ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
Физический институт имени П.Н. Лебедева Российской академии наук
ФИАН

ПРЕПРИНТ
21

В.И. БЕЛЯВСКИЙ, В.В. КАПАЕВ

ФЕНОМЕНОЛОГИЯ НЕОБЫЧНЫХ ВОЛН ПЛОТНОСТИ

Москва 2014

Феноменология необычных волн плотности

В.И. Белявский, В.В. Капаев

АННОТАЦИЯ. Представлена феноменология Гинзбурга-Ландау необычных волн плотности, возникающих в квазидвумерных кристаллах в результате конденсации электрон-дырочных или куперовских пар с орбитальным угловым моментом $l \neq 0$. Рассмотрены синглетные d-волны плотности ($l = 2$) в квадратной кристаллической решетке с нарушенной симметрией по отношению к обращению времени, представляющие интерес в связи с проблемой псевдощелевого и сверхпроводящего состояний купратных соединений. Трансляционная симметрия конденсата характеризуется импульсом центра масс пары, который отражает нестинговые свойства электронной дисперсии и определяет период волны плотности. Орбитальная симметрия и топологические свойства конденсата связаны с относительным движением частиц, составляющих пару.

Phenomenology of unconventional density waves

V.I. Belyavsky, V.V. Kapaev

ABSTRACT. We present Ginzburg-Landau phenomenology of unconventional density waves in quasi-two-dimensional crystals owing to a condensation of electron-hole or Cooper pairs with orbital angular momentum $l \neq 0$. We consider singlet *d*-density waves (*l*=2) in rectangular crystal lattice with broken time-reversal symmetry that are of special interest in connection with the problem of the pseudogap and superconducting states of cuprate compounds. Center-of-mass momentum of the pair, originating from the nesting feature of electron dispersion, determines the translation symmetry of the condensate and the density wave period. Orbital symmetry and topological features of the condensate originate from the relative motion of the particles composing the pair.

Работа выполнена при поддержке программ Президиума РАН.

1 Введение

Конденсация электрон-дырочных пар (ЭДП) с отличным от нуля импульсом центра масс спонтанно нарушает трансляционную симметрию кристалла и приводит к волнам плотности, спиновая и орбитальная симметрии которых связаны с относительным движением частиц, составляющих пару. Синглетному электрон-дырочному спариванию соответствуют волны плотности заряда (CDW) и тока заряда, а триплетному- волны плотности спина (SDW) и тока спина [1]. Спонтанное нарушение калибровочной и трансляционной симметрий приводит к синглетным или триплетным волнам плотности куперовских пар (PDW). Обычным волнам плотности с нулевым ($l=0$) орбитальным угловым моментом пар в конденсате соответствуют диэлектрические или сверхпроводящие состояния с энергетической щелью на всей поверхности Ферми родительского металла. Энергетическая щель необычной волны плотности с $l \neq 0$ имеет характерные для полуметалла нули в нескольких точках (нодах) поверхности Ферми [2].

Волны плотности возникают в результате электронного фазового перехода благодаря нестингу поверхности Ферми, наиболее выраженному в системах пониженной размерности. В одномерном (1D) металле поверхность Ферми вырождается в точки, в окрестностях которых нестинг удовлетворяется идеально. В двумерном (2D) металле идеальный нестинг на всей поверхности (контуре) Ферми возможен только для дисперсии специального вида при определенном заполнении зоны проводимости, но к волнам плотности может приводить и приближенный нестинг на конечных участках контура Ферми.

Нарушение симметрии по отношению к обращению времени (T-симметрии) во внешнем магнитном поле переводит 2D металл в состояние квантового эффекта Холла с диэлектрической щелью между верхним заполненным и следующим пустым уровнями Ландау в массиве образца, чем обеспечивается протекторат бесщелевых краевых состояний по отношению к умеренному беспорядку. В 2D кристаллах с магнитным порядком, нарушающим T-симметрию, холловская проводимость квантуется и в отсутствие внешнего магнитного поля [3]: в возникающем состоянии *зарядового топологического диэлектрика* проявляется квантовый аномальный эффект Холла. В *спиновом топологическом диэлектрике* к энергетической щели в массиве образца приводит T-инвариантное спин-орбитальное взаимодействие, и по краевым состояниям переносится спин (квантовый спиновый эффект Холла) [4, 5].

Топологический диэлектрик или сверхпроводник с нарушенной трансляционной симметрией представляет топологическую волну плотности (TDW).

Класс необычных волн плотности включает всевозможные топологически тривиальные и нетривиальные состояния конденсатов электрон-дырочных и куперовских пар с нарушенной трансляционной симметрией и отличным от нуля орбитальным угловым моментом относительного движения. Хотя прямые эксперименты, которые могли бы позволить идентифицировать определенные необычные волны плотности, в настоящее время отсутствуют, уже имеются довольно многочисленные свидетельства их существования в псевдощелевом (PG) и сверхпроводящем (SC) состояниях слоистых купратных соединений, в которых проявляются электронные упорядочения с масштабом модуляции (вообще говоря, несоизмеримым с трансляциями кристалла), составляющим несколько межатомных расстояний [6-12]. Это согласуется с характерным нестингом контура Ферми [13] и позволяет предположить, что пространственно неоднородные состояния в купратах могут быть связаны с некоторыми типами волн плотности [14, 15]. Имеющиеся экспериментальные данные указывают на d-волновое ($l = 2$) электронное упорядочение [16].

Чаще всего предполагается, что синглетный d-волновой конденсат электрон-дырочных пар (ЭДП) в PG состоянии представляет необычную CDW с орбитальной симметрией $d_{x^2-y^2}$, которой соответствует вещественный параметр порядка, или d-волну плотности тока заряда (DDW), описываемую чисто мнимым параметром порядка с симметрией $id_{x^2-y^2}$ [14]. Состояниям $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} (с линиями нулей на диагоналях зоны Бриллюэна и координатных осях, соответственно) с одинаковыми или близкими энергиями может соответствовать комплексный параметр порядка синглетной киральной TDW $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ [17], нарушающей T-симметрию, или T-инвариантной TDW $i\sigma d_{x^2-y^2} + d_{xy}$ [18], где $\sigma = \pm 1$ - проекция спина. Такие TDW, не имеющие нулей на контуре Ферми, могут реализовать состояния зарядового и спинового топологического диэлектрика, соответственно.

Конденсату куперовских пар с отличным от нуля импульсом центра масс соответствует PDW, подобная состоянию Фулде-Феррела-Ларкина-Овчинникова (FFLO) [19, 20], с той разницей, что неустойчивость, приводящая к возникновению PDW, обеспечивается нестингом контура Ферми родительского металла, а не внешним магнитным полем [15]. PDW с орбитальной симметрией

$d_{x^2-y^2}$, характерной для SC состояния купратов, при нарушении T-симметрии может привести к синглетной киральной TDW $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$, поскольку состояния $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} имеют близкие энергии [21]. Аналогичная TDW может иметь место в легированном графене [22], в котором энергии состояний $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} в точности равны.

Результат конкуренции близких по энергии необычных волн плотности зависит от особенностей межэлектронного взаимодействия и не может быть предсказан в рамках предельно упрощенных микроскопических моделей. Феноменология Гинзбурга-Ландау, развитая для обычных CDW [23] и формально ограниченная малостью параметра порядка и макроскопическим масштабом его неоднородности, позволяет рассматривать основные свойства волн плотности в 2D системах: влияние примесей, эффекты соизмеримости, статические нелинейности, динамические эффекты, флуктуации и особенности элементарных возбуждений [24]. Феноменологическая теория DDW объясняет PG состояние [14] и свойства гомологических рядов в семействах купратных соединений [25]. Термодинамика PDW с d-волновым страйповым или шахматным упорядочением описывает стабильные фазы PDW в 2D кристаллах, конкуренцию PDW (и сопутствующих CDW и SDW) с однородной d-волновой сверхпроводимостью [26], а также конкуренцию и сосуществование PDW и DDW [27].

В настоящей работе представлена феноменология необычных синглетных d-волн плотности, которые возникают при электронном фазовом переходе в 2D металле с выраженным нестингом контура Ферми. В разделе 2 рассмотрена структура параметра порядка (конденсатной волновой функции) в 2D квадратной решетке с нарушенной симметрией по отношению к обращению времени. Показано, что нарушение трансляционной симметрии при электронном фазовом переходе характеризуется набором эквивалентных волновых векторов, которые устанавливают связь между конгруэнтными сегментами контура Ферми. В разделе 3 установлена связь между базисными функциями d-волнового неприводимого представления магнитного кристаллического класса квадратной решетки и топологическими свойствами конденсата пар.

Функционал Гинзбурга-Ландау, описывающий фазовый переход родительского 2D металла в состояние волны плотности с d-волновой орбитальной симметрией, определен в разделе 4. Нарушенная трансляционная симметрия характеризуется заданными импульсами конденсата пар, поэтому параметр порядка имеет три компоненты: две из них относятся к орбитальнолму относительному движению пары с угловым моментом $l = 2$, а третья имеет смысл фазы волновой функции конденсата, связанной с движением центра масс.

В разделе 5 рассмотрены особенности фазового перехода в состояние d-волны плотности. В зависимости от соотношения между коэффициентами при инвариантах четвертого порядка в разложении Ландау для свободной энергии упорядоченной фазе может соответствовать либо вырожденное состояние волны плотности с вещественным или чисто мнимым параметром порядка, либо волна плотности с комплексным параметром порядка при равных вещественной и мнимой частях. Рассмотрено снятие вырождения упорядоченной фазы в поле случайно распределенных примесей. В разделе 6 рассмотрено условие формирования соизмеримой волны плотности.

Фаза параметра порядка, связанная с движением центра масс пар в конденсате, в случае пространственной неоднородности, обусловленной случайным распределением примесей, является функцией радиуса-вектора, существенно меняющейся на макроскопическом масштабе. Соответствующее стационарное распределение фазы рассмотрено в разделе 7.

