

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Физический
ИНСТИТУТ



имени
П.Н. Лебедева

Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

17

Б.Б. КРЕЙСМАН

**ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПОДКОВООБРАЗНЫЕ
ОРБИТЫ В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ-ЛУНА**

Москва 2014

Аннотация

Подковообразные орбиты ограниченной задачи трех тел больше всего изучены в системе Солнце - Юпитер и, в последние годы, в системе Солнце – Земля. При этом они используются для поиска астероидов, имеющих орбиты этого типа.

Нас же интересуют орбиты искусственных спутников Земли, решающих различные научные задачи. Поэтому мы построили плоское семейство подковообразных орбит в системе Земля – Луна и определили на нем точки плоского и вертикального резонансов 1/1.

На графиках даны примеры орбит, порождаемых при этом пространственных семейств.

Введение

Подковообразные орбиты [1÷3] ограниченной задачи трех тел [4÷7] больше всего изучены в системе Солнце - Юпитер и, в последние годы, в системе Солнце – Земля.

При поиске орбиты для космического телескопа “Радиоастрон” в 2000-м и в 2002-м году мы построили семейство плоских подковообразных орбит в системе Земля – Луна. Оно оказалось одно и состояло из 6 частей, при переходе от простой к более сложной средняя длительность периода увеличивается на 2 синодических месяца. Для дальнейшего продолжения семейства в 2013-м году мы перешли (с помощью А.Б. Батхина) на арифметику **учетверенной точности (real*16)**, позволяющей правильно определять 33 значащие цифры, и построили еще 7 частей семейства.

Каждая из этих частей содержит по 4 точки вертикального резонанса 1/1, две с выходом по скорости и две с выходом по координате. Даны примеры орбит, порождаемых при этом пространственных семейств. Каждая из этих частей содержит также по 4 точки плоского резонанса 1/1, некоторые из которых порождают семейства несимметричных плоских орбит того же периода.

Следующие 2 раздела напоминают общеизвестные вещи, описанные, в частности, в нашей работе [8].

1. Пространственная круговая ограниченная задача трех тел. Уравнения движения во вращающейся системе координат.

Пусть две материальные точки с массами M_1 и M_2 движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс с угловой скоростью Ω под действием взаимного ньютоновского притяжения, а третье тело имеет пренебрежимо малую массу. Проще всего уравнения движения третьего тела выглядят во вращающейся (синодической) системе координат в безразмерной форме [4÷7]. Начало координат находится в барицентре притягивающих тел, ось X_1 направлена от тела меньшей массы M_2 к телу большей массы M_1 . Система вращается против часовой стрелки с угловой скоростью Ω вокруг оси X_3 ; в качестве единицы времени берется $1/\Omega$, единицы расстояния - расстояние между притягивающими телами, единицы массы - M_1+M_2 . В этой системе притягивающие тела неподвижны и имеют координаты $(m_2, 0, 0)$ и $(-m_1, 0, 0)$, где m_1 и m_2 - их безразмерные массы, $m_1 = M_1/(M_1+M_2)$, $m_2 = M_2/(M_1+M_2)$. Для системы Земля - Луна используется $m_2=0.0121505816234336$. Функция Гамильтона $H(\mathbf{x})$ вычисляется по формуле:

$$H = \frac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + x_2x_4 - x_1x_5 - \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2},$$
$$r_1^2 = (x_1 - m_2)^2 + x_2^2 + x_3^2, r_2^2 = (x_1 + m_1)^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

где r_1 и r_2 - расстояния до притягивающих тел. Уравнения движения имеют

вид :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{H}'(\mathbf{x}), \quad (1.1) \text{ или}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + x_4, & \frac{dx_4}{dt} &= x_5 - Ax_1 + m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_5 - x_1, & \frac{dx_5}{dt} &= -x_4 - Ax_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_6, & \frac{dx_6}{dt} &= -Ax_3, \quad A = \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{x} - шестимерный вектор, компоненты которого x_k и x_{3+k} , $k=1,2,3$ -- канонически сопряженные (координаты и импульсы), $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ - шестимерный вектор - градиент функции Гамильтона .

