

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Физический
ИНСТИТУТ



имени
П.Н. Лебедева

Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

2

И. М. СИЗОВА

**ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕКОТОРЫХ
ИНТЕГРАЛОВ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ
НА АПЕРТУРАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ.
ЕЩЕ ОДНА МОДЕЛЬ**

Москва 2015

И.М.Сизова

Об аппроксимации некоторых интегралов в теории дифракции на апертурах сложной формы. Еще одна модель

АННОТАЦИЯ

В предыдущей работе была предложена методика аппроксимации функции потока излучения в конусе с заданным углом раствора в дальней зоне Фраунгофера при дифракции света на ограниченных апертурах сложной формы и при неоднородном поле на апертуре. В настоящей работе в дополнение к уже предложенным простейшим моделям функции потока рассмотрена еще одна простая однопараметрическая аналитическая модель. Эта модель, опробованная на исследованных в первой работе апертурах и полях, оказалась среди лучших по точности аппроксимации при использовании в качестве источника недостающего параметра нулевого момента автокорреляционной функции. Обсуждаются потенциальные возможности предложенной модели и некоторые другие (кроме нулевого момента) естественные источники недостающего в модели параметра.

I.M.Sizova

On the approximation of some integrals in the theory of light diffraction by apertures with complicated shapes. One more model

ABSTRACT

In a previous paper a procedure of encircled energy function approximation in a definite solid angle in the far-field Fraunhofer zone under light diffraction by restricted apertures with complicated apertures' shapes and arbitrary field intensities was proposed. In the present paper, in addition to the earlier proposed simple models of encircled energy function one more one-parameter simple model is considered. This model, tested on apertures and field intensities from a previous paper, turns out to be among the best by the approximation accuracy when the zero OTF (optical transfer function) moment is used to calculate the missing parameter of the model. The potential resources of the proposed model and some other natural sources (except zero OTF moment) of the model missing parameter are discussed.

Введение

В работе [1] была предложена методика аппроксимации функции потока излучения в конусе с заданным углом раствора в дальней зоне Фраунгофера при дифракции света на ограниченных апертурах сложной формы при неоднородном поле на апертуре.

В классической задаче дифракции излучения, перпендикулярно падающего вдоль оси Z на плоское отверстие, при условиях:

- монохроматичности излучения (позволяющем перейти от волнового уравнения к уравнению Гельмгольца);

- $\lambda/a \ll 1$, где a – линейный размер апертуры, λ – длина волны излучения (позволяющем пренебрегать краевыми эффектами на апертуре и, как следствие, рассматривать вместо векторной задачи скалярную и использовать граничные условия геометрической оптики Кирхгофа);

- $\vartheta \ll (\lambda/a)^{1/3}$ – параксиальности (позволяющем перейти от уравнению Гельмгольца к параболическому уравнению);

- области наблюдения дифракционной картины на расстоянии Z от отверстия, соответствующей условию на волновой параметр $D = \lambda z / \Sigma \gg 1$ (Σ – площадь апертуры), которая называется областью дифракции Фраунгофера, - при всех этих условиях поток дифракционного излучения в заданном прямом круговом конусе с углом ϑ между образующей и осью Z (совпадающей с осью симметрии конуса) определяется уравнением

$$\varepsilon(\vartheta) = \frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \int_0^\infty \bar{T}(\rho) J_1\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \rho\right) d\rho = 1 - \int_0^\infty \Gamma(\rho) J_0\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \rho\right) d\rho. \quad (1)$$

Вывод известной формулы (1) приведен в [1,2]. Здесь $J_i(x)$ – функции Бесселя порядка i ,

$$\Gamma(\rho) = -\bar{T}'(\rho), \quad (2)$$

а функция

$$\bar{T}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\rho, \phi) d\phi. \quad (3)$$

это усредненная по полярному углу ϕ автокорреляционная функция $T(x, y)$, зависящая от декартовых координат x, y ($x = \rho \cos \phi$; $y = \rho \sin \phi$) в плоскости отверстия

$$T(x, y) = \frac{\iint_{\Sigma} U^*(\xi, \eta) U(\xi + x, \eta + y) d\xi d\eta}{\iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta},$$

где $U(\xi, \eta)$ - световое поле на плоскости апертуры, совпадающее, согласно граничным условиям Кирхгофа, с падающим на апертуру полем.

В работе [1] на основе второго равенства в (1) предложено аппроксимировать функцию $\varepsilon(\mathcal{G})$ путем выбора подходящей модельной функции для (2), допускающей аналитический расчет интеграла в правой части (1). Для избежания путаницы все ссылки на формулы, рисунки и таблицы из [1] будем далее записывать с добавлением к номеру номера этой ссылки, как, например, формула (15[1]), рис.2[1] и т.д.

В настоящей работе в дополнение к моделям функции (2), предложенным в [1], рассмотрена еще одна простая однопараметрическая модель, дающая приближенное аналитическое выражение для $\varepsilon(\mathcal{G})$.

Эта модель, опробованная на исследованных в [1] апертурах и полях, оказалась среди лучших по точности аппроксимации $\varepsilon(\mathcal{G})$ при использовании в качестве источника недостающего параметра нулевого момента автокорреляционной функции (3) (или, что то же самое, первого момента функции (2)). Мы также обсудим и некоторые другие источники недостающего параметра в рассматриваемой модели.

Модель функции $\Gamma(\rho)$

Из простейших однопараметрических моделей $\Gamma(\rho)$, допускающих аналитическое представление функции $\varepsilon(\mathcal{G})$, в работе [1] были рассмотрены 2 модели (они показаны на рис.4а,б[1]) – ступенчатая модель из двух прямоугольников и модель из двух треугольников, прямоугольного и равнобедренного. В рассмотренных примерах вторая модель (б) оказалась несколько хуже, чем первая (а), по четырем причинам.

Во-первых, по расчетам в большинстве примеров приближение с моделью (а) оказалось несколько точнее, чем с (б), по крайней мере, при однородном поле на апертуре. Во-вторых, у функция $\varepsilon_{\text{mod}}(\mathcal{G})$ из модели (б) появлялись чаще и на больших интервалах области нефизичного поведения – области локального убывания, что у реальной функции $\varepsilon(\mathcal{G})$ быть не может. В-третьих, расчет параметров модели (а) из первого момента функции (2) проще (квадратное уравнение против уравнения 4-й степени в модели (б)) и может иметь не более одного решения. А из уравнения 4-й степени в (б) сложно понять, возможно или нет более одного решения. И, в-четвертых, функция (б) имеет вид двугорбой структуры с нулем в средней точке своей области определения, что, вообще говоря, не часто соответствует характеру функции (2) (хотя, в [1] не раз подчеркивалось, что более удачная аппроксимация $\varepsilon(\mathcal{G})$ вовсе не всегда следует из более удачной аппроксимации функции (2)).

Рассмотрим в дополнение к [1] еще одну простую однопараметрическую модель функции (2), график которой представлен на рис.1.

Модель, представленная на рис.1, как и модели на рис.4[1], однопараметрическая, т.к. функция (2) должна удовлетворять трем условиям, вытекающим (см. [1,2]) - из разложения функции $\varepsilon(\mathcal{G})$ (1) в начале координат

$$\varepsilon(\mathcal{G}) \underset{2\pi\mathcal{G}a/\lambda \rightarrow 0}{\cong} \frac{1}{4} \left(2\pi \frac{\rho_{1,eff}}{\lambda} \mathcal{G} \right)^2; \quad (4)$$

- ее асимптотики при больших значениях $2\pi\mathcal{G}a/\lambda$, где a – линейный размер апертуры (см. [3-5])

$$\varepsilon(\mathcal{G}) \underset{2\pi\mathcal{G}a/\lambda \rightarrow \infty}{\cong} 1 + \frac{\bar{T}'(0)}{2\pi(\mathcal{G}/\lambda)} = 1 - \frac{\Gamma(0)}{2\pi(\mathcal{G}/\lambda)} = 1 - \frac{(2/\pi)}{(2\pi\rho_{2,eff}\mathcal{G}/\lambda)}; \quad (5)$$

- и естественного условия, вытекающего из определения функции (2),

$$\int_0^{\infty} \Gamma(\rho) d\rho = \bar{T}(0) = 1. \quad (6)$$

Величины $\rho_{1,2,eff}$ в (4-5) равны, соответственно,

$$\rho_{1,eff} = \sqrt{\Sigma_{eff} / \pi}, \quad (7)$$

$$\rho_{2,eff} = \frac{2 \iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta}{\oint_c |U|^2 dl}, \quad (8)$$

где

$$\Sigma_{eff} = \frac{\left| \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|^2}{\iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta} = 2\pi \int_0^{\infty} \bar{T}(\rho) \rho d\rho = \pi \int_0^{\infty} \Gamma(\rho) \rho^2 d\rho. \quad (9)$$

эффективная площадь апертуры.

Смысл величины (7) при однородном поле на апертуре – корень из площади апертуры Σ , деленной на число π , а при неоднородном поле – корень из эффективной площади (9).

Смысл величины (8) при однородном поле на апертуре – удвоенное отношение площади апертуры к ее периметру P , а при неоднородном поле – отношение нормированных на поле (эффективных) площади и периметра.

Числовые коэффициенты в (7-8) взяты так, чтобы для однородного поля на апертуре и круглого отверстия величины (7-8) становились равными радиусу круга.

Из (5,9) на функцию (2) накладываются, соответственно, ограничения

$$\int_0^{\infty} \Gamma(\rho) \rho^2 d\rho = \Sigma_{eff} / \pi; \quad \Gamma(0) = \frac{2}{\pi\rho_{2,eff}} \quad (10)$$

Как и в работе [1], здесь на рис.1 моделируется не функция (2), а полученная из нее безразмерная, вследствие нормировки на $\rho_{2,eff}$ по обеим осям, функция

$$\tilde{\Gamma}(\zeta) = \frac{\pi\rho_{2,eff}}{2} \Gamma(\rho = \zeta\rho_{2,eff}). \quad (11)$$

Тогда равенства (6,10) для функции (11) переходят в условия

$$\tilde{\Gamma}(0) = 1; \quad \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) d\zeta = \pi/2; \quad \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta^2 d\zeta = \mu^2 \pi/2, \quad (12)$$

где

$$\mu = \rho_{1,eff} / \rho_{2,eff}. \quad (13)$$

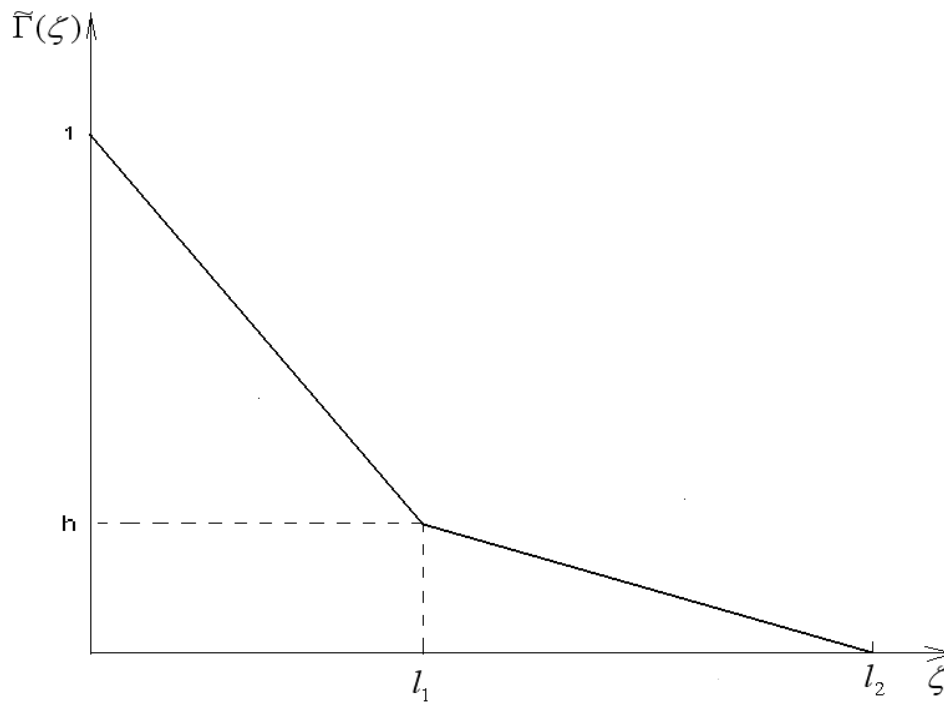


Рис.1

Однопараметрическая модель функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. Начальное значение функции и два из трех параметров, фигурирующих на графике, определяются уравнениями (12), один параметр – свободный. По смыслу функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ $0 < l_1 \leq l_2$, а значение h , вообще говоря, не регламентировано, в том числе оно может быть отрицательное или нулевое.

Исходя из двух последних равенств в (12), логично искать недостающий в модели рис.1 параметр через сохранение первого момента функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (или, что то же самое, нулевого момента функции $\bar{T}(\rho)$) -

$$I_1 = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta d\zeta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \bar{T}(\zeta) d\zeta. \quad (14)$$

С помощью (14) и (12) параметры для модели рис.1 рассчитываются из легко аналитически решаемых уравнений

$$l_1 + l_2 = 6\pi \frac{\mu^2 - I_1}{6I_1 - \pi^2}; \quad l_1 l_2 = 6 \frac{\mu^2 \pi^2 - 6I_1^2}{6I_1 - \pi^2}; \quad h = \frac{\pi - l_1}{l_2}. \quad (15)$$

При этом соответствующая модели рис.1 функция $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$ равна

$$\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi(l_2 - l_1)} \left[l_1((1-h)l_2 - l_1)F(l_1\Delta_2) + l_2^2 h F(l_2\Delta_2) - \frac{((1-h)l_2 - l_1)J_1(l_1\Delta_2) + l_2 h J_1(l_2\Delta_2)}{\Delta_2} \right], \quad (16)$$

где $\Delta_2 = 2\pi\rho_{2,\text{eff}}g/\lambda$; $F(x) = J_0(x) + \frac{\pi}{2}(J_1(x)H_0(x) - J_0(x)H_1(x))$ (см. (37[1]);

$J_i(x)$ и $H_i(x)$ - функции Бесселя и Струве порядка i .