В Заключении (раздел 8) обсуждаются возможные реализации необычных волн плотности в купратных сверхпроводниках.

2 Параметр порядка

Нарушение трансляционной симметрии при периодическом в пространстве перераспределении заряда электронной подсистемы кристалла приводит к CDW, для которой в приближении среднего поля можно определить параметр порядка как функцию модуляции $\alpha(r)$ плотности заряда [23],

$$\rho(r) = \rho_0(r)[1 + \alpha(r)]. \tag{1}$$

Здесь $\rho_0(r)$ - плотность заряда симметричной фазы, существующей выше точки фазового перехода T_c, периодическая функция координат $\alpha(r)$ отлична от нуля при $T < T_c$. Аналогично может быть определен параметр порядка для SDW [24]. Свободная энергия кристалла является функционалом от $\alpha(r)$, из условия минимума которого определяется параметр порядка, соответствующий тепловому равновесию.

Функция модуляции отражает изменение только трансляционной симметрии кристалла при фазовом переходе, не делая различия между волнами плотности с нарушенной при этом орбитальной симметрией [2]. Поэтому параметр порядка, определенный в соотвествии с (1), описывает обычную s-волну плотности.

В слоистых кристаллах с квазидвумерной электронной дисперсией возникновение волн плотности непосредственно связано с особой геометрией поверхности Ферми родительского металла - наличием (почти) плоских сегментов, на которых выполняются условия нестинга [28]. При нестинге имеет место усиление коновской аномалии [24]: характерная для изотропной системы особенность производной от восприимчивости по импульсу при $T \to 0$ преобразуется в особенность самой восприимчивости (как в 1D случае). Неустойчивость по отношению к возникновению волны плотности развивается при некоторых импульсах K_j (индекс j нумерует эквивалентные импульсы), соответствующих усиленной нестингом коновской аномалии. Импульсы K_j определяют длину волны модуляции в волне плотности, а также набор элементов ее точечной симметрии [23]. Из микроскопических соображений, основанных на теории среднего поля, следует, что в общем случае векторы K_j несоизмеримы с векторами обратной решетки [24].

Широкий класс волн плотности составляют рассматриваемые здесь состояния с нарушенной трансляционной симметрией, возникающие при конденсации электрон-дырочных или куперовских пар. Естественным параметром порядка, характеризующим волну плотности, является волновая функция конденсата пар [29], в которой разделяются степени свободы, относящиеся к движению центра масс и относительному движению. В теории сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау [30] такой параметр порядка, описывающий конденсат синглетных куперовских пар с нулевым импульсом центра масс, является комплексным скаляром, что соответствует s-волновой ($l = 0$) орбитальной симметрии относительного движения частиц, составляющих пару. В необычной волне плотности, представляющей конденсат пар с отличными от нуля импульсом центра масс и орбитальным угловым моментом $l \neq 0$, среднее значение параметра порядка равно нулю, а средне-квадратичное значение может быть достаточно малым, что расширяет пределы применимости разложения Ландау свободной энергии по степеням параметра порядка. Неоднородность параметра порядка в реальном пространстве, связанная с движением центра масс пары, в случае идеальной волны плотности (суперпозиции гармонических волн с эквивалентными K_j) описывается членами с производными второго порядка в функционале свободной энергии. Ближний порядок в пространственно неоднородном состоянии волны плотности обусловлен флуктуационными модами [23] и топологическими дефектами волны плотности [26].

Дальний порядок волны плотности ниже температуры фазового перехода T_c, связанный с образованием конденсата тождественных пар частица-частица или частица-дырка, характеризуется макроскопическим аномальным средним, отличным от нуля при $T < T_c$. Аномальное среднее

$$\left\langle \psi^+_{\sigma'}(r_2)\psi_\sigma(r_1)\right\rangle = \frac{1}{N} e^{i(Kr+\varphi)} \sum_q \left\langle c^+_{q-K/2\,\sigma'}\, c_{K/2+q\,\sigma}\right\rangle e^{iq\rho}\,. \tag{2}$$

представляет волновую функцию конденсата ЭДП, формирующих диэлектрическую волну плотности с импульсом центра масс $\mathbf{K}$. Аналогично, аномальное среднее

$$\left\langle \psi^+_{\sigma'}(r_2)\psi_\sigma(r_1)\right\rangle = \frac{1}{N} e^{i(Kr+\varphi)} \sum_q \left\langle c_{K/2-\mathrm{q}\,\sigma'}\, c_{K/2+q\,\sigma}\right\rangle e^{iq\rho}\,. \tag{3}$$

представляет волновую функцию конденсата куперовских пар с импульсом центра масс $\mathbf{K}$, формирующих PDW. Здесь $\psi_\sigma(r_1)$ - оператор уничтожения электрона со спином σ в точке r_1, N - число элементарных ячеек, r и ρ - радиусы-векторы центра масс и относительного движения, соответственно, $K/2 \pm q$ - импульсы частиц, составляющих пару, q - импульс относительного движения. Оператор $c_{k\sigma}$ уничтожает частицу с импульсом k и спином σ. При $K = 0$ и $\sigma' = -\sigma$ волновая функция (3) описывает конденсат обычных синглетных куперовских пар.

Множитель перед суммами в (2) и (3) является волновой функцией центра масс пары, а средние под суммами имеют смысл волновых функций относительного движения пар в импульсном представлении. Импульсы центра масс волн плотности в (2) и (3), которые могут возникать в одном и том же кристалле, не равны друг другу. Отвлекаясь от спиновой структуры волновых функций, существенной в случае триплетных пар [2], ограничимся рассмотрением синглетных состояний, чему соответствует $\sigma' = \sigma$ в (2) и $\sigma' = -\sigma$ в (3).

Из (2) и (3) следует, что конденсатная волновая функция в смешанном представлении имеет общую структуру для любой синглетной волны плотности,

$$\Psi(r,q) = \psi_c(r)\,\psi(q), \tag{4}$$

и обладает всеми необходимыми свойствами характеризующего волну плотности параметра порядка. Здесь $\psi_c(r)$ - волновая функция центра масс пары, определяющая пространственную модуляцию параметра порядка в соответствии с нарушенной трансляционной симметрией кристалла. Фаза φ в бегущей волне $\psi_c(r) = \exp[i(Kr + \varphi)]$ фиксирует положение волны плотности. Роль волновой функции относительного движения пары в конденсате играет аномальное среднее вида $\psi(q) = \left\langle c^{+}_{q-K/2\,\sigma'}\, c_{K/2+q\,\sigma} \right\rangle$ или $\psi(q) = \left\langle c_{K/2-q\,\sigma'}\, c_{K/2+q\,\sigma} \right\rangle$ в случае конденсата ЭДП или куперовских пар, соответственно. Функция $\psi(q)$ зависит от импульса центра масс пары, то есть учитывает нарушение трансляционной симметрии кристалла, но, сверх того, эта функция может отражать также нарушение иной симметрии при фазовом переходе, например, орбитальной симметрии и (или) симметрии по отношению к обращению времени. Как и должно быть при определении параметра порядка, $\psi(q) \neq 0$ при $T < T_c$, но $\psi(q) = 0$ при $T \geq T_c$. При заданной функции $\psi_c(r)$ именно $\psi(q)$ находится из условия минимума свободной энергии, тогда как $\psi_c(r)$ связана с геометрией поверхности Ферми.

Если при заданной длине волны модуляции $\lambda = 2\pi / K$ имеется несколько эквивалентных импульсов центра масс, то набор таких импульсов K_j ($|K_j| = K$ при всех j) определяет возможные типы симметрии волновой функции центра масс. Например, состояние FFLO в изотропной среде может определяться единственным импульсом $\mathbf{K}_j$, что соответствует решению Фулде-Феррела [19] в виде бегущей волны $\psi_c(r) \sim \exp(iKr)$. Меньшему значению минимума свободной энергии соответствует решение Ларкина-Овчинникова [20] в виде стоячей волны $\psi_c(r) \sim \cos(Kr)$, представляющей симметричную суперпозицию двух бегущих волн Фулде-Феррела с импульсами $\pm K$. Рассматриваются и другие типы симметрии волновой функции центра масс пары в состоянии FFLO [31].

В 2D кристалле с центром симметрии волновую функцию центра масс пары можно представить как бегущей волной, подобной состоянию Фулде-Феррела, так и четной (состояние, подобное решению Ларкина-Овчинникова) или нечетной [21] суперпозициями бегущих волн с противоположно направленными импульсами $\pm \mathbf{K}$:

$$\psi_c^{(s)}(x) = \sqrt{2}\cos(Kx + \varphi), \qquad \psi_c^{(a)}(x) = \sqrt{2}\sin(Kx + \varphi). \tag{5}$$

Здесь принята нормировка на площадь кристалла. Стоячим волнам (5) соответствует страйповая структура параметра порядка с линиями нулей, перпендикулярными оси x, которая выбрана в направлении K. В квадратной решетке (точечная симметрия C_{4v}), которая будет рассматриваться далее, имеются взаимно перпендикулярные эквивалентные импульсы, параллельно которым можно выбрать координатные оси x и y. Четные и нечетные суперпозиции $\psi_c^{(s)}(y)$ и $\psi_c^{(a)}(y)$ вида (5) описывают стоячие волны плотности, в которых страйпы перпендикулярны оси y. Периодическая страйповая структура имеет длину волны $\lambda = 2\pi/K$.

