

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Физический
ИНСТИТУТ



имени
П.Н. Лебедева

Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

19

Е.П.ОРЛОВ

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ
МЕЖДУ СИСТЕМАМИ ОТСЧЁТА,
СВЯЗАННЫМИ С ПРОТИВОПОЛОЖНО
ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ,
УСКОРЯЕМЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ**

Москва 2014

Е.П.Орлов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ МЕЖДУ СИСТЕМАМИ
ОТСЧЁТА, СВЯЗАННЫМИ С ПРОТИВОПОЛОЖНО ЗАРЯЖЕННЫМИ
ЧАСТИЦАМИ, УСКОРЯЕМЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

А Н Н О Т А Ц И Я

На основе концепции 4-мерного пространства компактифицированного до трёх измерений, а также вытекающего из этой концепции представления о римановом пространстве событий с косоугольными пространственно-временными локальными базисами построены системы отсчёта, связанные с ускоряемыми электрическим полем противоположно заряженными частицами, а также между частицей и её античастицей. Получены системы трансцендентных уравнений для преобразования координат события при переходе от одной из систем отсчёта к другой и обратно. В случае, когда массы ускоряемых частиц близки друг к другу, выполнен расчёт, проиллюстрированный графическими изображениями поверхностей, задаваемых найденными преобразованиями. На основе проведённого исследования обсуждаются известные ранее преобразования.

E.P.Orlov

SPACE-TIME TRANSFORMATIONS BETWEEN THE FRAMES
CONNECTED WITH OPPOSITE CHARGED ELECTRIC FIELD-ACCELERATED
PARTICLES

A B S T R A C T

Basing on a concept of 4-dimensional space compactified to three dimensions, as well on the notion of the Rymann space with the oblique-angled local space-time bases, which follows from this concept, the reference frames connected with opposite charged electric field-accelerated particles, and the particle and antiparticle have been built. The systems of transcendental equations for transformation of event's coordinates between the reference frames are obtained. The calculation has been made for the case when the masses of accelerated particles are approximately equal and the results are illustrated by the surfaces' images given by the obtained transformations. On the basis of the performed research the earlier known transformations are discussed.

Введение

В работе [1] на основе концепции 4-мерного пространства компактифицированного до трёх измерений и вытекающего из этой концепции представления о римановом пространстве событий с косоугольными пространственно-временными локальными базисами были определены системы отсчёта ускоренного и неподвижного наблюдателей и получены преобразования пространственно-временных координат события, наблюдаемого из этих систем. В работе [2] проведён сравнительный анализ этих преобразований с известными до сих пор преобразованиями. Показано, что преобразования Мёллера [3], Подосенова [4, 5], Ву и Ли [6, 7], а также обобщённые преобразования Мёллера-Ву-Ли, полученные Ксу и Клефф [8, 9] и усовершенствованные Эрнстом [10] являются предельными случаями этих новых преобразований. В настоящей работе на основе указанной концепции пространственно-временные преобразования получены для систем отсчёта, связанных с ускоряемыми в противоположных направлениях противоположно заряженными частицами, а также с частицей и её античастицей.

Как подробно описано в работах [11, 12] простейшей моделью 4-мерного мира с компактным четвёртым измерением может служить 4-мерный плоскопараллельный резонатор с однородной, изотропной средой, не обладающей дисперсией скорости распространяющихся в ней волн. Моды такого резонатора с одинаковым продольным индексом ассоциируются с полем, отвечающим какой либо элементарной частице. Зеркала резонатора предполагаются обладающими тем свойством, что коэффициент отражения от них прямой и обратной волн, образующих моду с некоторым продольным индексом, не зависит от поперечных индексов моды. Подчеркнём, что когда говорится о коэффициенте отражения зеркал резонатора не равном единице, то речь идёт не о потерях излучения, а о трансформации моды с заданным продольным индексом в моды с другими продольными индексами. Это соответствует распаду частицы на другие частицы.

При неограниченности резонатора множество поперечных индексов является множеством мощности континуума и может быть охарактеризовано углом между волновыми векторами прямой или обратной волн, образующих моду, и осью резонатора, то есть линией перпендикулярной зеркалам.

В работах [11, 12] было показано, что пространственно-временное многообразие Минковского может быть получено из законов распространения волн в таком резонаторе с учётом резонансного условия по координате дополнительно-

го 4-го измерения, определяющего продольные индексы мод. Мода, волны которой распространяются перпендикулярно зеркалам резонатора, то есть вдоль его оси, рассматривается условно как покоящаяся. Если волны, образующие моду, распространяются под углом к оси резонатора, то, такая мода рассматривается как движущаяся со скоростью $V = c \sin \Theta$, где Θ - угол между волновым вектором прямой волны и осью резонатора, c - скорость распространения волн в резонаторе.

С помощью отображения прямых и обратных волн мод резонатора на всё пространство справа и слева от резонатора эти волны можно заменить одной эквивалентной волной, распространяющейся либо в сторону положительного направления оси координат связанной с дополнительным измерением, либо в сторону противоположного направления. При описании двух частиц рассматривается эквивалентная волна каждой из них, распространяющаяся в сторону положительного направления указанной оси, что отвечает положительным решениям релятивистских волновых уравнений (Клейна, Фока, Гордона, Дирака и т.д.) [13]. При описании частиц и античастиц необходимо учитывать обе эквивалентные волны.

С помощью такого отображения волн, в [11, 12] введено понятие евклидова пространства событий. Его спецификой является то, что системы координат в нём являются косоугольными. Пространственные координаты системы отсчёта, связанной с неподвижной модой определяются как проекции точки рассматриваемого пространства на фазовую поверхность эквивалентной волны покоящейся моды. Аналогично определяются пространственные координаты системы отсчёта связанной с движущейся модой. В случае, когда пространство внутри резонатора однородно и изотропно, а отражение от зеркал резонатора не приводит к искажениям фаз волн пространственные оси покоящейся или движущейся системы отсчёта, отвечающие этим координатам, для не взаимодействующих друг с другом мод представляют собой прямые линии ортогональные друг другу.

Косоугольность возникает тогда, когда к пространственным осям добавляется временная ось. Дело в том, что разные поперечные моды с одинаковым продольным индексом в силу указанного выше свойства зеркал резонатора уменьшают свою амплитуду в одно и то же число раз при одинаковом числе отражений образующих их волн от зеркал резонатора. При этом эквивалентные волны отвечающие модам с различными поперечными индексами проходят пути разной длины до точки рассматриваемого пространства, где их ослабление до-

стигает заданной величины. Это позволяет ввести временные координаты этой точки через соответствующие длины путей, которые прошли волны. При этом время жизни движущейся моды оказывается больше, чем время жизни покоящейся моды в соответствии с известной формулой теории относительности [14].

В случае, когда отражение от зеркал и пространство внутри резонатора однородны, а пространство к тому же изотропно и нет дисперсии скоростей волн, для невзаимодействующих друг с другом мод оси, отвечающие этим координатам, представляют собой прямые линии перпендикулярные плоским фазовым поверхностям эквивалентных волн. Для каждой пары мод эти оси лежат в плоскости волновых векторов волн этих мод. Важно отметить то, что временная ось системы отсчёта связанной с неподвижной модой ортогональна фазовой поверхности эквивалентной волны движущейся моды, а временная ось системы отсчёта связанной с движущейся модой ортогональна фазовой поверхности эквивалентной волны неподвижной моды. Вследствие этого системы координат связанные как с неподвижной, так и с движущейся модой оказываются косоугольными [11, 12].

1. Системы отсчёта связанные с частицами, ускоряемыми прямолинейно в противоположных направлениях

Пусть в неограниченном плоскопараллельном резонаторе возбуждены две покоящиеся моды с отличными от нуля продольными индексами. Поскольку в данном разделе античастицы не будут рассматриваться, то продольные индексы предполагаем различными. Это означает, что массы частиц, ассоциируемых с этими модами, различны.

Предположим далее, что в некоторый момент времени возникает фактор, приводящий к неоднородному по поперечным координатам воздействию на волны, образующие эти моды. Будем пока рассматривать случай, когда это воздействие не влияет на скорость образующих моду волн в направлении их волнового вектора. Это отвечает, например, электромагнитному воздействию на заряженную частицу. В рассматриваемой модели пространства такое воздействие на волну, как будет показано ниже, реализуется тогда, когда воздействие происходит на зеркалах резонатора при сохраняющемся расстоянии между ними, а именно: при отражении от зеркала резонатора изменение фазы отражённой волны каждой из этих мод будет зависеть от координат и времени. Тогда фазовые поверхности эквивалентных волн этой моды будут искривляться. Достаточно,

однако, предположить, что воздействие на фазу происходит на одном из зеркал, например, на левом.

Далее, из двух эквивалентных волн каждой из мод в данном разделе мы будем рассматривать только те, которые распространяются в положительном направлении оси, соответствующей дополнительному измерению, что отвечает положительным решениям уравнений квантовой электродинамики [13], описывающих частицы. Если в рассмотрение включены и античастицы, то, как отмечалось выше, необходимо рассматривать и эквивалентные волны, распространяющиеся в отрицательном направлении оси дополнительного измерения.

В случае инерциальных систем отсчёта временная координата события в системе отсчёта неподвижного наблюдателя определялась длиной пути, который проходит волна движущейся моды до рассматриваемой точки пространства событий [11, 12]. Теперь же обе системы отсчёта подвергаются ускорению. Но также как и в случае инерциальных систем отсчёта, временная координата события в системе отсчёта, связанной с какой-то из частиц, будет определяться длиной пути, который проходит до рассматриваемой точки пространства событий волна, отвечающая другой частице. Пространственные же координаты в системе отсчёта, связанной с данной частицей, как и прежде [1, 2, 11, 12], отсчитываются по фазовой поверхности эквивалентной волны, отвечающей этой частице.

Распространение эквивалентных волн мод будем описывать в приближении геометрической оптики. Условия, когда это приближение справедливо, хорошо известны [14]. Для вывода уравнений траекторий лучей уравнения релятивистской механики понадобятся нам не в обычной форме, отвечающей псевдоевклидову пространству событий, а в форме, отвечающей евклидову пространству событий. Уравнения релятивистской механике, записанные в этой форме, получены в [15].

Как следует из [15] эти уравнения можно представить в виде

$$\cos \Theta \frac{d\mathbf{k}}{ds} = k_0 \cos \Theta \frac{d \hat{\mathbf{e}}^x \sin B_x + \hat{\mathbf{e}}^y \sin B_y + \hat{\mathbf{e}}^z \sin B_z}{\cos \Theta} = \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

где s – координата проекции точки, принадлежащей рассматриваемому лучу эквивалентной волны моды, на ось дополнительного измерения; \mathbf{k} – проекция 4-мерного комптоновского волнового вектора \mathbf{K} волны, ассоциируемой с частицей, на 3-мерное пространство (см.рис.1 из [15]); $k_0 = \pi q/L$ - проекция \mathbf{K} на ось дополнительного измерения, связанная с массой покоя частицы m_0 соотношением $m_0 = \hbar k_0/c$, q - продольный индекс моды, L - расстояние между зеркалами,

B_x, B_y, B_z - углы между \mathbf{K} и перпендикулярами, опущенными из его вершины на соответствующие оси, Θ - угол между \mathbf{K} и осью дополнительного измерения в рассматриваемой точке траектории луча. Проекция \mathbf{k} связана с обычным 3-мерным импульсом частицы соотношением $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$.

Как показано в [15] углы B_x, B_y, B_z связаны с компонентами скорости частицы v_x, v_y, v_z относительно неподвижной системы отсчёта соотношениями

$$\sin B_x = \frac{v_x}{c}, \sin B_y = \frac{v_y}{c}, \sin B_z = \frac{v_z}{c}.$$

В 4-мерном пространстве они представляют собой направляющие косинусы вектора \mathbf{K} , так как $\sin B_i = \cos(\pi/2 - B_i) = \cos A_i$, где A_i - соответственно углы между вектором \mathbf{K} и осями x, y, z . При этом

$$\cos \Theta = \sqrt{1 - \sin^2 B_x - \sin^2 B_y - \sin^2 B_z} = \sqrt{1 - v^2/c^2}, \text{ где } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Что касается величины $\mathbf{F} = \mathbf{f}/\hbar c$, где \mathbf{f} сила, выраженная в Ньютонах (Н), то она представляет собой силу, действующую на частицу, размерность которой в системе СИ есть м^{-2} .

Направим ось z вдоль вектора \mathbf{k} . В этом случае векторы ускорений и скоростей частиц направлены также по оси z , и B_x и B_y обращаются в нули, а B_z становится равным углу Θ . При этом уравнение (1) принимает вид

$$\cos \Theta \frac{dk}{ds} = k_0 \cos \Theta \frac{d}{ds} \text{tg} \Theta = F(z, s). \quad (1.2)$$

Отношение $w = F/k_0$ связано с ускорением частицы $a = f/m_0$ соотношением $w = a/c^2 = f/m_0 c^2$ и в системе СИ имеет размерность м^{-1} . Так как для $-\pi/2 \leq \Theta \leq \pi/2$ имеет место соотношение $\cos \Theta = 1/\sqrt{1 + \text{tg}^2 \Theta}$, то уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \Theta}} \frac{d}{ds} \text{tg} \Theta = w(z, s). \quad (1.3)$$

Интегрируя его и учитывая, что $\text{tg} \Theta = dz/ds$ и полагая $\Theta = 0$, когда $s = 0$ (начальная скорость частицы равна нулю), получаем уравнение траекторий лучей эквивалентной волны моды

$$\frac{dz}{ds} = \text{sh} \int_0^s w(z, \tilde{s}) d\tilde{s} = \pm \text{sh} \int_0^s |w^{(\pm)}(z, \tilde{s})| d\tilde{s}, \quad (1.4)$$

где знак «плюс» берётся в случае, когда ускорение направлено в положительном направлении оси z , а «минус» - когда в отрицательном направлении.

Уравнение для частицы, ускоряемой в отрицательном направлении оси z , запишем в виде

$$\frac{dz}{ds} = -\text{sh} \int_0^s \mu |w^{(+)}(z, \tilde{s})| d\tilde{s}, \quad (1.5)$$

где $\mu = \frac{|w^{(-)}(z, s)|}{|w^{(+)}(z, s)|}$

Полагая соответственно массы покоя частиц $m_0^{(+)}$ и $m_0^{(-)}$, величину напряжённости электрического поля $E(z, s)$, и учитывая, что $|w^{(+)}| = \frac{eE}{m_0^{(+)}c^2}$,

$|w^{(-)}| = \frac{eE}{m_0^{(-)}c^2}$, получаем, что $\mu = \frac{m_0^{(+)}}{m_0^{(-)}}$ является постоянной величиной. Вынося

μ за знак интеграла, и, переходя к безразмерным переменным $s = \int_0^s |w^{(+)}| ds'$ и

$z = \int |w^{(+)}| dz$, получаем для частицы, ускоряемой в положительном направлении оси z , уравнение траектории луча

$$\frac{dz}{ds} = \text{sh } s, \quad (1.6)$$

а для частицы, ускоряемой в отрицательном направлении, уравнение

$$\frac{dz}{ds} = -\text{sh}(\mu s). \quad (1.7)$$

Зависимость $z(s)$ при начальном значении $z = z(0)$ описывает траекторию луча, выходящего из точки с координатами $(s = 0, z = z(0))$. Как следует из уравнения (6), эта зависимость имеет вид

$$z(s) = \text{ch}(s) - 1 + z(0). \quad (1.8)$$

Из уравнения (7) получаем зависимость вида

$$z(s) = -\frac{\text{ch}(\mu s) - 1}{\mu} + z(0). \quad (1.9)$$

Поверхности равной фазы эквивалентной волны ускоряемой моды, точнее, те кривые, которые образованы пересечением этих поверхностей с плоскостью рис.1, и, которые будем называть фазовыми линиями (или кривыми) и обозначать как $z_{\perp}(s)$ по причине их ортогональности лучам, как это следует из (8), описываются формулой

$$z_{\perp}(s) = -\ln \operatorname{th} \frac{s}{2} + C \quad (1.10)$$

для частицы, ускоряемой в положительном направлении оси z , и, как это следует из (9),

$$z_{\perp} = \frac{1}{\mu} \ln \operatorname{th} \frac{\mu s}{2} + C \quad (1.11)$$

для частицы, ускоряемой в отрицательном направлении оси z ; C – константы.