Таблица 1

Параметры модели рис.1, рассчитанные по формулам (15) для четырех отверстий с $\mu = 1,77$ при однородном поле на отверстии. Вид зубчатого отверстия (ЗО) показан на рис.3[1], а параметры ЗО1 и ЗО2 приведены в подписи к рис.1[1]. Значения I_1 для отверстий приведены в табл.1[1].

	l_1	l_2	h
Прямоугольник $a/b = 9,84$	3,048	16,406	0,00570
Кольцо $r_1/r_2 = d = 0,516$	2,658	7,505	0,06438
Зубчатое отверстие 1	-	-	-
Зубчатое отверстие 2	1,604	5,011	0,30685

Таблица 2

Значения μ и параметры модели рис.1 для кольцевых отверстий с $d = r_1/r_2$ и полями из примеров 1-3 в [1]. Параметры модели рассчитаны по формулам (15) через μ и I_1 .

	l_1	l_2	h	μ	α
Пример 1: $d = 0,2$; поле $U(r) = \exp\left(-\frac{ r-r_1 }{\delta(r_2-r_1)}\right)$ спадает от центра; $\delta = 0,1$	1,602	10,783	0,143	3,367	0,535
Пример 2: $d = 0,7$; поле $U(r) = \exp\left(-\frac{ r-r_2 }{\delta(r_2-r_1)}\right)$ спадает к центру; $\delta = 0,4$	2,417	25,563	0,0283	5,335	0,402
Пример 3: $d = 0,5$; поле (63[1]) спадает от центра; $\alpha = 32/r_2$; $\delta^2 = 0,02$,	2,027	48,368	0,023	12,033	0,482

В таблице 1 приведены рассчитанные по формулам (15) параметры модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с рис.1 для четырех примеров отверстий при однородном поле с $\mu = 1,77$, графики функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ которых представлены на рис.1[1] и по одному повторены ниже на рис.2-4 и рис.11-14. Параметры существуют лишь для трех из отверстий (не существуют для зубчатого отверстия ЗО1) и, как будет видно дальше, вполне реалистично воспроизводят и $\varepsilon(\Delta_2)$, и сами функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.

В таблице 2 приведены параметры модели рис.1 и μ для трех кольцевых отверстий при неоднородных полях, соответствующих **примерам 1-3** в [1] (формулам (62-63[1])). В [1] I_1 и μ из уравнений (15) обозначены как $I_{1,eff}$ и μ_{eff} ; их значения даны в таблице 7[1], а μ повторены в табл.2. Из табл.2 видно, что параметры модели рис.1 существуют для всех трех примеров. Смысл \varkappa в последней колонке табл.2 будет понятен далее (см. (22)).

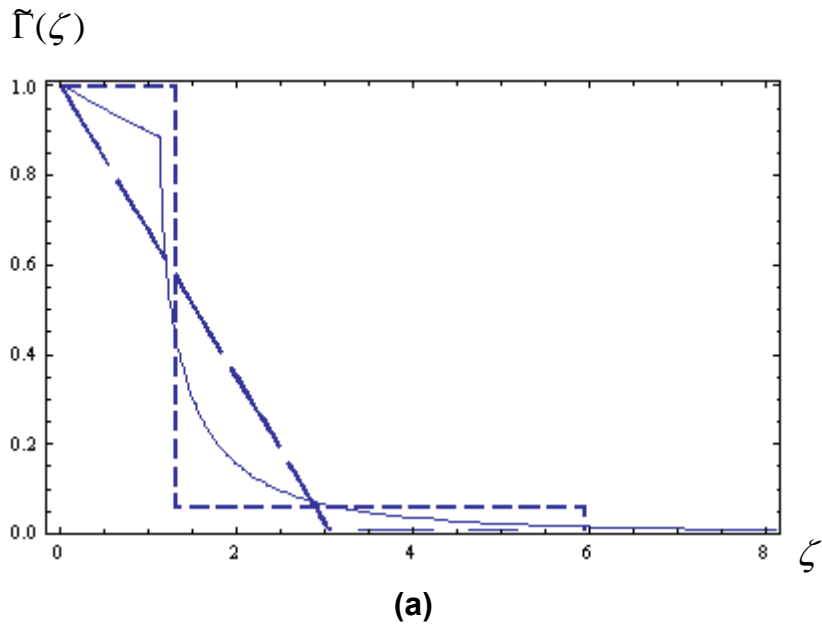
На рис.2 представлен аналог рис.8[1], где добавлена модель с рис.1 (кривые с самыми длинными штрихами). Видно, что у модели рис.1 графики обеих функций - $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon_{mod}^D(\Delta_2)$, и даже функции

$$\chi(\Delta_2) = \frac{\varepsilon_{mod}^D(\Delta_2) - \varepsilon(\Delta_2)}{\varepsilon(\Delta_2)}. \quad (17)$$

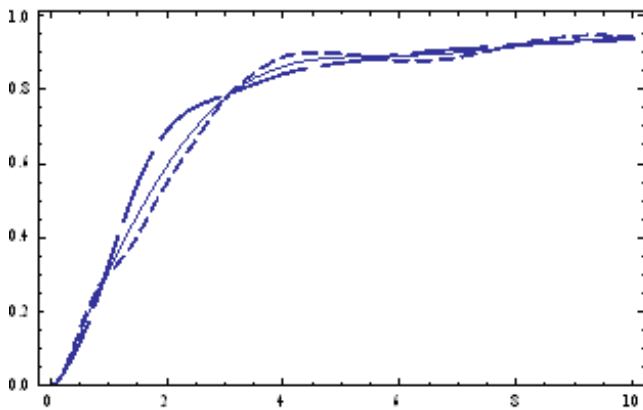
практически сливается с графиками соответствующих функций модели рис.4б[1].

На рис.3 представлен аналог рис.9[1], где добавлена модель рис.1 (кривые с самыми длинными штрихами). Видно, что и в этом случае для модели рис.1 графики функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, $\varepsilon_{mod}^D(\Delta_2)$ и отвечающей ей $\chi(\Delta_2)$ близки соответствующим графикам модели рис.4б[1].

На рис.4 представлен аналог рис.11[1], где добавлена модель рис.1 (кривые с самыми длинными штрихами). В этом случае для модели рис.1 у графиков функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon_{mod}^D(\Delta_2)$ заметно небольшое отличие от соответствующих графиков модели рис.4б[1]. При этом график функции $\varepsilon_{mod}^D(\Delta_2)$ более реалистичен, чем график $\varepsilon_{mod}^{4б}(\Delta_2)$ (отсутствуют локальные экстремумы), и он почти везде лучше аппроксимирует точную функцию $\varepsilon(\Delta_2)$, чем модель рис.4б[1]. Функция $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ также лучше воспроизводится моделью рис.1, чем рис.4б[1].



$\varepsilon(\Delta_2); \varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$



$\chi(\Delta_2)$

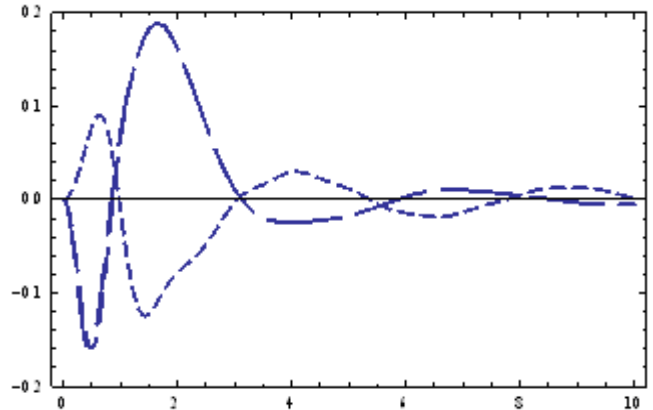


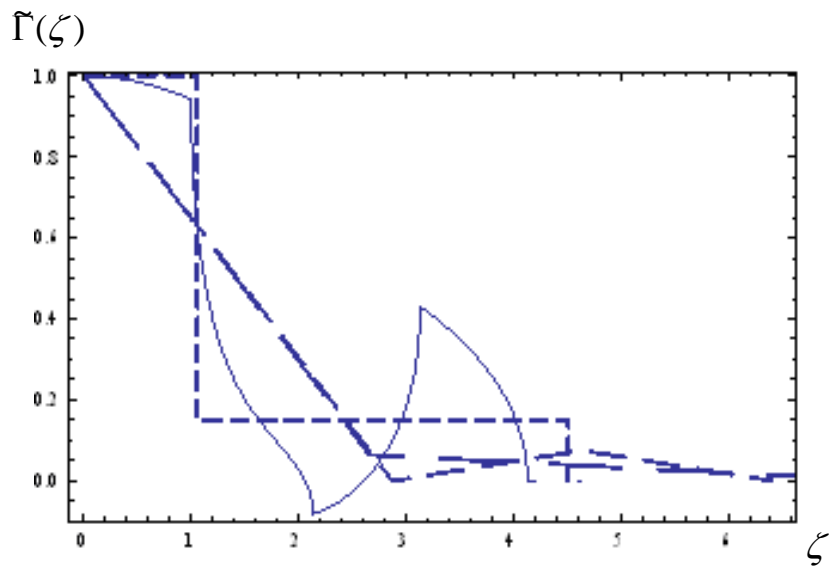
Рис.2

Для прямоугольного отверстия с $\mu = 1,77$ ($a/b = 9,84$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия), модельных кривых рис.4а,б[1] с параметрами из табл.2[1]) (штриховые линии с короткими и средними штрихами; у модели рис.4б[1] обрезан «хвост», простирающийся до $\zeta \cong 14$) и модельной кривой рис.1 с параметрами из табл.1 (линия с самыми длинными штрихами; «хвост» функции тоже обрезан). Визуально функции для моделей с рис.4б[1] и рис.1 сливаются;

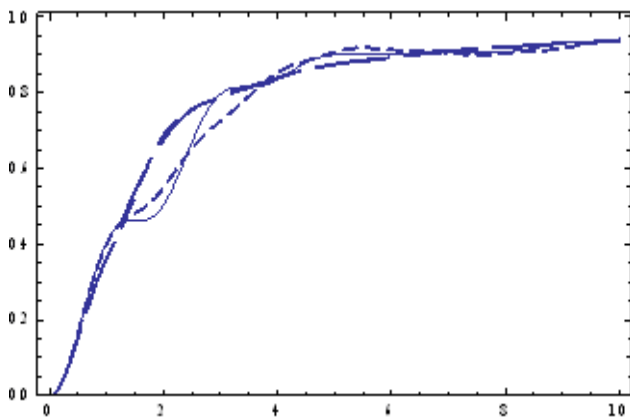
(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых рисунка **(а)** (типы линий соответствуют). Визуально функции для моделей с рис.4б[1] и рис.1 сливаются;

(в) – графики функции $\chi(\Delta_2)$ (17) для модельных функций из рисунка **(б)** (типы линий соответствуют). Функции для моделей рис.4б[1] и рис.1 тоже практически сливаются.