Из бегущих волн, соответствующих четырем эквивалентным импульсам, можно составить симметричные и антисимметричные линейные комбинации стоячих волн (5),

$$\psi_{c\nu}^{(s)}(x,y) = \cos(Kx+\varphi) + \nu\cos(Ky+\varphi),\ \psi_{c\nu}^{(a)}(x,y) = \sin(Kx+\varphi) + \nu\sin(Ky+\varphi), \quad (6)$$

где $\nu = \pm 1$. Таким стоячим волнам соответствует периодическая структура шахматного упорядочения с линиями нулей, параллельными прямым $y = \pm x$, и площадью элементарной ячейки, равной $2\lambda^2$. В частном случае $K = 2\pi/d$, где d - параметр решетки родительского 2D металла, возникает несоизмеримая волна плотности с удвоенной элементарной ячейкой. Пространственная модуляция, соответствующая основному состоянию системы, то есть выбор между решениями (5) и (6), определяется минимумом свободной энергии. Стоячие волны (5) и (6), каждая из которых характеризуется единственным параметром K (наличие нескольких K означало бы, что в конденсате находятся пары с разными импульсами центра масс), описывают идеальные волны плотности в 2D кристалле с точечной симметрией C_{4v}. Подобные структуры FFLO с точечными симметриями C_{3v}, C_{4v} и C_{6v} рассмотрены в [31].

Волновая функция центра масс в виде линейной комбинации бегущих волн с неодинаковыми амплитудами позволяет исследовать неидеальные волны плотности с нарушенной симметрией по отношению к преобразованиям точечной группы, в том числе, структуры, содержащие топологические дефекты, например, дислокации [26]. В [32] параметр порядка определяется одним из неприводимых представлений группы, состоящей из элементов симметрии пространственной группы, которые сохраняют K, и множеством кристаллически эквивалентных волновых векторов (звездой вектора K). В случае точечной симметрии C_{4v} звезда вектора K состоит из четырех векторов, так что для одномерных неприводимых представлений параметр порядка, принятый в [26, 32], является четырехкомпонентным. Далее рассматриваются идеальные волны плотности вида (5) и (6).

Волновую функцию относительного движения можно представить в виде разложения по базисным функциям неприводимых представлений группы симметрии фазы, существующей выше T_c. В этом разложении достаточно сохранить представление, квадратичному инварианту которого в свободной энергии Ландау соответствует коэффициент, меняющий знак при $T = T_c$ [33]. Таким образом,

$$\psi(q) = \sum_{\mu=1}^{n} \eta_\mu \psi_\mu(q). \tag{7}$$

Коэффициенты $\eta_\mu = \eta_\mu(T)$ при базисных функциях $\psi_\mu(q)$ неприводимого представления размерности n, отличные от нуля при $T < T_c$, являются термодинамическими величинами и составляют параметр порядка фазы с волной плотности. Функции $\psi_\mu(q)$ являются решениями уравнений микроскопической теории среднего поля.

Точечная группа C_{4v} квадратной решетки имеет пять неприводимых представлений: четыре одномерных (A_1, A_2, B_1 и B_2) и одно двумерное (E). Представлениям A_1 и A_2 соответствуют базисные функции, которые не меняют знак при повороте на $\pi/2$. Базисной функцией единичного представления A_1 является инвариант, поэтому A_1 относится к обычной s-волне плотности. Представление A_2, базисная функция которого преобразуется как $q_x q_y (q_x^2 - q_y^2)$ и формально соответствует $l = 4$, относится к необычной волне плотности с так называемой расширенной s-волновой симметрией. К d-волнам плотности относятся базисные функции представлений B_1 и B_2, которые меняют знак при повороте на $\pi/2$ и преобразуются как $q_x^2 - q_y^2$ и $q_x q_y$, соответственно. Базисные функции представления E преобразуются как компоненты q_x, q_y 2D вектора q и могут соответствовать синглетным диэлектрическим p-волнам плотности ($l = 1$). Все волны плотности, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы C_{4v}, являются топологически тривиальными.

С обращением времени связан дополнительный элемент симметрии, меняющий направления орбитальных токов и спина на противоположные. Для синглетного состояния обращение времени сводится к комплексному сопряжению базисных функций неприводимых представлений магнитного кристаллического класса. Представлениям B_1 и B_2 группы C_{4v} соответствует один и тот же магнитный класс $C_{4v}(C_{2v})$ [34]. Из независимых функций $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$, преобразующихся как $q_x^2 - q_y^2$ и $q_x q_y$, соответственно, можно построить киральные комбинации $\psi_1(q) \pm i\psi_2(q)$, образующие ортогональный базис двумерного неприводимого представления точечной группы магнитной симметрии $C_{4v}(C_{2v})$. В этом случае волновая функция относительного движения пары (7) принимает вид

$$\psi(q) = \eta_1 \psi_1(q) + i\eta_2 \psi_2(q). \tag{8}$$

Таким образом, параметр порядка d-волны плотности в квазидвумерном кристалле, относящемся к магнитному кристаллическому классу $C_{4v}(C_{2v})$, представляет комплексный скаляр $\eta = (\eta_1, i\eta_2)$. Если $\psi_1(q)$ является базисной функцией неприводимого представления B_1 (соответственно, $\psi_2(q)$ есть базисная функция представления B_2), то (8) описывает киральное состояние $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$. Если же $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$ относятся к представлениям B_2 и B_1, соответственно, волновая функция относительного движения (8) описывает киральное состояние $d_{xy} + id_{x^2-y^2}$.

3 Длина волны модуляции и топологический инвариант

При построении функционала Гинзбурга-Ландау явный вид базисных функций $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$, очевидно, не существен, поскольку вычисление феноменологических коэффициентов в свободной энергии подразумевает интегрирование по импульсному пространству. Существенна симметрия этих функций, которой определяется не только структура параметра порядка (8), но и топологические свойства волны плотности.

Имея в виду определения аномальных средних (2) и (3), можно ввести гамильтониан микроскопической теории среднего поля

$$H(q) = \sum_{j=0}^{3} h_j(q)\tau^j , \tag{9}$$

с помощью которого может быть описан фазовый переход металла в состояние волны плотности с параметром порядка (8). Здесь τ^0 - единичная матрица 2×2, а τ^1, τ^2 и τ^3 - матрицы Паули. Коэффициенты в разложении (9) равны

$$h_0(q) = \varepsilon_\mp(q), \quad h_1(q) = \eta_1 \psi_1(q), \quad h_2(q) = \eta_2 \psi_2(q), \quad h_3(q) = \varepsilon_\pm(q), \tag{10}$$

где $2\varepsilon_\pm(q) = \varepsilon(K/2 + q) \pm \varepsilon(K/2 - q)$ - кинетическая энергия пары в зоне проводимости родительского металла с законом дисперсии $\varepsilon(q)$ (энергия электрона отсчитывается от химического потенциала). Верхний знак относится к куперовской паре, нижний - к ЭДП.

Ноды функций $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$ располагаются в разных точках поверхности Ферми родительского металла, обладающей свойством нестинга (нестинг - одно из необходимых условий перехода в состояние волны плотности). Поэтому гамильтониан (9) описывает фазовый переход в сверхпроводящее или диэлектрическон состояние с энергетической щелью, отличной от нуля на всей поверхности Ферми. Спектр квазичастиц имеет вид

$$E_\nu(q) = h_0(q) + \nu\, h(q), \tag{11}$$

где $h(q) = \sqrt{h_1^2(q) + h_2^2(q) + h_3^2(q)}$, а индекс ν соответствует нижней ($\nu = -1$) и верхней ($\nu = +1$) зонам квазичастиц. Щель в спектре квазичастиц максимальна при заданном 2D импульсе q, если $h_0(q) = 0$. В случае электрон-дырочного спаривания равенство $\varepsilon_+(q) = 0$ есть условие нестинга контура Ферми

$$\varepsilon(Q - p) = -\varepsilon(p), \tag{12}$$

где p - импульс электрона, импульс ЭДП $K = Q$ есть наименьший из эквивалентных (отличающихся на вектор обратной решетки) векторов нестинга, соединяющих конгруентные участки на противоположных сторонах контура Ферми. В случае куперовского спаривания равенство $\varepsilon_-(q) = 0$ есть условие зеркального нестинга контура Ферми [15]

$$\varepsilon(K/2 + q) = \varepsilon(K/2 - q). \tag{13}$$

В однозонном металле при условии симметрии по отношению к обращению времени равенство (13) при $K = 0$ выполняется на всей поверхности Ферми и соответствует однородному SC состоянию.

Гамильтониан (9), в котором параметры $h_0(q)$ и $h_3(q)$ выражаются через закон дисперсии модели сильной связи, соответствующей перескокам электрона в пределах нескольких ближайших соседних узлов кристаллической решетки, а параметры $h_1(q)$ и $h_2(q)$ рассматриваются не как решения уравнения самосогласования микроскопической теории среднего поля, а как заданные функции определенной симметрии, например, $h_1(q) = \eta_1\left(q_x^2 - q_y^2\right)$ и $h_2(q) = \eta_2\, q_x\, q_y$, фактически соответствует феноменологическому описанию состояния волны плотности [18]. Необходимо иметь в виду, что при произвольной дисперсии уравнение самосогласования имеет, вообще говоря, лишь тривиальное решение. Нестинг (или зеркальный нестинг) контура Ферми усиливает сингулярность ядра уравнения самосогласования, чем способствует развитию неустойчивости по отношению к выпадению в конденсат ЭДП (или куперовских пар) с определенным, зависящим от формы контура Ферми, импульсом центра масс пары. Таким образом, нестингом (зеркальным нестингом) определяется длина волны пространственной модуляции параметра порядка волны плотности, то есть период волновой функции центра масс пары $\psi_c(r)$.

Импульсная зависимость параметра порядка, содержащаяся в волновой функции относительного движения пары $\psi(q)$, отражает детали межэлектронного взаимодействия. Топология d-волновых функций $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$, найденная численным решением уравнения самосогласования с кусочно-постоянным потенциалом взаимодействия [21], оказывается достаточно сложной: помимо линий нулей, отражающих орбитальную симметрию этих функций, проявляется система замкнутых линий нулей, существенно зависящая от параметров взаимодействия. Непрерывной деформацией при сохранении d-волновой орбитальной симметрии функции $h_1(q)$ и $h_2(q)$ можно преобразовать к простейшим полиномам $q_x^2 - q_y^2$ и $q_x q_y$, соответственно. Эти простейшие базисные функции также являются решениями уравнения самосогласования, в котором взаимодействие имеет d-волновую симметрию и характеризуется двумя эффективными константами связи [17].

