где $\Phi(x) = J_0^2(x) + J_1^2(x)$ - функция, фигурирующая в (14).

На рис.7 показан пример аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ функцией (56) двухпараметрической модели (51-53) при условиях (54) или (55), где параметры считались через $I_{1,3}$ табл.1. Два из представленных приближений – наилучшие из всех полученных для апертур рис.1 одно-, двухпараметрических приближений (56). И при этом относительная погрешность наилучшего приближения нигде не превышала 15%.

Пространственно-неоднородное поле на апертуре

При неоднородном поле на апертуре μ (16) больше, чем при однородном. Поэтому функции (14) от аргумента Δ_2 и $\mu\Delta_2$ сильнее разнесены (ср. рис.2) и дают мало информации о поведении $\varepsilon(\Delta_2)$ в наиболее интересной промежуточной области определения. Предложенная в [2-5] для этого случая аппроксимация $\varepsilon(\Delta_2)$ функцией (14) с некоторой феноменологической нормировкой аргумента (расчет которой - отдельная математическая задача) дает грубое приближение $\varepsilon(\Delta_2)$, не совпадающее ни с (7) при малых, ни с (10) при больших значениях аргумента и применимое лишь для плавных полей на апертуре типа гаусса или экспоненты.

Применим здесь предложенные выше модели. Ограничимся кольцевой апертурой и тремя примерами полей, для которых методика [2-3] дает плохую аппроксимацию. Поля спадают по радиусу и обладают, как и апертура, радиальной симметрией.

Пример 1. Отношение радиусов $d = 0,2$; поле спадает от центра по формуле

$$U(r) = \exp\left(-\frac{|r - r_1|}{\delta(r_2 - r_1)}\right), \quad (57)$$

где r расстояние от центра; $r_2 > r_1$ - радиусы кольца; δ - параметр. Было взято $\delta = 0,1$, т.е. спад поля от r_1 к r_2 составляет $e^{-10} \cong 0,0000454$.

Пример 2. Отношение радиусов $d = 0,7$; поле спадает от внешнего кольца

$$U(r) = \exp\left(-\frac{|r - r_2|}{\delta(r_2 - r_1)}\right). \quad (58)$$

Теперь $\delta = 0,4$, т.е. спад поля от r_2 к r_1 составляет $e^{-2,5} \cong 0,0821$.

Пример 3. Отношение радиусов $d = 0,5$; поле спадает от центра по формуле

$$U(r) = \begin{cases} \sqrt{1 - \alpha(r - r_1)}, & r_1 \leq r \leq r^* \\ \delta = \sqrt{1 - \alpha(r^* - r_1)}, & r^* \leq r \leq r_2 \end{cases}, \quad r^* = \frac{1 - \delta^2}{\alpha} + r_1, \quad (59)$$

т.е. есть «кern», где интенсивность U^2 падает линейно, и «периферия», где поле постоянно. Взяты параметры (59) $\alpha = 32/r_2$; $\delta = \sqrt{0,02} \cong 0,141$, что дает $r^* \cong 0,53r_2$ и примерное равенство энергий в «керне» (E_1) и на «периферии» (E_2) - $E_1/E_2 \cong 1,11$. «Кern» - узкое по сравнению с апертурой кольцо - $r_1/r_2 = 0,5$; $r^*/r_2 = 0,53$. Число $\delta^2 = 0,02$ примерно равно $e^{-4} \cong 0,018$, т.е. числу, которым в [2-3] оценен уровень U^2 , по которому следует проводить эффективную границу апертуры при неоднородном поле. Именно для полей такого типа в [2-3] получено наилучшее приближение.

На рис.8 показаны функции $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$ для **примеров 1-3**. Их характеристики и параметры для моделей рис.4 приведены в табл.1-2. Необходимые для этого формулы см. в [15-16]. Здесь и далее аргументы функций нормированы на (17), а не на (11), поскольку для частично «мягких» апертур (11) может быть очень большим и неудобным для нормировки. Такая нормировка была использована в [2-5,15-16], хотя параметр (17) не при любых полях удобно рассчитывать.