Матрица шестого порядка \mathbf{J} имеет вид:
$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{E}_3 \\ -\mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_3 \end{vmatrix},$$

где \mathbf{E}_3 и $\mathbf{0}_3$ - единичная и нулевая матрицы третьего порядка. Первых интегралов, отличных от интеграла энергии $H(\mathbf{x})=\text{const}$, нет, и задача не интегрируется в квадратурах. Исторически принято интеграл энергии записывать в виде $-2H(\mathbf{x})=C$, где C называется константой Якоби.

Условия периодичности решения с периодом T имеют вид:

$$x_k(T)=x_k(0), \quad k=1,2,\dots,6.$$

Предполагая, что известен какой-либо способ (например, численный метод) интегрирования уравнений движения, мы можем рассматривать эти условия как 6 нелинейных уравнений с 7 неизвестными $x_k(0)$, $k=1,2,\dots,6$, и T . В силу существования интеграла энергии достаточно проверять 5 из 6 условий.

Система (1.1) допускает две замены переменных:

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x}_1=x_1, \quad \hat{x}_2=-x_2, \quad \hat{x}_4=-x_4, \quad \hat{x}_5=x_5.$$

При этом либо $\hat{x}_3=x_3, \hat{x}_6=-x_6$, либо $\hat{x}_3=-x_3, \hat{x}_6=x_6$.

Поэтому наряду с решением $\mathbf{x}(t)$ этой системы ее решением будет $\hat{\mathbf{x}}(\hat{t})$.

В шестимерном фазовом пространстве графики этих решений симметричны относительно гиперплоскости $(x_2=0, x_3=0, x_4=0)$, либо $(x_2=0, x_6=0, x_4=0)$. При совпадении решений $\mathbf{x}(t)$ и $\hat{\mathbf{x}}(\hat{t})$. получаются симметричные решения двух типов, которые мы будем различать значениями параметра l .

Если у решения в некоторый момент времени t выполняются условия $x_2=0, x_3=0, x_4=0$, то оно обладает **симметрией первого типа** и $l(t)=0$. Если, кроме того,

эти условия выполняются в момент времени $t+T$, то имеем **симметричное периодическое решение первого типа** с периодом $2T$.

Если же у решения в некоторый момент времени t выполняются условия $x_2=0, x_6=0, x_4=0$, то оно обладает **симметрией второго типа** и $l(t)=1$. Если, кроме того, эти условия выполняются в момент времени $t+T$, то имеем **симметричное периодическое решение второго типа** с периодом $2T$.

Если в момент времени t_0 выполняются условия $x_2=0, x_3=0, x_4=0$, а в момент времени t_0+T условия $x_2=0, x_6=0, x_4=0$, то имеем **двоякосимметричное периодическое решение** с периодом $4T$ и $l(t_0)=0$. Это же решение можно описать условиями $x_2=0, x_6=0, x_4=0$ в момент времени t_0+T , а в момент времени t_0+2T условиями $x_2=0, x_3=0, x_4=0$ и $l(t_0+T)=1$.

2. Выход из плоских семейств периодических решений в пространственные.

Пусть известно некоторое решение $x(t)=x_0(t)$ системы (1.1), называемое далее опорным, в окрестности которого функция Гамильтона H по крайней мере дважды дифференцируема. Рассмотрим возмущенное движение $x(t)=x_0(t)+y(t)$. Подставляя его в уравнения (1.1), разлагая правые части в ряд Тейлора по $y(t)$ и отбрасывая члены разложения степени выше первой, получаем уравнения возмущенного движения в первом приближении:

$$\frac{dy}{dt} = JH''(x)y,$$

называемые **уравнениями в вариациях Пуанкаре**. Здесь $H''(x)$ - симметричная матрица шестого порядка (матрица Гесса функции Гамильтона $H(x)$) с элементами

$$H''_{ij}(t) = \left(\frac{d^2 H}{dx_i dx_j} \right)_0; \quad \text{символ } 0 \text{ означает, что в частные производные}$$

подставлены значения $x(t)=x_0(t)$.