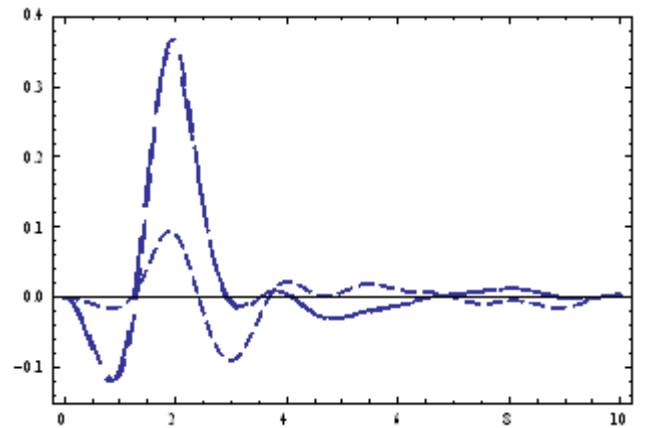
(a)

$\varepsilon(\Delta_2); \varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$



(б)

$\chi(\Delta_2)$



(в)

Δ_2

Рис.3

Для кольцевого отверстия с $\mu = 1,77$ ($d = 0,516$):

(a) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия), модельных кривых рис.4а,б[1] с параметрами из табл.2[1] (штриховые линии с короткими и средними штрихами) и модельной кривой рис.1 с параметрами из табл.1 (линия с самыми длинными штрихами; «хвост» функции обрезан). У функции для моделей рис.4б[1] и рис.1 различаются лишь хвостовые части;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых рисунка (a) (типы линий соответствуют). Визуально функции для моделей рис.4б[1] и рис.1 сливаются;

(в) – графики функции $\chi(\Delta_2)$ для модельных функций из рисунка (б) (типы линий соответствуют). Функции для моделей рис.4б[1] и рис.1 тоже практически сливаются

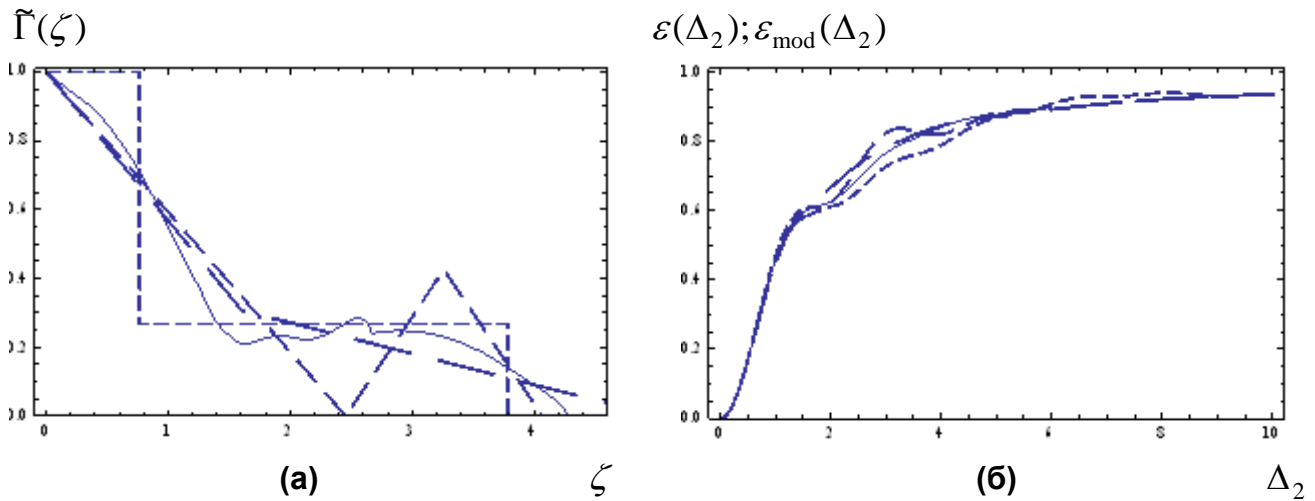


Рис.4

Для зубчатого отверстия ЗО2 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия), модельных кривых рис.4а,б[1] с параметрами из табл.2[1] (штриховые линии с короткими и средними штрихами) и модельной кривой рис.1 с параметрами из табл.1 (линия с самыми длинными штрихами; «хвост» функции обрезан);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых рисунка (а) (типы линий соответствуют).

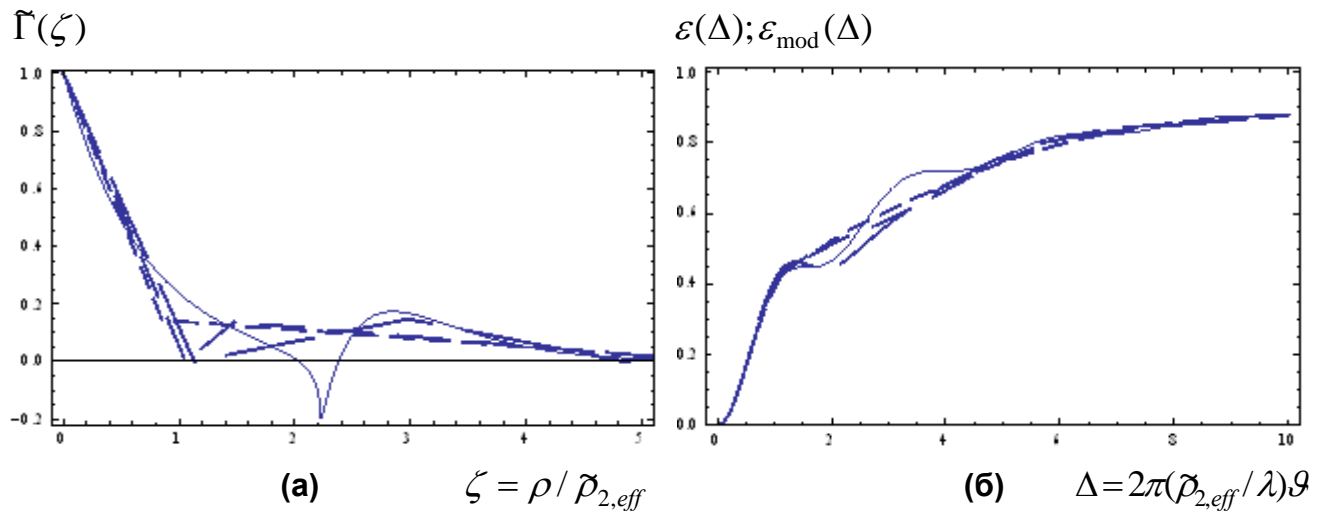


Рис.5

Для примера 1:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей рис.4б[1] с (длинные штрихи; параметры из табл.7-8[1]), рис.6б[1] при ограничении $h_1 = 0$ (средние штрихи) и рис.1 (короткие штрихи; параметры из табл.2). Хвосты всех модельных функций срезаны на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta)$ (формулы (39[1]), (16) и (48[1]) при $h_1 = 0$) с параметрами кривых рисунка (а) (штриховые линии; длины штрихов отвечает рисунку (а)).

Нормировки аргументов ζ и Δ на графиках аналогичны (11), но вместо $\rho_{2,\text{eff}}$ из (8) использован $\tilde{\rho}_{2,\text{eff}}$ из (16[1]), предложенный в [2] для случаев неоднородных полей на апертурах.

Для трех **примеров 1-3** кольцевых отверстий с неоднородным полем из [1] параметры модели рис.1 представлены в табл.2. На рис.5-7 воспроизведены, соответственно, рис.31[1],29-30[1], дополненные кривыми по этой модели.

Из рис.5 (и сравнения его с рис.28[1]) видно, что в смысле аппроксимации точной функции $\varepsilon(\Delta)$ модель рис.1 по качеству не хуже двух остальных приведенных на рис.5 моделей (лучших моделей из прямоугольников и треугольников, представленных в [1]). Модельная функция $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис.1 близка модельной функции рис.6б[1]) при ограничении $h_1 = 0$ - два ее линейных куска почти совпадают, соответственно, с первым и третьим линейными кусками модели с рис.6б[1]) при ограничении $h_1 = 0$, срезая таким образом треугольный вырез в этой модели и тем самым несколько лучше воспроизводя точную функцию $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.

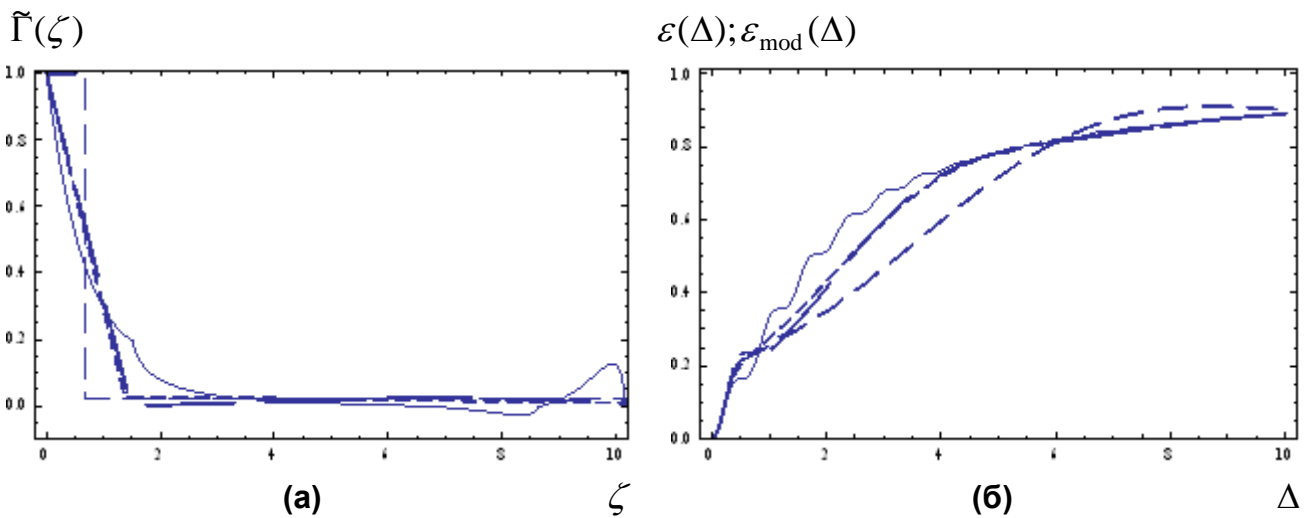


Рис.6

Для **примера 2**:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия), моделей рис.4а[1] (штриховая линиям со средними штрихами), рис.4б[1] (длинные штрихи) с параметрами из табл.7-8[1] и рис.1 (короткие штрихи; параметры из табл.2). Хвосты всех модельных функций срезаны на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta)$ - формулы (38-39[1]) с параметрами из табл.7-8[1] и формула (16) с параметрами из табл.2 (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым рисунка (а)).

Нормировка аргументов функций такая же, как на рис.5.

Из рис.6 видно, что в смысле аппроксимации и точной функции $\varepsilon(\Delta)$ и точной функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ модель рис.1 опять почти совпадает с моделью рис.4б[1], лучшей из двух представленных на рис.29[1].

Из рис.7 видно, что в **примере 3**, как и на рис.6, для $\varepsilon(\Delta)$ и $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ модель рис.1 почти совпадает с моделью рис.4б[1]. Точную функцию $\varepsilon(\Delta)$ в средней части она описывает немного лучше, чем модель рис.4б[1], но это улучшение не радикальное.

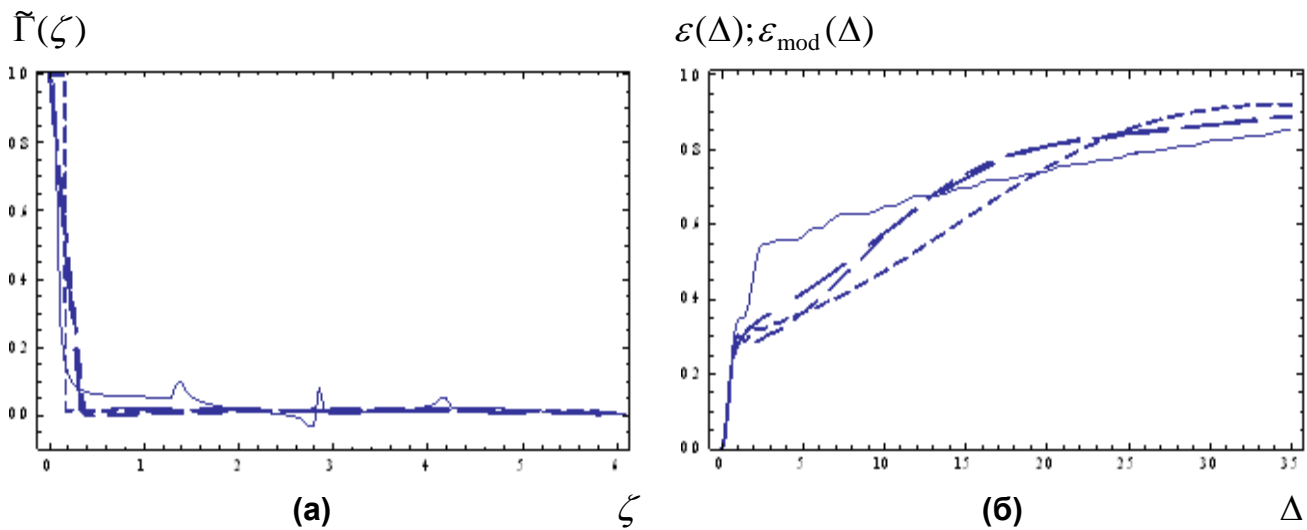


Рис.7

Для примера 3:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия), моделей рис.4а[1] (штриховая линиям с короткими штрихами), рис.4б[1] (средние штрихи) с параметрами из табл.7-8[1] и рис.1 (длинные штрихи; параметры из табл.2). Хвосты всех модельных функций срезаны на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta)$ - формулы (38-39[1]) с параметрами из табл.7-8[1] и формула (16) с параметрами из табл.2 (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым рисунка (а)).

Нормировка аргументов функций такая же, как на рис.5-6.

Другие источники параметра модели функции $\Gamma(\rho)$

Мы уже упоминали в [1], что моменты функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ - не единственный путь нахождения недостающих параметров моделей этой функции. При однородном поле на отверстии альтернативным для момента I_1 (14) в моделях рис.4[1] и рис.1 может быть величина $l_{2,\text{max}}$, положенная равной такому значению ζ , начиная с которого выполнены условия $\tilde{\Gamma}(\zeta \geq l_{2,\text{max}}) = 0$ и $\bar{T}(\zeta \geq l_{2,\text{max}}) = 0$. Данные, приведенные в [1] для 4-х отверстий из табл.1 и однопараметрических моделей $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис.4а,б[1], показывают, что использование в качестве недостающего параметра $l_{2,\text{max}}$ вместо I_1 несколько ухудшало приближение для $\varepsilon(\Delta)$, но это ухудшения не было существенным.

У отверстий из табл.1 $l_{2,\text{max}}$ равны, соответственно:

для прямоугольника – 8,786; для кольца – 4,133; для 3О1 – 3,735; для 3О2 – 4,265.