Топологический инвариант, соответствующий основному состоянию синглетной волны плотности, представляется интегралом [35],

$$N = \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon_{ijk}\int d^2q\; h_i\,\frac{\partial h_j}{\partial q_x}\,\frac{\partial h_k}{\partial q_y}\,, \qquad (14)$$

по 2D зоне Бриллюэна, которая, в силу циклических граничных условий, топологически эквивалентна поверхности тора. Здесь ε_{ijk} - антисимметричный символ, индексы i, j, k пробегают значения $1,2,3$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Из (14) следует, что состояния с параметром порядка $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 = 0$ или $\eta_1 = 0$, $\eta_2 \neq 0$ определенно являются топологически тривиальными, для которых $N = 0$. Для топологически нетривиального состояния с $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$ инвариант (14) отличен от нуля и равен $N = -2$ [35]. По определению топологический инвариант не зависит от величин компонент параметра порядка η_1, η_2 (при условии $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$), а также от параметров закона дисперсии $\varepsilon(q)$ и параметров, характеризующих базисные функции $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$, в качестве которых при вычислении N можно принять простейшие d-волновые полиномы.

4 Функционал Гинзбурга-Ландау

Необычная волна плотности может возникать благодаря нестингу поверхности Ферми и межэлектронному взаимодействию, приводящему к спариванию с орбитальным угловым моментом $l \neq 0$. В качестве параметра порядка синглетной d-волны плотности естественно выбрать волновую функцию конденсата пар (4), как и в основополагающей теории Гинзбурга-Ландау [30]. Поскольку длина волны модуляции $\lambda = 2\pi/K$ волновой функции центра масс пары $\psi_c(r)$ определяется вектором нестинга, параметр порядка идеальной d-волны плотности включает фазу $\varphi(r)$ функции $\psi_c(r)$, в общем случае зависящую от координат, а также коэффициенты η_1, η_2 разложения волновой функции относительного движения (8) по базисным функциям $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$. Эти три компоненты параметра порядка необычной d-волны плотности (η_1, η_2 и φ), как и характер упорядочения в реальном пространстве (страйповый или шахматный порядок в случае квадратной 2D решетки), определяются из условия минимума свободной энергии, которая является функцией температуры T и функционалом от $\Psi(r;q)$,

$$F(T) = \iint d^2r\, d^2q\, \tilde{f}[T; \Psi(r,q)]. \tag{15}$$

Здесь интегрирование по r и q производится по всей площади 2D кристалла и по зоне Бриллюэна родительского металла, соответственно. Интеграл по q имеет смысл плотности свободной энергии,

$$f(r) = \int d^2q\, \tilde{f}[T; \Psi(r,q)] = f_1(r) + f_2(r) + f_3(r), \tag{16}$$

которая представлена в виде суммы слагаемых, первое из которых является разложением Ландау по степеням параметра порядка, второе представляет градиентный член, а третье учитывает взаимодействие поля волны плотности со случайным распределением примесей в кристалле. Значение плотности свободной энергии в неупорядоченной фазе опущено.

В разложении Ландау учтем вклады второго и четвертого порядков,

$$f_1(r) = \int d^2q \left[a_1 |\Psi(r,q)|^2 + (b/2)|\Psi(r,q)|^4\right], \tag{17}$$

где $a_1 = \alpha(T - T_c)$, α и b - положительные феноменологические коэффициенты, определяющие свойства пространственно неоднородной (упорядоченной) фазы. Для идеальных волн плотности (5) или (6) волновая функция центра масс пары является вещественной, а интегрирование по q с волновой функцией относительного движения (8) приводит к инвариантным комбинациям компонент параметра порядка: одному инварианту второго порядка, равному $\eta_1^2 + \eta_2^2$, и двум инвариантам четвертого порядка, равным $\eta_1^4 + \eta_2^4$ и $\eta_1^2\eta_2^2$. Плотность свободной энергии (17) после интегрирования по q принимает вид

$$f_1(r) = a_1\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)\psi_c^{\,2}(r) + (1/2)\left[b_1\left(\eta_1^4 + \eta_2^4\right) + b_2\,\eta_1^2\,\eta_2^4\right]\psi_c^{\,4}(r), \tag{18}$$

где $b_1 \sim b$ и $b_2 \sim b$ - феноменологические коэффициенты, зависящие от вида базисных функций $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$. Интегрирование по r приводит к разложению Ландау для средней плотности свободной энергии:

$$\bar{f}_1 = a_1(\eta_1^2 + \eta_2^2) + (1/2)[b_1(\eta_1^4 + \eta_2^4) + b_2\,\eta_1^2\eta_2^2](3/2)^{\delta}\,. \tag{19}$$

Здесь возникающий при интегрировании множитель $(3/2)^{\delta}$ относится к страйповой структуре (5) при $\delta = 1$ и шахматному упорядочению (6) при $\delta = 2$.

В идеальной волне плотности величина и направление импульса пары K определяются геометрией контура Ферми, а фаза волны плотности может зависеть от радиуса-вектора центра масс, $\varphi = \varphi(r)$. Если предположить, что характерная длина l_{φ}, на которой изменяется фаза, гораздо больше межатомного расстояния a, но гораздо меньше характерного линейного размера 2D кристалла, $a << l_{\varphi} << L$, то градиентный член в плотности свободной энергии волны плотности, возникающей при конденсации ЭДП, можно записать подобно тому, как это сделано в случае обычной CDW [23]

$$f_2(r) = (1/2)\sum_j\{e_1|\,(K_j\nabla - iK_j^2)\Psi_j\,|^2 + e_2|\,[K_j \times \nabla\Psi_j]\,|^2\}. \tag{20}$$

Здесь $\Psi_j(r,q) = \psi_{c\,j}(r)\psi(q)$ - конденсатная волновая функция, соответствующая одному из (K_j) эквивалентных импульсов центра масс пар в конденсате, волновая функция центра масс $\psi_{cj}(r) = c_j\,\exp[i(K_j r + \varphi)]$ подобна бегущей волне Фулде-Феррела, соответствующим выбором коэффициентов c_j, по модулю равных единице, можно получить решения вида (5) или (6). Коэффициенты e_1 и e_2 в (20) характеризуют продольную и поперечную фазовые жесткости, соответственно, ∇ - оператор градиента в реальном 2D пространстве. Выражение (20), таким образом, может быть представлено в виде

$$f_2(r) = (1/2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)\sum_j\{(e_1 - e_2)(K_j\nabla\varphi)^2 + e_2K^2(\nabla\varphi)^2\}, \tag{21}$$

где учтено, что $|K_j| = K$ для всех эквивалентных импульсов.

Выберем координатную ось x совпадающей с направлением вектора K. Градиентный член для волны плотности (5), в которой фаза не зависит от поперечной координаты y записывается как

$$f_2(r) = e_1\, K^2 \left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)\left(\varphi'\right)^2, \tag{22}$$

где $\varphi' = \partial\varphi/\partial x$. Соответственно, для волны плотности (6) градиентный член имеет вид

$$f_2(r) = (e_1 + e_2)K^2(\eta_1^2 + \eta_2^2)\,(\nabla\varphi)^2. \tag{23}$$

Градиентный вклад в *среднюю* плотность свободной энергии квазидвумерного кристалла можно записать как $\bar{f}_2 = a_2(\eta_1^2 + \eta_2^2)$, где феноменологический коэффициент a_2 равен $e_1\, K^2\overline{\left(\varphi'\right)^2}$ или $(e_1 + e_2)K^2\overline{(\nabla\varphi)^2}$ для волн плотности (5) или (6), соответственно. Черта сверху означает усреднение в реальном пространстве.

В случае PDW в отсутствие внешнего магнитного поля градиентный член также имеет вид (20). Внешнее магнитное поле с векторным потенциалом A, помимо того, что добавляет к плотности свободной энергии вклад энергии магнитного поля, приводит также к изменению волновой функции куперовской пары, $\Psi \to \Psi \cdot \exp[(2ie/\hbar c)Ar]$, чему соответствует изменение градиента фазы: $\nabla\varphi \to \nabla\varphi - (2ie/\hbar c)A$ [30].

Амплитуда и фаза конденсатной волновой функции могут изменяться в окрестностях примесных атомов, случайно распределенных в кристалле. С примесями могут быть связаны локальные изменения поляризации и намагниченности, приводящие к перераспределению зарядов и токов в волне плотности, что дает дополнительный вклад в свободную энергию. В случае обычной CDW вклад заряженных примесей, имеющий электростатическое происхождение, линейно зависит от параметра порядка [36]. Предположим, что взаимодействие необычной волны плотности с полем случайно распределенных примесей также приводит к слагаемому в плотности свободной энергии, линейному по параметру порядка,

$$f_3(r) = Re\int d^2q\; h(r,q)\Psi(r,q). \tag{24}$$

Здесь $h(r,q)$ - функция, описывающая взаимодействие зарядов или токов в волне плотности со случайным полем примесей. Далее рассматриваются слабые поля примесей, которые не приводят к образованию локализованных примесных состояний и, таким образом, не могут изменить амплитуду параметра порядка [24]. Однако даже слабый примесный потенциал, связанный с фазой конденсата $\varphi(r)$, разрушает дальний порядок, приводя к конечной корреляционной длине L_0 фазовой когерентности, которая возрастает по степенному закону с уменьшением концентрации примесей и величины примесного потенциала [24].