Эти уравнения являются линейными, с зависящими от времени коэффициентами. Общее их решение с начальными условиями $y(0)=y_0$ представимо в виде:

$$y(t)=Y(t)y_0,$$

где $Y(t)$ – матрица размерности $6*6$, называемая матрициантом. В случае периодичности решения с периодом T матрица M , где $M=Y(T)$, называется матрицей монодромии. Так как нет однозначных интегралов, отличных от интеграла энергии, то характеристический многочлен P матрицы монодромии M имеет вид:

$$P = (\rho - 1)^2 (\rho^4 + a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 + a_1 \rho + 1),$$

где a_1 и a_2 - вещественные коэффициенты, регулярно изменяющиеся при движении по семейству периодических решений. Значения этих коэффициентов можно выразить через след матрицы \mathbf{M} и след квадрата матрицы \mathbf{M} . Если $a_1 a_1 + 8 < a_2$, то многочлен P представим в виде:

$$P = (\rho - 1)^2 (\rho^2 - 2s_1 \rho + 1)(\rho^2 - 2s_2 \rho + 1).$$

Собственные значения характеристического многочлена P называются мультипликаторами. Вещественные параметры s_1 и s_2 определяют устойчивость решения. Если они оба по модулю меньше единицы, то третий -шестой мультипликаторы лежат на единичной окружности и решение орбитально устойчиво. При движении по семейству периодических решений поворот любого из двумерных инвариантных подпространств может стать кратным 2π , следовательно, возможна генерация новых семейств периодических решений второго рода в этих подпространствах.

Можно рассматривать плоские орбиты как частный случай пространственных орбит и вычислять для них матрицы монодромии шестого порядка. Несложными выкладками можно показать, что матрица монодромии \mathbf{M} состоит из клеток, соответствующих плоскому решению (первый, второй, четвертый и пятый столбец и такие же строки), и клеток, соответствующих третьей степени свободы (третий и шестой столбец и такие же строки).

Далее мы полагаем, что параметр s_1 соответствует плоскому решению, а s_2 его вертикальному ответвлению. Ответвления пространственных периодических решений определяются матрицей второго порядка \mathbf{N} ,

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{33} & m_{36} \\ m_{63} & m_{66} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $s_2 = (n_{11} + n_{22})/2$. Далее мы ограничимся симметричными относительно оси X плоскими орбитами, которые вертикально пересекают эту ось в двух точках и задаются значениями (a_1, v_1) и (a_2, v_2) координаты x и скорости v_y в этих точках, причем $a_1 < a_2$. Кроме того, для описания этих орбит мы используем параметры: T – период, C - константа Якоби, s_1 и s_2 параметры характеристического многочлена P матрицы монодромии, n_1 и n_2 – число экстремумов расстояния от Земли и число пересечений оси X за полупериод.

Для симметричных решений $n_{11} = n_{22}$ и $s_2 = n_{11} = n_{22}$. Ниже мы не рассматриваем орбиты с вертикальной неустойчивостью, у которых $|s_2| > 1$.

Возможны 5 вариантов матрицы \mathbf{N} :

$$\mathbf{N}_1 = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ n_{21} & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = \begin{vmatrix} -1 & n_{12} \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{N}_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ n_{21} & -1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{N}_5 = \begin{vmatrix} s_2 & n_{12} \\ n_{21} & s_2 \end{vmatrix}.$$

Первые два случая соответствуют резонансу 1/1. В первом случае направление выхода в пространственные периодические орбиты дает вектор $(y_3, 0)$, во втором - вектор $(0, y_6)$.

Третий и четвертый случаи соответствуют резонансу 2/1. В первом из них направление выхода в пространственные орбиты удвоенного периода дает вектор $(y_3, 0)$, во втором - вектор $(0, y_6)$.

Пятый случай соответствует $|s_2| < 1$. В данной публикации мы его не рассматриваем.

Далее линейные параметры даются в тыс. км, скорости – в км/сек.

3. Семейство обратных орбит 2/1о в системе Земля – Луна и порождаемые им семейства.

Это семейство – самое простое семейство симметричных периодических орбит вокруг Земли. На рисунке 1 дана зависимость параметра s_1 от a_2 . Пересечения этой кривой с прямой $s_1 = -1$ дают точки p_1 и p_2 резонанса 2/1, в которых отщепляются решения удвоенного периода.