Полагая в модели рис.1, что $l_2 = l_{2,\text{max}}$ и h рассчитывается из последнего уравнения (1), для параметра l_1 получаем квадратное уравнение

$$l_1^2 + l_{2,\text{max}} l_1 - \frac{\pi(l_{2,\text{max}}^2 - 6\mu^2)}{(l_{2,\text{max}} - \pi)} = 0, \quad (18)$$

откуда видно, что, поскольку для всех 4-х отверстий из табл.1 $l_{2,\max} > \pi$ и только для прямоугольника $l_{2,\max} > \mu\sqrt{b} \cong 4,336$, то только для прямоугольника и существует одно положительное решение уравнения (18) для l_1 (и, соответственно, для модели рис.1): $l_1 \cong 2,8$; $h \cong 0,039$. Это решение будет рассмотрено ниже для прямоугольного отверстия наравне с другими решениями (см. рис.11).

В случае неоднородного поля использование в качестве недостающего параметра величины $l_{2,\max}$, вообще говоря, не годится, т.к. из-за возможного большого значения величины $\rho_{2,eff}$ (8) при малом относительном значении поля на границе отверстия (мягкая апертура) значение $l_{2,\max}$ может быть неоправданно малым.

При неоднородном поле вместо I_1 можно взять другую характеристику поля и отверстия. В работе [6] было показано, что при малых значениях ρ функция $\bar{T}(\rho)$ (3) может быть представлена в виде ряда

$$\bar{T}(\rho) = 1 - \rho \frac{\oint |U|^2 dl}{\pi E_\Sigma} + \rho^2 \frac{\iint_\Sigma U^*(\vec{r}) \nabla_\perp U(\vec{r}) d^2 \vec{r}}{4E_\Sigma} + \dots = 1 - \rho \frac{2}{\pi \rho_{2,eff}} + \rho^2 \tilde{\alpha} + \dots, \quad (19)$$

где

$$\tilde{\alpha} = \frac{\iint_\Sigma U^*(\vec{r}) \nabla_\perp U(\vec{r}) d^2 \vec{r}}{4E_\Sigma}, \quad (20)$$

$$a \quad E_\Sigma = \iint_\Sigma |U(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta.$$

В выражении (19) первые два члена соответствуют точному разложению $\bar{T}(\rho)$ до первого порядка в ряд в нуле аргумента, согласно [5-6]. А третий член получен из разложения в $T(x, y)$ подынтегрального выражения в числителе в ряд Тейлора и последующего интегрирования его по полярному углу ϕ для получения (3). При этом интегрировании линейный член разложения в ряд Тейлора (как и все нечетные члены) исчезает, и остается в качестве первого квадратичный по ρ член. То есть, в (19) второй член отражает при малых ρ основной вклад в $\bar{T}(\rho)$ границы отверстия и поля на ней, а третий член – основной вклад неоднородности поля внутри отверстия. Вообще говоря, нельзя утверждать, что граница отверстия не дает вклада и в квадратичный по ρ член, поскольку из [5], по образцу которой и получен в [6] при неоднородном поле линейный по ρ член в (19), не следует, что при этом нет вклада границы и в квадратичный член. Но будем полагать, что если в (19) $\rho^2 \tilde{\alpha}$ и не является

точными третьим членом разложения $\bar{T}(\rho)$ в ряд, то, по крайней мере, выражает его основную часть. Расчеты для рассмотренных примеров подтверждают это.

Из (19-20) имеем для нормированной на $\rho_{2,eff}$ функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (11)

$$\tilde{\Gamma}(\zeta) = 1 - \varkappa \zeta + \dots, \quad (21)$$

где

$$\varkappa = \pi \rho_{2,eff}^2 \tilde{\varkappa} = \pi E_{\Sigma} \iint_{\Sigma} U^*(\vec{r}) \nabla_{\perp} U(\vec{r}) d^2 \vec{r} / \left(\oint_C |U|^2 dl \right)^2. \quad (22)$$

Исходя из (21-22) рассмотрим модель рис. 1 для функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ при неоднородном поле, в которой свободный параметр модели взят не из I_1 (14), а из \varkappa . Заметим, что такая замена возможна только для моделей, у которых есть линейный член разложения модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в ряд Тейлора. То есть для моделей рис.4б[1],5а[1],6б[1] и рис.1; у остальных представленных в [1] моделей $\varkappa = 0$. Кроме того, видно, что (22) отлично от нуля лишь при неоднородном поле на отверстии.

Рассмотрим для отверстий с неоднородным полем модель рис.1 с параметрами, рассчитываемыми из уравнений (12) и свободного параметра \varkappa (22). Эти расчеты приводят к простым уравнениям на $l_{1,2}$ и h модели

$$l_1 + l_2 = a = \sqrt{\pi \frac{6\mu^2 \varkappa - \pi}{\pi \varkappa - 1}}; \quad l_1 l_2 = \frac{a - \pi}{\varkappa}; \quad h = 1 - \varkappa l_1. \quad (23)$$

Для существования двух действительных и положительных корней первых двух уравнений (23) необходимо и достаточно, чтобы \varkappa и μ (13) удовлетворяли условиям

$$\left[\begin{array}{l} \mu > \pi / \sqrt{6} \cong 1,28; \quad \varkappa > 1 / \pi \cong 0,32 \\ \left[\begin{array}{l} \mu_1(\varkappa) < \mu < \pi / \sqrt{6} \\ 1 < \mu < \mu_2(\varkappa) \end{array} \right]; \quad \varkappa < 1 / \pi \end{array} \right], \quad (24)$$

где

$$\mu_{1,2}(\varkappa) = \pi \sqrt{\frac{1 \pm 3\sqrt{1 - \pi \varkappa}}{6(1 \pm \sqrt{1 - \pi \varkappa})^3}}. \quad (25)$$

Соотношения (24-25) определяют области значений μ и \varkappa , для которых существует модель рис.1. Они изображены на рис.8. Видно, что, вообще говоря, модель может существовать и при отрицательных \varkappa , правда, в узком диапазоне значений $\mu \subset (1; 1,28)$. Обычно, даже для круглого отверстия при неоднородном поле $\mu > \pi / \sqrt{6} \cong 1,28$, поэтому физически реальной является область закрашенной четверти плоскости в правом верхнем углу рис.8 (первая строчка в (24)).

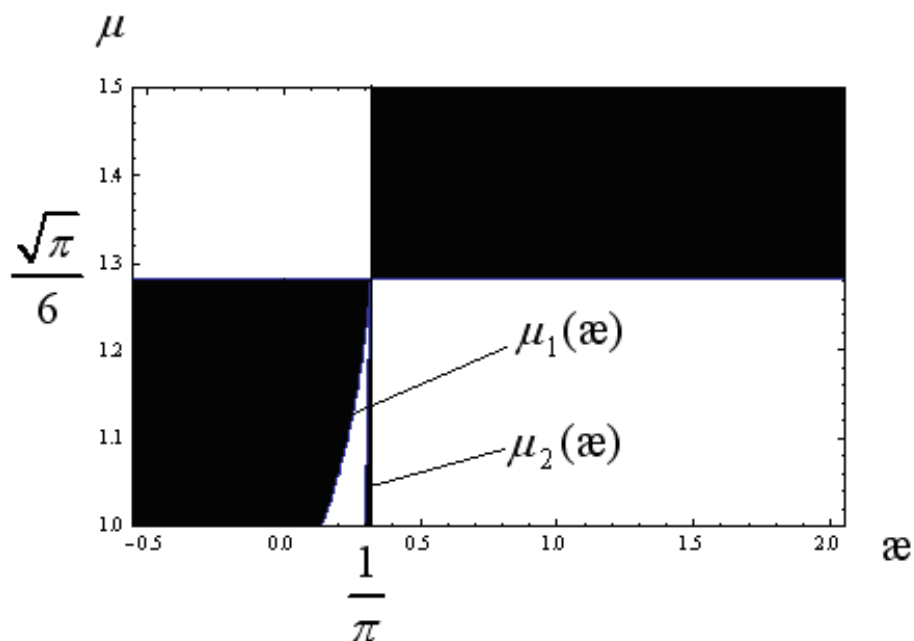


Рис.8

Области значений параметров μ и x (закрашены), в которых существует модель рис.1.

Таблица 3

Параметры модели рис.1 для кольцевых отверстий с $d = r_1 / r_2$ и полями из **примеров 1-3** в [1]., рассчитанные по формулам (23) через x .

	l_1	l_2	h	x
Пример 1: $d = 0,2$; поле $U(r) = \exp\left(-\frac{ r - r_1 }{\delta(r_2 - r_1)}\right)$ спадает от центра; $\delta = 0,1$	1,031	9,481	0,223	0,754
Пример 2: $d = 0,7$; поле $U(r) = \exp\left(-\frac{ r - r_2 }{\delta(r_2 - r_1)}\right)$ спадает к центру; $\delta = 0,4$	1,136	15,731	0,127	0,768
Пример 3: $d = 0,5$; поле (63[1]) спадает от центра; $\alpha = 32/r_2$; $\delta^2 = 0,02$,	-	-	-	-2,271

В таблице 3 приведены x и полученные с ними из (23) параметры модели рис.1 для 3-х примеров из [1] кольцевых отверстий с неоднородным полем (величины μ для них приведены в таблице 2). Значения для этих примеров E_Σ и интегралов в числителе и знаменателе (22) для x вычисляются, соответственно, по формулам

Для примера 1:

$$\iint_{\Sigma} U^*(\vec{r}) \nabla_{\perp} U(\vec{r}) d^2 \vec{r} = \frac{\pi \{2d - \delta(1-d) - [2 - \delta(1-d)]e^{-2/\delta}\}}{2\delta(1-d)}; \oint_C |U|^2 dl = 2\pi r_2 (d + e^{-2/\delta});$$

$$E_{\Sigma} = \frac{\delta}{2} (1-d) \{2d + \delta(1-d) - [2 + \delta(1-d)]e^{-2/\delta}\} \pi r_2^2.$$

Для примера 2:

$$\iint_{\Sigma} U^*(\vec{r}) \nabla_{\perp} U(\vec{r}) d^2 \vec{r} = \frac{\pi \{2 + \delta(1-d) - [2d + \delta(1-d)]e^{-2/\delta}\}}{2\delta(1-d)}; \oint_C |U|^2 dl = 2\pi r_2 (1 + de^{-2/\delta});$$

$$E_{\Sigma} = \frac{\delta}{2} (1-d) \{2 - \delta(1-d) - [2d - \delta(1-d)]e^{-2/\delta}\} \pi r_2^2.$$

Для примера 3:

$$\iint_{\Sigma} U^*(\vec{r}) \nabla_{\perp} U(\vec{r}) d^2 \vec{r} = \pi \left\{ \ln \delta \cdot (1 + \alpha r_2 d) - \frac{1 - \delta^2}{2} \right\}; \oint_C |U|^2 dl = 2\pi r_2 (d + \delta^2);$$

$$E_{\Sigma} = \left\{ \delta^2 (1 - d^2) + \frac{d}{\alpha r_2} (1 - d^2)^2 + \frac{(1 - d^2)^3}{3(\alpha r_2)^2} \right\} \pi r_2^2.$$

Из табл.3 видно, что для **примера 3** не существует модели рис.1 (в отличие от табл.2), поскольку при этом $\alpha < 0$, а $\mu = 12,033 > \sqrt{\pi}/6$ (см. табл.2). А для **примеров 1-2** решения для параметров модели существуют и отличаются от решений из табл.2. Отличаются также и значения α в последних колонках табл.2-3.

На рис.9,10 сравниваются для **примеров 1-2** графики точных функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с моделями рис.1 и $\varepsilon(\Delta)$ с $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ (16) с параметрами из табл.2,3.

Из рис.9-10 видно, во-первых, что на обоих рисунках кривые с более короткими штрихами (модель с параметрами из табл.3) действительно воспроизводят точные функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в начале координат – т.е. α в (21) действительно близок ко второй члену разложения $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, в отличие от α в табл.2. И, во-вторых, видно, что как модель точной функции $\varepsilon(\Delta)$ модель с точным α хуже, чем модель, где α рассчитывается через I_1 . Иными словами, модель $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ из рис.1 для аппроксимации $\varepsilon(\Delta)$ явно лучше, когда недостающий параметр модели берется из сохранения момента I_1 , чем когда из следующего члена разложения $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в ряд Тейлора. Важно не точное разложение $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в начале координат, а некоторая общая характеристика контура отверстия и поля на нем. Далее для рассматриваемой модели мы покажем, что часто есть более удачный недостающий параметр, чем полученный из сохранения I_1 , но это явно будет не следующий член разложения $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в начале координат.

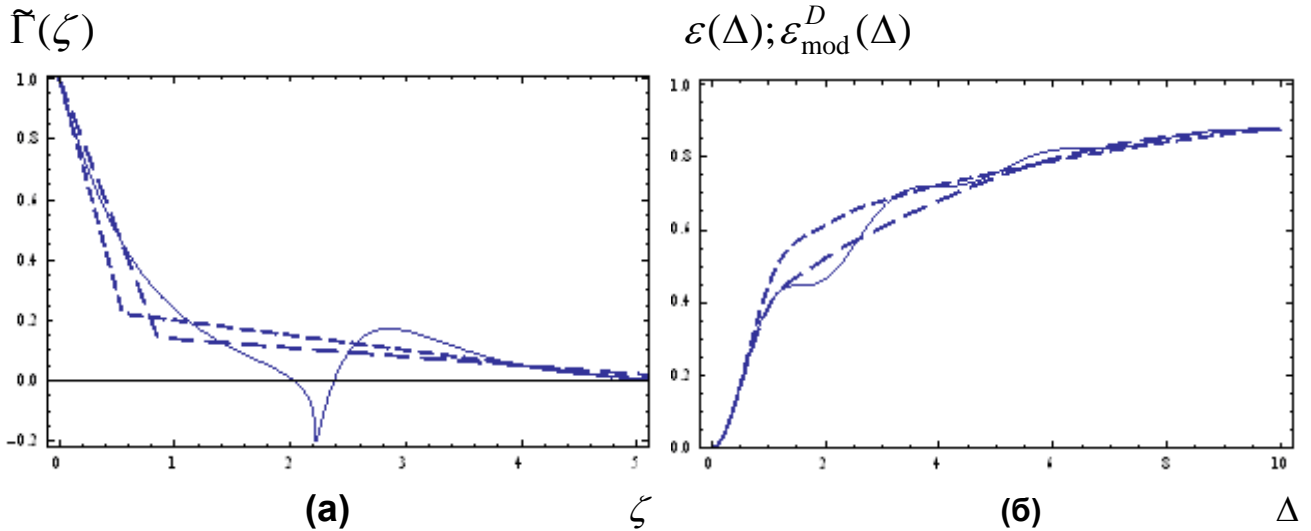


Рис.9

Для примера 1:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей рис.1 (длинные штрихи - параметры из табл.2; короткие штрихи – из табл.3). Хвосты модельных функций обрезаны на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ - формула (16) (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым рисунка (а)).