В дальнейшем для краткости о частице, ускоряемой в положительном направлении оси z , и связанной с нею системе отсчёта координат, будем говорить как о частице (системе отсчёта), ускоряемой вверх. Аналогично будем употреблять выражение «частица (система отсчёта), ускоряемая вниз». Графики зависимости $z(s)$ и $z_{\perp}(s)$ для частицы, ускоряемой вверх, при различных начальных значениях $z = z(0)$ и константы C , отличающихся на $1/2$, показаны на рис.1,*a*.

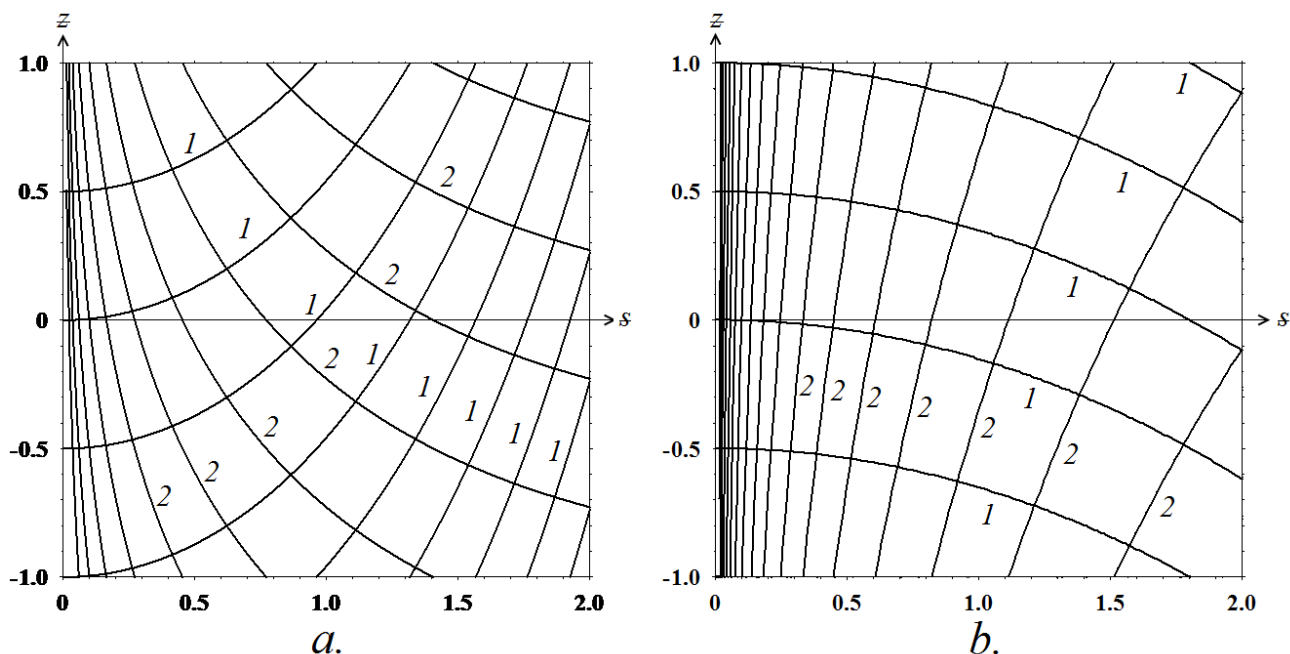


Рис.1. Лучи (1) и линии равной фазы (2) эквивалентной волны моды, движущейся с ускорением вверх *a*) и эквивалентной волны моды, движущейся с ускорением вниз ($\mu = 0,3$) *b*).

Для частицы, ускоряемой вниз, аналогичные графики для $\mu = 0,3$ при различных начальных значениях $z = z(0)$, отличающихся на $\frac{1}{2}$, и значениях константы C , отличающихся на единицу, показаны на рис.1,*b*. Видно, что в обоих случаях фазовые линии ортогональны лучам.

Условимся считать, что наша система отсчёта, из которой мы ведём наблюдение, связана с частицей, ускоряемой вниз. Другую, штрихованную систему координат, свяжем с частицей, ускоряемой вверх.

Сравнивая со случаем инерциальных систем отсчёта [11, 12], мы приходим к выводу, что отсчёт расстояний в системах отсчёта, связанных с той и другой модами (частицами), надо производить по фазовым поверхностям эквивалентных волн этих мод. Отсчёт же времени в системе отсчёта, связанной с модой (частицей), ускоряемой вниз надо производить по траекториям лучей, относящимся к эквивалентной волне моды, ускоряемой вверх. И наоборот, отсчёт времени в системе отсчёта, связанной с модой (частицей), ускоряемой вверх, надо производить по траекториям лучей, относящимся к эквивалентной волне моды, ускоряемой вниз.

Таким образом, лучи, и фазовые линии эквивалентных волн мод представляют собой координатные линии. На рис.2 изображены координатные сетки систем отсчёта, связанных с модой, ускоряемой вниз *a*) и с модой, ускоряемой вверх *b*).

2. Координаты события в системах отсчёта связанных с частицами, ускоряемыми прямолинейно в противоположных направлениях

Для описания преобразований пространства-времени при ускоренном разлёте частиц далее будут использоваться ковариантные координаты, которые как показано в работах [11, 12, 1, 2] отвечают контравариантным координатам псевдоевклидова или псевдориманова пространства. Для определения ковариантных координат, определяемых как ортогональные проекции [16, 17], строятся базисы \hat{e}^λ , \hat{e}^ζ и $\hat{e}^{\lambda'}$, $\hat{e}^{\zeta'}$, рис.2, которые совпадают с базисными векторами, используемыми для определения контравариантных координат e_λ , e_ζ , $e_{\lambda'}$, $e_{\zeta'}$, то есть $\hat{e}^\lambda = e_\lambda$, $\hat{e}^\zeta = e_\zeta$, $\hat{e}^{\lambda'} = e_{\lambda'}$, $\hat{e}^{\zeta'} = e_{\zeta'}$. Для напоминания об этом ковариантные координаты будут изображаться буквами с подчёркиванием снизу. Индексирование буквосочетанием “*opt*” означает, что ковариантные координаты события определяются как ортогональные проекции на координатные линии.

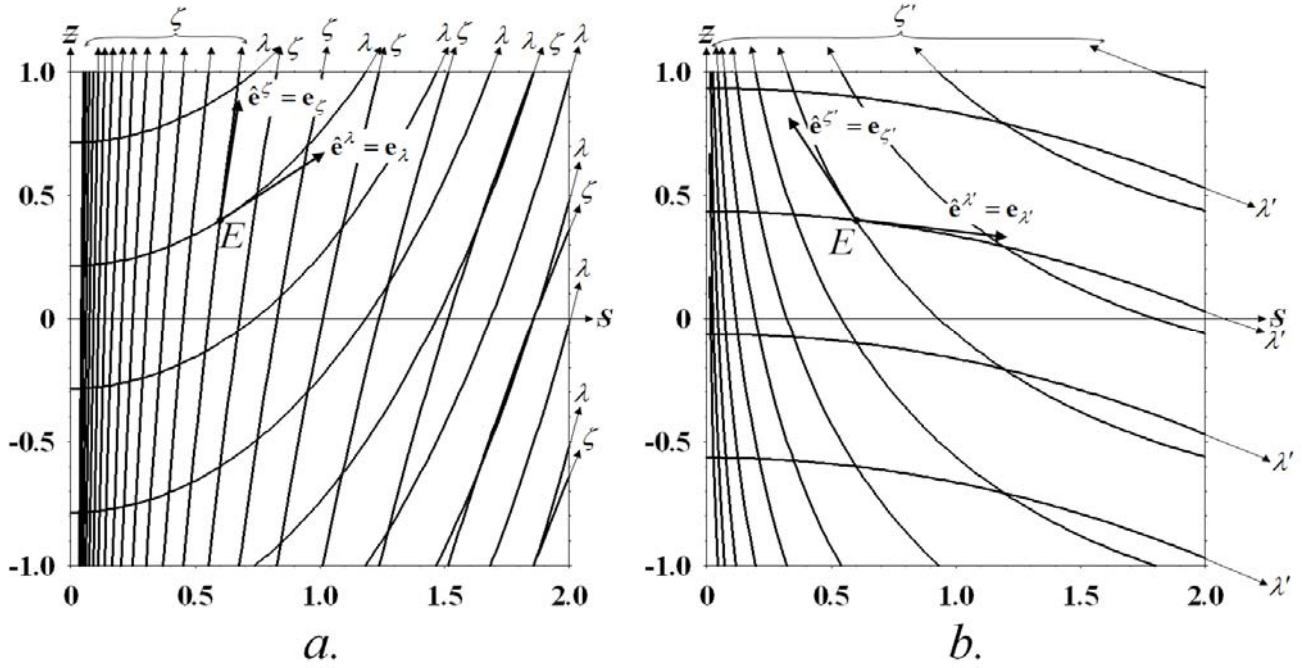


Рис.2. Координатная сетка системы отсчёта связанной с модой, движущейся ускоренно вниз ($\mu = 0,2$) *a*) и координатная сетка системы отсчёта связанной с модой, движущейся ускоренно вверх *b*). Буквами λ и ζ обозначены координатные линии соответственно вдоль лучей и фазовых линий эквивалентной волны моды, ускоряемой вниз, а буквами λ' и ζ – координатные линии вдоль лучей и фазовых линий эквивалентной волны моды, ускоряемой вверх.

Из анализа, проведённого в работах [11, 12, 1, 2] и из сказанного выше следует, что так определённые ковариантные координаты события E в случае ускоренного движения частиц надо отсчитывать, как показано на рис.3.

Для моды, ускоряемой вниз, расстояние $\underline{\lambda}_{\text{ort}}$ на луче между точками с координатами $s = 0$, $s_0^{(+)}$:

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \int_0^{s_0^{(+)}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds = \int_0^{s_0^{(+)}} \sqrt{1 + \text{sh}^2 s} ds = \text{sh } s_0^{(+)} . \quad (2.1)$$

Для моды ускоряемой вверх, расстояние $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$ на луче между точками с координатами $s = 0$, $s_0^{(-)}$:

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \int_0^{s_0^{(-)}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds = \int_0^{s_0^{(-)}} \sqrt{1 + \text{sh}^2(\mu s)} ds = \frac{1}{\mu} \text{sh}(\mu s_0^{(-)}) . \quad (2.2)$$

Для моды, ускоряемой вверх, расстояние $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ на фазовой линии между точками с координатами s_E , $s_0^{(+)}$:

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \int_{s_E}^{s_0^{(+)}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz_{\perp}}{ds}\right)^2} ds = \int_{s_E}^{s_0^{(+)}} \sqrt{1 + \frac{1}{\text{sh}^2 s}} ds = \ln \frac{\text{sh } s_0^{(+)}}{\text{sh } s_E} = \ln \frac{\lambda_{\text{ort}}}{\text{sh } s_E}. \quad (2.3)$$

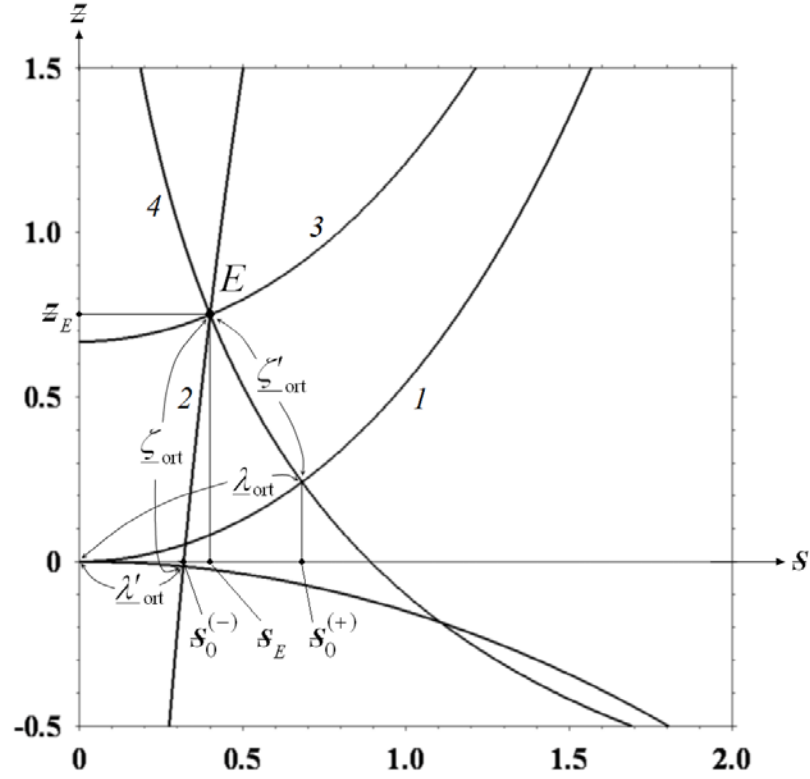


Рис.3 Иллюстрация к определению ортогональных ковариантных координат. Координата λ_{ort} отсчитывается по кривой $z(s) = \text{ch}(s) - 1$ (1); $\underline{\zeta}_{\text{ort}}$ - по кривой $z_{\perp} = \frac{1}{\mu} \ln \text{th} \frac{\mu s}{2} + C$, где $C = -\frac{1}{\mu} \ln \text{th} \frac{\mu s_E}{2} + z_E$ (2); λ'_{ort} - по кривой $z(s) = -\frac{\text{ch}(\mu s) - 1}{\mu}$ (3); $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ - по кривой $z_{\perp}(s) = -\ln \text{th} \frac{s}{2} + C$, где $C = \ln \text{th} \frac{s_E}{2} + z_E$ (4); $\mu = 0,3$. Область определения временных координат $\lambda \geq 0$, $\lambda' \geq 0$, пространственных - $-\infty < \zeta < \infty$, $-\infty < \zeta' < \infty$.

Для моды, ускоряемой вниз, расстояние $\underline{\zeta}_{\text{ort}}$ на фазовой линии между точками с координатами s_E , $s_0^{(-)}$:

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \int_{s_0^{(-)}}^{s_E} \sqrt{1 + \frac{1}{\text{sh}^2(\mu s)}} ds = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\text{sh}(\mu s_E)}{\text{sh}(\mu s_0^{(-)})} = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\text{sh}(\mu s_E)}{\mu \lambda'_{\text{ort}}}. \quad (2.4)$$

$$\text{Поскольку } dt_{\text{ort}} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{w^{(+)}} , \quad d\underline{z}_{\text{ort}} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{\zeta}_{\text{ort}}}{w^{(+)}} , \quad dt'_{\text{ort}} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{\lambda}'_{\text{ort}}}{w^{(+)}} , \quad d\underline{z}'_{\text{ort}} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}{w^{(+)}} ,$$

то отыскав преобразования $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ и $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$, мы сможем найти и преобразования $t_{\text{ort}}(t'_{\text{ort}}, z'_{\text{ort}})$, $z_{\text{ort}}(t'_{\text{ort}}, z'_{\text{ort}})$.