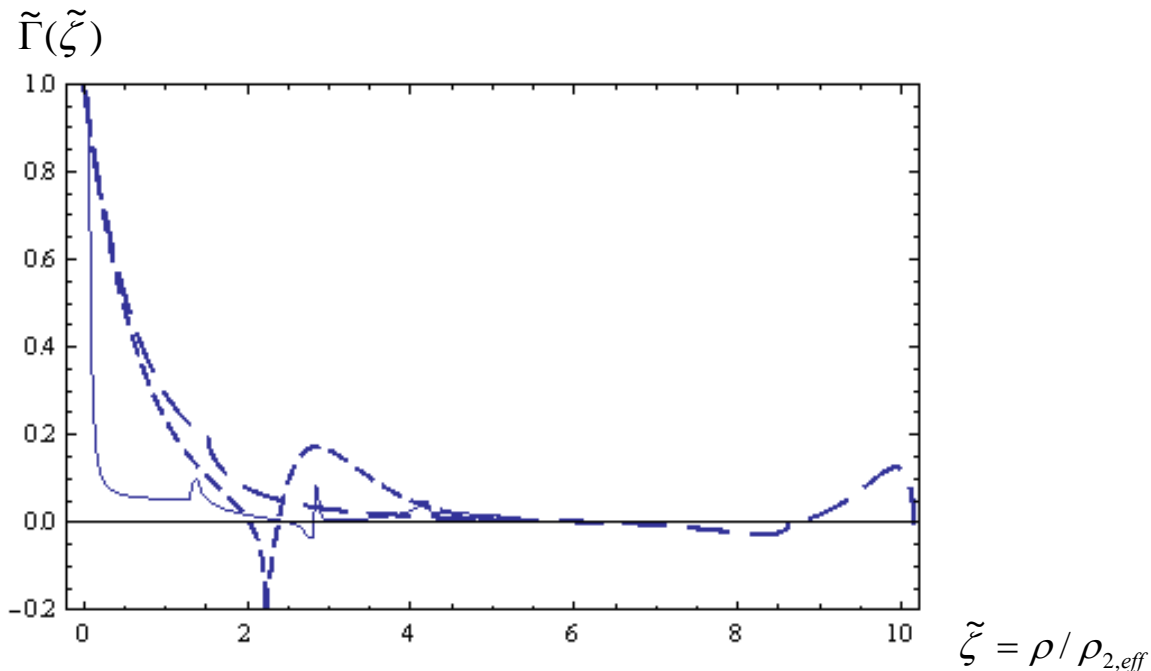


Рис.8

Функции $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$ для трех кольцевых апертур с полями (57-59). Короткие штрихи – **пример1**, длинные штрихи – **пример 2**, сплошная линия – **пример 3**. Аргумент нормирован на параметр (17).

Расчеты приближений (49-50) для $\varepsilon(\Delta)$ (модели $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$ рис.4) для **примеров 1-3** показали (см. рисунки в [15-16] и табл.2), что и здесь модель (50) с $a = a_{I_1}$ точнее (49) и вполне приемлема для рассмотренных примеров. Немного ей уступает (50) с $a = a_{I_4}$. Хорошей оказалась и (50) при $a = a_{\zeta}$, хотя параметр ζ_{\max} не удачен при частично «мягких» апертурах; когда поле малó вдоль границ апертуры (в **примерах 1-3** на части границы поле принимало максимальное значение). В [16] для **примеров 1-2** также было показано, что при $a = a_x$ приближение (50) везде хуже, чем при $a = a_{I_1}$, т.е. наклон $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$ в начале координат не важен в моделировании $\varepsilon(\Delta)$.

Для иллюстрации сказанного на рис.9 сравниваются точные $\varepsilon(\Delta)$ и (50) для **примеров 2-3** при всех a из табл.2 (точность приближения у **примера 1** еще выше). $\varepsilon(\Delta)$; $\varepsilon_{\text{mod}}^{\delta}(\Delta)$