Для волновой функции относительного движения $\psi(q)$ вида (8) и вещественной волновой функции центра масс $\psi_c(r)$ выражение (24) можно переписать как

$$f_3(r) = \psi_c(r)[\eta_1 h_1^{'}(r) - \eta_2 h_2^{''}(r)], \tag{25}$$

где

$$h_\mu(r) \equiv h_\mu^{'}(r) + i h_\mu^{''}(r) = \int d^2q\, h(r,q)\psi_\mu(q). \tag{26}$$

Здесь $\mu = 1,2$, а $h_\mu^{'}(r)$ и $h_\mu^{''}(r)$ - вещественные случайные функции, зависящие от распределения примесей и величины примесного потенциала. Фаза φ волновой функции $\psi_c(r)$ в (25) является случайной функцией радиуса-вектора центра масс. Средняя по ансамблю примесей фаза волны плотности, для которой сохраним прежнее обозначение $\varphi(r)$, имеет термодинамический смысл фазы параметра порядка, которая может изменяться на характерной длине $l_\varphi >> \lambda$. Представим аргумент косинуса в (5) или (6) как $\varphi_r + \varphi(r)$, где φ_r - случайная составляющая фазы, зависящая от расположения примесей.

Вклад в среднюю плотность свободной энергии от взаимодействия волны плотности с примесями, определяемый интегралом от (24) по 2D области реального пространства с линейным размером l_φ, можно записать как

$$f_3(r) = u_1\eta_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - u_2\eta_2 \cos(\varphi + \varphi_2), \tag{27}$$

где константы u_1 и φ_1 (u_2 и φ_2) выражаются через интегралы от случайных функций $h_1^{'}(r)\cos\varphi_r$ и $h_1^{'}(r)\sin\varphi_r$ ($h_2^{''}(r)\cos\varphi_r$ и $h_2^{''}(r)\sin\varphi_r$). В результате интегрирования по области $0 \le r \le l_\varphi$, включающей достаточно большое количество примесей, происходит самоусреднение быстро меняющихся случайных величин по ансамблю примесей [37], так что все четыре константы в (27) являются вполне определенными феноменологическими коэффициентами. При этом фаза $\varphi = \varphi(r)$ остается медленно меняющейся функцией r. Между компонентами η_1 и η_2 орбитального параметра порядка, имеется, вообще говоря, разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, связанная с движением центра масс и являющаяся феноменологическим параметром.

В случае слабого поля примесей плотность свободной энергии d-волны плотности характеризуется некоторым набором феноменологических параметров, который, в частности, включает волновое число $K = 2\pi/\lambda$, определяющее длину волны модуляции λ. Параметр λ и возможные типы порядка в реальном пространстве (страйповый или шахматный в случае квадратной решетки) связаны с нестинговым свойством дисперсии электронов в родительском металле. Три термодинамические величины η_1, η_2 и φ, определяемые из условия минимума свободной энергии, составляют параметр порядка, который описывает d-волну плотности. Равновесный параметр порядка выражается через феноменологические коэффициенты, характеризующие данную волну плотности: коэффициенты разложения Ландау a_1 (две константы α и T_c), b_1 и b_2, продольную и поперечную фазовую жесткости e_1 и e_2 а также параметры u_1, u_2 и $\Delta\varphi$, определяющие влияние случайного поля примесей на состояние волны плотности.

5 Фазовый переход в состояние волны плотности

Рассмотрим вначале 2D кристалл, в котором отсутствуют структурные несовершенства и примеси. В таком случае $u_\mu \to 0$, так что соответствующий вклад в свободную энергию обращается в нуль, а минимуму градиентного вклада соответствует $\varphi = const$. Компоненты орбитального параметра порядка η_1 и η_2 определяются минимумом свободной энергии (19). Из необходимых условий экстремума,

$$\eta_1(2a_1 + 2b_1\eta_1^2 + b_2\eta_2^2) = 0, \qquad \eta_2(2a_1 + 2b_1\eta_2^2 + b_2\eta_1^2) = 0, \tag{28}$$

(здесь общий множитель $(3/2)^d$ включен в определения коэффициентов b_1 и b_2) следует тривиальное решение $\eta_1 = \eta_2 = 0$, которому соответствует минимум свободной энергии $\bar{f}_1 = 0$ при $T > T_c$ и любых b_1 и b_2. Это решение описывает металлическую прафазу, из которой в результате фазового перехода возникает, вообще говоря, несоизмеримая d-волна плотности.

Одному из нетривиальных решений системы уравнений (28), $\eta_1^2 = -a_1/b_1$; $\eta_2 = 0$, соответствует минимум свободной энергии $\bar{f}_m = -a_1^2/2b_1$ при

$b_2 > 2b_1$ и $a_1 < 0$, то есть при $T < T_c$. Это решение описывает d-волну плотности с вещественным параметром порядка $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 = 0$ (необычную CDW или PDW). Такому же значению минимума свободной энергии соответствует другое нетривиальное решение системы (28), $\eta_1 = 0; \eta_2^2 = -a_1/b_1$, также существующее при $b_2 > 2b_1$ и $T < T_c$ и описывающее волну плотности с чисто мнимым параметром порядка $\eta_1 = 0$, $\eta_2 \neq 0$ (необычную волну плотности тока заряда, подобную DDW, или PDW с чисто мнимым SC параметром порядка). Решения рассмотренных типов отсутствуют при $T > T_c$.

Еще одно нетривиальное решение системы (28), в котором отличны от нуля и вещественная, и мнимая части параметра порядка, $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$, существует при $T < T_c$ и $b_2 < 2b_1$:

$$\eta_1^2 = \eta_2^2 = -(a_1/b_1)[1 + b_2/2b_1]^{-1}. \tag{29}$$

Этому решению с нарушенной T-симметрией соответствует минимум свободной энергии $\bar{f}_{m'} = -(a_1^2/b_1)[1 + b_2/2b_1]^{-1}$. Решение $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$ существует и при $b_2 = 2b_1$: в этой особой точке допустимо любое отношение компонент η_2/η_1 при условии, что $\eta_1^2 + \eta_2^2 = -a_1/b_1$. Значения свободной энергии в точке минимума для волн плотности (5) и (6) при прочих равных условиях отличаются друг от друга, что обусловлено множителем $(3/2)^d$: минимум для волны (5) оказывается более глубоким.

Равновесная свободная энергия (19) при $b_2 > 2b_1$ четырехкратно вырождена: эквивалентные минимумы, равные $\bar{f}_m$, располагаются при $\eta_1 = \pm\eta$, $\eta_2 = 0$ и $\eta_1 = 0$ $\eta_2 = \pm\eta$, где $\eta^2 = -a_1/b_1$. Аналогично, при $b_2 < 2b_1$: минимуму свободной энергии $f_{m'}$ соответствуют четыре значения параметра порядка, определяемого компонентами (29). Такое вырождение связано с симметрией свободной энергии (19) относительно поворотов на углы, кратные $\pi/2$, в плоскости η_1, η_2.

Представим компоненты d-волнового орбитального параметра порядка (8) в полярных координатах, $\eta_1 = \eta\cos\theta$, $\eta_2 = \eta\sin\theta$. Плотность свободной энергии (19),

$$\bar{f}_1 = a_1\eta^2 + \frac{1}{2}b_1\eta^4 + \frac{1}{8}(b_2 - 2b_1)\eta^4\sin^2 2\theta, \tag{30}$$

инвариантна по отношению к преобразованию $\theta \to \theta + \pi/2$. Одно из условий экстремума функции (30) приводит к уравнению $\sin 4\theta = 0$, которое при $-\pi < \theta \leq \pi$ имеет восемь решений. В случае, когда $b_2 > 2b_1$, вещественный порядок ($\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 = 0$) характеризуется значениями угловой координаты $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, а чисто мнимый ($\eta_1 = 0$, $\eta_2 \neq 0$) - значениями $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$. При данном η каждому из этих четырех значений θ соответствуют одна и та же средняя плотность свободной энергии (19) и один и тот же градиентный член (21), симметричные по отношению к преобразованиям точечной группы C_{4v} (в частности, к повороту на $\pi/2$) в импульсном пространстве. Аналогичное вырождение имеет место и в случае $b_2 < 2b_1$: равновесному порядку $|\eta_1| = |\eta_2| \neq 0$ соответствуют угловые координаты $\theta = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$. При $b_2 = 2b_1$ свободная энергия (30) не зависит от θ, то есть инвариантна (и равна $\bar{f}_m$) по отношению к поворотам на произвольный угол θ.

Трем неэквивалентным значениям $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ соответствуют три различные фазы, для каждой из которых средняя плотность свободной энергии может быть записана как

$$\bar{f}_1 = a_1\eta^2 + \frac{1}{2}b_\theta\eta^4, \tag{31}$$

где $b_0 = b_{\pi/2} \equiv b_1$, $b_{\pi/4} \equiv (b_1 + 2b_2)/4$. Из условия экстремума функции (31) по переменной η следуют равновесные значения модуля параметра порядка $\eta_\theta^2 = -a_1/b_\theta$. Вырождение снимается слагаемыми более высокого порядка в $\bar{f}_1$, которые нарушают симметрию по отношению к преобразованиям из группы C_{4v}, а также взаимодействием волны плотности с примесями (27), играющим роль термодинамического внешнего поля, размывающего точку фазового перехода второго рода и наводящего упорядочение при $T > T_c$.

Рассмотрим состояния с вещественным ($\eta_1 \neq 0, \eta_2 = 0$) и мнимым ($\eta_1 = 0, \eta_2 \neq 0$) параметрами порядка, которые возникают при $b_2 > 2b_1$ и соответствуют одинаковым значениям минимумов свободной энергии (19). Взаимодействие этих упорядоченных состояний с примесями (27), не симметричное по отношению к преобразованию $\eta_1 \leftrightarrow \eta_2$, снимает вырождение и приводит к комплексному параметру порядка ($\eta_1 \neq 0, \eta_2 \neq 0$). Фаза φ в (27) находится из условия минимума свободной энергии, после чего средняя плотность свободной энергии может быть представлена в виде

$$\bar{f} = a_1(\eta_1^2+\eta_2^2)+\frac{1}{2}b_1(\eta_1^4+\eta_4^2)+\frac{1}{2}b_2\eta_1^2\eta_2^2-h_1\eta_1-h_2\eta_2, \tag{32}$$

где h_1 и h_2 - феноменологические постояные, имеющие смысл термодинамических внешних полей, сопряженных параметрам порядка η_1 и η_2, соответственно.