3. Система уравнений для преобразования координат события при ускоренном разлёте частиц различной массы

Выразим постоянные C в формулах (1.10) и (1.11) для кривых z_{\perp} , проходящих через точку E на рис.3, с декартовыми координатами s_E и z_E . Приняв во внимание, что при $s = s_E$ значение $z_{\perp}(s_E) = z_E$, получаем для моды, ускоряемой вверх $C = z_E + \ln \text{th} \frac{s_E}{2}$, а для моды ускоряемой вниз $C = z_E - \frac{1}{\mu} \ln \text{th} \frac{\mu s_E}{2}$. Подставляя эти выражения в формулы (1.10) и (1.11), получаем соответственно формулы, описывающие кривые, проходящие через точку E :

$$z_{\perp}(s) = z_E + \ln \text{th} \frac{s_E}{2} - \ln \text{th} \frac{s}{2}, \quad (3.1)$$

$$z_{\perp}(s) = z_E - \frac{1}{\mu} \ln \text{th} \frac{\mu s_E}{2} + \frac{1}{\mu} \ln \text{th} \frac{\mu s}{2}. \quad (3.2)$$

Так как рассматриваемые кривые проходят также через точку с координатами $(s_0^{(+)}, z = \text{ch } s_0^{(+)} - 1)$ и $(s_0^{(-)}, z = -\frac{1}{\mu}(\text{ch}(\mu s_0^{(-)}) - 1))$, через которые проходят также кривые $z = \text{ch } s - 1$ и $z = -\frac{1}{\mu}(\text{ch}(\mu s) - 1)$, то, приравнивая в этих точках соответствующие значения z_{\perp} и z , получаем соотношения

$$z_E + \ln \text{th} \frac{s_E}{2} = \text{ch } s_0^{(+)} - 1 + \ln \text{th} \frac{s_0^{(+)}}{2}. \quad (3.3)$$

$$z_E - \frac{1}{\mu} \ln \text{th} \frac{\mu s_E}{2} = -\frac{1}{\mu}(\text{ch}(\mu s_0^{(-)}) - 1) - \frac{1}{\mu} \ln \text{th} \frac{\mu s_0^{(-)}}{2}. \quad (3.4)$$

Далее, так как $\text{th} \frac{x}{2} = \frac{\text{ch } x - 1}{\text{sh } x} = \frac{\sqrt{1 + \text{sh}^2 x} - 1}{\text{sh } x}$, $\text{sh } s_0^{(+)} = \underline{\lambda}_{\text{ort}}$ (см. ф-лу (2.1)), а

$\text{sh}(\mu s_0^{(-)}) = \mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}}$ (см. ф-лу (2.2)), то

$$z_E + \ln \text{th} \frac{s_E}{2} = \ln E(\underline{\lambda}_{\text{ort}}), \quad (3.4)$$

$$\underline{z}_E - \frac{1}{\mu} \ln \operatorname{th} \frac{\mu s_E}{2} = -\ln E(\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}}), \quad (3.5)$$

где $E(\xi) = \frac{(\sqrt{1+\xi^2}-1)\exp(\sqrt{1+\xi^2}-1)}{\xi}$ - функция, введённая в [1]. Вычитая второе уравнение из первого, и потенцируя, получаем

$$\left(\operatorname{th} \frac{\mu s_E}{2} \right)^{1/\mu} \operatorname{th} \frac{s_E}{2} = E(\underline{\lambda}_{\text{ort}}) E(\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}}). \quad (3.6)$$

Опять используя тождество $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} - 1}{\operatorname{sh} x}$, выражение (3.6)

запишем в виде

$$\left(\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\mu s_E)} - 1}{\operatorname{sh}(\mu s_E)} \right)^{1/\mu} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 s_E} - 1}{\operatorname{sh} s_E} = E(\underline{\lambda}_{\text{ort}}) E(\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}}). \quad (3.7)$$

Используя далее формулы (2.4), (2.3) и соотношение (3.7), получаем систему трансцендентных уравнений

$$\operatorname{arsh}(\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\mu \underline{\zeta}_{\text{ort}}}) = \mu \operatorname{arsh}(\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}), \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1+(\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\mu \underline{\zeta}_{\text{ort}}})^2} - 1}{\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\mu \underline{\zeta}_{\text{ort}}}} \right)^{1/\mu} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{arsh}(\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\mu \underline{\zeta}_{\text{ort}}})\right)} - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{arsh}(\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\mu \underline{\zeta}_{\text{ort}}})\right)} = E(\underline{\lambda}_{\text{ort}}) E(\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}}), \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\mu \operatorname{arsh}(\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}))} - 1}{\operatorname{sh}(\mu \operatorname{arsh}(\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}))} \right)^{1/\mu} \frac{\sqrt{1+(\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}})^2} - 1}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}} = E(\underline{\lambda}_{\text{ort}}) E(\mu \underline{\lambda}'_{\text{ort}}), \quad (3.10)$$

которая позволяет рассчитать зависимости $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$, $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ и $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$, $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ для пары ускоряемых частиц с произвольным соотношением масс.

4. Система уравнений для преобразования координат события при ускоренном разлёте частиц с близкими массами

Далее мы рассмотрим случай, когда массы ускоряемых частиц близки друг к другу. В приведённой ниже таблице μ есть отношение масс m_0 некоторых таких частиц. Рассматриваются только такие частицы, для которых можно найти частицу с противоположным электрическим зарядом $-e$ такой массы, что отношение масс $0,75 < \mu < 1,3$. Обозначения частиц взяты из [18] и расшифровываются следующим образом:

$K^*(892)$ – странный мезон; $m_0 = 892,1$ МэВ; $e = 0, \pm 1$,

p – нестранный барион (протон); $m_0 = 938,28$ МэВ; $e = +1$,

Σ^+ – барион со странностью $S = -1$; $m_0 = 1189,36$ МэВ; $e = +1$,

Σ^- – барион со странностью $S = -1$; $m_0 = 1197,34$ МэВ; $e = -1$,

Ξ^- – барион со странностью $S = -2$; $m_0 = 1321,32$ МэВ; $e = -1$,

$K^*(1430)$ – странный мезон; $m_0 = 1425$ МэВ; $e = 0, \pm 1$,

τ – лептон; $m_0 = 1784,2$ МэВ; $e = -1$,

D^\pm – очарованный нестранный мезон; $m_0 = 1869,4$ МэВ; $e = \pm 1$,

F^\pm – очарованный странный мезон; $m_0 = 1971$ МэВ; $e = \pm 1$,

Λ_c^+ – нестранный очарованный барион; $m_0 = 2282,2$ МэВ; $e = +1$.

Таблица

	$K^*(892)$	p	Σ^+	Σ^-	Ξ^-	$K^*(1430)$	τ	D^\pm	F^\pm	Λ_c^+
$K^*(892)$		1,0518								
p	0,9508			1,2761						
Σ^+				1,0067	1,1109					
Σ^-		0,7836	0,9933							
Ξ^-			0,9001			1,0785				
$K^*(1430)$					0,9272					
τ								1,048		
D^\pm							0,9544		1,0543	1,2208
F^\pm								0,9484		1,1579
Λ_c^+								0,8191	0,8636	

Из таблицы видно, что существуют, по крайней мере, 10 пар частиц с противоположными знаками зарядов и близкими массами, отношение которых отличается от единицы в самом худшем случае не более чем на 28%.

В случае, когда $\mu = 1$ система уравнений (3.8, 3.9, 3.10) упрощается:

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} = \underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}})^2} - 1}{\underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}} = \sqrt{E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}})^2} - 1}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}} = \sqrt{E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}. \quad (4.3)$$

Решая уравнения (2) и (3) относительно $\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}$ и $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}$, получаем уравнения

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} = \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} = \frac{2\sqrt{E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}}{1 - E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}. \quad (4.4)$$

Обсудим эти уравнения. Первое уравнение, которое следует из (4)

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \frac{2\sqrt{E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}}{1 - E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})} \exp \underline{\zeta}'_{\text{ort}} \quad (4.5)$$

является трансцендентным уравнением относительно $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$. Однако построить поверхность, задаваемую функцией $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ можно не решая это уравнение, а используя вытекающую из него явную зависимость

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\lambda}'_{\text{ort}}) = \ln \underline{\lambda}_{\text{ort}} - \ln \frac{2\sqrt{E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}}{1 - E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}. \quad (4.6)$$

Эта явная зависимость позволяет построить поверхность $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$, заданную в неявном виде. Действительно, построив поверхность, описываемую функцией $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\lambda}'_{\text{ort}})$ и, затем, считая $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ независимой переменной, получим поверхность задаваемую функцией $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ и изображённую на рис.4 для большей ясности в двух ракурсах.

Второе уравнение, которое следует из (4)

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{2\sqrt{E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}}{1 - E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})} \exp(-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}) \quad (4.7)$$

также является трансцендентным уравнением, но уже относительно $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$. Вытекающая из него явная зависимость

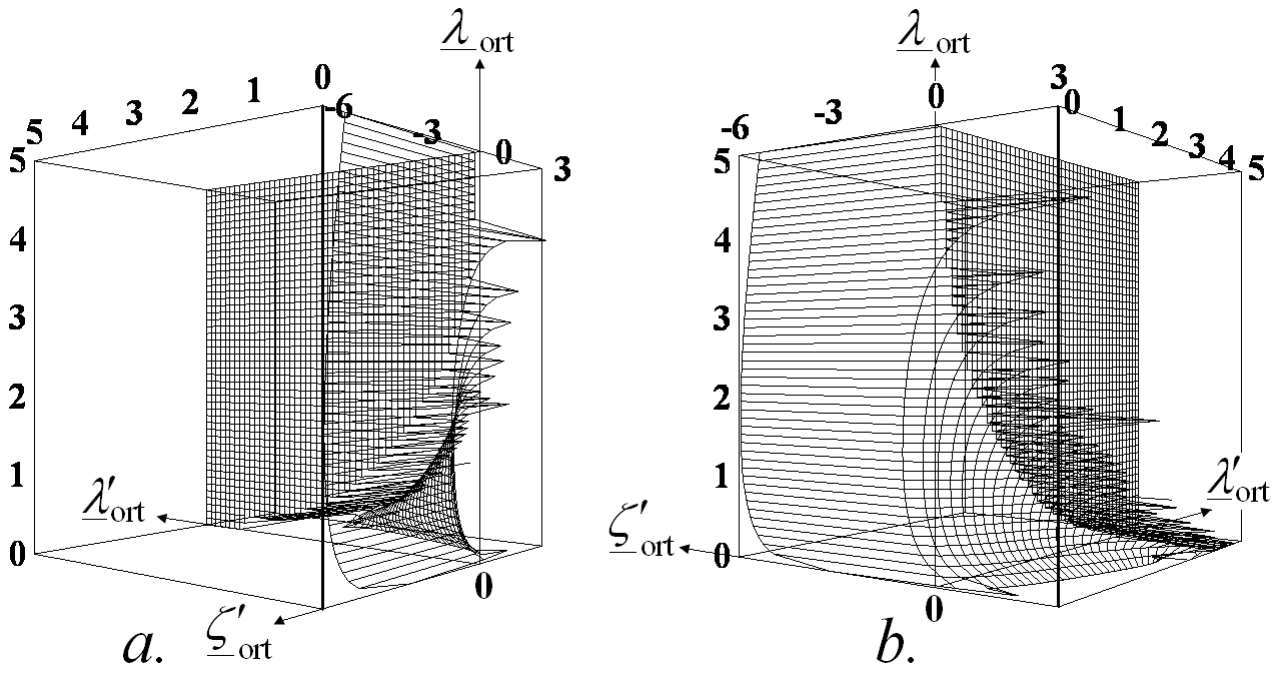


Рис.4. Поверхность, задаваемая функцией $\lambda_{ort}(\lambda'_{ort}, \zeta'_{ort})$, изображённая в двух ракурсах.

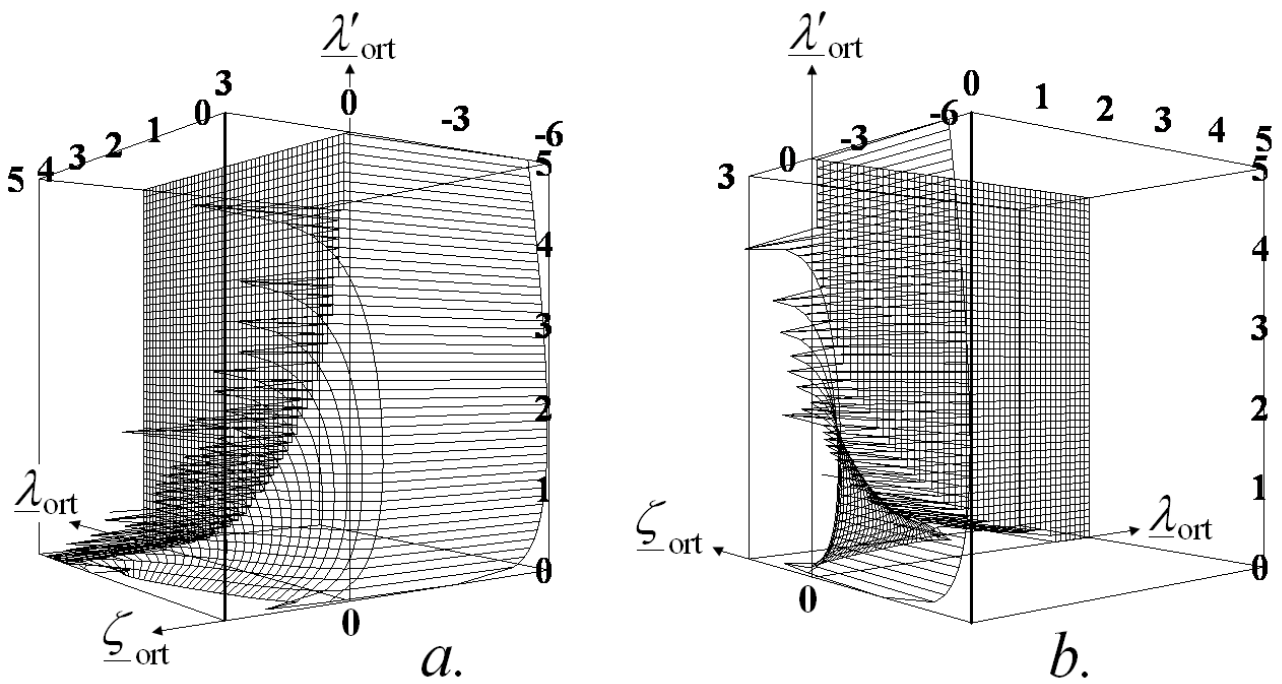


Рис.5. Поверхность, задаваемая функцией $\lambda'_{ort}(\lambda_{ort}, \zeta_{ort})$, изображённая в двух ракурсах.

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\lambda}'_{\text{ort}}) = -\ln \underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \ln \frac{2\sqrt{E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}}{1 - E(\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}, \quad (4.8)$$

также позволяет построить теперь уже поверхность $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$, не прибегая к решению трансцендентного уравнения. Поверхность, задаваемая функцией $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$, изображена в двух ракурсах на рис.5.

Отметим, что из уравнений (5) и (7) следует следующее свойство функций $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ и $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$: $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}}) = \underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, -\underline{\zeta}'_{\text{ort}})$.

Из рис.4 и рис.5 видно, что зависимости $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ и $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ неоднозначны. Поясним, отчего это происходит. Для простоты рассмотрим событие E_1 такое, что в ускоряемой вверх системе отсчёта его пространственная координата равна нулю ($\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(1) = 0$). Это означает, что точка E_1 риманова пространства событий, отвечающая рассматриваемому событию, лежит на выходящей из начала координат траектории луча эквивалентной волны ускоряемой вверх моды. Временная координата этой точки в системе отсчёта, связанной с ускоряемой вверх модой $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(1)$, а координаты в системе отсчёта, связанной с ускоряемой вниз модой, $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(1)$ и $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(1)$, рис.6.

Фазовая кривая эквивалентной волны ускоряемой вниз моды, пересекающая упомянутую траекторию в точке E_1 , выпуклостью направлена в противоположную сторону по отношению к этой траектории. Поэтому она пересечется с ней в некоторой другой точке E_2 . Эта точка имеет такие же координаты в системе отсчёта, связанной с ускоряемой вверх модой $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(2) = \underline{\lambda}'_{\text{ort}}(1)$, $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(2) = \underline{\zeta}'_{\text{ort}}(1) = 0$, но координаты в системе отсчёта, связанной с ускоряемой вниз модой $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(2) \neq \underline{\lambda}_{\text{ort}}(1)$, $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(2) \neq \underline{\zeta}_{\text{ort}}(1)$, рис.6. Следовательно, точке с координатами $(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}} = 0)$ будут отвечать два значения координаты $\underline{\lambda}_{\text{ort}}$: $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(1) \neq \underline{\lambda}_{\text{ort}}(2)$ и два значения координаты $\underline{\zeta}_{\text{ort}}$: $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(1) \neq \underline{\zeta}_{\text{ort}}(2)$.