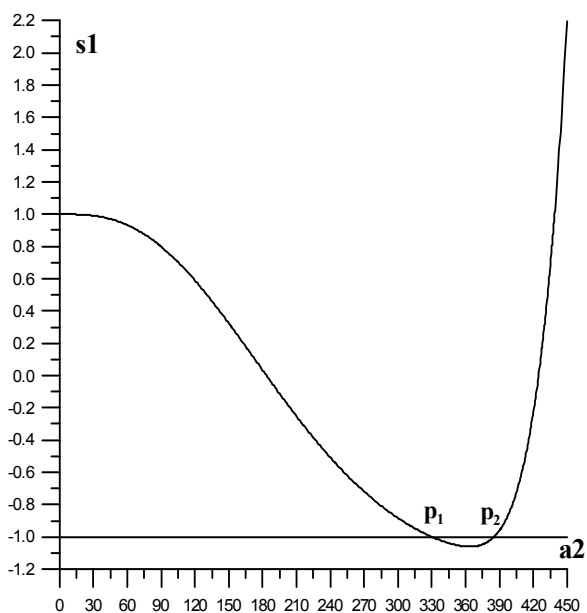


Рис. 1

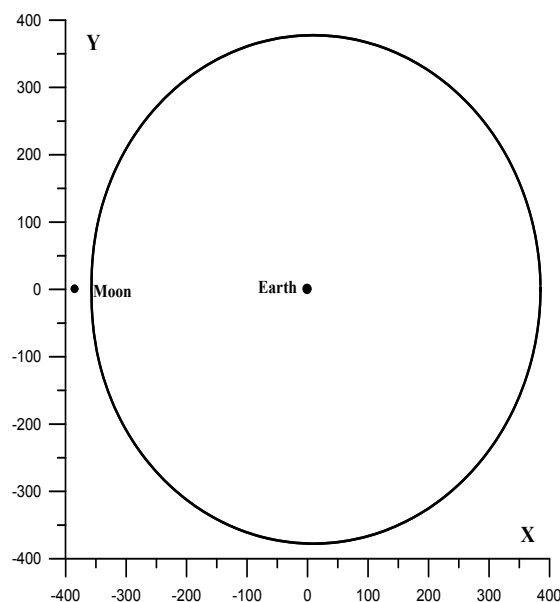


Рис. 2

Для нас важна точка p_2 при $C = -.8280679366445368$, соответствующая ей орбита дана на рисунке 2.

Примеры орбит семейства решений удвоенного периода (которое мы обозначили 2/1о2d) даны в таблице 1 и на рисунках 3-6.

Таблица 1.

n	a_1	v_1	a_2	v_2	T	C	s_1
1	378.45487	-0.999027	391.50091	-0.964707	27.17407	-0.82777	0.99329
2	264.45487	-1.369806	506.62198	-0.699509	27.22639	-0.72409	-1.41678
3	89.45487	-2.781532	684.97921	-0.336833	27.53672	-0.11884	-7.48278
4	7.63387	-10.165732	759.60103	-0.098674	27.50252	0.66624	-1.00000