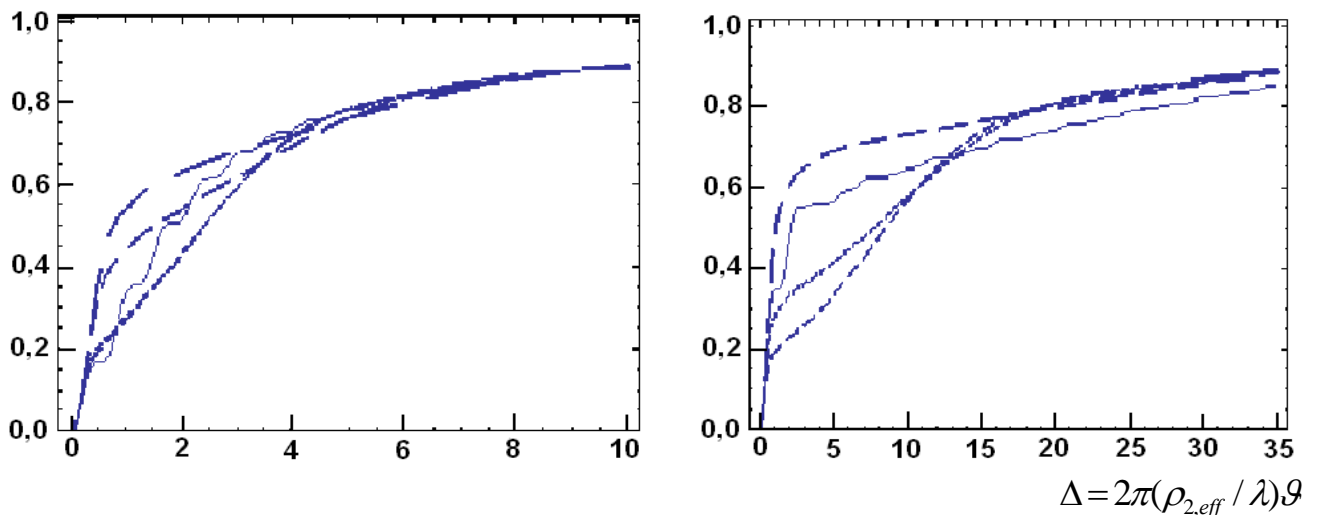


Рис.9

Графики $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{\delta}(\Delta)$ (50) с параметрами из табл.2 (штриховые линии; длины штрихов увеличиваются в последовательности: $a = a_{I_1}$, $a = a_{I_4}$, $a = a_{\zeta}$ и $a = a_x$). Слева – для **примера 2**, справа - для **примера 3** (нет кривой с $a = a_x$). Аргумент Δ нормирован на $\rho_{2,\text{eff}}$ (17).

Расчеты $\varepsilon_{\text{mod}}^r(\Delta)$ (56) для **примеров 1-3** (модели «кольца» (51-53) для $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$) показали, что трехпараметрические модели (через моменты $I_{1,3,4}$) не удачны - их везде было 2-4 неравноценных варианта, большинство которых немонотонны. Однопараметрические модели через I_1 отсутствуют для всех **примеров 1-3** в обоих предположениях, (54) и (55). А двухпараметрические модели через $I_{1,3}$ существуют в 1-2 вариантах - при (54) и при (55), и по качеству близки треугольным моделям (50). В [15]

приведены параметры и графики такой модели (56) при (54). Приближения при (55) оказались лучше, чем при (54). Это видно из рис.10, где показаны графики двухпараметрических моделей для **примера 3** и при (54), и при (55) (для **примеров 1-2** модели в обоих случаях точнее, чем для **примера 3**). Двухпараметрическая модель (51-53) при (54) или (55) допускает большое разнообразие видов функций (51).