Нормировки аргументов кривых как на рис.5. Кривые с длинными штрихами повторены с рис.5.

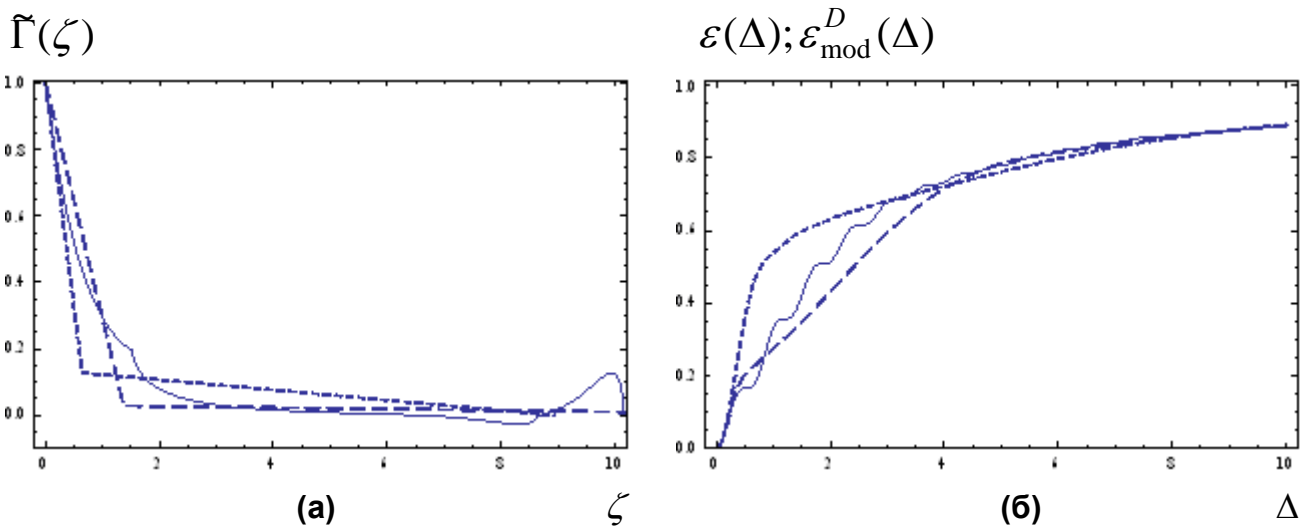


Рис.10

Для примера 2:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей рис.1 (длинные штрихи - параметры из табл.2; короткие штрихи – из табл.3). Хвост кривой с длинными штрихами обрезан на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ - формулы (16) (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым рисунка (а)).

Нормировки аргументов кривых как на рис.6. Кривые с длинными штрихами повторены с рис.6.

Есть еще один источник недостающего параметра для модели рис.1. Если в (1) разложить под интегралом функцию $J_0(x)$ в ряд при малых значениях аргумента

$$J_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\cong} 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \dots,$$

то получим

$$\varepsilon(\Delta) \underset{\Delta \rightarrow 0}{\cong} \frac{\Delta^2 \mu^2}{4} - \frac{\Delta^4}{32\pi} \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta^4 d\zeta = \frac{\Delta^2 \mu^2}{4} - \frac{\Delta^4}{32\pi} I_4. \quad (26)$$

В (26) первый член соответствует (4) и уже учтен в последнем из интегралов (12), т.е. при вычислении параметров любых моделей в [1] и здесь, а второй член (в котором фигурирует 4-й момент функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, т.е. третий момент $T(\zeta)$ - см. (31[1])) – является следующей поправкой к приближению функции $\varepsilon(\Delta)$ в начале координат. Сохранение этого момента также можно использовать как источник недостающего параметра модели рис.1. Тогда вместо (15) для параметров модели получим

$$l_1 + l_2 = a; \quad l_1 l_2 = 6 \frac{\pi(a^2 - 6\mu^2)}{\pi + a}; \quad h = \frac{\pi - l_1}{l_2}, \quad (27)$$

а для a - уравнение 4-й степени

$$a^4 - (6\mu^2 + A)a^2 - 2\pi Aa - A\pi^2 = 0; \quad A = \frac{6(5I_4 - 6\pi\mu^4)}{(6\mu^2 - \pi^2)}. \quad (28)$$

Действительное положительное решение (28), дающее положительные решения $l_{1,2}$ в (27) (если оно существует, одно или несколько) обозначим как a_{I_4} . Формулы (26-28) применимы как при однородном поле на отверстии, так и при неоднородном. Значения момента I_4 для 7-ми примеров из табл.1-2 приведены в табл.1,7[1] (в табл.7[1] для неоднородных полей на апертуре они обозначены как $I_{4,eff}$). Качество модели рис.1 с параметрами из (27-28) обсудим далее (см. рис.11,12,14,16-18).

Рис.2-7 показывает, что модель рис.1 с использованием первого момента I_1 функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ как источника недостающего параметра модели, дает неплохое приближение для $\varepsilon(\Delta)$, немногим хуже, а то и лучше, чем лучшие из предложенных в [1] моделей. Встает закономерный вопрос – а насколько можно улучшить приближение для $\varepsilon(\Delta)$ в рамках модели рис.1, если подобрать вручную недостающий параметр?

Пусть для определенности искомым свободным параметром модели будет

$$a = l_1 + l_2, \quad (29)$$

как в (15,23,27). Тогда из уравнений (12) имеем

$$b = l_1 l_2 = \frac{\pi(a^2 - 6\mu^2)}{\pi + a}; \quad h = \frac{\pi - l_1}{l_2}. \quad (30)$$

Для существования двух действительных и положительных корней l_1, l_2 в (29-30) необходимо и достаточно, чтобы величина a находилась в диапазоне

$$\left[\begin{array}{l} a > \mu\sqrt{6}, \mu \geq \pi/\sqrt{6} \approx 1,28 \\ \left[\begin{array}{l} \mu\sqrt{6} < a \leq a_1, 1 \leq \mu < \pi/\sqrt{6} \\ a_2 \leq a \end{array} \right. \end{array} \right. , \quad (31)$$

где $a_{1,2}(\mu)$ - положительные корни уравнения $24\pi\mu^2 = a^2(3\pi - a)$ (по возрастанию).

Поскольку для некругового отверстия даже при однородном поле величина 1,28 невелика для μ , наиболее интересной является область, описываемая первой строчкой в (31). Все рассмотренные выше примеры относятся к этому диапазону μ .

В таблице 4 для 7-ми примеров из табл.1-2 (4 для однородного поля при $\mu = 1,77$ и 3 для кольцевых отверстий при неоднородном поле) приведены граничные (минимум) условия на величину a ($a_{\min} = \mu\sqrt{6}$), значение a , соответствующее решению уравнений (15) через момент I_1 (там, где существует; обозначено как a_{I_1} - см. табл.1-2), значение a , соответствующее решению уравнений (27-28) через момент I_4 (там, где существует; обозначено как a_{I_4}) и приблизительный диапазон значений a , при котором на глаз подбором получалось наилучшее приближение точной функции $\varepsilon(\Delta)$ с помощью модели рис.1 (a_{\approx}).

Таблица 4

Значения величины a (29) для 7 отверстий и полей на них: минимально допустимые значения a_{\min} ; значения, соответствующие сохранению момента I_1 - a_{I_1} ; значения, соответствующие сохранению момента I_4 - a_{I_4} ; диапазон оптимальных значений a_{\approx} .

	a_{\min}	a_{I_1}	a_{I_4}	a_{\approx}
Прямоугольник $a/b = 9,84$; однородное поле	4,34	19,454	20,48	13-15
Кольцо $d = 0,516$; однородное поле	4,34	10,163	10,522	7-9
Зубчатое отверстие 1; однородное поле	4,34	-	-	4,34-4,7
Зубчатое отверстие 2; однородное поле	4,34	6,615	7,818	6,5-7
Пример 1: кольцо с $d = 0,2$; поле $U(r) = \exp\left(-\frac{ r-r_1 }{\delta(r_2-r_1)}\right)$ спадает от центра; $\delta = 0,1$	8,25	12,385	16,84	12-13
Пример 2: кольцо с $d = 0,7$; поле $U(r) = \exp\left(-\frac{ r-r_2 }{\delta(r_2-r_1)}\right)$ спадает к центру; $\delta = 0,4$	13,07	27,98	45,592	20-22
Пример 3: кольцо с $d = 0,5$; поле (63[1]) спадает от центра; $\alpha = 32/r_2$; $\delta^2 = 0,02$,	29,48	50,395	102,057	39-40

На рис.11-18 сравниваются для всех отверстий результаты использования параметра a (29) из табл.4 в модели рис.1 при моделировании функции $\varepsilon(\Delta)$.

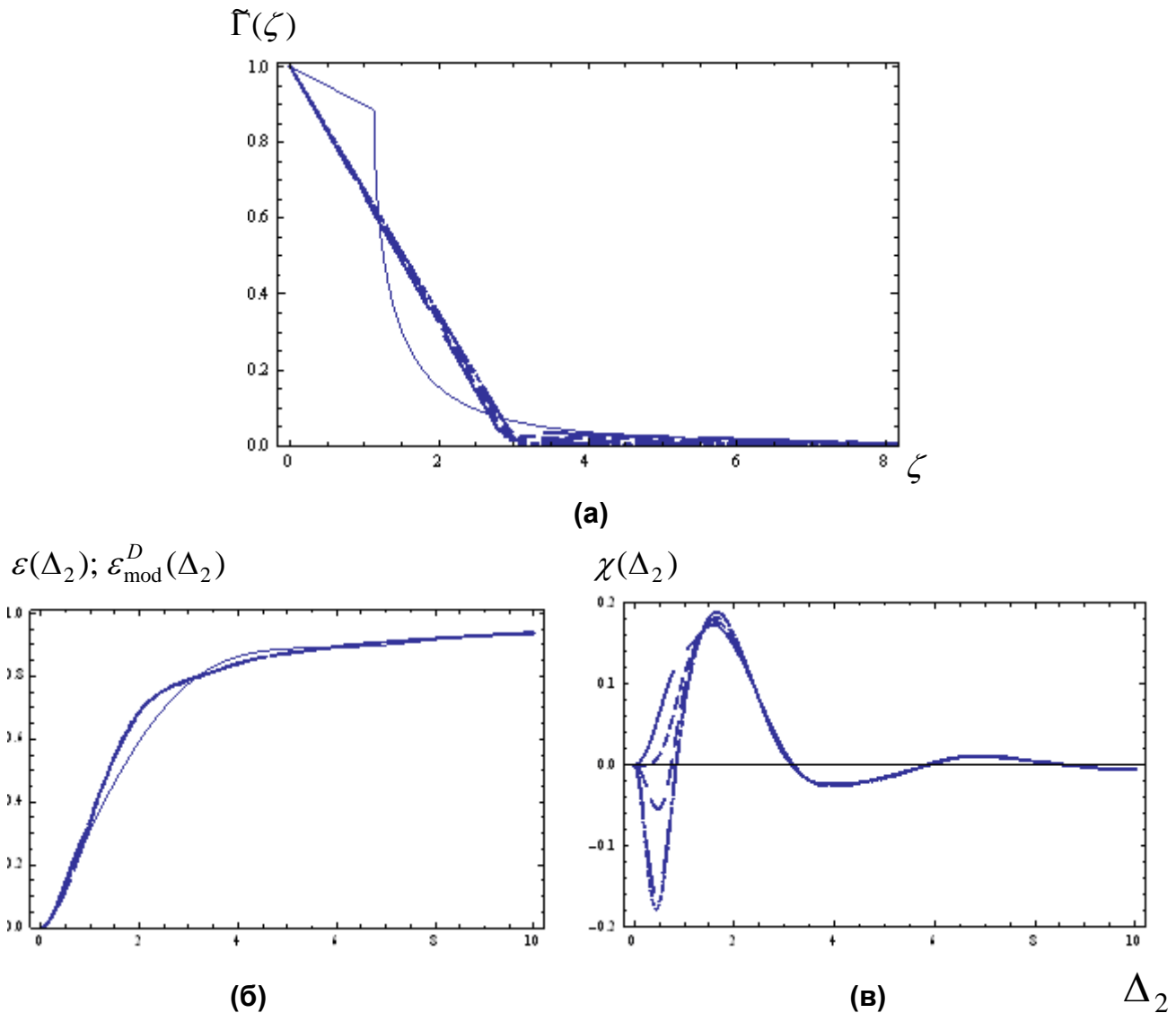


Рис.11

Для прямоугольного отверстия с $\mu = 1,77$ ($a/b = 9,84$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых рис.1 (штриховые линии).