Аналогичные рассуждения можно провести и относительно событий, лежащих на выходящей из начала координат траектории луча эквивалентной волны ускоряемой вниз моды и показать, что точке с координатами $(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}} = 0)$

будут отвечать два значения координаты $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} : \underline{\lambda}'_{\text{ort}}^{(1)} \neq \underline{\lambda}'_{\text{ort}}^{(2)}$ и два значения координаты $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} : \underline{\zeta}'_{\text{ort}}^{(1)} \neq \underline{\zeta}'_{\text{ort}}^{(2)}$.

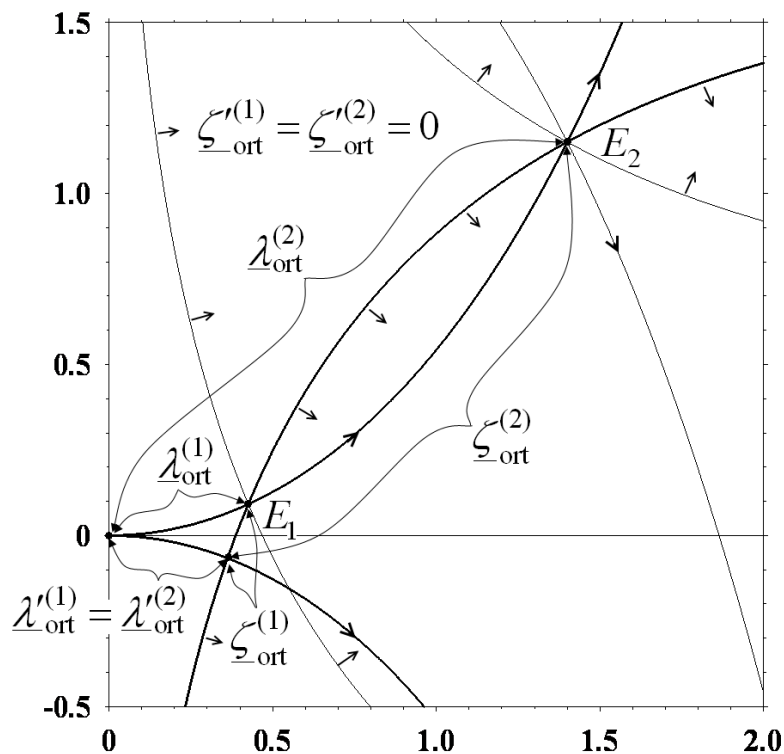


Рис.6. Иллюстрация к объяснению двужначности значений $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ и $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$, а также $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$.

Проведённых рассуждений вполне достаточно, чтобы понять, откуда следует неоднозначность преобразований, описываемых функциями $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$, $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ и $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$, $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$. Это неоднозначность означает, что два события, произошедшие в системе отсчёта связанной с ускоряемой вниз модой, будут восприниматься как одно событие в системе отсчёта, связанной с ускоряемой вверх модой. И, наоборот, событие, произошедшее в системе отсчёта, связанной с ускоряемой вверх модой, в системе отсчёта, связанной с ускоряемой вниз модой может представлять собой два события, произошедшие в разных точках пространства и в разное время.

Чтобы проиллюстрировать преобразования $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ и $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ обратимся снова к уравнениям (5) и (7). Мы видели, что для построения поверхностей, описываемых функциями $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ и

$\lambda_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}})$, нет необходимости решать эти уравнения. Однако, для построения поверхностей, описываемых функциями $\zeta'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}})$ и $\zeta_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}})$, без решения этих уравнений не обойтись. Как отмечалось выше $\lambda'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}}) = \lambda_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, -\zeta'_{\text{ort}})$. Поэтому достаточно рассчитать только одну из указанных функций. Для получения другой достаточно произвести замены переменных $\lambda_{\text{ort}} \Leftrightarrow \lambda'_{\text{ort}}$ и $\zeta_{\text{ort}} \Leftrightarrow -\zeta'_{\text{ort}}$. Используя (1), получаем следующее выражение для $\zeta'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}})$:

$$\zeta'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}}) = \ln \frac{\lambda_{\text{ort}} e^{-\zeta_{\text{ort}}}}{\lambda'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}})} = \ln \lambda_{\text{ort}} - \zeta_{\text{ort}} - \ln \lambda'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}}),$$

которое перепишем в виде

$$\zeta'_{\text{ort}} = \ln \left(\frac{\lambda_{\text{ort}}}{2} \frac{1 - E(\lambda_{\text{ort}})E(\lambda'_{\text{ort}})}{\sqrt{E(\lambda_{\text{ort}})E(\lambda'_{\text{ort}})}} \right) \quad (4.9)$$

где $\lambda'_{\text{ort}} = \lambda'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}})$. Эта запись по виду напоминает формулу (35) из [1] (см. также формулу (3.2) из [2]).

Аналогично и для $\zeta_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}})$:

$$\zeta_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}}) = -\ln \frac{\lambda'_{\text{ort}} e^{\zeta'_{\text{ort}}}}{\lambda_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}})} = \ln \lambda_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}}) - \ln \lambda'_{\text{ort}} - \zeta'_{\text{ort}}$$

или

$$\zeta_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}}) = -\ln \left(\frac{\lambda'_{\text{ort}}}{2} \frac{1 - E(\lambda'_{\text{ort}})E(\lambda_{\text{ort}})}{\sqrt{E(\lambda'_{\text{ort}})E(\lambda_{\text{ort}})}} \right), \quad (4.10)$$

где $\lambda_{\text{ort}} = \lambda_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}})$. Сравнивая (9) и (10), легко убедиться в том, что они переходят друг в друга при замене $\lambda_{\text{ort}} \Leftrightarrow \lambda'_{\text{ort}}$ и $\zeta_{\text{ort}} \Leftrightarrow -\zeta'_{\text{ort}}$.

На рис.7 показана поверхность, задаваемая функцией $\zeta'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}})$. Для сравнения на рис.8 показаны поверхности, задаваемые преобразованиями Лоренца

$$\lambda'_{\text{ort}} = \frac{\lambda_{\text{ort}} - \zeta_{\text{ort}} \sin \Theta}{\cos \Theta}, \quad \zeta'_{\text{ort}} = \frac{\zeta_{\text{ort}} - \lambda_{\text{ort}} \sin \Theta}{\cos \Theta}, \quad (4.11)$$

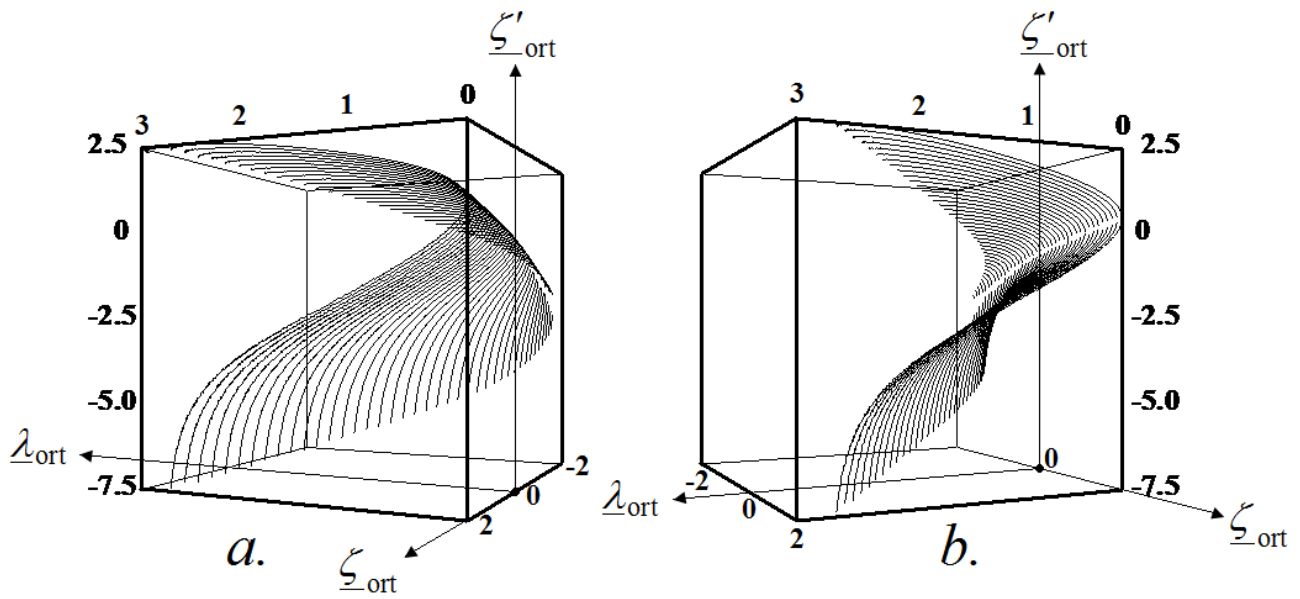


Рис.7. Поверхность, задаваемая функцией $\zeta'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}})$, изображённая в двух ракурсах.

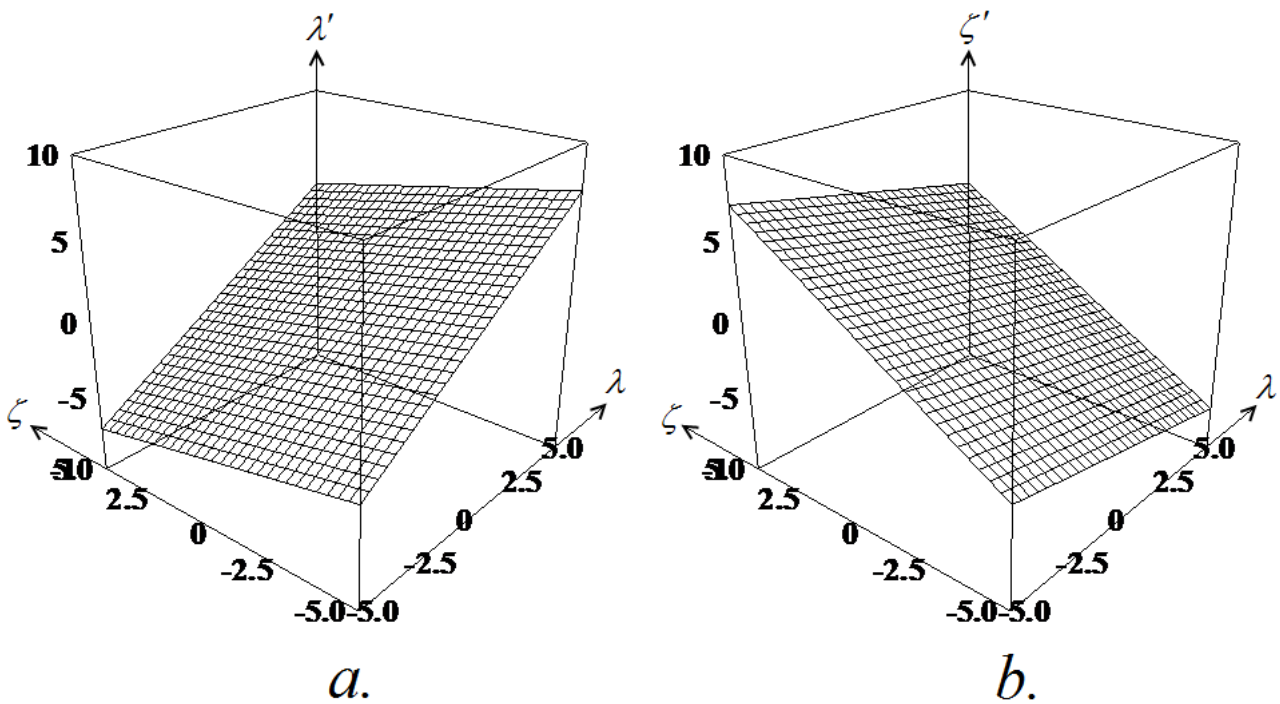


Рис.8. Поверхности, задаваемые функцией $\lambda'_{\text{ort}} = (\lambda_{\text{ort}} - \zeta_{\text{ort}} \sin \Theta) / \cos \Theta$ a) и $\zeta'_{\text{ort}} = (\zeta_{\text{ort}} - \lambda_{\text{ort}} \sin \Theta) / \cos \Theta$ b).

где $\lambda_{\text{ort}} = wct$, $\lambda'_{\text{ort}} = wct'$, $\zeta_{\text{ort}} = wz$, $\zeta'_{\text{ort}} = wz'$ - безразмерные время и пространственная координата, w - нормировочная постоянная, $\sin \Theta = v/c$, v - скорость движения вдоль оси z .

В заключение этого раздела упомянем случай, когда начала систем координат первоначально находятся в разных точках пространства $z^{(-)}(0)$ и $z^{(+)}(0)$, рис.9.

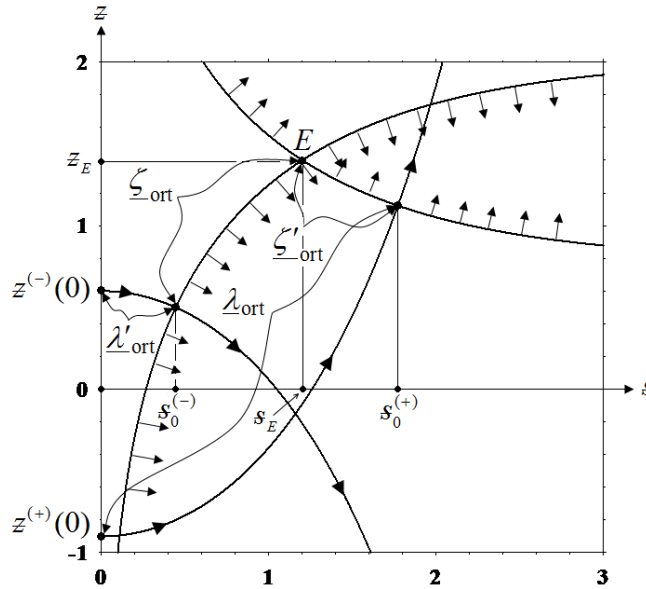


Рис.9. Иллюстрация к определению контравариантных координат в случае, когда начала систем координат первоначально находятся в разных точках пространства.

В этом случае уравнения (4) принимают вид

$$\underline{\lambda}_{ort} e^{-\underline{\zeta}'_{ort}} = \underline{\lambda}'_{ort} e^{\underline{\zeta}_{ort}} = \frac{2\sqrt{E(\underline{\lambda}_{ort})E(\underline{\lambda}'_{ort})\exp(z^{(+)}(0) - z^{(-)}(0))}}{1 - E(\underline{\lambda}_{ort})E(\underline{\lambda}'_{ort})\exp(z^{(+)}(0) - z^{(-)}(0))}.$$

5. Системы отсчёта, связанные с частицей и её античастицей при их ускоренном разлёте и система уравнений для преобразования координат события при переходе между этими системами отсчёта

Выясним сначала, каким образом в рассматриваемой модели пространства возникает представление о частицах и античастицах. Для этого рассмотрим прямую и обратную волны, которые образуют моду резонатора с отличным от нуля продольным индексом и нулевым поперечным индексом (рассеянием волн на зеркалах резонатора для долгоживущих частиц пренебрегаем). Это рассмотрение можно проводить двояким образом.

Зафиксируем направление оси дополнительного измерения. На рис.10 положительное направление этой оси выбрано слева направо. Примем сначала за прямую волну ту, которая распространяется вдоль положительного направления

оси дополнительного измерения, рис.10,*a*. Рассматриваем сначала случай, когда она распространяется точно вдоль оси, что соответствует нулевому значению поперечного индекса моды. Тогда эта волна описывается выражением

$$\exp i(k_0s - k_0l'), \quad (5.1)$$

где $l' = ct'$. Обратная волна будет описываться выражением

$$\exp i(-k_0s - k_0l'). \quad (5.2)$$

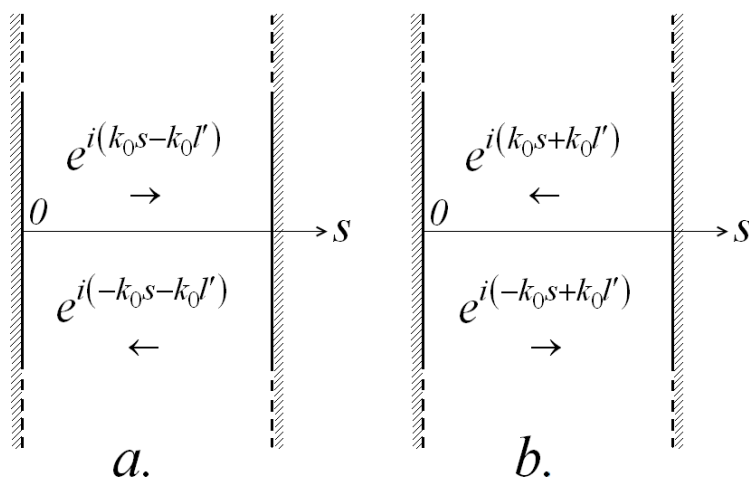


Рис.10. Иллюстрация к разным способам выбора прямой и обратной волн, образующих моду резонатора с отличным от нуля продольным индексом.