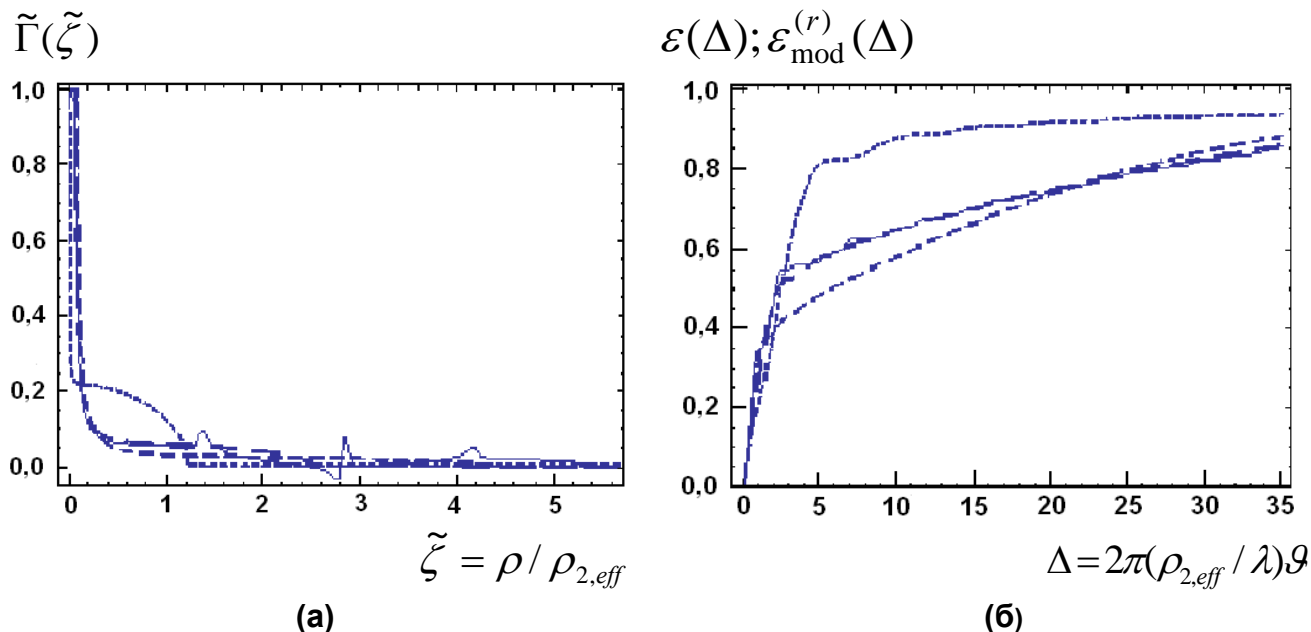


Рис.10

Для **примера 3**:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\tilde{\xi})$ (сплошная линия) и модельных кривых двухпараметрической модели «кольца» (51-53) (штриховые линии): одна кривая при $c = a$ (короткие штрихи) и 2 кривых при $c = b$ (средние и длинные штрихи). Хвосты модельных кривых обрезаны на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$, рассчитанных для модельных кривых рисунка (а) (штриховые линии; типы линий соответствуют). Аргументы функций нормированы на параметр (17).

Для **примера 3** (рис.10) есть три решения двухпараметрических моделей (56), одно при (54) (худшее) и два при (55), одно из которых близко к идеалу, оно лучше, чем вручную подобраный в [15] вариант (и сильно отлично от него по параметрам).

Т.е. при любом поле на апертуре однопараметрическая треугольная модель (50) и двухпараметрическая модель «кольца» (56) при (52-53,55) дают хорошие приближения $\varepsilon(\Delta)$, если брать моменты $\tilde{\Gamma}$ для расчета недостающих параметров.

«Мягкие» апертуры

В предыдущий раздел не включены «мягкие» апертуры, определенные только полем в отсутствие экрана. Эти случаи хуже описываются предложенной методикой.

Параметр (11) у «мягких» апертур бесконечен и не может быть использован в (16,22,24-26). Из равенств $\bar{T}'(0) = -\frac{2}{\pi\rho_2}$, (11) и (20) в этом случае вместо первого

равенства (22) следует $\Gamma(0) = 0$, т.е. $\Gamma(0)$ не отражает специфичности асимптотического поведения функции ε . В задаче остается единственный параметр длины ρ_1 (9), поэтому естественно в качестве аргумента ε использовать $\Delta_1 = 2\pi(\rho_1 / \lambda)\vartheta$.

Были рассчитаны $\varepsilon(\Delta_1)$ для асимметричных полей, спадающих в плоскости постоянства фазы от центра по гауссовскому или экспоненциальному закону с разными коэффициентами в перпендикулярных осях, и сравнены с $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_1)$ для трех моделей $\tilde{\Gamma}$ типа предложенных выше с необходимыми модификациями:

- прямоугольная (рис.4а), первая горизонтальная прямая которой вырождается в отрезок оси абсцисс (прямоугольник, сдвинутый вправо по оси абсцисс);
- треугольная (рис.4б), первая прямая которой начинается не с 1, а с 0 (треугольник с основанием на оси абсцисс и одной из вершин в начале координат);
- модель «кольца», которая из-за отсутствия параметра (53) вырождается в «два круга» - $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta) = \left\{ \alpha\sqrt{a^2 - \zeta^2}, \zeta \leq a \right\} + \left\{ \beta\sqrt{b^2 - \zeta^2}, \zeta \leq b \right\}$, где нет третьего слагаемого из (51) и допустимы любые знаки у коэффициентов α, β .