Пусть при $h_1 = h_2 = 0$ орбитальному состоянию волны плотности соответствует параметр порядка $\eta_1 \equiv \overline{\eta}_1 = \sqrt{(-a_1/b_1)}$, $\eta_2 \equiv \overline{\eta}_2 = 0$. Отличное от нуля внешнее поле изменяет, вообще говоря, обе компоненты параметра порядка: $\eta_1 = \overline{\eta}_1 + \delta\eta_1$, $\eta_2 = \delta\eta_2$. Предположим, что наведенный внешним полем порядок мал по сравнению с отличным от нуля только при $T < T_c$ параметром $\overline{\eta}_1 = \sqrt{\alpha(T_c - T)/b_1}$, то есть $|\delta\eta_1| << \overline{\eta}_1$, $|\delta\eta_2| << \overline{\eta}_1$, что имеет место вне некоторой окрестности точки фазового перехода T_c. В этом случае полевые поправки к компонентам параметра порядка линейно зависят от компонент поля,

$$\eta_1 = \overline{\eta}_1 - h_1/4a_1, \qquad \eta_2 = -b_1h_2/(b_2-2b_1)a_1. \tag{33}$$

В малой окрестности точки фазового перехода характер зависимости параметра порядка от поля меняется [33]. Так, в частном случае $h_1 = 0, h_2 \neq 0$ имеем $\delta\eta_1 = 0$, $\delta\eta_2 = (h_2/2b_1)^{1/3}$.

Решение (29), существующее при $b_2 < 2b_1$, определенно является топологически нетривиальным. Ему, согласно (14), соответствует значение топологического инварианта $N = -2$. В случае $b_2 > 2b_1$ снятие вырождения волны плотности при взаимодействии со случайным полем примесей приводит к решению (33), которое также соответствует топологически нетривиальному состоянию с $N = -2$. Отметим, что из определения коэффициентов b_1 и b_2, приводящего к плотности свободной энергии (18), следует, что в случае простейших базисных функций $\psi_1(q)$ и $\psi_2(q)$, выражающихся через линейные комбинации сферических гармоник [17], имеет место неравенство $b_2 < 2b_1$.

6 Эффект соизмеримости

В общем случае возникновение волны плотности сопровождается перераспределением зарядов и (или) токов, что добавляет к свободной энергии электростатический и (или) магнетостатический вклады, которые одинаково зависят от орбитального параметра порядка. Так, изменение электростатической энергии при перераспределении заряда в результате возникновения CDW имеет вид [24]

$$\delta E_e = \int d^3 r V(r) \delta \rho(r), \tag{34}$$

где $V(r)$ - кристаллический потенциал, а $\delta \rho = \rho_0(r) \alpha_c(r)$ - соответствующая CDW плотность заряда. Здесь $\rho_0(r)$ - плотность заряда в отсутствие CDW,

$$\alpha_c(r) = \int d^2 q \left\{ |\Psi(r,q)|^2 - \overline{|\Psi(r,q)|^2} \right\}, \tag{35}$$

$\Psi(r,q)$ - волновая функция пары в смешанном представлении (4), верхняя черта означает усреднение в реальном пространстве.

Пусть CDW имеет страйповую структуру, а ось x совпадает с направлением модуляции заряда. Произведение $V(r)\rho_0(r)$ обладает полной трансляционной симметрией кристалла, а $\alpha_c(r)$ является периодической функцией x с периодом $\lambda/2$. Разложив $V(r)\rho_0(r)$ и $\alpha_c(r)$ как функции x в ряды Фурье и выполнив интегрирование по x в (34), найдем, что $\delta E_e \neq 0$ лишь при выполнении обычного условия соизмеримости [24]: $\lambda/2d = m'/m$, где m и m' - целые числа, d - основной период решетки в направлении оси x. В случае гармонической волны плотности (5), имеем $m' = 1$, так что условию соизмеримости соответствует старшая гармоника $m = 1$ в разложении функции $V(r)\rho_0(r)$, то есть удвоение периода: $\lambda = 2d$.

Из (34) следует, что электростатический вклад в среднюю плотность свободной энергии соизмеримой фазы с $\lambda = 2d$ можно представить как $\bar{f}_c = c\eta^2 \cos 2\varphi$, где c - феноменологический коэффициент. Минимум свободной энергии определяется выбором фазы φ. В отсутствие примесей $\varphi = const$; тогда при $c > 0$ имеем $\varphi = \pi/2$, так что $\bar{f}_c = -c\eta^2$ (в случае $c < 0$ равновесное значение фазы равно $\varphi = 0$, и $\bar{f}_c = -|c|\eta^2$). Таким образом, при переходе в соизмеримую фазу изменяется коэффициент при инварианте второго порядка $\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$ в разложении Ландау (19), $a_1 \to a_2 = a_1 - c$. Коэффициент a_2 обращается в нуль при температуре, отличающейся от температуры T_c перехода в состояние несоизмеримой волны плотности. Из $a_2 = \alpha(T - T_c) - c$ следует, что переходу в состояние соизмеримой волны плотности формально соответствует более высокая температура фазового перехода, $T_c \to T_c + c/\alpha$.

Температура перехода в состояние несоизмеримой волны плотности зависит от заполнения (уровня допирования ξ) зоны проводимости родительской металлической фазы. Контур Ферми представляет изолинию, ограничивающую заполнение, так что свойство нестинга (или зеркального нестинга) этой изолинии определяет длину волны модуляции $\lambda(\xi)$ параметра порядка несоизмеримой фазы. По мере изменения заполнения в результате допирования длина волны модуляции может достигать значений, соответствующих соизмеримым волнам плотности. Обозначим ξ_c - уровень допирования, соответствующий соизмеримой фазе с длиной волны модуляции $\lambda_c = \lambda(\xi_c)$. В случае, когда ξ достаточно мало отличается от ξ_c, изменение длины волны модуляции $\lambda(\xi) \to \lambda_c$ приводит к увеличению температуры фазового перехода от $T_c(\xi)$ до $T_c(\xi) + c/\alpha$. Соответственно, соизмеримая фаза проявляется не в отдельных изолированных точках $\xi = \xi_c$ в области изменения параметра ξ, а в некоторых конечных окрестностях этих точек, которые определяются неравенством $T_c(\xi) + c/\alpha \geq T_c(\xi_c)$. Здесь, по определению, $T_c(\xi)$ есть температура перехода в состояние несоизмеримой волны плотности при данном ξ.

7 Стационарная фаза волны плотности

Выражение (27) для каждого из трех неэквивалентных θ, которые соответствуют состояниям, отличающимся орбитальным упорядочением, может быть представлено в виде

$$f_3 = -h_\theta \eta \cos(\varphi + \varphi_\theta), \tag{36}$$

где амплитуда внешнего поля h_θ и постоянная фаза φ_θ выражаются через феноменологические параметры u_1, u_2, $\Delta\varphi$. При выборе начала отсчета фазы φ для данного состояния ϑ можно положить $\varphi_\theta = 0$.

В случае страйпового упорядочения в реальном пространстве модуль параметра η, соответствующего орбитальному упорядочению ϑ, и фаза φ, связанная с движением центра масс пар, образующих конденсат, находятся из условий минимума плотности свободной энергии

$$f_\theta = a_1\eta^2 + \frac{1}{2}b_\theta\eta^4 - h_\theta\eta + e_1K^2\eta^2(\varphi')^2 + 2h_\theta\eta\sin^2(\varphi/2). \tag{37}$$

В отсутствие примесей (при $h_\theta = 0$) минимум выражения (37) достигается при $\varphi = const$. Вклад от взаимодействия волны плотности с примесями (при $h_\theta > 0$) минимален при $\varphi = 0$.

Выражение (37) можно рассматривать [38] как плотность функции

Гамильтона системы с двумя степенями свободы (обобщенные координаты η и φ). Координата $\varphi(x)$, зависящая как от параметра от η, находится как решение соответствующего уравнения Лагранжа,

$$\varphi'' + q_0^2 \sin\varphi = 0, \tag{38}$$

представляющего уравнение нелинейного маятника. Здесь $q_0 = \sqrt{h_\theta / 2e_1 K^2 \eta}$ имеет смысл волнового числа для фазовой переменной в линейном пределе $|\varphi| << 1$. Первый интеграл уравнения (38) имеет вид

$$\frac{1}{2}(\varphi')^2 + 2q_0^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} = \varepsilon, \tag{39}$$

где константа $\varepsilon \geq 0$. Выражение (39) есть функция Гамильтона системы с одной степенеью свободы, которая описывается динамическим уравнением (38). Решение этого уравнения $\varphi(x)$ при $0 < \varepsilon < 2q_0^2$ имеет характер колебаний вблизи положения рановесия $\varphi = 0$ при $x = 0$. Эквивалентным положениям равновесия соответствуют значения фазы $\varphi_n = n\pi$, где четные (нечетные) n относятся к устойчивому (неустойчивому) равновесию. При $\varepsilon > 2q_0^2$ решение $\varphi(x)$ соответствует вращению с накоплением фазы 2π при каждом обороте. Значение $0 < \varepsilon = 2q_0^2$ соответствует сепаратрисе, при нечетных n проходящей через точки $\varphi' = 0$, $\varphi = \pm n\pi$ фазовой плоскости φ', φ и разделяющей замкнутые и открытые траектории [39].