Суперпозиция этих волн, которую обозначим как $\psi_{(+)}$, образует покоящуюся моду резонатора с продольным индексом $q = k_0L / \pi$, где L – расстояние между зеркалами резонатора:

$$\psi_{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2L}} (\exp i(k_0s - k_0l') + \exp i(-k_0s - k_0l')) = \sqrt{\frac{2}{L}} \exp(-ik_0l') \cos(k_0s), \quad (5.3)$$

при этом $|\psi_{(+)}|^2 = \frac{2}{L} \cos^2(k_0s)$ и $\int_0^L |\psi_{(+)}|^2 ds = 1$.

В евклидовом пространстве событий [11, 12] эквивалентная волна моды, которую образуют эти волны, как говорилось выше, распространяется в положительном направлении оси дополнительного измерения и отвечает положительным решениям уравнений квантовой электродинамики, рис.11,*a*.

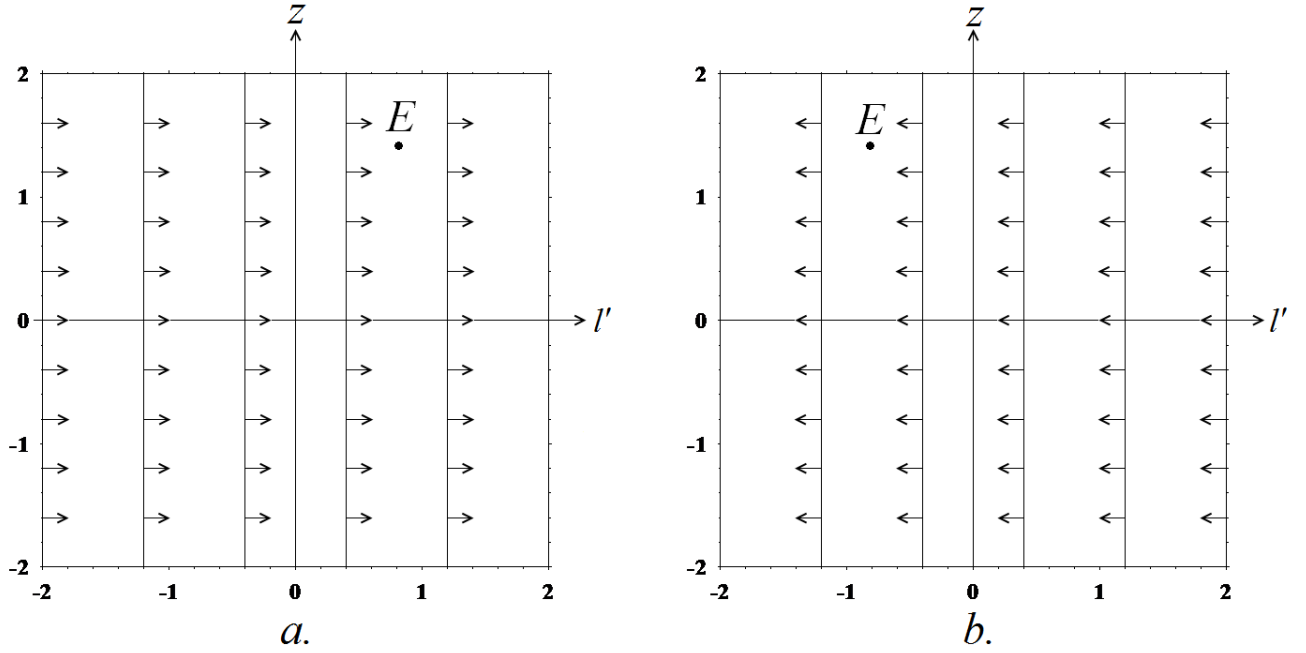


Рис.11. Изображение эквивалентной волны моды $\psi_{(+)}$ а) и моды $\psi_{(-)}$ б) в евклидовом пространстве событий.

Но с равным основанием мы можем за прямую волну выбрать волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси s , рис.10,б и записать её в виде

$$\exp i(k_0 s + k_0 l'). \quad (5.4)$$

Тогда обратная волна запишется в виде

$$\exp i(-k_0 s + k_0 l'). \quad (5.5)$$

Поскольку волна (1) совпадает с волной (5), а волна (4) – с волной (2), то для того, чтобы эти пары волн описывали разные состояния волнового поля, отвечающие двум модам (частицам) необходимо, чтобы вторая волна каждой пары была сдвинута по фазе относительно первой волны на $\pm \pi/2$.

Тогда суперпозиция прямой (4) и обратной (5) волн, которую обозначим как $\psi_{(-)}$, образует моду с тем же продольным индексом, что и суперпозиция $\psi_{(+)}$, но отличается от неё формой записи:

$$\begin{aligned} \psi_{(-)} &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \left(\exp i \left(k_0 s + k_0 l' \pm \frac{\pi}{2} \right) + \exp i \left(-k_0 s + k_0 l' \pm \frac{\pi}{2} \right) \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \exp \left(i k_0 l' \pm \frac{\pi}{2} \right) \cos(k_0 s); \quad |\psi_{(-)}|^2 = \frac{2}{L} \cos^2(k_0 s), \quad \int_0^L |\psi_{(-)}|^2 ds = 1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

В евклидовом пространстве событий [11, 12] эквивалентная волна моды, которую образуют эти волны, распространяется в отрицательном направлении оси дополнительного измерения и отвечает отрицательным решениям уравнений квантовой электродинамики, рис.11,*b*.

Одно и то же событие с помощью эквивалентных волн этих мод изображается в разных полуплоскостях, так как временная координата события определяется расстоянием, которая проходит волна до точки E (эквивалентная волна моды $\psi_{(-)}$ распространяется в отрицательном направлении оси l'). Чтобы совместить точки, расположенные симметрично относительно точки $l' = 0$, надо для моды $\psi_{(-)}$ произвести операцию обращения времени. Тогда эквивалентные волны обеих мод будут выглядеть так, как показано на рис.12.

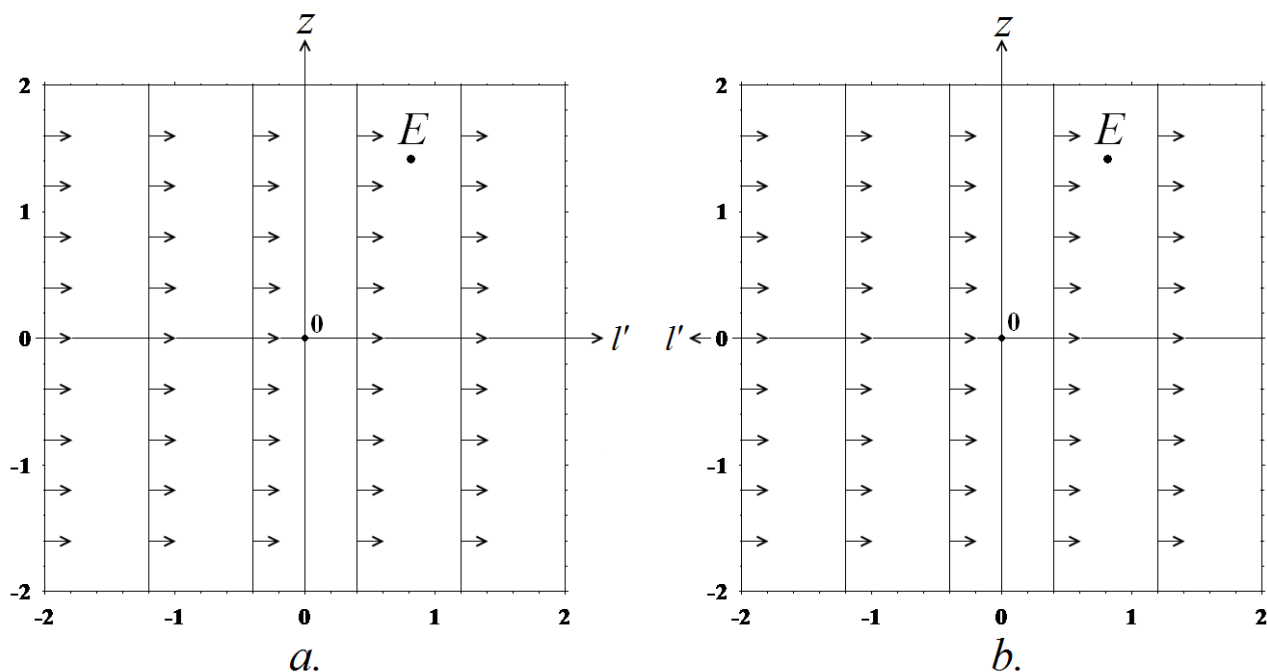


Рис.12. Изображение эквивалентной волны моды, отвечающей положительным решениям уравнений квантовой электродинамики *a*) и эквивалентной волны моды, отвечающей отрицательным решениям уравнений квантовой электродинамики после обращения времени *b*).

Так как координаты события E на рис.12,*a* и 12,*b* преобразуются как $z \rightarrow z$, $l' = ct' \rightarrow -l'$, то интенсивность суперпозиции мод равняется сумме интенсивностей каждой из них, то есть $|\psi_{(+)} + \psi_{(-)}|^2 = |\psi_{(+)}|^2 + |\psi_{(-)}|^2$. Действительно, имеем

$$|\psi_{(+)} + \psi_{(-)}|^2 = \frac{2}{L} \cos^2(k_0 s) |1 + e^{\pm i\pi/2}|^2 = \frac{4}{L} \cos^2(k_0 s) = |\psi_{(+)}|^2 + |\psi_{(-)}|^2,$$

а $\int_0^L |\psi_{(+)} + \psi_{(-)}|^2 ds = 2$, что соответствует уже двум частицам.

В случае если моды движутся вдоль оси z со скоростью $v = c \sin \Theta$, то (4.11) $l' = \frac{l - z \sin \Theta}{\cos \Theta}$. При этом из условия резонанса следует, что $k_0 = k_l \cos \Theta$.

Тогда выражения для $\psi_{(+)}$ и $\psi_{(-)}$ принимают вид:

$$\psi_{(+)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \exp(-i(k_l l - k_z z)) \cos(k_0 s), \quad (5.7)$$

$$\psi_{(-)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \exp(i(k_l l - k_z z \pm \pi/2)) \cos(k_0 s). \quad (5.8)$$

Как известно из квантовой электродинамики выражения такого вида без множителя, зависящего от координаты дополнительного измерения, описывают волновые функции частицы и античастицы.

В евклидовом пространстве событий фазовые поверхности и направления лучей эквивалентных волн мод, описываемых этими функциями, изображаются так, как показано на рис.13.

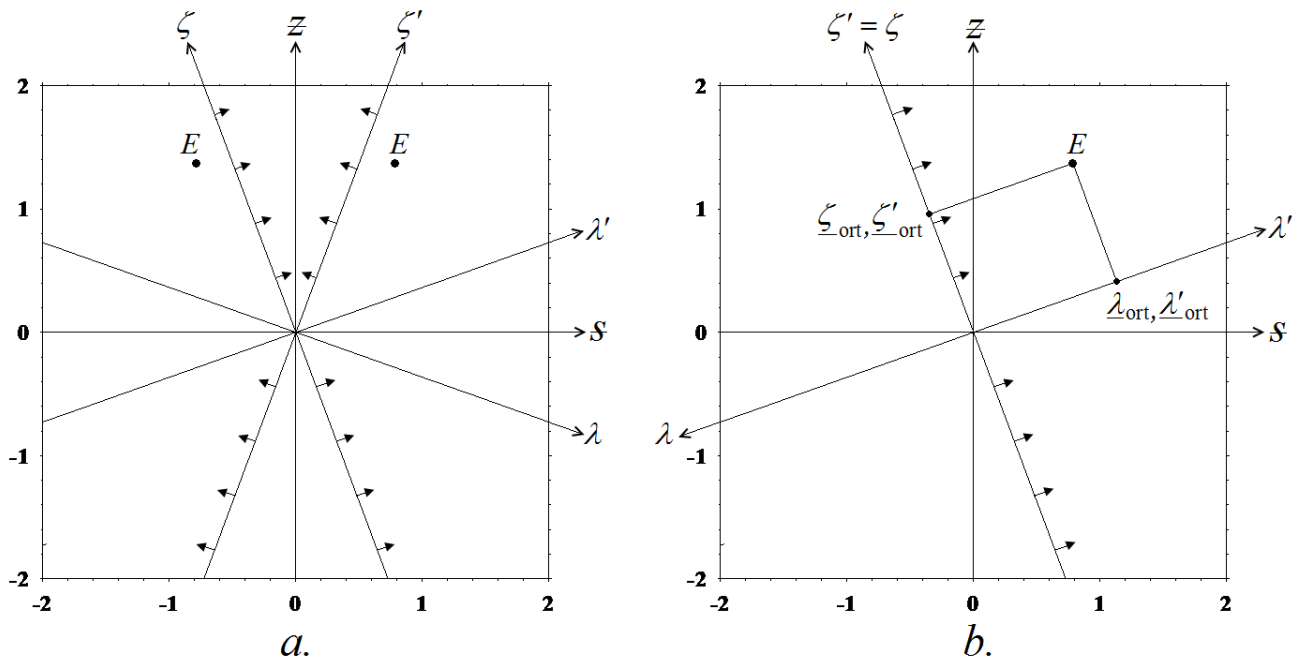


Рис.13. Координатные линии систем отсчёта, связанных с частицей и античастицей, которые движутся равномерно и прямолинейно в одном направлении, до обращения времени а) и после обращения времени б).

Из рисунка видно, что $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = -\underline{\lambda}_{\text{ort}}$, $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \underline{\zeta}_{\text{ort}}$. Детерминант матрицы этого преобразования $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$.

В случае если античастица движется в направлении противоположном движению частицы, то выражение для её волновой функции имеет вид

$$\psi_{(-)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \exp(i(k_l l + k_z z \pm \pi / 2)) \cos(k_0 s). \quad (5.9)$$

В этом случае в евклидовом пространстве событий фазовые поверхности и направления лучей эквивалентных волн мод, описываемых функциями (7) и (9), изображаются так, как показано на рис.14.

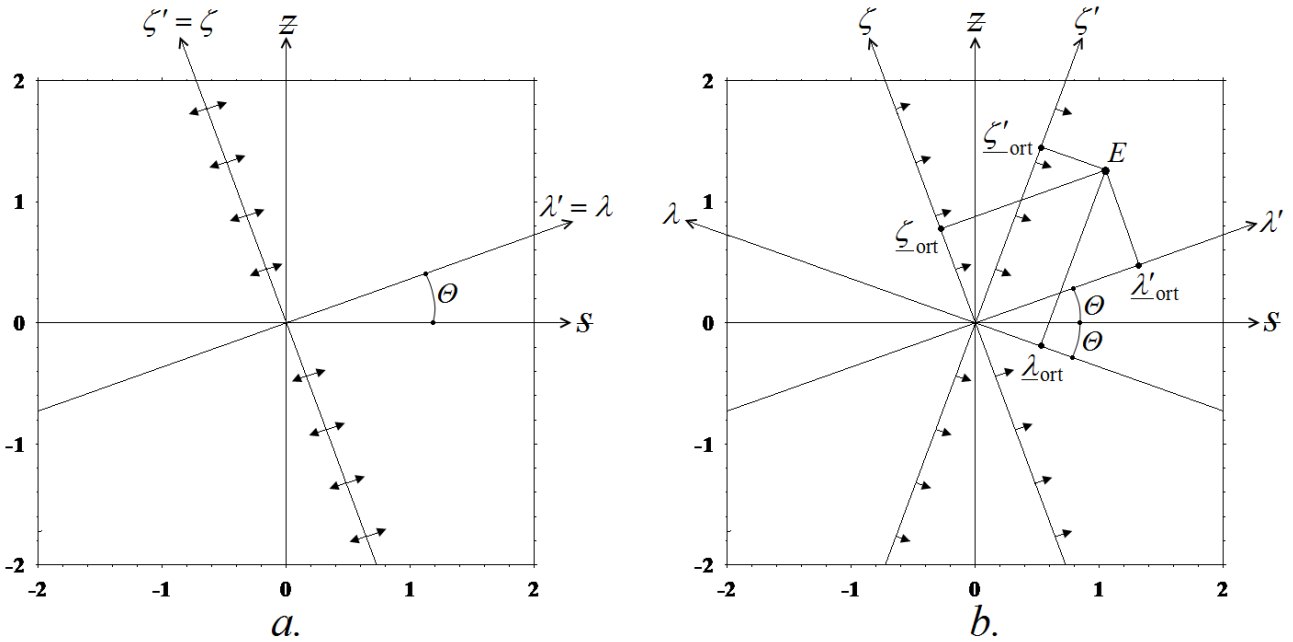


Рис.14. Координатные линии систем отсчёта, связанных с частицей и античастицей, которые движутся равномерно и прямолинейно в противоположных направлениях, до обращения времени *a*) и после обращения времени *b*).