По убыванию длины штрихов линии отвечают параметрам: $a = 11,59$, что соответствует решению уравнения (18) и значению $l_2 = l_{2,\max}$; $a = a_{I_1}$ (см. (15)); $a = 15$, $a = 13$; $a = a_{I_4}$ (см. (27-28)).

У всех кривых на графике обрезаны «хвосты»;

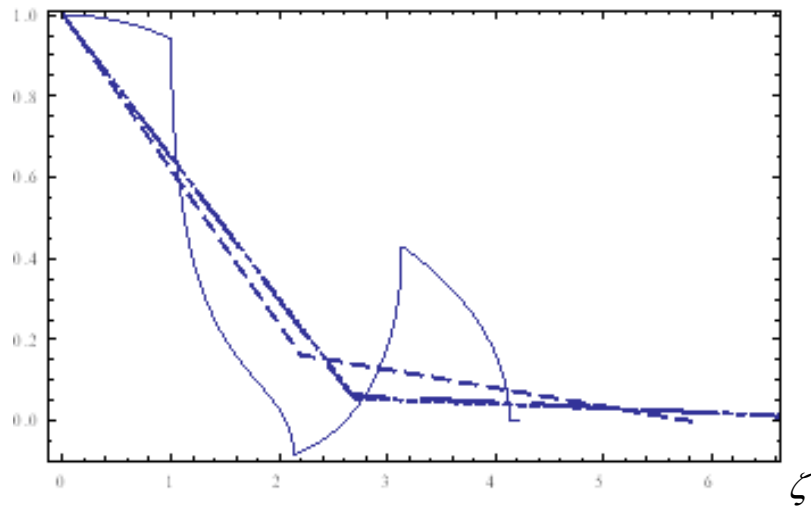
(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых рисунка **(а)** (типы линий соответствуют). Визуально все модельные функции сливаются;

(в) – графики $\chi(\Delta_2)$ (17) для модельных функций рисунка **(б)** (типы линий соответствуют).

На рис.11 показаны результаты расчетов для прямоугольного отверстия с $\mu = 1,77$ (ср. рис.2). Здесь к табл.4 добавлено решение уравнения (18), т.к. прямо-

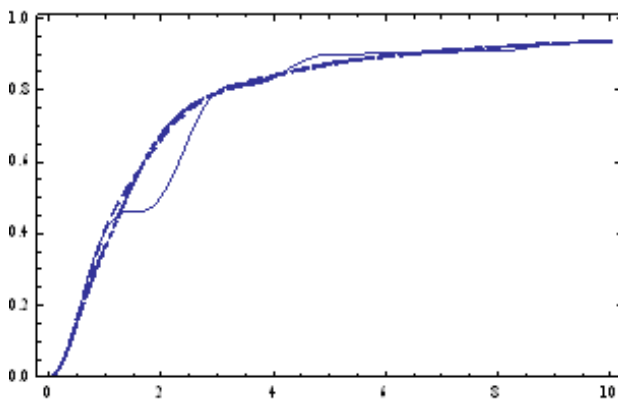
угольник – единственное из 4-х рассматриваемых отверстий с $\mu = 1,77$, имеющее решение для модели рис.1 из условия $l_2 = l_{2,\max}$.

$$\tilde{\Gamma}(\zeta)$$



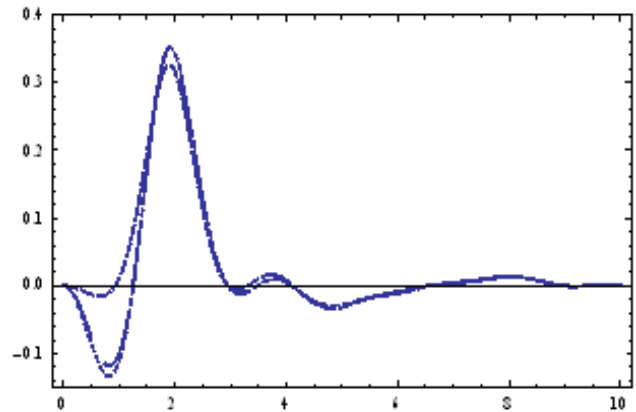
(a)

$$\varepsilon(\Delta_2); \varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$$



(б)

$$\chi(\Delta_2)$$



(в)

Δ_2

Рис.12

Для кольцевого отверстия с $\mu = 1,77$ ($d = 0,516$):

(a) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых рис.1 (штриховые линии). Линия с длинными штрихами соответствует значению $a = a_{I_1}$, линия со средними штрихами соответствует $a = 8$, линия с самыми короткими штрихами соответствует $a = a_{I_4}$ (она почти сливается с кривой, соответствующей $a = a_{I_1}$). У кривых с $a = a_{I_1}$ и $a = a_{I_4}$ на графике обрезаны «хвосты»;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых рисунка (a) (типы линий соответствуют). Визуально модельные кривые почти сливаются;

(в) – графики $\chi(\Delta_2)$ (17) для модельных функций рисунка (б) (типы линий соответствуют).

Из рис.11 видно, что в этом примере «улучшение» приближения за счет подбора параметра a по сравнению со значением a_{I_1} на графике функций $\varepsilon(\Delta_2)$ почти незаметно и проявляется лишь на графике относительных величин $\chi(\Delta_2)$. Фактически можно считать, что все значения a от 12 и выше (сюда попадают и $a = a_{I_4}$ и $a = 11,59$ при $l_2 = l_{2,\max}$) дают хорошее приближение для функции $\varepsilon(\Delta_2)$. При этом близки и модельные функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.

Почти аналогичная ситуация имеет место и для кольцевого отверстия с $\mu = 1,77$ (рис.12, ср. с рис.3). Здесь кривые $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$ мало отличаются друг от друга при изменении a в диапазоне от 7 до 11. Хотя отличие модельных функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ при этом более заметно (заметно отличие кривой с $a = 8$ и двух почти сливающихся кривых с $a = a_{I_1}$ и $a = a_{I_4}$), и все они мало похоже воспроизводят точную функцию.

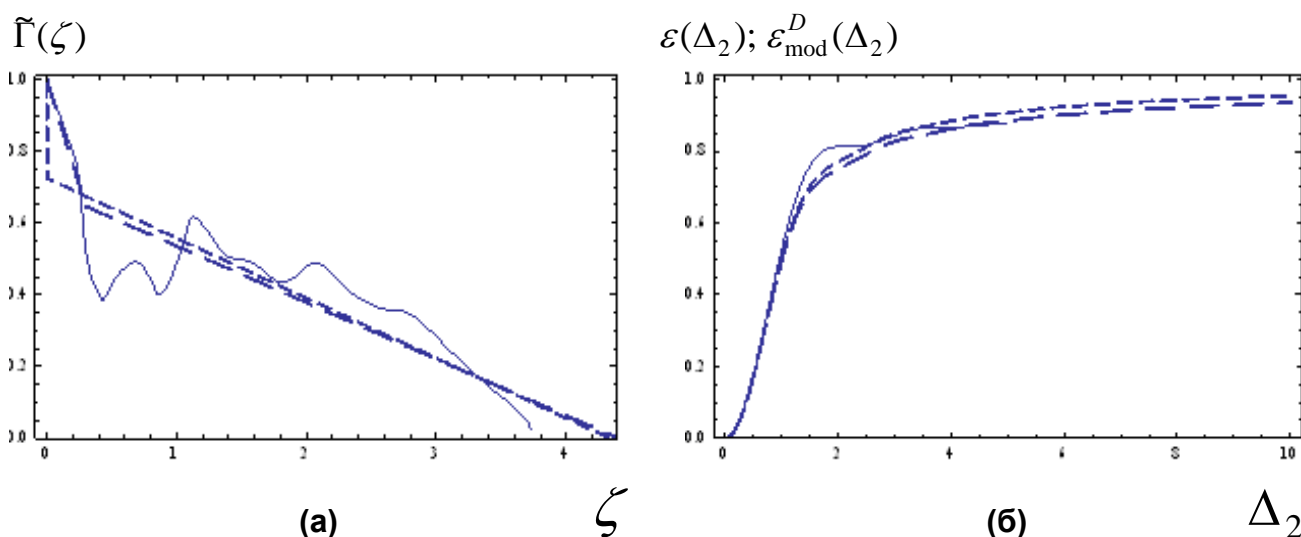


Рис.13

Для зубчатого отверстия 3О1 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых рис.1 (штриховые линии). Линия с более длинными штрихами соответствует значению параметра $a = 4,7$ в (29-30), линия с короткими штрихами соответствует наименьшему из допустимых $a = a_{\min} = 4,336$;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых рисунка (а) (типы линий соответствуют).

На рис.13 показаны результаты расчетов для зубчатого отверстия 3О1 с $\mu = 1,77$. Как следует из табл.1, в этом примере не существует решений для модели рис.1 ни через параметр I_1 , ни через параметр I_4 , поэтому приведены только 2 графика с подобранными вручную параметрами a . Наиболее удачными и, в общем-то, близкими друг другу получились аппроксимации при изменении a от своего мини-

мального значения $a = a_{\min} = 4,336$ (см. табл.4) до $a = 4,7$. Модельные функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ при этом заметно отличаются в первой части функции и близки (по наклону прямых) во второй части. Кроме первой части модельной функции при $a = 4,7$ (которая почти совпадает с начальной частью точной кривой $\tilde{\Gamma}(\zeta)$) в остальном модель рис.1 лишь в общих чертах отражает облик точной функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.

На рис.14 показаны результаты расчетов для зубчатого отверстия 3O2 с $\mu = 1,77$. В этом случае оптимальное значение $a = 6,5$ мало отличается от $a_{I_1} = 6,615$. Расчеты показали, что для этого отверстия и модельные функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и функции $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$ почти сливаются при изменении параметра a от 6,5 до 7. Значение параметра $a_{I_4} = 7,818$ уже выпадает из этого диапазона, и для него аппроксимация $\varepsilon(\Delta_2)$ хуже, правда, незначительно.

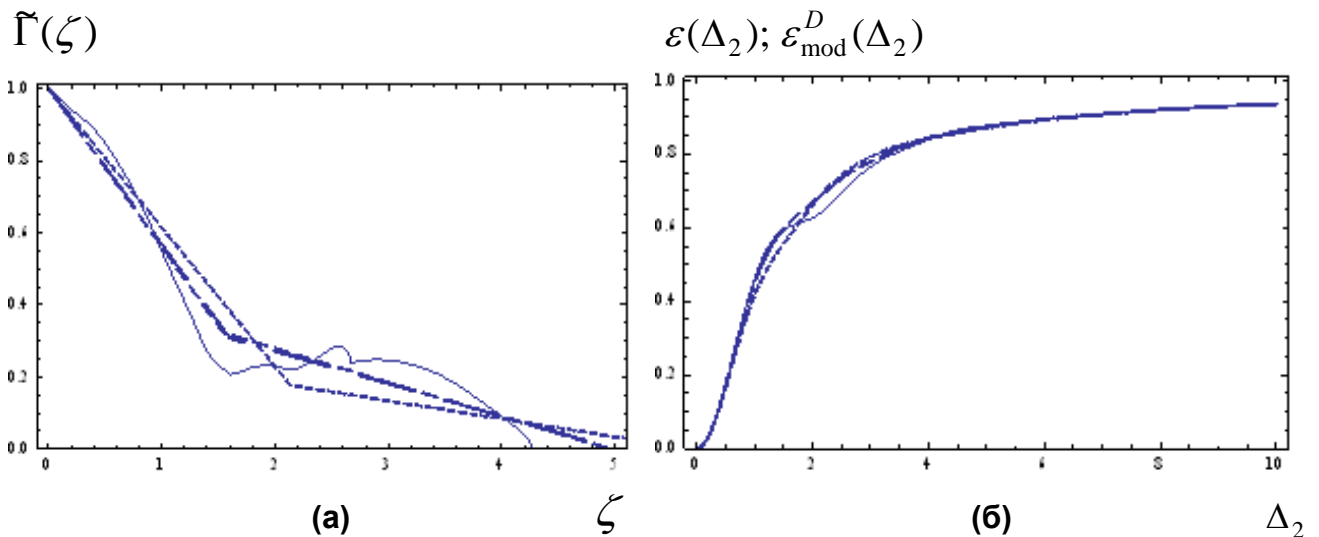


Рис.14

Для зубчатого отверстия 3O2 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых рис.1 (штриховые линии). Линия с длинными штрихами соответствует значению параметра $a = a_{I_1}$ в (29-30), линия со средними штрихами соответствует значению $a = 6,5$, линия с короткими штрихами - $a = a_{I_4}$;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых рисунка (а) (типы линий соответствуют).

Результаты расчетов, приведенные на рис.11-14, наглядно сравниваются на рис.15, где на левом графике повторены с рис.2[1] четыре точные функции $\varepsilon(\Delta_2)$, соответствующие отверстиям из первых 4-х строчек табл.4. А на правом графике для них показаны функции $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$ с рис.11-14 с оптимально подобранными значениями a . Конечно, такая простая модель как на рис.1 не воспроизводит нюансов точных

функций $\varepsilon(\Delta_2)$ (например, их точек перегиба, т.е. фраунгоферовых колец дифракционной картины), но полученные модельные функции $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$ совпадают с точными в начале координат, при больших значениях аргумента и в среднем верно воспроизводят характер поведения в промежуточной области аргумента. Поскольку все 4 рассмотренных примера соответствуют одному значению $\mu = 1,77$, то в начале координат и на бесконечности их функции $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$ совпадают. Следовательно, параметр a отражает в первом приближении характер индивидуального перехода каждой кривой между крайними областями аргументов.