Рассмотрим случай $\varepsilon > 2q_0^2$ и определим эллиптический модуль $\kappa = \sqrt{2q_0^2/\varepsilon}$. Из (39) следует, что $\xi = F(\varphi/2;\kappa)$, где $\xi = q_0 x/\kappa$, $F(\varphi/2;\kappa)$ - эллиптический интеграл первого рода, определенный на отрезке $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Обращение эллиптического интеграла $F(\varphi/2;\kappa)$ позволяет выразить фазу φ через эллиптическую амплитуду, $\varphi = 2am(\xi;\kappa)$, тригонометрический синус которой определяет эллиптический синус Якоби, $sn(\xi;\kappa) \equiv \sin am(\xi;\kappa)$, как периодическую функцию аргумента ξ с периодом $4\mathbf{K}$: $sn(\xi + 4\mathbf{K};\kappa) = sn(\xi;\kappa)$. Здесь $\mathbf{K} = F(\pi/2;\kappa)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Решение уравнения (38) при $\kappa > 1$ можно представить как стоячую волну, зависящую от η как от параметра,

$$\varphi(x;\eta) = 2\arcsin\{sn(q_0 x/\kappa;\kappa)\}, \tag{40}$$

имеющую период $\lambda_\varphi = 4\kappa\mathbf{K}/q_0$ в реальном пространстве.

При $0 < \varepsilon < 2q_0^2$ эллиптический модуль определяется как $\kappa = \sqrt{\varepsilon/2q_0^2}$ (так что $0 < \kappa < 1$), а решение уравнения (38) записывается как

$$\varphi(x;\eta) = 2\arcsin\{\kappa\, sn(q_0 x;\kappa)\}. \tag{41}$$

Период волны (41) в реальном пространстве равен $\lambda_\varphi = 4\mathbf{K}/q_0$. Каждой полуволне $\lambda_\varphi/2$ соответствует приблизительно постоянное значение фазы параметра порядка $\varphi \approx \pm\pi/2$. В переходной области между соседними полуволнами фаза меняется на $\pm\pi$ [39], что в d-волне соответствует перераспределению знака параметра порядка между квадрантами в плоскости q_x, q_y. Если параметр порядка пропорционален модулирующей плотности заряда, в переходных областях имеет место накопление зарядов с чередующимися (при переходе от одной области к другой) знаками.

После определения фазы $\varphi = \varphi(x;\eta)$ согласно (40) или (41) последние два слагаемых в (37) становятся заданными функциями x, которые изменяются на характерной длине l_φ, такой, что $\lambda << l_\varphi << L$, где L - характерный линейный размер 2D кристалла. Свободная энергия, из условия минимума которой находится параметр порядка η, есть интеграл по площади $\sim L^2$ от (37). Возникающие при интегрировании по x средние $\overline{(\varphi')^2}$ и $\overline{\cos\varphi}$ являются функциями η. Предположим, что, по крайней мере, при малых η эти функции могут быть аппроксимированы многочленами. Тогда для каждого из трех значений θ, минимизирующих свободную энергию, средняя (не зависящая от r) плотность свободной энергии принимает вид

$$\bar{f}_\theta = a_\theta \eta^2 + (b_\theta/2)\eta^4 - \tilde{h}_\theta \eta. \tag{42}$$

Минимуму функции (37) при каждом θ соответствует равновесный параметр порядка η, выраженный через перенормированные феноменологические коэффициенты a_θ, b_θ и $\tilde{h}_\theta$.

В отсутствие примесей ($\tilde{h}_\theta = 0$) имеет место фазовый переход второго рода, условия которого (при соответствующей перенормировке коэффициентов) имеют вид (28). В случае $\tilde{h}_\theta \neq 0$ фазовый переход приобретает черты перехода первого рода. Топологически нетривиальное состояние d-волны плотности при $b_2 < 2b_1$ описывается параметром порядка с отличными от нуля и равными по абсолютной величине вещественной и мнимой компонентами (29), чему соответствуют угловая координата $\theta = \pi/4$ и топологический инвариант $N = -2$.

При $b_2 > 2b_1$ также возможно топологически нетривиальное состояние с тем же инвариантом $N = -2$, но, вообще говоря, разными абсолютными величинами вещественной и мнимой компонент (33).

8 Заключение

Известно много слоистых кристаллов, в которых проявляются обычные волны плотности заряда и спина [24, 28]. Электронные подсистемы таких кристаллов являются квазидвумерными, то есть поверхность Ферми в проводящих слоях вырождается в контур Ферми, а взаимодействие между слоями приводит к тому, что фазовый переход в состояние волны плотности теряет черты перехода Березинского-Костерлица-Таулеса и (в отсутствие примесей и внешних полей) оказывается переходом второго рода.

В частности, основному состоянию родительских (недопированных) купратных соединений соответствует обычная соизмеримая SDW с удвоением элементарной ячейки. Избыточные носители (электроны или дырки сверх половинного заполнения) представляют дефекты SDW, нарушающие антиферромагнитные связи, что приводит к подавлению дальнего порядка уже при сравнительно низком уровне допирования. С ростом концентрации носителей изменяются размеры и форма контура Ферми металлической прафазы и, соответственно, величина, а, возможно, и ориентация [50] вектора нестинга (зеркального нестинга), что может сделать предпочтительным формирование несоизмеримых волн плотности. Некоторые из имеющихся экспериментальных данных могут быть интерпретированы как косвенные свидетельства того, что PG состоянию купратов соответствуют не только обычные CDW и SDW, но также различные необычные волны плотности [14].

Прямые доказательства существования необычных волн плотности, по-видимому, отсутствуют [2], что вынуждает связывать подобные упорядочения со скрытым орбитальным порядком, который, возможно, проявляется не только в слабо допированных сверхпроводящих оксидах меди [14], но также в соединениях с тяжелыми фермионами [40]. Необычные состояния конденсатов ЭДП и куперовских пар с $l = 2$ представляют особый интерес в связи с проблемой высокотемпературной сверхпроводимости купратов. При обсуждении происхождения PG состояния в купратах скрытые диэлектрические упорядочения, такие как DDW, нередко рассматриваются как альтернатива флуктуирующему необычному SC порядку с $l=2$, который наблюдается в широкой области температур выше T_c [42].

Следы локального страйпового (ось симметрии C_2) и шахматного (C_4) упорядочения в кристаллах $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$ (Bi-2212) и ряде других слоистых SC соединений, предположительно связанного с возникновением волн плотности, как выше так и ниже T_c проявляются в сканирующей туннельной микроскопии. В кристаллах $\mathrm{Ca_{2-x}Na_xCuO_2Cl_2}$ при низких температурах наблюдается, по-видимому, соизмеримая структура с длиной волны модуляции $\lambda = 4a$ [9], тогда как в соединениях Bi-2212 обнаружена сильная зависимость длины волны модуляции от уровня допирования ξ, при этом в широком диапазоне температур λ не зависит от T [11]. В оптимально допированных кристаллах Bi-2212 ($T_c = 35\mathrm{K}$) $\lambda/a \approx 6.2$, а в недодопированных кристаллах ($T_c = 32\mathrm{K}$ и $T_c = 25\mathrm{K}$) $\lambda/a \approx 5.1$ и $\lambda/a \approx 4.5$, соответственно [11]. Увеличение λ с ростом ξ, согласующееся с антинодальным нестингом контура Ферми [13], позволяет связать наблюдаемое в Bi-2212 неоднородное состояние с несоизмеримой волной плотности [11].

Нестинг определяет длину волны модуляции и поддерживает различные конкурирующие упорядоченные состояния волн плотности, которым могут соответствовать близкие энергии. Несоизмеримые необычные волны плотности, подобные полуметаллическому соизмеримому состоянию DDW [14], вполне вероятно, существуют в PG состоянии купратов. Сосуществование d-состояний CDW и PDW [41] с одинаковой орбитальной симметрией объясняет флуктуации SC параметра порядка, наблюдаемые в обширной части PG области фазовой диаграммы купратов [42].

В купратах, как и в других сильно коррелированных системах, которые допускают конкуренцию состояний с близкими энергиями, можно также ожидать и топологически нетривиальные состояния волн плотности в виде TDW [18]. Необычные d-волны плотности с вещественным или чисто мнимым параметром порядка с четырьмя нодальными точками на контуре Ферми соответствуют полуметаллу и являются топологически тривиальными. Энергетическая щель, закрывающая ноды, возникает при дополнительном упорядочении, которое приводит к сосуществованию двух волн плотности. Топологически нетривиальное состояние TDW возможно, если плоскости симметрии обоих параметров порядка (в импульсном пространстве) не совпадают. Для квадратной решетки при законе дисперсии с импульсом нестинга $Q=(\pi,0)$ различные соизмеримые волны плотности, образованные орбиталями d_{xz} и d_{yz}, исследованы в [43] в терминах микроскопической теории среднего поля, когда параметры энергетической щели фактически рассматриваются как феноменологически заданные функции с определенной орбитальной симметрией.

Подобным свойством обладает также пара орбитальных состояний $d_{x^2-y^2}$, d_{xy} поэтому комплексный порядок с нарушенной T-симметрией, $\eta_1 + i\eta_2$, где компоненты η_1 и η_2 имеют орбитальные симметрии $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy}, соответственно, описывает сверхпроводящее [21] или диэлектрическое [17] состояния, поскольку ноды функции $\eta_1\,\psi_1(q)$ в (8) находятся на пересечениях контура Ферми с диагоналями зоны Бриллюэна, а ноды функции $\eta_2\,\psi_2(q)$ - на его пересечениях с координатными осями. В таком случае величина запрещенной зоны

$$\Delta(q) = \sqrt{\eta_1^2\,\psi_1^2(q) + \eta_2^2\,\psi_2^2(q)} \tag{43}$$

отлична от нуля на всем контуре Ферми. Параметр порядка $\eta_1 + i\eta_2$ с d-волновыми компонентами описывает топологически нетривиальное состояние квантового аномального эффекта Холла (QAHE), которое характеризуется значением топологического инварианта $N = -2$ [35].