Из рис.14 видно, что

$$-\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \underline{\lambda}'_{\text{ort}} \cos(2\theta) - \underline{\zeta}_{\text{ort}} \sin(2\theta),$$

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \underline{\zeta}'_{\text{ort}} \cos(2\theta) + \underline{\lambda}_{\text{ort}} \sin(2\theta).$$

Отсюда получаем следующие преобразования координат

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = -\frac{1}{\cos(2\theta)} \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \text{tg}(2\theta) \underline{\zeta}_{\text{ort}}, \quad (5.10)$$

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = -\text{tg}(2\Theta)\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \frac{1}{\cos(2\Theta)}\underline{\zeta}_{\text{ort}}. \quad (5.11)$$

Детерминант матрицы преобразования, так же как и в предыдущем случае,

равен минус единице:
$$\left\| \begin{array}{cc} -\frac{1}{\cos(2\Theta)} & \text{tg}(2\Theta) \\ -\text{tg}(2\Theta) & \frac{1}{\cos(2\Theta)} \end{array} \right\| = -\frac{1}{\cos^2(2\Theta)} + \text{tg}^2(2\Theta) = -1.$$

Отметим, что в выражениях (7) и (8) фигурирует только координатная часть волновых функций. Именно эта часть нам важна для вывода преобразований пространства-времени при ускоренном разлёте частицы и античастицы. Однако для полноты картины запишем выражения для $\psi_{(+)}$ и $\psi_{(-)}$ со спинорной частью. Как показано в [19], используя представление о евклидовом пространстве событий, выражения для биспиноров Дирака $\psi_{(+)}$ и $\psi_{(-)}$, записанные в стандартном представлении, можно представить в весьма наглядном и простом виде

$$\begin{aligned} \psi_{(+),1/2} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{\Theta}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(k_l l - k_z z)} f(k_0 s), & \psi_{(+),-1/2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \frac{\Theta}{2} \\ 0 \\ -\sin \frac{\Theta}{2} \end{pmatrix} e^{-i(k_l l - k_z z)} f(k_0 s), \\ \psi_{(-),1/2} &= \begin{pmatrix} \sin \frac{\Theta}{2} \\ 0 \\ \cos \frac{\Theta}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(k_l l - k_z z) + i\frac{\pi}{2}} f(k_0 s), & \psi_{(-),-1/2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \frac{\Theta}{2} \\ 0 \\ \cos \frac{\Theta}{2} \end{pmatrix} e^{i(k_l l - k_z z) - i\frac{\pi}{2}} f(k_0 s), \end{aligned}$$

где посредством $f(k_0 s)$ обозначена функция, описывающая структуру поля вдоль оси дополнительного измерения.

В простейшей модели 4-мерного пространства, компактифицированного до 3 измерений, а именно модели в которой компактификация осуществлена с помощью плоскопараллельного резонатора, то есть иными словами с помощью бесконечно глубокой потенциальной ямы, $f(k_0 s) = \sqrt{2/L} \cos(k_0 s)$. Понятно, что в моделях 3-мерного пространства эта функция не фигурирует. Однако аргумент этой функции, как мы сейчас увидим, несёт большую смысловую нагрузку.

Предположим, что при отражении волны от левого зеркала резонатора происходит запаздывание по фазе на величину ϕ . Тогда

$$\begin{aligned}\psi_{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2L}} (\exp i(k_0 s - (k_l l - k_z z)) + \exp i(-k_0 s - (k_l l - k_z z) + \phi)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp i(-(k_l l - k_z z)) (\exp i(k_0 s) + \exp i(-k_0 s + \phi)) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \exp \left(-i \left(\left(k_l l - \frac{\phi}{2} \right) - k_z z \right) \right) \cos \left(k_0 s - \frac{\phi}{2} \right),\end{aligned}\quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}\psi_{(-)} &= \frac{1}{\sqrt{2L}} (\exp i(k_0 s + (k_l l - k_z z) + \phi) + \exp i(-k_0 s + k_l l)) \exp(\pm i\pi/2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2L}} (\exp i(k_l l - k_z z) (\exp i(k_0 s + \phi) + \exp(-ik_0 s))) \exp(\pm i\pi/2) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \exp i \left(\left(k_l l + \frac{\phi}{2} \right) - k_z z \right) \exp \left(\pm i \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(k_0 s + \frac{\phi}{2} \right).\end{aligned}\quad (5.13)$$

Если ϕ зависит от l и z , то k_l и k_z будут функциями l и z . Так как L чрезвычайно мало, то ломаные траектории лучей в широкой области значений ускорений можно заменить плавными кривыми, а k_l и k_z со своими производными будут непрерывными функциями l и z . При этом волновые функции можно записать в виде

$$\psi_{(+)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \exp \left(-i \left(\int \left(k_l - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dl} \right) dl - \int k_z dz \right) \right) \cos \left(k_0 s - \frac{\phi}{2} \right), \quad (5.14)$$

$$\psi_{(-)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \exp i \left(\int \left(k_l + \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dl} \right) dl - \int k_z dz \right) \exp \left(\pm i \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(k_0 s + \frac{\phi}{2} \right). \quad (5.15)$$

Отсюда видно, что одна и та же зависимость ϕ от l и z приводит к противоположному поведению волновых полей частицы и античастицы. В самом деле, выражение под знаком косинуса, взятое с обратным знаком, представляет собой действие S , делённое на постоянную Планка. Для частицы

$$-k_0 s + \frac{\phi}{2} = \frac{-m_0 c s + \frac{\hbar}{2} \phi}{\hbar} = \frac{S^{(+)}}{\hbar}, \text{ а для античастицы } -k_0 s - \frac{\phi}{2} = \frac{-m_0 c s - \frac{\hbar}{2} \phi}{\hbar} = \frac{S^{(-)}}{\hbar}.$$

Так как из условия резонанса следует, что $s = l' = \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{1 - \sin^2 \Theta(l)} dl$, где $\sin \Theta = \frac{v}{c}$,

то, представив ϕ в виде $\phi = \int_{l_1}^{l_2} \frac{d\phi}{dl} dl$, выражения для $S^{(\pm)}$ запишем в виде:

$$S^{(\pm)} = \hbar \int_{l_1}^{l_2} \left(-k_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \pm \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dl} \right) dl = \int_{t_1}^{t_2} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \pm \frac{\hbar}{2} \frac{d\phi}{dt} \right) dt, \quad (5.16)$$

где подынтегральные выражения, как это следует из определения [14]

$$\mathcal{L}^{(\pm)} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \pm \frac{\hbar}{2} \frac{d\phi}{dt} \quad (5.17)$$

есть функции Лагранжа. Таким образом, мы видим, что метод Лагранжа и идея дополнительного пространственного измерения оказываются связанными друг с другом.

Сравнивая $\mathcal{L}^{(\pm)}$ с функцией Лагранжа для заряженной частицы в электрическом поле $\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi$, где e - заряд частицы в используемой системе единиц, φ - потенциал электрического поля, получаем соотношение

$$\varphi = \frac{\hbar}{2|e|} \frac{d\phi}{dt}, \quad (5.18)$$

в котором величина $\hbar/(2|e|)$ представляет собой коэффициент пропорциональности между потенциалом электрического поля и скоростью изменения фазы волны при её отражении от зеркала резонатора. При этом, так как для частицы

$e\varphi = -\frac{\hbar}{2} \frac{d\phi}{dt}$ и, следовательно, $\frac{e}{|e|} = -1$, а для её античастицы $e\varphi = \frac{\hbar}{2} \frac{d\phi}{dt}$, и, следо-

вательно, $\frac{e}{|e|} = 1$, то видим, что заряды частицы и её античастицы противоположны друг другу.

Зная функцию Лагранжа, стандартным образом [14] получаем уравнение движения заряженной частицы в электрическом поле

$$\frac{dk_z}{dl} = -\frac{e}{\hbar c} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5.19)$$

Так как $k_z = k_0 \operatorname{tg} \Theta$, то приведём его к виду, используемому в работах [1, 2]

$$k_0 \frac{d \operatorname{tg} \Theta}{dl} = F, \quad (5.20)$$

где $F = \frac{f}{\hbar c}$, f - сила, действующая на частицу. Это есть уравнение релятивистской механики в форме, наиболее удобной для его анализа в евклидовом пространстве событий [1, 15]. Оно превращается в уравнение (1.2), когда вместо l используется проекция события на ось дополнительного измерения. Как мы видели выше в случае электрического поля $F = \frac{f}{\hbar c} = -\frac{e}{\hbar c} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Из этого уравнения следует, что лучи и фазовые поверхности эквивалентной волны моды ассоциируемой с частицей и античастицей искривляются в противоположных направлениях, что соответствует их ускорению в противоположных направлениях. Если частица и античастица ускоряются в одном направлении (случай не электрического поля), то координатные линии систем отсчёта, связанных с частицей и античастицей, показаны на рис.15.

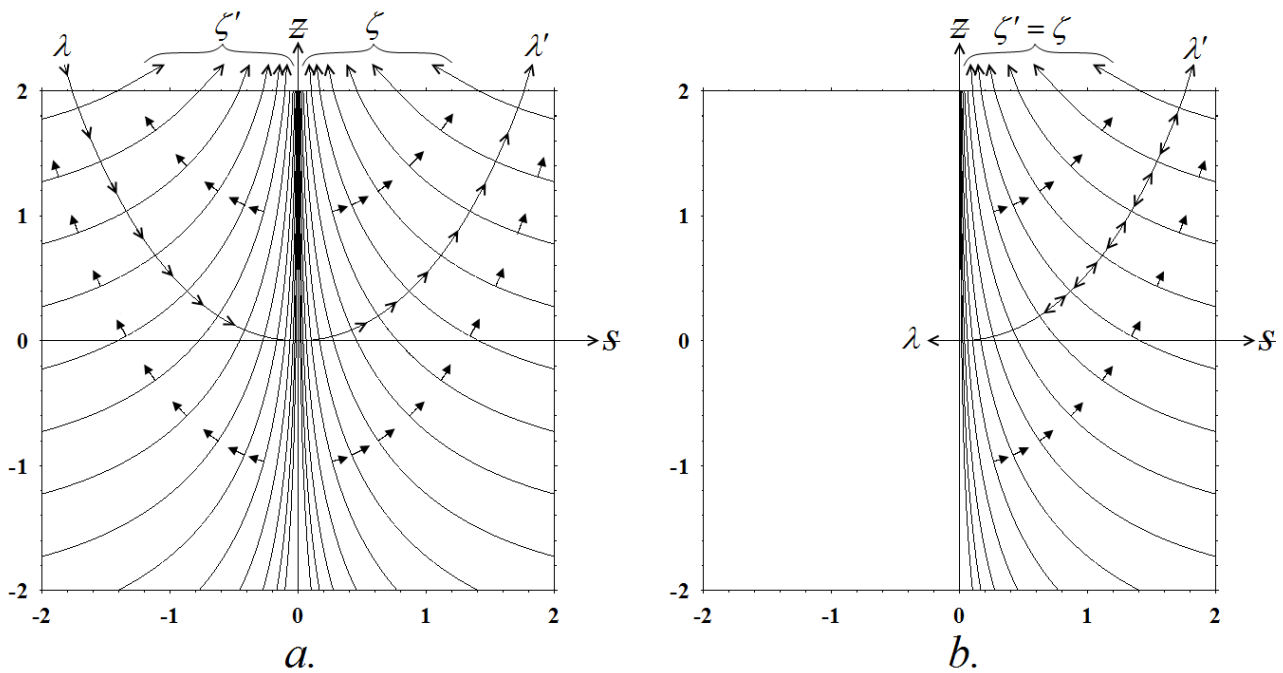


Рис.15. Координатные линии систем отсчёта, связанных с частицей и античастицей, которые ускоряются в одном направлении, до обращения времени *a*) и после обращения времени *b*).

При ускорении в противоположных направлениях (случай электрического поля) координатные линии систем отсчёта, связанных с частицей и античастицей, показаны на рис.16.

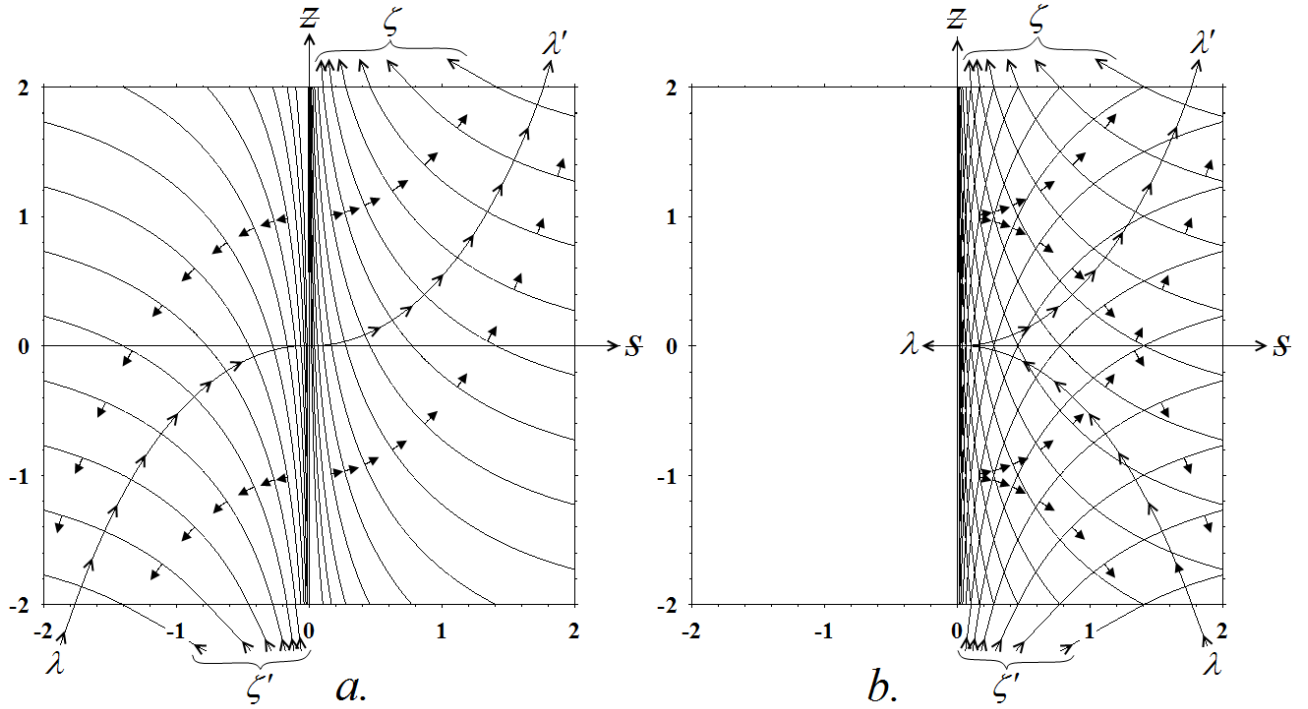


Рис.16. Координатные линии систем отсчёта, связанных с частицей и античастицей, которые ускоряются в противоположных направлениях, до обращения времени *a)* и после обращения времени *b)*.