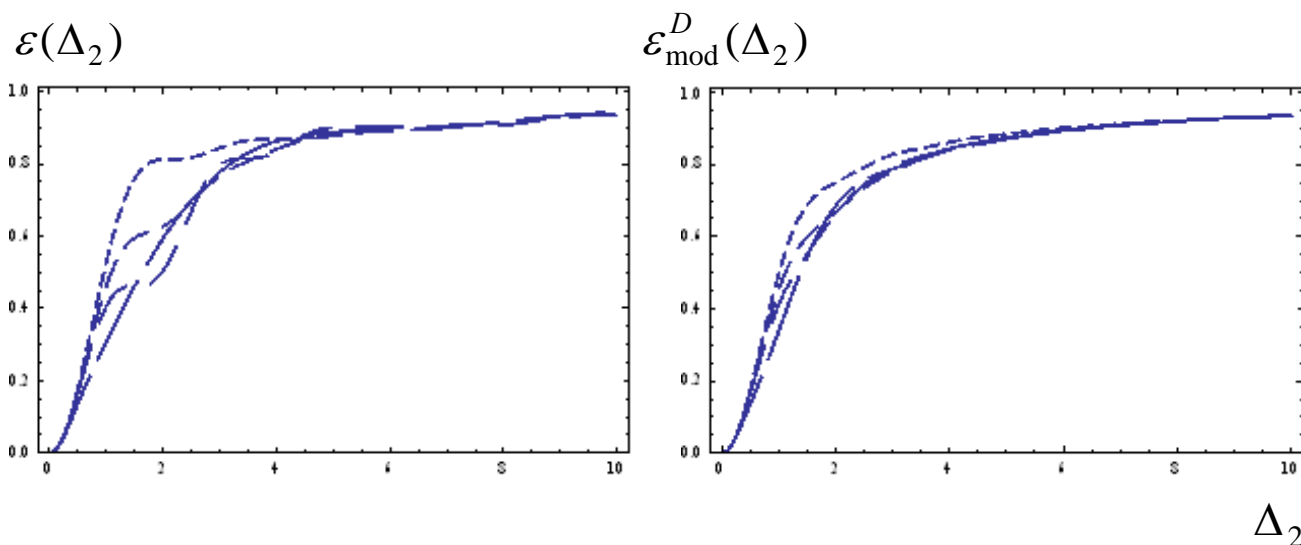


Рис.15

Слева – точные графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ для отверстий с $\mu = 1,77$ из первых 4-х строчек табл.4. По возрастанию длины штрихов кривые соответствуют формам отверстий: 3O1, 3O2, кольцо, прямоугольник.

Справа – графики функции $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$ с подобранными параметрами a для оптимальной подгонки к кривым левого графика (типы линий соответствуют; по возрастанию длины штрихов для кривых были взяты $a = 4,7; 6,5; 8; 14$ - см. табл.4).

Еще одним несомненным преимуществом модели рис.1 перед простейшими однопараметрическими моделями рис.4[1] (и не только однопараметрическими - см. [1]) является тот факт, что эта модель, не уступая в общем-то почти во всех рассмотренных нами примерах как для однородных, так и для неоднородных полей (см. ниже) по точности воспроизводства $\varepsilon(\Delta_2)$ другим моделям, нигде не обладает одним важным их недостатком. А именно, функция $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta_2)$ ни в одном из рассмотренных нами примеров не имела нефизичных областей локального убывания функции.

Рассмотрим теперь три примера кольцевых отверстий с неоднородным полем на них. На рис.16-18 для них также сравниваются точные функции $\varepsilon(\Delta)$ и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$,

рассчитанные подбором параметра a и при $a = a_{I_{1,4}}$. Здесь подбор параметра дает заметное улучшение приближения функции $\varepsilon(\Delta)$.

На рис.16 приведены результаты расчетов для **примера 1** (ср. рис.5). Для наглядности на этом рисунке, как и на двух последующих, приведены не только графики модельных функций для оптимальных параметров a , но и два графика со значениями a как вблизи минимально допустимой для этого параметра величины a_{\min} , так и много большей найденных оптимальных значений - $a = 30$. Видно, что в **примере 1** $a = a_{I_1}$, как и на рис.11-12,14, попадает в диапазон оптимальных значений a (см. табл.4), а $a = a_{I_4}$ - нет и дает значительно хуже аппроксимацию, чем $a = a_{I_1}$.

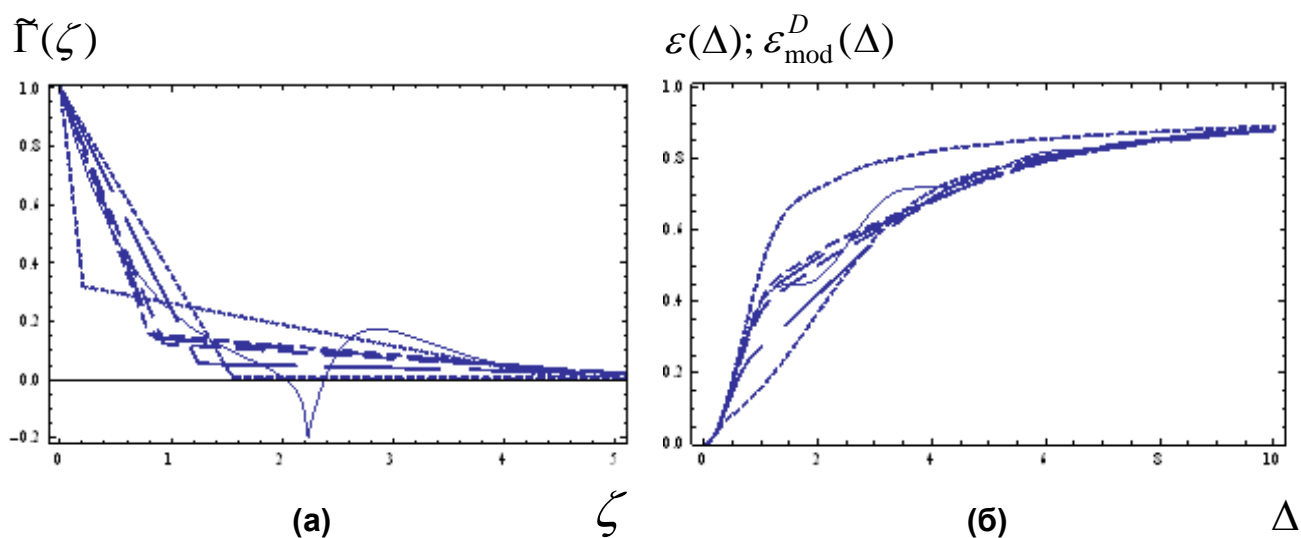


Рис.16

Для **примера 1**:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей рис.1 (штриховые линии). Кривая с самыми длинными штрихами соответствует $a = a_{I_4}$, со следующими по длине штрихами - $a = a_{I_1}$, кривые со штрихами средней длины соответствуют оптимальному подбору a (более длинные штрихи - $a = 13$, более короткие - $a = 12$), а две кривых с одинаковыми короткими штрихами соответствуют $a = 9$ и $a = 30$. Хвосты всех модельных функций срезаны на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ (16) с параметрами кривых рисунка (а) (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым рисунка (а)). Из двух кривых с самыми короткими штрихами выше находится та, у которой $a = 9$, ниже - та, у которой $a = 30$.

Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.5.

Похожая ситуация имеет место и для **примера 2** - рис.17. Здесь оптимальные значения a несколько отличны от $a = a_{I_1}$, но корректировка касается лишь начальной части графика $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ и не радикальная. Кривая же, соответствующая $a = a_{I_4}$, заведомо хуже и оптимальных кривых и кривой с $a = a_{I_1}$.

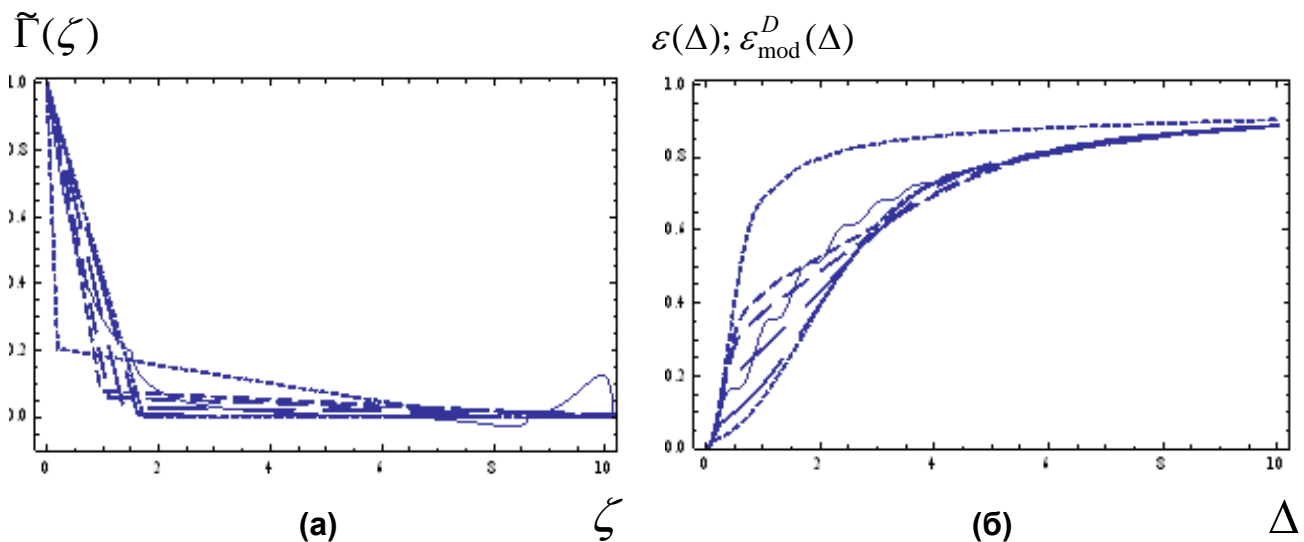


Рис.17

Для примера 2:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей рис.1 (штриховые линии). Кривая с самыми длинными штрихами соответствует $a = a_{I_4}$, со следующими по длине штрихами - $a = a_{I_1}$, кривые со штрихами средней длины соответствуют оптимальному подбору a (более длинные штрихи - $a = 22$, более короткие - $a = 20$), а две кривых с одинаковыми короткими штрихами соответствуют $a = 14$ и $a = 80$. Хвосты большинства модельных функций срезаны на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ (16) с параметрами кривых рисунка (а) (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым рисунка (а)). Из двух кривых с самыми короткими штрихами выше находится та, у которой $a = 22$, ниже - та, у которой $a = 80$.

Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.6.

И, наконец, результаты для **примера 3**. В [1] было показано (ср. рис.37-38[1]), что для этого примера искусственный подбор параметров двухпараметрической модели «кольца» (модели функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, имеющей вид функции для кольцевого отверстия при однородном поле на апертуре, но с произвольными параметрами при некоторых ограничениях на эти параметры) дает существенно лучший результат, чем расчет этих параметров из сохранения моментов функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. Та же ситуация имеет место и для модели рис.1, что иллюстрирует рис.18. Хотя для всего приведенного диапазона a отличие функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ невелико, но улучшение аппроксимации $\varepsilon(\Delta)$ функциями $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ при подобранных параметрах и качественно и количественно существенно. Также видно, что аппроксимация при $a = a_{I_4}$ заметно хуже, чем при $a = a_{I_1}$, и именно в начальной области координат.

Подчеркнем еще раз, что на всех 6-ти рис.11-12,14,16-18 (кроме рис.13, где таких решений нет вообще) $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ лучше приближает точные функции с $a = a_{I_1}$, чем с $a = a_{I_4}$, и именно в начале координат, где, согласно (26), $a = a_{I_4}$ должно улучшать

приближение. Это говорит о том, что улучшение от I_4 , если оно и есть, сказывается при меньших значениях аргумента Δ , чем область, где $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ хорошо воспроизводит $\varepsilon(\Delta)$ уже за счет только первого члена в (26). А в остальной области Δ важна роль других факторов. И сохранение I_1 отвечает им больше, чем сохранение I_4 .