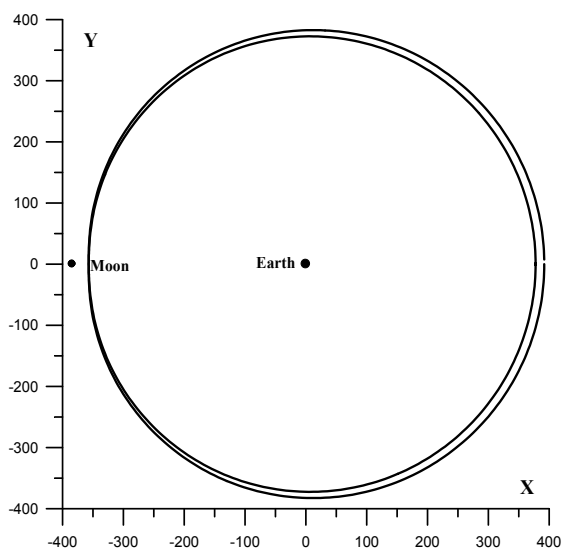


Рис. 3

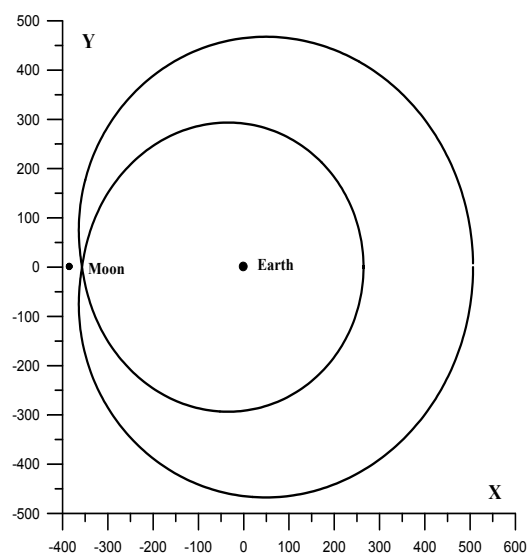


Рис. 4

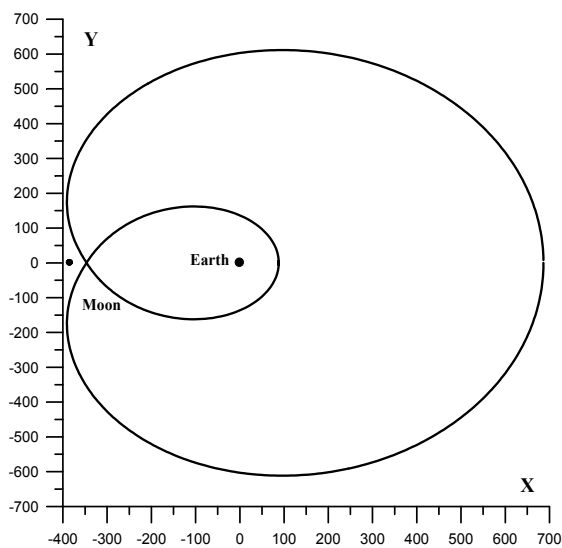


Рис. 5

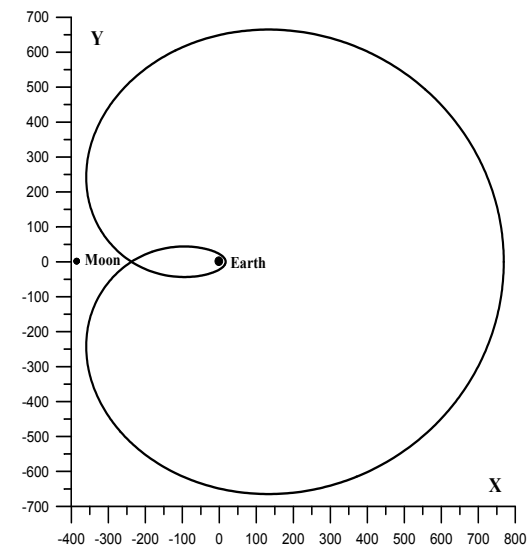


Рис. 6

Последней орбите соответствует $s_1 = -1$ и отвечают решения удвоенного периода. Примеры орбит этого семейства даны в таблице 2. Число n – номер рисунка с орбитой и ее увеличенного фрагмента в окрестности Земли.

Таблица 2.

n	a_1	v_1	a_2	v_2	T	C
7	750.000000	-.10048257	769.8820841	-0.09188704	55.011461	0.676082
8	695.000000	-.01696792	839.2920553	0.02824022	55.417563	1.085324
9	670.000000	.04079835	860.8293421	0.08811551	55.799711	1.322112
10	650.000000	.08586550	872.9134312	0.13050462	56.165087	1.495075
11	630.000000	.12967079	881.5766048	0.16885383	56.578170	1.653512