6. Система уравнений для преобразования пространственно-временных координат события при ускоренном разлёте частицы и античастицы

Итак, на основании вышеизложенного изобразим ковариантные координаты события E , определяемые как ортогональные проекции на первоначальные координатные линии, так как показано на рис.17.

Проводя рассуждения такие же, как в п. 3 настоящей работы с учётом того, что

$$\text{sh } s_E = \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}}} = -\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}, \quad (6.1)$$

получаем следующую систему трансцендентных уравнений

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}}} = -\underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} = \frac{2\sqrt{E(-\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}}{1 - E(-\underline{\lambda}_{\text{ort}})E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})}, \quad (6.2)$$

где в соответствии с определением функции $E(x)$ (см. формулы (3.4) и (3.5))

$$E(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}) = \frac{(\sqrt{1 + \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2} - 1) \exp(\sqrt{1 + \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2} - 1)}{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}}, \quad (6.3)$$

$$E(-\underline{\lambda}_{\text{ort}}) = -\frac{(\sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} - 1)\exp(\sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} - 1)}{\underline{\lambda}_{\text{ort}}}. \quad (6.4)$$

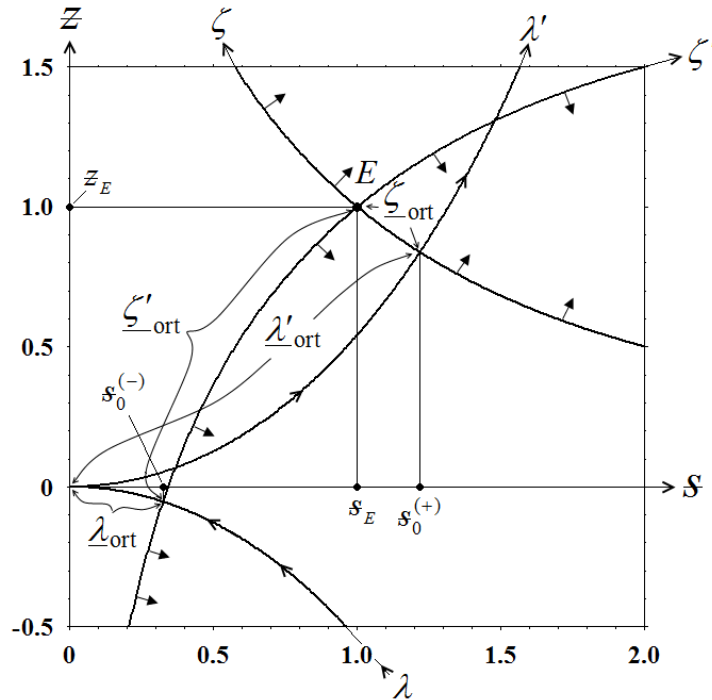


Рис.17. Ковариантные координаты события в случае ускоренного разлёта частицы и античастицы. Координаты события в системе отсчёта наблюдателя, связанного с античастицей помечены штрихами.

Решение этой системы для преобразования $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ проиллюстрировано рис.18, на котором изображена поверхность, задаваемая этим преобразованием.

7. Обсуждение результатов

Сравним результаты, полученные в настоящей работе, с результатами работы [20], в которой преобразования пространства-времени при прямолинейном равноускоренном разлёте двух частиц выводятся на основе следующих предположений.

Во-первых, предполагается, что преобразования имеют вид

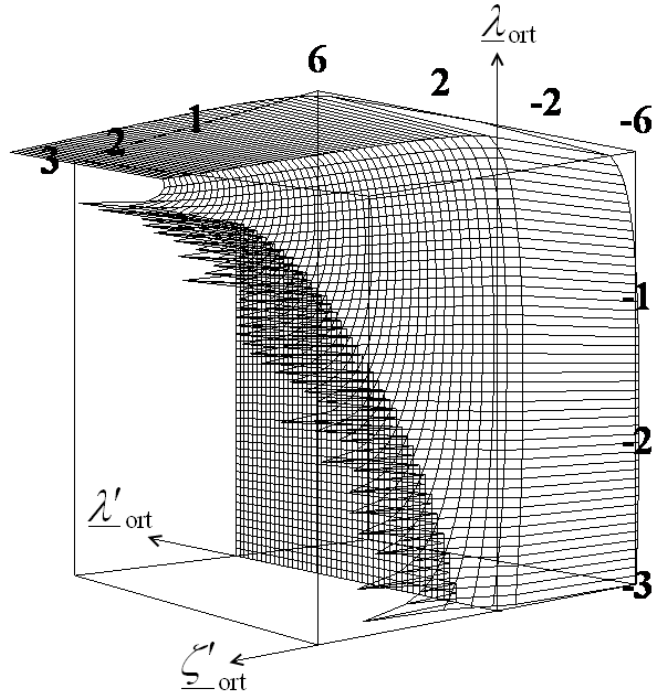


Рис.18. Поверхность, задаваемая функцией $\lambda_{\text{ort}}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}})$ в случае ускоренного разлёта частицы и её античастицы.

$$z' = a_1 z - a_2 t^2, \quad t' = \sqrt{-b_1 z + b_2 t^2}, \quad (7.1)$$

а фигурирующие в этих выражениях константы, могут быть определены из кинематических соображений. В [20] подчёркивается, что физических оснований для такой формы записи преобразований пока нет, и она имеет формальный смысл.

Во-вторых, с точки зрения кинематики, системы отсчёта, связанные с обеими частицами, эквивалентны и поэтому обратные преобразования должны иметь вид

$$z = a_1 z' + a_2 t'^2, \quad t = \sqrt{b_1 z' + b_2 t'^2}. \quad (7.2)$$

Отметим, что знаки в приведённых формулах противоположны знакам в аналогичных формулах работы [20], поскольку в настоящей работе мы связываем себя с системой отсчёта, ускоряемой в отрицательном направлении оси z , а не в положительном направлении, как в [20]. Величину ускорения каждой из систем, определяемую по действующей силе, будем обозначать так же как в [20] $a/2$.

В-третьих, предполагается, что для систем отсчёта, ускоряемых по отношению друг к другу, существует предельное ускорение A , а инвариантная функция образуется с помощью соотношений

$$z = \frac{1}{2} At^2 \text{ и } z' = \frac{1}{2} At'^2, \quad (7.3)$$

аналогичных соотношениям $z = ct$ и $z' = ct'$, из которых образуется интервал в случае относительного движения двух инерциальных систем отсчёта.

На основе этих предположений в [20] получены преобразования вида

$$z' = \frac{z - at^2 / 2}{\sqrt{1 - a^2 / A^2}}, \quad t'^2 = \frac{t^2 - 2az / A^2}{\sqrt{1 - a^2 / A^2}}. \quad (7.4)$$

Обратные преобразования имеют вид

$$z = \frac{z' + at'^2 / 2}{\sqrt{1 - a^2 / A^2}}, \quad t^2 = \frac{t'^2 + 2az' / A^2}{\sqrt{1 - a^2 / A^2}}. \quad (7.5)$$

В нормированных переменных настоящей работы эти преобразования записываются в виде

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \frac{\underline{\zeta}_{\text{ort}} - \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2}{\sqrt{1 - w^2 / W^2}}, \quad \underline{\lambda}'^2_{\text{ort}} = \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}}^2 - w\underline{\zeta}_{\text{ort}} / W^2}{\sqrt{1 - w^2 / W^2}}, \quad (7.6)$$

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \frac{\underline{\zeta}'_{\text{ort}} + \underline{\lambda}'^2_{\text{ort}}}{\sqrt{1 - w^2 / W^2}}, \quad \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2 = \frac{\underline{\lambda}'^2_{\text{ort}} + w\underline{\zeta}'_{\text{ort}} / W^2}{\sqrt{1 - w^2 / W^2}}, \quad (7.7)$$

где $w = |w^{(\pm)}| = \frac{a}{2c^2}$, $\underline{\lambda}_{\text{ort}} = wct = \frac{at}{2c}$, $\underline{\zeta}_{\text{ort}} = wz = \frac{az}{2c^2}$, $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = wct' = \frac{at'}{2c}$,

$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = wz' = \frac{az'}{2c^2}$, $W = \frac{A}{2c^2}$. На рис.19 для примера изображены поверхности, задаваемые функциями (6).

Сравнивая рис.19 с рис.5 и рис.7, мы видим, что преобразования (6) существенно отличаются от преобразований, задаваемых уравнениями (4.4). Таким образом, мы приходим к выводу, что какие-то из предположений, положенные Парди в основу вывода преобразований (6), не согласуются с моделью пространства, использованной в настоящей работе, либо же с использованными в рамках этой модели упрощающими допущениями. Второе предположение Парди не вызывает сомнений и согласуется с результатами настоящей работы. Вызывают сомнения первое и третье предположения.

Действительно, величина W в системе СИ имеет размерность м^{-1} , то есть размерность кривизны лучей. В геометро-оптическом рассмотрении распространения эквивалентных волн мод, проведённом в настоящей работе, как мы видели, ограничений на кривизну лучей не возникало. Возможно, учёт дифракции

волн и приведёт к такому ограничению. Но этот вопрос требует отдельного рассмотрения и на нём останавливаться не будем.

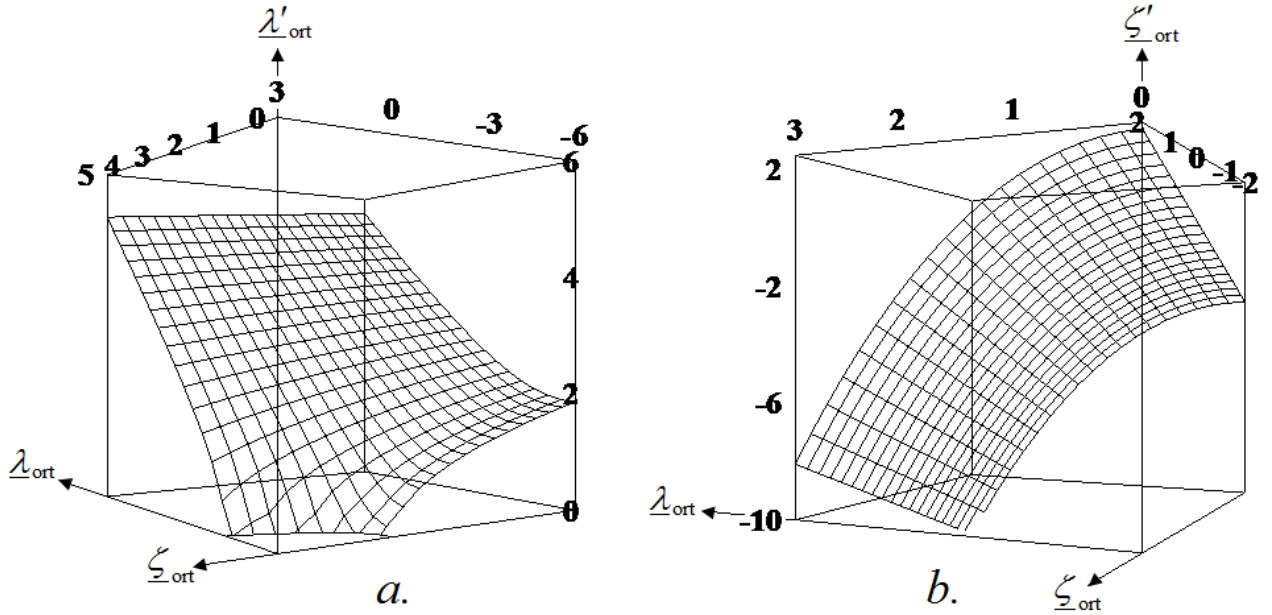


Рис.19. Поверхности, задаваемые функцией $\lambda'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}})$ а) и функцией $\zeta'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \zeta_{\text{ort}})$ б) при значениях $W = 1$ и $w/W = 0,5$.

Рассмотрим теперь справедливость первого предположения. Для этого перейдём в уравнениях (6), (7) и (4.4) к случаю, когда ускорение мало. В уравнениях (6) и (7) это соответствует условию $(w/W)^2 \ll 1$. При этом сразу получаем

$$\zeta'_{\text{ort}} \approx \zeta_{\text{ort}} - \lambda_{\text{ort}}^2, \quad \lambda'^2_{\text{ort}} \approx \lambda_{\text{ort}}^2 - w\zeta_{\text{ort}}/W^2, \quad (7.6a)$$

$$\zeta_{\text{ort}} \approx \zeta'_{\text{ort}} + \lambda'^2_{\text{ort}}, \quad \lambda_{\text{ort}}^2 = \lambda'^2_{\text{ort}} + w\zeta'_{\text{ort}}/W^2, \quad (7.7a)$$

В уравнениях (4.4) это соответствует малым значениям $\lambda_{\text{ort}} = \frac{at}{2c}$, $\zeta_{\text{ort}} = \frac{az}{2c^2}$,

$\lambda'_{\text{ort}} = \frac{at'}{2c}$, $\zeta'_{\text{ort}} = \frac{az'}{2c^2}$. Для перехода к малым значениям ускорения возведём

сначала обе части уравнения (4.4) во вторую степень и представим его в виде

$$\lambda_{\text{ort}}^2 e^{-2\zeta'_{\text{ort}}} = \lambda'^2_{\text{ort}} e^{2\zeta_{\text{ort}}} = \frac{4E(\lambda_{\text{ort}})E(\lambda'_{\text{ort}})}{1 - 2E(\lambda_{\text{ort}})E(\lambda'_{\text{ort}}) + E^2(\lambda_{\text{ort}})E^2(\lambda'_{\text{ort}})}. \quad (7.8)$$

Затем, учитывая, что в области $0 \leq x \approx 2$ наилучшей аппроксимацией функции

$E(x)$ является разложение в ряд до степеней третьего порядка малости

$$E(x) \approx \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8} = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4} \right), \text{ приведём уравнения (8) к виду}$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\text{ort}}}{\lambda'_{\text{ort}}} e^{-2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} &= \frac{\lambda'_{\text{ort}}}{\lambda_{\text{ort}}} e^{2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} \approx \\ &\approx \frac{\left(1 + \frac{\lambda_{\text{ort}}^2}{4} \right) \left(1 + \frac{\lambda'^2_{\text{ort}}}{4} \right)}{1 - \frac{\lambda_{\text{ort}} \lambda'_{\text{ort}}}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{\text{ort}}^2}{4} \right) \left(1 + \frac{\lambda'^2_{\text{ort}}}{4} \right) + \frac{\lambda_{\text{ort}}^2 \lambda'^2_{\text{ort}}}{16} \left(1 + \frac{\lambda_{\text{ort}}^2}{4} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'^2_{\text{ort}}}{4} \right)^2}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Удерживая в правых частях этих уравнений члены до второго порядка малости по λ_{ort} и λ'_{ort} включительно, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\text{ort}}}{\lambda'_{\text{ort}}} e^{-2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} &= \frac{\lambda'_{\text{ort}}}{\lambda_{\text{ort}}} e^{2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} \approx \\ &\approx \frac{1 + \frac{\lambda_{\text{ort}}^2}{4} + \frac{\lambda'^2_{\text{ort}}}{4} + \frac{\lambda_{\text{ort}}^2 \lambda'^2_{\text{ort}}}{16}}{1 - \left(\frac{\lambda_{\text{ort}} \lambda'_{\text{ort}}}{2} - \frac{\lambda_{\text{ort}}^2 \lambda'^2_{\text{ort}}}{16} \right)} \approx 1 + \frac{(\lambda_{\text{ort}} + \lambda'_{\text{ort}})^2}{4} + \frac{\lambda_{\text{ort}}^2 \lambda'^2_{\text{ort}}}{4}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Эти уравнения являются квадратными уравнениями относительно λ_{ort} и λ'_{ort} . В явном виде

$$\lambda_{\text{ort}}^2 + 2 \frac{\lambda'_{\text{ort}} - \frac{2e^{-2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}}{\lambda'_{\text{ort}}}}{1 + \lambda'^2_{\text{ort}}} \lambda_{\text{ort}} + \frac{4 + \lambda'^2_{\text{ort}}}{1 + \lambda'^2_{\text{ort}}} = 0, \quad (7.11)$$

$$\lambda'^2_{\text{ort}} + 2 \frac{\lambda_{\text{ort}} - \frac{2e^{2\underline{\zeta}_{\text{ort}}}}{\lambda_{\text{ort}}}}{1 + \lambda_{\text{ort}}^2} \lambda'_{\text{ort}} + \frac{4 + \lambda_{\text{ort}}^2}{1 + \lambda_{\text{ort}}^2} = 0. \quad (7.12)$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющих условиям $\lim_{\lambda_{\text{ort}} \rightarrow 0} \lambda_{\text{ort}} = 0$ и

$\lim_{\lambda_{\text{ort}} \rightarrow 0} \lambda'_{\text{ort}} = 0$, имеют вид

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \frac{-\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \frac{2}{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}} e^{-2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \left(1 - \sqrt{1 - e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \left(1 + e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \left(1 + \frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2}{2} \right)^2 \right)} \right) \underline{\lambda}'_{\text{ort}}}{1 + \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2}, \quad (7.13)$$

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{-\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \frac{2}{\underline{\lambda}_{\text{ort}}} e^{2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} \left(1 - \sqrt{1 - e^{-2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} \left(1 + e^{-2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} \left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}}{}^2}{2} \right)^2 \right)} \right) \underline{\lambda}_{\text{ort}}}{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}{}^2}. \quad (7.14)$$

Область определения функции (13) находится из условия $e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \left(1 + e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \left(1 + \frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2}{2} \right)^2 \right) \underline{\lambda}'_{\text{ort}} \leq 1$ и определяется неравенством

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \leq \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{(1 + \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2)(4 + \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2)} / \underline{\lambda}'_{\text{ort}} - 1}{2(1 + \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2/2)^2},$$

а функции (14) – неравенством

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} \geq \frac{1}{2} \ln \frac{2(1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}{}^2/2)^2}{\sqrt{(1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}{}^2)(4 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}{}^2)} / \underline{\lambda}_{\text{ort}} - 1}.$$

Так, например, если $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = 0,5$, то $-\infty < \underline{\zeta}'_{\text{ort}} \leq 0,92$.