О наблюдении QAHE в тонких пленках спинового топологического диэлектрика $(\mathrm{Bi,Sb})_2\mathrm{Te}_3$ с магнитными примесями Cr (соединение $\mathrm{Cr}_{0.15}(\mathrm{Bi}_{0.1}\mathrm{Sb}_{1.85})_2\mathrm{Te}_3$) сообщается в [44]. Диэлектрическая щель в $(\mathrm{Bi,Sb})_2\mathrm{Te}_3$ возникает благодаря достаточно сильному T-инвариантному спин-орбитальному взаимодействтю, а намагниченность ферромагнитно упорядоченных примесей Cr, нарушающая T-симметрию, наводит квантованную холловскую проводимость, пропорциональную топологическому инварианту N. Примесь наведенной внешним магнитным полем мнимой компоненты параметра порядка с орбитальной симметрией d_{xy} к однородному вещественному упорядочению с симметрией $d_{x^2-y^2}$ рассматривалась [45] как причина нарушения T-симметрии при фазовом переходе, который обнаружен [46] внутри SC фазы соединения Bi-2212. Комплексный порядок также объясняет [47] фазовый переход внутри SC состояния в Bi-2212 с магнитными примесями Ni в отсутствие внешнего магнитного поля [48].

Рассмотренный в [18] триплетный порядок $i\sigma d_{x^2-y^2}$ (здесь $\sigma = \pm 1$ - проекция спина на ось квантования z), соответствующий полуметаллу со спиновыми токами, циркулирующими по границам кристаллографических элементарных ячеек, представляет антиферромагнитную структуру с удвоением элементарной ячейки. T-инвариантная смесь триплетного и синглетного состояний $i\sigma d_{x^2-y^2} + d_{xy}$ приводит к диэлектрической щели на всем контуре Ферми, чем обеспечивается топологический протекторат спиновых токов, циркулирующих по границе 2D кристалла, как в спиновых топологических диэлектриках. Найти экспериментальное подтверждение существования смешанного триплет-синглетного упорядочения $i\sigma d_{x^2-y^2} + d_{xy}$, по-видимому, труднее [18], чем обнаружить скрытый порядок DDW, в то время как синглетная волна плотности тока заряда, подобная DDW с примесью CDW, $id_{x^2-y^2} + d_{xy}$, может быть связана с гигантским эффектом Нернста в PG состоянии [49].

Помимо гигантского эффекта Нернста, в слабо допированных купратах в области псевдощели наблюдаются аномалии многих других физических свойств. Попытки связать псевдощель с каким-либо определенным нарушением симметрии, в общем, успеха не имели. Вполне вероятно, что PG состояние формируется в результате конкуренции близких по энергии волн плотности, возникающих в металлической прафазе с выраженным нестингом контура Ферми, наблюдаемым именно в слабо допированных соединениях [50]. Размеры и форма контура Ферми существенно зависят от уровня допирования ξ, то есть от степени заполнения зоны проводимости родительского металла [50]. При каждом ξ (от $\xi = 0$ вплоть до оптимального допирования) можно выделить набор кристаллически эквивалентных векторов нестинга, при которых развивается неустойчивость, приводящая к некоторой, вообще говоря, несоизмеримой, волне плотности.

Купраты представляют системы с сильными электронными корреляциями, в которых определяющим является межэлектронное экранированное кулоновское отталкивание, усиленное, при достаточно низком уровне допирования, отталкивательным взаимодействием за счет обмена антиферромагнитными магнонами. Отталкивание делает невозможными связанные состояния частиц, составляющих пары с s-волновой ($l = 0$) орбитальной симметрией, но допускает состояния с $l \neq 0$, которым соответствуют щелевые функции, знакопеременные в импульсном пространстве. Импульсная зависимость матричных элементов взаимодействия, приводящего к образованию связанных состояний, существенна, поскольку энергия состояния определяется конкуренцией рассеяния между областями импульсного пространства с разными и одинаковыми знаками щелевой функции. Поэтому преобладающее отталкивательное взаимодействие в квазидвумерных системах с нестингом контура Ферми может стать причиной выпадения в конденсат куперовских пар или ЭДП с отличным от нуля импульсом центра масс (по порядку величины сопоставимым с размером зоны Бриллюэна) и возникновения необычных волн плотности [15, 22].

Литература

[1] B.I. Halperin, T.M. Rice, *Solid State Physics*, ed. D.T. Frederick Seitz and E. Henry. Vol. 21. 1968, N.Y.: Academic Press. 115-192.

[2] C. Nayak, *Phys. Rev*. B **62**, 4880-4889 (2000).

[3] F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett*. **61**, 2015-2018 (1988).

[4] M.Z. Hasan, C.L. Kane, *Rev. Mod. Phys*. **82**, 3045-3067 (2010).

[5] X-L. Qi, S-C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057-1110 (2011).

[6] J.E. Hoffman, E.W. Hudson, K.M. Lang, et al., *Science*, **295**, 466-469 (2002).

[7] C. Howald, H. Eisaki, N. Kaneko, et al., *Phys. Rev*. B **67**, 014533 (2003).

[8] M. Vershinin, S. Misra, S. Ono, et al., *Science*, **303**, 1995-1998 (2004).

[9] T. Hanaguri, C. Lupien, Y. Kohsaka, et al., *Nature* **430**, 1001-1005 (2004).

[10] K. McElroy, D.-H. Lee, J.E. Hoffman, et al., *Phys. Rev. Lett*. **94**, 197005 (2005).

[11] W.D. Wise, M.C. Boyer, K. Chatterjee, et al., *Nature Physics* **4**, 696-699 (2008).

[12] Y. Kohsaka, C. Taylor, P. Wahl, et al., *Nature* **454**, 1072-1078 (2008).

[13] Z.-X. Shen, W.E. Spicer, D.M. King, et al., *Science* **267**, 343-350 (1995).

[14] S. Chakravarty, R.B. Laughlin, D.K. Morr, C. Nayak, *Phys. Rev*. B **63**, 94503 (2001).

[15] В.И. Белявский, Ю.В. Копаев, *УФН* **176**, 457-485 (2006).

[16] M.R. Norman, H. Ding, M. Randeria, et al., *Nature* **392**, 157-160 (1998).

[17] Ю.В. Копаев, В.В. Капаев, В.И. Белявский, *ЖЭТФ* **144**, 826-836 (2013).

[18] C.-H. Hsu, S. Raghu, S. Chakravarty, *Phys. Rev*. B **84**, 155111 (2011).

[19] P. Fulde, R.A. Ferrell, *Phys. Rev*. **135**, A550-A563 (1964).

[20] А.И. Ларкин, Ю.Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **47**, 1136-1146 (1964).

[21] V.I. Belyavsky, V.V. Kapaev, Yu.V. Kopaev, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 809-814 (2012).

[22] R. Nandkishore, L.S. Levitov, A.V. Chubukov, *Nature Physics* **8**, 158-163 (2012).

[23] W.L. McMillan, *Phys. Rev*. B **12**, 1187-1196 (1975).

[24] G. Grüner, Density Waves in Solids, Perseus Publishing, Cambridge, MA (1994).

[25] S. Chakravarty, H-Y. Kee, K. Völker, *Nature* **428**, 53-55 (2004).

[26] D.F. Agterberg, H. Tsunetsugu, *Nature Physics* **4**, 639-642 (2008).

[27] V.I. Belyavsky, Yu.V. Kopaev, M.Yu. Smirnov, *Phys. Rev*. B **72**, 132501 (2005).

[28] Л.Н. Булаевский, *УФН* **120**, 259-271 (1976).

[29] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Статистическая физика. Часть 2, М., Физматлит (2001).

[30] В.Л. Гинзбург, Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **20**, 1064-1081 (1950).

[31] Y. Matsuda, H. Shimahara, *J. Phys. Soc. Jpn*. **76**, 051005 (2007).

[32] E. Berg, E. Fradkin, S. Kivelson, *Phys. Rev.* B **79**, 064515 (2009).

[33] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Статистическая физика. Часть I, М., Физматлит (2002).

[34] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ``Наука'', М., 1992.

[35] Г.Е. Воловик, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 492-496 (1997).

[36] L.J. Sham, B.R. Patton, *Phys. Rev*. B **13**, 3151-3153 (1976).

[37] И.М. Лифшиц, *УФН* **83**, 617-663 (1964).

[38] С.А. Бразовский, И.Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **71**, 2338-2348 (1976).

[39] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М., Наука, 1988.

[40] P. Chandra, P. Coleman, J.A. Mydosh, V. Tripathi, *Nature* **417**, 831-834 (2002).

[41] H-D. Chen, O. Vafek, A. Yazdani, S-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett*, **93**, 187002 (2004).

[42] J. Corson, R. Mallozzi, J. Orenstein, et al., *Nature* **398**, 221-223 (1999).

[43] B-J. Yang, H-Y. Kee, *Phys. Rev*. B **82**, 195126 (2010).

[44] C-Z. Chang,, J. Zhang, X. Feng, et al., *Science* **340**, 167-170 (2013).

[45] R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett*. **80**, 5188-5191 (1998).

[46] K. Krishana, N.P. Ong, Q. Li, et al., *Science* **277**, 83 (1997).

[47] A.V. Balatsky, *J. Phys. Chem. Solids* **59**, 1689-1693 (1998).

[48] R. Movshovich, M. Jaime, M.A. Hubbard, et al., *J. Phys. Chem. Solids* **59**, 2100-2104 (1998).

[49] S. Tewari, C. Zhang, V.M. Yakovenko, S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett*. **100**, 217004 (2008).

[50] A. Ino, C. Kim, M. Nakamura, et al., *Phys. Rev*. B **65**, 094504 (2002).

Подписано в печать 07.11.2014 г.
Формат 60x84/16. Заказ № 53. Тираж 140 экз. П.л 2,25.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640