Поле асимметричной гауссовской плоской волны («мягкая» апертура) имеет вид

$$U^g(\xi, \eta, 0) = \exp(-\alpha\xi^2 - \beta\eta^2) \quad (\alpha, \beta > 0). \quad (60)$$

Вводя здесь вместо (24) аналогичную безразмерную функцию через ρ_1

$$\tilde{\Gamma}(\zeta) = \frac{\pi\rho_1}{2}\Gamma(\rho = \rho_1\zeta) = -\frac{\pi}{2}\bar{T}'_{\zeta}(\rho = \rho_1\zeta), \quad (61)$$

для (60) получим

$$\tilde{\Gamma}^g(\zeta) = \frac{\pi}{2}\zeta \exp\left(-\frac{1+t}{2\sqrt{t}}\zeta^2\right) \left[\frac{1+t}{\sqrt{t}} \cdot I_0\left(\frac{1-t}{2\sqrt{t}}\zeta^2\right) - \frac{1-t}{\sqrt{t}} \cdot I_1\left(\frac{1-t}{2\sqrt{t}}\zeta^2\right) \right], \quad (62)$$

где $\zeta = \rho / \rho_1$, $t = \beta / \alpha \leq 1$ (пусть $\alpha \geq \beta$), а $I_n(x)$ - модифицированная функция Бесселя порядка n . Для симметричного пучка ($t = 1$) будет $\tilde{\Gamma}^g(\zeta) = \pi\zeta \cdot \exp(-\zeta^2)$ с максимумом $\pi / \sqrt{2e} \cong 1,35$ при $\zeta = \sqrt{1/2}$ и $\varepsilon^g(\Delta_1) = 1 - \exp(-\Delta_1^2 / 4)$.

Поле асимметричной экспоненциальной плоской волны имеет вид

$$U^e(\xi, \eta, 0) = \exp(-\alpha|\xi| - \beta|\eta|) \quad (\alpha \geq \beta > 0). \quad (63)$$

Для (63) получаем

$$\tilde{\Gamma}^e(\zeta) = 4 \left\{ \begin{aligned} & \frac{4(1+t^2)}{\pi} \zeta P_0(\zeta, t) + \sqrt{\frac{1+t^2}{\pi}} \left[1 + \frac{16t}{\pi(1+t^2)} \zeta^2 \right] P_1(\zeta, t) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left(e^{-4\sqrt{\frac{t}{\pi}}\zeta} + t e^{-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\zeta} \right) - \frac{4\zeta}{\pi(1+t^2)} \left(t^2 e^{-4\sqrt{\frac{t}{\pi}}\zeta} + e^{-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\zeta} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (64)$$

где $P_0(\zeta, t) = \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2} + \psi_0} \exp\left(-4\sqrt{\frac{1+t^2}{\pi}} \sin \psi\right) d\psi$; $P_1(\zeta, t) = \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2} + \psi_0} \sin \psi \cdot \exp\left(-4\sqrt{\frac{1+t^2}{\pi}} \sin \psi\right) d\psi$,

а $\psi_0 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$. В частном случае $t = 1$ (при этом в отличие от гауссовского

(60) пучок (63) не обладает радиальной симметрией) будет

$$\tilde{\Gamma}^e(\zeta) = \frac{4}{\pi} \left\{ 8\zeta P_0(\zeta) + \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{8\zeta^2}{\pi}\right) P_1(\zeta) - 2e^{-\frac{4\zeta}{\sqrt{\pi}}} (\sqrt{\pi} + 2\zeta) \right\}, \text{ где теперь}$$

$$P_0(\zeta) = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \exp(-\zeta 4\sqrt{2/\pi} \sin \psi) d\psi \text{ и } P_1(\zeta) = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin \psi \cdot \exp(-\zeta 4\sqrt{2/\pi} \sin \psi) d\psi.$$

Функции $\varepsilon^g(\Delta_1)$ при $t \neq 1$ и $\varepsilon^e(\Delta_1)$ при любом t вычисляются численно из (27) с заменой Δ_2 на Δ_1 .

Функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (61) «мягких» апертур удовлетворяют вместо (26) условиям

$$\tilde{\Gamma}(0) = 0; \quad \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) d\zeta = \pi/2; \quad \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta^2 d\zeta = \pi/2. \quad (65)$$

Три упомянутые модели $\tilde{\Gamma}$ (61) для этих апертур требуют кроме (65) еще одно условие на остающийся свободный параметр. Положим, это опять будет сохранение

$I_1 = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta d\zeta$. Тогда параметры $l_{1,2}$ прямоугольной и треугольной моделей и a, b модели «двух кругов» находятся из соответствующих квадратных уравнений (остальные параметры вычисляются через $l_{1,2}$ или a, b). Для существования действительных положительных корней этих уравнений необходимо выполнение условий на I_1 :

$$1,36 \cong \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \leq I_1 \leq \frac{\pi}{3} \cong 1,57 \text{ для прямоугольной модели } \tilde{\Gamma}(\zeta),$$

$$1,28 \cong \frac{\pi}{\sqrt{6}} \leq I_1 \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \cong 1,48 \text{ для треугольной модели,} \quad (66)$$

$$1,33 \cong \frac{4}{3} \leq I_1 \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} \cong 1,54 \text{ для модели «двух кругов».$$

Для этих моделей функции $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_1)$ равны, соответственно,

$$\varepsilon_{\text{mod}}^{\text{rec}}(\Delta_1) = 1 - \frac{2h}{\pi} [l_2 F(l_2 \Delta_1) - l_1 F(l_1 \Delta_1)];$$

$$\varepsilon_{\text{mod}}^{\text{ir}}(\Delta_1) = 1 - \frac{2hl_2}{\pi(l_2 - l_1)} \left[l_2 F(l_2 \Delta_1) - l_1 F(l_1 \Delta_1) + \frac{J_1(l_1 \Delta_1) - J_1(l_2 \Delta_1)}{\Delta_1} \right];$$

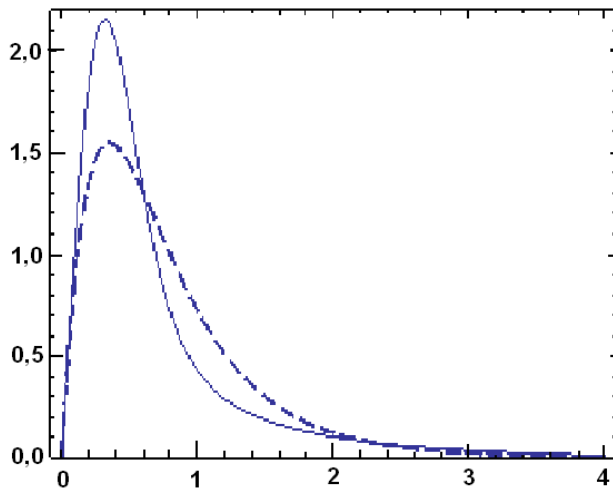
$$\varepsilon_{\text{mod}}^{\text{cerc}}(\Delta_2) = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \alpha \alpha^2 \Phi(\Delta_1 a / 2) + \beta b^2 \Phi(\Delta_1 b / 2) \right\},$$

где все функции определены выше. Для (62) $I_1^g(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt[4]{t} \cdot K(\sqrt{1-t})$, где $K(x)$ - по-прежнему, полный эллиптический интеграл 1 рода; а для (64)

$$I_1^e(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4(1+t^2)^2 \sqrt{1+t^2}} \left\{ (2 + 7t^2 + 2t^4) \ln \left[(\sqrt{1+t^2} + 1)(\sqrt{1+t^2} + t) / t \right] + \sqrt{1+t^2} (1+t)(1-3t+t^2) \right\}.$$

Все три условия (66) довольно жестко ограничивают диапазон параметра t , при котором существуют рассмотренные модели для обоих типов рассмотренных «мягких» апертур. Не все модели существуют даже для пучков при $t = 1$.

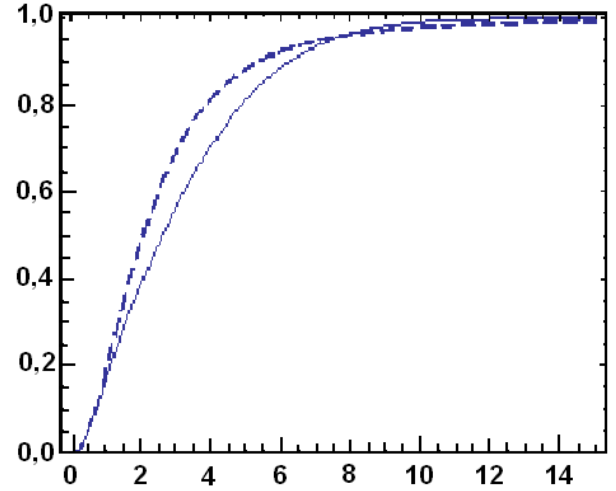
$\tilde{\Gamma}(\zeta)$



(а)

ζ

$\varepsilon(\Delta_1)$



(б)

Δ_1

Рис.11

Сравнение функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon(\Delta_1)$ для асимметричного гауссова (60) и экспоненциального (63) безэкранных пучков при одинаковых значениях первого момента $I_1 = 1,23$. При этом для гауссова пучка $t = 0,02$, а для экспоненциального $t = 0,38$.