Если в выражении (13) $e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \left(1 + e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \left(1 + \frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2}{2} \right)^2 \right) \underline{\lambda}'_{\text{ort}} \ll 1$, а в выражении

(14) $e^{-2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} \left(1 + e^{-2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} \left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}}{}^2}{2} \right)^2 \right) \underline{\lambda}_{\text{ort}} \ll 1$, то, разлагая в этих выражениях корни

до членов четвертого порядка по $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$ или $\underline{\lambda}_{\text{ort}}$ включительно, получаем

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} \approx \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \left(1 + \frac{(1 + e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}})^2}{4} \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2 \right), \quad (7.15)$$

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} \approx \underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} \left(1 + \frac{(1 + e^{-2\underline{\zeta}_{\text{ort}}})^2}{4} \underline{\lambda}_{\text{ort}}{}^2 \right) \quad (7.16)$$

То, что поверхности, задаваемые формулами (13, 14) или (15, 16), с хорошей точностью совпадают при указанных условиях с соответствующими по-

верхностями, задаваемыми уравнениями (4.4) или формулами (4.7) и (4.8), проиллюстрировано на примере поверхности $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ рис.20.

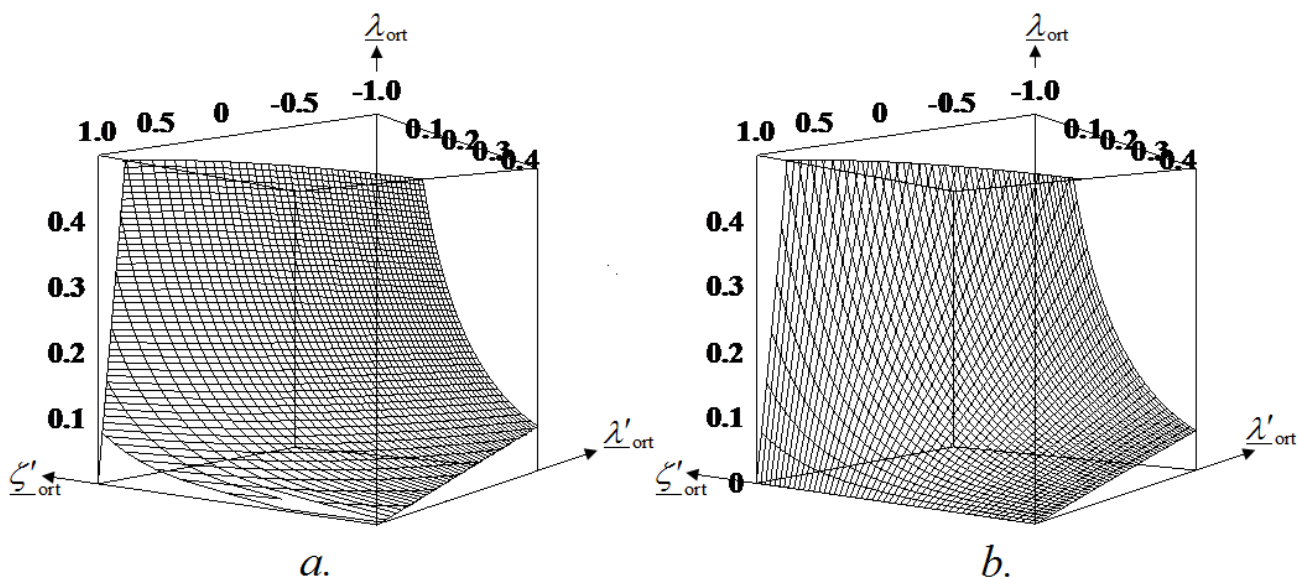


Рис.20. Поверхность, задаваемая точной функцией $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ (см. ф-лы (4.7) и (4.8)) *a*) и приближённой функцией (13) либо (15) *b*).

Получим теперь в рассматриваемом приближении преобразование пространственной координаты. Подставляя (15) в уравнение

$$e^{2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} = \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}} \right) \underline{\lambda}_{\text{ort}}'^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}} \right)^2 \underline{\lambda}_{\text{ort}}'^4 \right), \quad (7.17)$$

которое следует из (10), с точностью до членов $\underline{\lambda}_{\text{ort}}'^2$ имеем

$$e^{2\underline{\zeta}_{\text{ort}}} = e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \left(1 + \frac{(1 + e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}})^2}{2} \underline{\lambda}_{\text{ort}}'^2 \right). \quad (7.18)$$

Логарифмируя (18), выражаем зависимость $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ в явном виде:

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} \approx \underline{\zeta}'_{\text{ort}} + \frac{(1 + e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}})^2}{4} \underline{\lambda}_{\text{ort}}'^2. \quad (7.19)$$

Когда $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \rightarrow 0$ $\underline{\zeta}_{\text{ort}} \approx \underline{\zeta}'_{\text{ort}} + \underline{\lambda}_{\text{ort}}'^2$

Аналогично имеем

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \approx \underline{\zeta}_{\text{ort}} - \frac{(1 + e^{-2\underline{\zeta}_{\text{ort}}})^2}{4} \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2 \approx \underline{\zeta}_{\text{ort}} - \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2. \quad (7.20)$$

В случае равноускоренного движения формулы (15), (19) и (16), (20) в обычных обозначениях принимают вид:

$$t \approx t' e^{\frac{az'}{c^2}} \left(1 + \frac{1}{16} \left(1 + e^{\frac{az'}{c^2}} \right)^2 \left(\frac{at'}{c} \right)^2 \right), \quad z \approx z' + \frac{1}{8} \left(1 + e^{\frac{az'}{c^2}} \right)^2 at'^2, \quad (7.21)$$

$$t' \approx t e^{-\frac{az}{c^2}} \left(1 + \frac{1}{16} \left(1 + e^{-\frac{az}{c^2}} \right)^2 \left(\frac{at}{c} \right)^2 \right), \quad z' \approx z - \frac{1}{8} \left(1 + e^{-\frac{az}{c^2}} \right)^2 at^2. \quad (7.22)$$

Когда $2az'/c^2 \ll 1$

$$t \approx t' \left(1 + \frac{az'}{c^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{at'}{c} \right)^2 \right), \quad z \approx z' + \frac{1}{2} at'^2, \quad (7.23)$$

и когда $2az/c^2 \ll 1$

$$t' \approx t \left(1 - \frac{az}{c^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{at}{c} \right)^2 \right), \quad z' \approx z - \frac{1}{2} at^2. \quad (7.24)$$

Сравнивая (23) с (5) или (24) с (4) в случае, когда $(a/A)^2 \ll 1$, мы видим, что преобразования пространственной координаты в нерелятивистском приближении совпадают с преобразованиями Парди, в то время как преобразования временной координаты коренным образом различаются. Это однозначно говорит о том, что первое предположение Парди, касающееся формы преобразования времени, не согласуется с моделью, используемой в настоящей работе.

Поскольку на основании этой модели в [1, 2] получены преобразования, из которых, как частные случаи, следуют преобразования Мёллера, преобразования Ву и Ли, обобщённые преобразования Мёллера-Ву-Ли, полученные Ксу и Клефф и усовершенствованные Эрнстом и преобразования Подосёнова, то есть веские основания полагать, что первое предположение Парди, касающееся формы преобразования времени, не верно.

Заключение

Исследование преобразования пространства-времени, когда системы отсчёта связаны с прямолинейно ускоряемыми электрическим полем в противоположных направлениях частицами, в настоящей работе выполнено на основе концепции 4-мерного пространства компактифицированного до трёх измерений, а также вытекающего из этой концепции представления о римановом простран-

стве событий с косоугольными пространственно-временными локальными базами.

Рассмотрен простейший случай компактификации, а именно, скалярный потенциал выбран в виде бесконечно глубокой потенциальной ямы, или на оптическом языке в виде неограниченного по трём измерениям 4-мерного плоскопараллельного резонатора. Моды резонатора с фиксированными продольными индексами ассоциируются с элементарными частицами различной массы.

Постулируемым свойством такого резонатора является то, что коэффициент трансформации какой-либо моды резонатора с фиксированным продольным индексом в моды с другими продольными индексами за счёт рассеяния образующих моду волн на зеркалах резонатора не зависит от её поперечных индексов. Иными словами эффективный коэффициент отражения зеркалами волн, образующих моду с фиксированным продольным индексом, не зависит от её поперечных индексов. Кроме того пространство внутри резонатора считается однородным и изотропным, а дисперсия скоростей распространяющихся в нём волн различной длины равна нулю.

Показано, что воздействие электрического поля на заряженную частицу в рассматриваемой модели пространства описывается неоднородным по пространству и зависящим от времени изменением фазы волны при её отражении от зеркала резонатора.

Перечисленные выше свойства позволяют определить временную координату события, происходящего в резонаторе, и приводят к понятию риманова (а не псевдориманова) пространства событий с косоугольными пространственно-временными локальными базами в каждой из систем отсчёта, связанной с движущейся частицей.

На основе указанной концепции построены системы отсчёта, связанные с прямолинейно движущимися друг относительно друга и ускоряемыми электрическим полем в противоположных направлениях частицами. Получена система трансцендентных уравнений для преобразования координат события при переходе от одной из систем отсчёта к другой и обратно. В случае, когда массы ускоряемых частиц близки друг к другу, проведены расчёты, проиллюстрированные графическими изображениями поверхностей, задаваемых указанными преобразованиями.

Получены также уравнения для преобразования координат события при переходе между системами отсчёта, одна из которых связана с частицей, а дру-

гая с её античастицей. Проведённые расчёты также проиллюстрированы графическими изображениями поверхностей, задаваемых этими преобразованиями.

Показано, что метод Лагранжа и идея дополнительного пространственного измерения связаны друг с другом, поскольку аргумент функции, описывающей поведение амплитуды поля моды вдоль оси дополнительного 4-го измерения, представляет собой действие для заряженной частицы в электрическом поле, деленное на постоянную Планка.

Проведено сравнение полученных преобразований с преобразованиями Парди [20] и показано, что его предположение, касающееся формы преобразования временной координаты события не согласуется с моделью пространства, используемой в настоящей работе. Поскольку на основе этой модели в [1, 2] получены преобразования, из которых, как частные случаи, следуют известные преобразования Мёллера, преобразования Ву и Ли, обобщённые преобразования Мёллера-Ву-Ли, полученные Ксу и Клефф и усовершенствованные Эрнстом и преобразования Подосёнова, то сделан вывод, что предположение Парди, касающееся формы преобразования времени, с большой вероятностью не верно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Орлов Е.П.** *Преобразование пространства-времени при прямолинейном релятивистски-ускоренном движении в концепции дополнительного измерения.* Препринт ФИАН № 3. Москва, 2014. 34 с.
2. **Орлов Е.П.** *Сравнительный анализ преобразований пространства-времени при прямолинейном релятивистски-ускоренном движении.* Препринт ФИАН № 7. Москва, 2014. 41 с.
3. **Møller C.** *On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox.* Kobenhavn. 1943. (Труды Датской АН. Т. 20. № 19.) P. 1 – 24.
4. **Подосёнов С.А.** *Геометрические свойства неинерциальных систем отсчёта в релятивистской механике* – В кн: Дискуссионные вопросы теории относительности и гравитации. – М.: Наука, 1982, С. 95 – 103.
5. **Подосёнов С. А.** *Пространство, время и классические поля связанных структур.* М. 2000, "Компания Спутник+".
6. **Ta-You Wu, Lee Y.C.** The clock paradox in the relativity theory. Intern. J. Theoretical Phys. 1972. V. 5. Issue 5. P. 307 – 323.
7. **Ta-You Wu.** Theoretical Physics. 1978. V. 4. Theory of Relativity. (Lian Jing Publishing Co., Taipei. 1978) P. 172 – 175.

8. **Hsu J.P. and Silvia M. Kleff.** *Generalized Møller-Wu-Lee Transformations for Accelerated Frames.* Chinese Journal of Physics. 1998. V. 36. No. 6. P. 768 – 777.
9. **Jong-Ping Hsu.** *General-Linear-Acceleration Transformations of Spacetime, Jerks and Limiting 4-Dimensional Symmetry.* Chinese Journal of Physics. 2002. V. 40. No. 3. P. 265 – 276.
10. **Andreas Ernst.** *On Hyperbolic Motion and Limiting Four-Dimensional Symmetry.* Chinese Journal of Physics. 2002. V. 40. No. 6. P. 583 – 589.
11. **Орлов Е.П.** *Пространственно-временные отношения между модами резонатора с параллельными плоскими зеркалами.* Препринт ФИАН № 16. Москва, 2004. 17 с.
12. **Орлов Е.П.** *Описание пространственно-временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора с помощью косоугольных систем координат.* Препринт ФИАН № 16. Москва, 2009. 32 с.
13. **Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** *Квантовая электродинамика (Серия: «Теоретическая физика», том IV).* М.: Физматлит. 2001. 720 с.
14. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** *Теория поля (Серия: «Теоретическая физика», том II).* М.: Физматлит. 1988. 512 с.
15. **Орлов Е.П.** *Вывод уравнений релятивистской механики на основе резонансного условия для мод 4-мерного плоскопараллельного резонатора.* Препринт ФИАН № 8. Москва, 2013. 11 с.
16. **Паули В.** *Теория относительности.* // Пер. с немецкого под ред. В.Л.Гинзбурга и В.П.Фролова. М.: Наука, 1991. С. 50.
17. **Кочин Н.Е.** *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.* М.: Наука, 1965. С. 371.
18. *Физические величины* // Под ред. И.С.Григорьева, Е.З.Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.
19. **Орлов Е.П.** *О решениях уравнения Дирака для свободной частицы в косоугольных системах координат евклидова пространства событий.* Препринт ФИАН № 1. Москва, 2011. 31 с.
20. **Pardy M.** *The space-time transformations between accelerated systems.* <http://arxiv:gr-qc/03022007v1> 12 Feb 2003.

Подписано в печать 09.09.2014 г.
Формат 60x84/16. Заказ № 42. Тираж 140 экз. П.л 2,75.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640