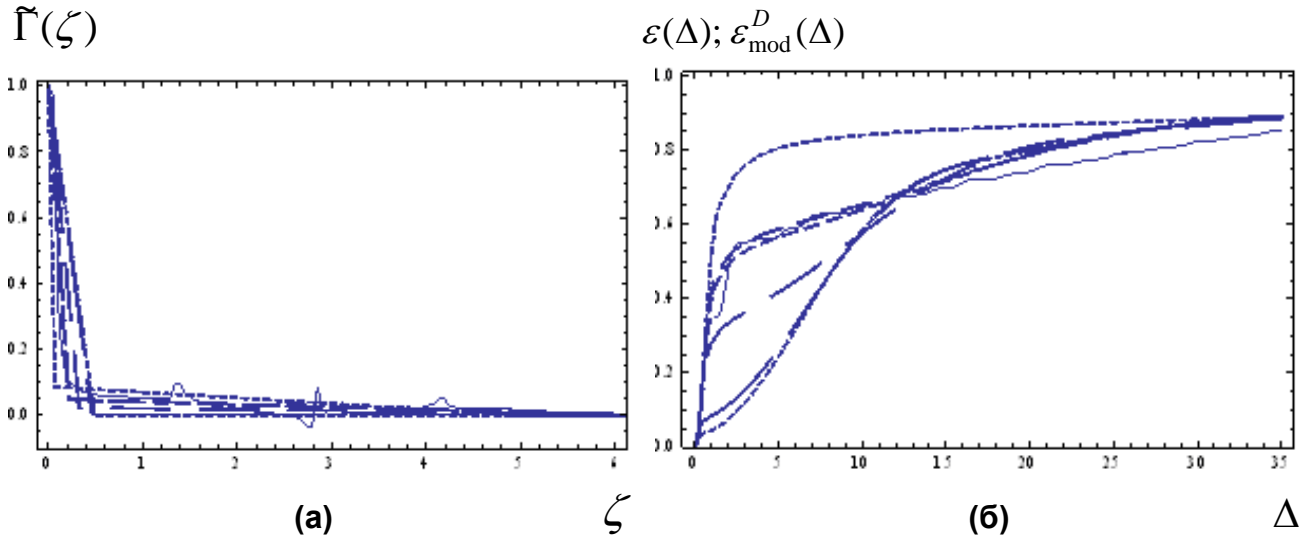


Рис.18

Для примера 3:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей рис.1 (штриховые линии). Кривая с самыми длинными штрихами соответствует $a = a_{I_4}$, со следующими по длине штрихами - $a = a_{I_1}$, кривые со штрихами средней длины соответствуют оптимальному подбору a (более длинные штрихи - $a = 39$, более короткие - $a = 40$), а две кривых с одинаковыми короткими штрихами соответствуют $a = 32$ и $a = 150$. Хвосты большинства модельных функций срезаны на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ (16) с параметрами кривых рисунка (а) (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым рисунка (а)). Из двух кривых с самыми короткими штрихами выше находится та, у которой $a = 32$, ниже - та, у которой $a = 150$.

Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.7.

Итак, исходя из 7 проанализированных случаев, можно заключить, что простейшая однопараметрическая модель рис.1 является наилучшей из предложенных здесь и в [1] моделей функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, состоящей из треугольников и прямоугольников. Она во всех случаях воспроизводит точную функцию $\varepsilon(\Delta)$ не хуже остальных моделей, в том числе и тогда, когда для расчета недостающего параметра используется условие сохранения нулевого момента функции $\tilde{T}(\zeta)$. Искусственный подбор параметра нередко радикально не меняет качество приближения. К тому же, ни в каких расчетах не получалась модельная функция $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ с не соответствующими реальности областями (областями локального убывания). Поэтому эта функция вполне может быть рекомендована как первое приближение к хорошей реальной функции $\varepsilon(\Delta)$

- она совпадает с ней в начале координат, на бесконечности и реалистично воспроизводит область промежуточных значений. Поскольку эта модель однопараметрическая, т.е. один параметр свободный после наложения необходимых условий на поведение функции в начале координат и на бесконечности, то от нее и нельзя ожидать воспроизведения, например, точек перегиба функции $\varepsilon(\Delta)$ (колец Фраунгофера). Использование вместо первого момента функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (т.е. нулевого момента функции $\bar{T}(\zeta)$) другой характеристики отверстия и поля на нем может несколько улучшить приближение $\varepsilon(\Delta)$, но нам не удалось найти, какой должна быть эта характеристика. Площадь отверстия и его периметр (рассчитанные при неоднородном поле на отверстии с весовым множителем, равным величине поля) уже задействованы в параметрах модели и обеспечивают правильное поведение $\varepsilon_{\text{mod}}^D(\Delta)$ в начале координат и на бесконечности. Хорошо бы найти еще одну топологическую характеристику для недостающего параметра, но пока ее нет, и пришлось ограничиться нулевым моментом $\bar{T}(\zeta)$. Требования к этой искомой топологической характеристике усложняются тем, что для применения предложенной методики она должна выражаться в математической форме через функции $\bar{T}(\zeta)$ или $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, а не только через свойства отверстия.

К сожалению, даже среди 7 рассмотренных примеров нашелся один (отверстие 301 при однородном поле – см. табл.4), когда параметры модели рис.1 нельзя рассчитать из величины I_1 - нет подходящих решений уравнений (15). Хотя модель хорошо применима к этому примеру – см. рис.13, где представлены варианты искусственно подобранного параметра модели рис.1. Значит, в принципе поиск подходящего для всех случаев источника свободного параметра модели рис.1 остается открытым.

Вспомним, что в [1] более гибкой моделью $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для аппроксимации $\varepsilon(\Delta)$ у нас получилась модель «кольца» с рядом ограничений на произвольные параметры. Но она двухпараметрическая и расчет двух ее свободных параметров через сохранение, соответственно, уже двух моментов $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ тоже, к сожалению, не всегда дает лучшее приближение в рамках этой модели. Так что в этом случае возможностей подбора больше, но проблемы те же – источник правильных параметров модели.

Оценка угла ϑ по разным моделям функции $\varepsilon(\vartheta)$

В заключение проиллюстрируем ответ на практический вопрос работ [1,2] и настоящей работы. Оценим величину зенитного угла ϑ , внутри которого сосредоточена заданная доля диффразирующего излучения (т.е. доля энергии $\varepsilon(\vartheta)$ (1) внутри прямого конуса с углом раствора 2ϑ и высотой вдоль перпендикуляра к отверстию). В таблицах 5-6 для рассмотренных выше 7 отверстий и полей на них представлены коэффициенты на которые умножаются точные значения ϑ при использовании в оценках вместо точной функции $\varepsilon(\vartheta)$ той или иной ее модели. Оценки коэффициентов

сделаны грубо по рис.2-4, рис.2[1],10[1] (табл.5, отверстия при однородном поле) и рис.5-7, рис.28-30[1] (табл.6, кольцевые отверстия при неоднородном поле).

Первая цифра (слева) в таблицах соответствует оценке $\varepsilon(\vartheta)$ по формуле Релея (13[1]), где в аргументе (14[1]) фигурирует ρ из (7), т.е. величина $\sqrt{\Sigma_{eff} / \pi}$ (9) (при однородном поле - в табл.5, $\Sigma_{eff} = \Sigma$). Вторая цифра в таблицах соответствует $\varepsilon(\vartheta)$ по формуле Релея (13[1]), где в аргументе (14[1]) фигурирует ρ типа (8): в табл.5 равная $2\Sigma / P$, а в табл.6 $-2\Sigma_{eff} / P_{eff}$, где P_{eff} соответствующий эффективной площади эффективный периметр, равный длине границы вдоль горизонтали рельефа амплитуды поля (см. (16[1])). Третья цифра в таблицах соответствует $\varepsilon(\vartheta)$ из (15-16) согласно модели $\tilde{\Gamma}$ рис.1. Последняя цифра в таблице (единица) указывает на то, что все коэффициенты относительные, берутся относительно точного значения из численно рассчитанной функции $\varepsilon(\vartheta)$.

Поскольку модель (15-16) для $\varepsilon(\vartheta)$ не существует для зубчатого отверстия 1 (третья строчка в табл.5), в этом случае была использована тоже однопараметрическая модель $\tilde{\Gamma}$ из двух прямоугольников рис.4а[1], дающая $\varepsilon(\vartheta)$ по формулам (33,38[1]) – см. рис.10б[1]. Эти цифры в табл.5 выделены нежирным шрифтом.

Таблица 5

Коэффициенты для 4-х отверстий (однородное поле), на которые умножается реальная величина угла ϑ , соответствующая заданному значению $\varepsilon(\vartheta)$ (в процентах), при оценках этой величины по той или иной модели $\varepsilon(\vartheta)$. Цифры слева направо соответствуют $\varepsilon(\vartheta)$ по формуле Релея (13[1]) с ρ равной (7); по формуле Релея с ρ равной (8); $\varepsilon(\vartheta)$ по модели (15-16); точному значению $\varepsilon(\vartheta)$, выступающему в качестве нормировочного числа.

	$\varepsilon(\vartheta) = 60\%$	70%	80%
Прямоугольник $a/b = 9,84$ однородное поле	0,54 : 0,96 : 0,85 : 1	0,5 : 0,88 : 0,8 : 1	0,5 : 0,88 : 1 : 1
Кольцо $d = 0,516$ однородное поле	0,47 : 0,84 : 0,72 : 1	0,51 : 0,9 : 0,74 : 1	0,52 : 0,92 : 1,07 : 1
Зубчатое отверстие 1 однородное поле	1 : 1,77 : 1 : 1	1 : 1,77 : 0,96 : 1	0,94 : 1,67 : 1,76 : 1
Зубчатое отверстие 2 однородное поле	0,79 : 1,39 : 1 : 1	0,51 : 0,9 : 0,87 : 1	0,46 : 0,82 : 0,97 : 1

Из таблицы 5 видно, что при однородном поле, небольшом значении параметра (13) (в табл.5 $\mu = 1,77$) и больших (>50%) значениях $\varepsilon(\vartheta)$ обе модели $\varepsilon(\vartheta)$ - по формуле Релея с $\rho = 2\Sigma / P$ и по модели (15-16), дают близкие и хорошие по отно-

шению к точной величине оценки угла \mathcal{G} . Использование же для этой цели формулы Релея с $\rho = \sqrt{\Sigma/\pi}$ обычно занижает точное \mathcal{G} в 2 раза.

Таблица 6

Коэффициенты для 3-х кольцевых отверстий с неоднородными полями, на которые умножается реальная величина угла \mathcal{G} , соответствующая заданному значению $\varepsilon(\mathcal{G})$ (в процентах), при оценках этой величины по той или иной модели $\varepsilon(\mathcal{G})$. Цифры слева направо соответствуют $\varepsilon(\mathcal{G})$ по формуле Релея (13[1]) с ρ равной (7); по формуле Релея с ρ равной (16[1]); $\varepsilon(\mathcal{G})$ по модели (15-16); точному значению $\varepsilon(\mathcal{G})$, выступающему в качестве нормировочного числа.

	$\varepsilon(\mathcal{G}) = 60\%$	70%	80%
Пример 1: кольцо с $d = 0,2$; поле $U(r) = \exp\left(-\frac{ r-r_1 }{\delta(r_2-r_1)}\right)$ спадает от центра; $\delta = 0,1$	0,41 : 0,74 : 1,11 : 1	0,4 : 0,71 : 1,31 : 1	0,27 : 0,49 : 1,09 : 1
Пример 2: кольцо с $d = 0,7$; поле $U(r) = \exp\left(-\frac{ r-r_2 }{\delta(r_2-r_1)}\right)$ спадает к центру; $\delta = 0,4$	0,26 : 0,8 : 1,3 : 1	0,21 : 0,64 : 1,14 : 1	0,16 : 0,48 : 1 : 1
Пример 3: кольцо с $d = 0,5$; поле (63[1]) спадает от центра; $\alpha = 32/r_2$; $\delta^2 = 0,02$,	0,16 : 0,31 : 1,61 : 1	0,08 : 0,16 : 0,86 : 1	0,06 : 0,11 : 0,7 : 1

А для неоднородного поля при больших значениях μ (13) (см. табл.2) из табл.6 видно, что даже модель, предложенную в [2], нельзя считать хорошей – она может в 2-9 раз занижать оценку угла \mathcal{G} . Легко рассчитать из формул, приведенных в [1], что для **примеров 1-3** отношение величин $\sqrt{\Sigma/\pi} : \sqrt{\Sigma_{eff}/\pi} : 2\Sigma_{eff}/P_{eff}$ равно, соответственно, 54,4 : 1,8 : 1 (для **примера 1**), 3,6 : 3 : 1 (для **примера 2**) и 2,4 : 1,9 : 1 (для **примера 3**). Поэтому использование в формуле Релея ρ из (7) еще в 2-3 раза занижает величину угла по оценке по модели из [2], не говоря уже об использовании Σ вместо Σ_{eff} . В то же время модель (15-16) везде дает вполне приемлемую точность оценки \mathcal{G} в несколько десятков процентов.

Поэтому использование модели (15-16) для $\varepsilon(\mathcal{G})$ (а где она не существует – любой другой простой модели – с рис.4а,б[1], например) дает во всех случаях вполне хорошую оценку \mathcal{G} . И, кстати, она в равной степени подходит для оценок \mathcal{G} и при малых значениях $\varepsilon(\mathcal{G})$, в отличие от моделей в виде функции Релея с ρ равном (8) или $\rho = 2\Sigma_{eff}/P_{eff}$, как предложено в [2].

Литература

1. **Сизова И.М.** *Об аппроксимации некоторых интегралов в теории дифракции на апертурах сложной формы.* Препринт ФИАН №16. Москва, 2014. 60 с.
2. **Сизова И.М.** *О подобии при дифракции света на апертурах сложной формы.* Препринт ФИАН №252. Москва, 1988. 48 с.
3. **Willis H.F.** *A formula for expanding an integral as a series.* Philos.Mag. 1948. V.39. P.455-459.
4. **MacKinnon R.F.** *The asymptotic expansions of Hankel transforms and related integrals.* Math.of Comp. 1972. V.26, No 118. P.515-527.
5. **Clark P.P., Howard J.W., Freniere E.R.** *Asymptotic approximation to the encircled energy function for arbitrary aperture shapes.* Appl.Opt. 1984. V.23, No 2. P.353-357.
6. **Сизова И.М.** *Подобие световых потоков в дальней зоне при дифракции на апертурах сложной формы.* Препринт ФИАН №189. Москва, 1990. 47 с.

Подписано в печать 09.02.2015 г.
Формат 60x84/16. Заказ № 5. Тираж 140 экз. П.л 2.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640