(а) – точные графики функции (61). Сплошная линия – гауссов пучок (60), штриховая линия – экспоненциальный пучок (63);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_1)$ для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с рис.(а). Типы линий соответствуют.

Расчеты точных функций $\varepsilon(\Delta_1)$ для полей (60,63) показали, эти функции заметно отличаются не только при разных t для двух рассмотренных типов пучков, но и

для этих типов пучков при одинаковых значениях I_1 . Это иллюстрирует рис.11. Причем отличие наблюдается в наиболее интересной области $\varepsilon(\Delta) > 0,2$.

Расчет $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_1)$ для упомянутых однопараметрических моделей $\tilde{\Gamma}$ (61) с I_1 в качестве источника свободного параметра показал, что при существовании решения лишь треугольная модель дает в основном физически реальные функции (без локальных экстремумов). Но и она плохо воспроизводит $\varepsilon(\Delta_1)$ в наиболее интересной области $\varepsilon(\Delta) > 0,2$, т.к. для «мягких» апертур нет определяемой полем характеристики типа ρ_2 , задающей асимптотическое поведение $\varepsilon(\Delta_1)$ на бесконечности.

Выводы

Функция $\varepsilon(\varrho)$ (19) есть интегральное преобразование $\Gamma(\rho)$ (20) - производной от $T(\rho)$ с обратным знаком, с функцией Бесселя нулевого порядка в качестве ядра. В [8] было показано, что $\varepsilon(\varrho)$ при больших значениях аргумента определяется $\Gamma(0)$ (см.(10)), а вблизи нуля (см.(7)) - вторым моментом $\Gamma(\rho)$ (см.(22)). Обе эти характеристики $\Gamma(\rho)$ задаются геометрическими характеристиками апертуры – площадью и периметром, усредненными по распределению поля на апертуре, т.е. при однородном поле просто площадью и периметром. Однако этого недостаточно для представления $\varepsilon(\varrho)$ в промежуточной области определения. Так же как площадь и периметр (с усреднением или без) не отражают разнообразия видов апертур и полей на них.

Предположим, что в основном поведение $\varepsilon(\varrho)$ в промежуточной области аргумента между (7) и (10) определяется еще одной-двумя характеристиками апертуры и поля на ней. Тогда, если удачно аппроксимировать $\Gamma(\rho)$, чтобы она удовлетворяла не только соотношениям (22), но и другим, определяемым этими дополнительными характеристиками апертуры, то получится хорошая аппроксимация и функции $\varepsilon(\varrho)$. На нескольких примерах при однородном и неоднородном полях на апертуре удалось показать, что поставленная задача может иметь несложное и неплохое решение.

В качестве упомянутых дополнительных характеристик были взяты низшие моменты $\Gamma(\rho)$ (от одного до трех, $I_{1,3,4}$); одной из характеристик может быть ρ_{max} , если μ (16) не очень велико. А в качестве модели $\Gamma(\rho)$ - линейные функции, интегрируемые аналитически с функцией Бесселя, и функции, входящие в $\Gamma(\rho)$ круговой и кольцевой апертур при однородном поле (либо интегрируемые с функцией Бесселя, либо выражающиеся через однопараметрический интеграл, который можно затабулировать). Оказалось, что тогда для аппроксимации $\varepsilon(\varrho)$ в пределах 10-15% относительной погрешности достаточно задействовать 1-2 момента $I_{1,3}$. Учет их большего количества не улучшает точность приближения и ухудшает его по другим показате-

лям (чаще отсутствуют решения на параметры модели, $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta)$ приобретает «нефизические» черты – локальные экстремумы, и т.д.). Характерно, что хорошее приближение $\varepsilon(\mathcal{G})$ вовсе не требует, чтобы таковой являлась и модель $\Gamma(\rho)$, которая есть лишь «носитель» свойств апертуры и поля, выраженных в характерных числах.

За пределами анализа осталось обоснование выбора I_n и ρ_{max} как оптимальных источников дополнительной информации об апертуре и поле на ней. Но показано, что модели (50,56) с одним-двумя параметрами позволяют хорошо аппроксимировать широкий класс реальных функций $\varepsilon(\mathcal{G})$ во всей области определения.

Полученные выводы не относятся к «мягким» апертурам, когда экран отсутствует. Аппроксимация $\varepsilon(\mathcal{G})$ предложенной методикой в этом случае заметно хуже.

Литература

1. **Борович Б.Л., Зуев В.С., Катулин В.А., Михеев Л.Д., Николаев Ф.А., Носач О.Ю., Розанов И.Б.** Сильноточные излучающие разряды и газовые лазеры с оптической накачкой. – М.: Изд-во ВИНТИ «Итоги науки и техники, сер.Радиотехника».1978.Т.15.
2. **Сизова И.М.** *О подобии при дифракции света на апертурах сложной формы.* Препринт ФИАН №252. Москва, 1988. 48 с.
3. **Сизова И.М.** *Подобие световых потоков в дальней зоне при дифракции на апертурах сложной формы.* Препринт ФИАН №189. Москва, 1990. 47 с.
4. **Sizova I.M.** Similarity of light fluxes diffracted in the far field by apertures of complicated shape. J.Soviet Laser Research. 1992. V.13. No.1. P.25-45.
5. **Sizova I.M.** Approximate scaling relationships of light diffraction by apertures with complicated shapes. Appl. Opt. 1992. V.31.No.28.P.5930-5936.
6. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. – М.: «Наука». 1970.
7. **Пятахин М.В., Сучков А.Ф.** *Дифракция плоской электромагнитной волны на круглой диафрагме.* Препринт ФИАН №254. Москва, 1985. 53 с.
8. **Clark P.P., Howard J.W., Freniere E.R.** *Asymptotic approximation to the encircled energy function for arbitrary aperture shapes.* Appl.Opt. 1984. V.23, No 2. P.353-357.
9. **Willis H.F.** *A formula for expanding an integral as a series.* Philos.Mag. 1948. V.39. P.455-459.
10. **Harvey J.E., Ftaclas C.** *Diffraction effects of telescope secondary mirror spiders on various image-quality criteria.* Appl.Opt. 1995. V.34, No 28. P.6337-6349.
11. **Орлов Е.П.,Сизова И.М.** *О подобии статистических характеристик спонтанного усиления квантового усилителя при различных коэффициентах усиления.* Препринт ФИАН №28. Москва, 2001. 44 с.
12. **Орлов Е.П.,Сизова И.М.** *О подобии и универсальных функциях статистических характеристик случайных процессов.* Препринт ФИАН №21. Москва, 2008. 50 с.

13. **Орлов Е.П.,Сизова И.М.** *Подобие статистических характеристик узкополосных случайных процессов с произвольными спектрами. Часть I. Компактные спектры.* Препринт ФИАН №14. Москва, 2010. 40 с.
14. **Орлов Е.П.,Сизова И.М.** *Подобие статистических характеристик узкополосных случайных процессов с произвольными спектрами. Часть II. Некомпактные диахромные спектры.* Препринт ФИАН №19. Москва, 2011. 105 с.
15. **Сизова И.М.** *Об аппроксимации некоторых интегралов в теории дифракции на апертурах сложной формы.* Препринт ФИАН №16. Москва, 2014. 60 с.
16. **Сизова И.М.** *Об аппроксимации некоторых интегралов в теории дифракции на апертурах сложной формы. Еще одна модель.* Препринт ФИАН № 2. Москва, 2015. 32 с.
17. **MacKinnon R.F.** *The asymptotic expansions of Hankel transforms and related integrals.* Math.of Comp. 1972. V.26, No 118. P.515-527.
18. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М., Стиган И. – М.: «Наука», главная редакция физ-мат литературы.1979. Гл.9.

Ирина Михайловна СИЗОВА

Аппроксимация функции потока энергии в дальней зоне Фраунго-фера при дифракции плоской световой волны на плоских апертурах сложной формы

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 140 экз. Заказ №22. П.л. 2,25
Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии РИИС ФИАН
119991 Москва, Ленинский проспект 53