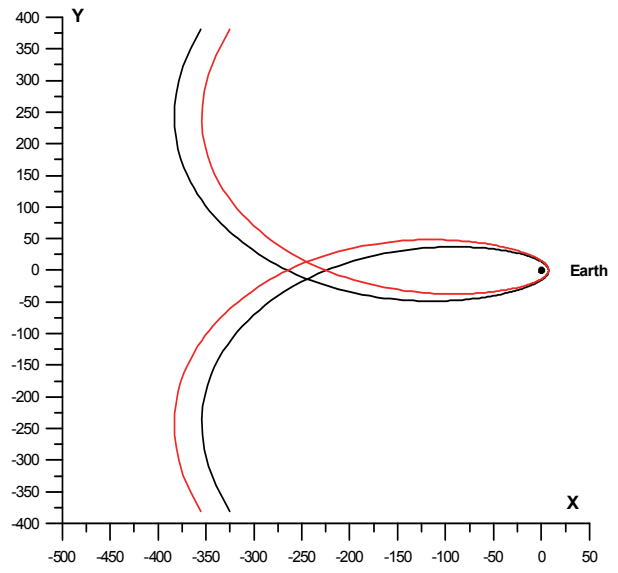
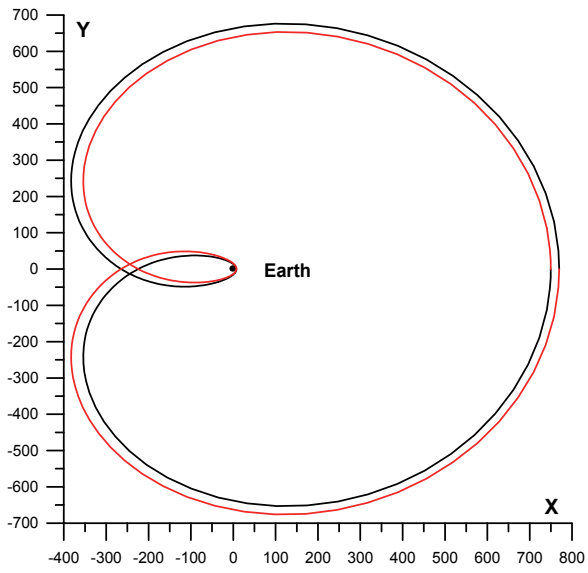


Рис. 7

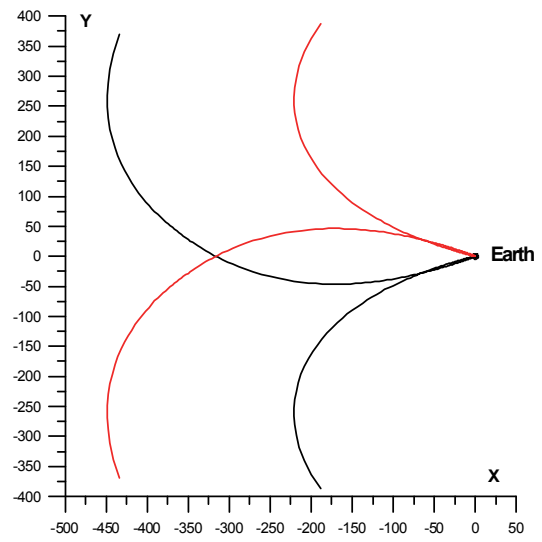
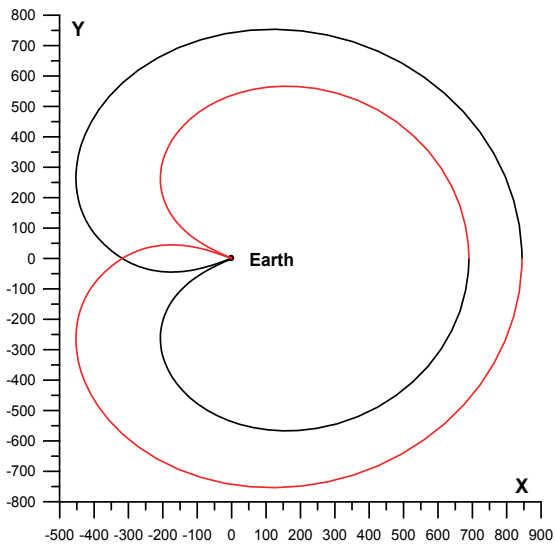


Рис. 8

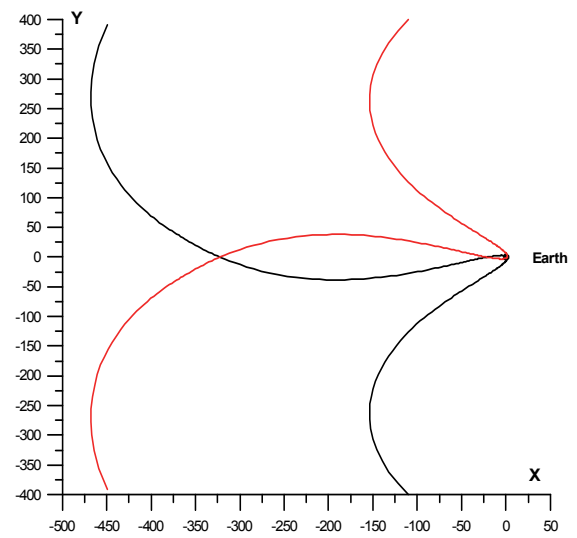
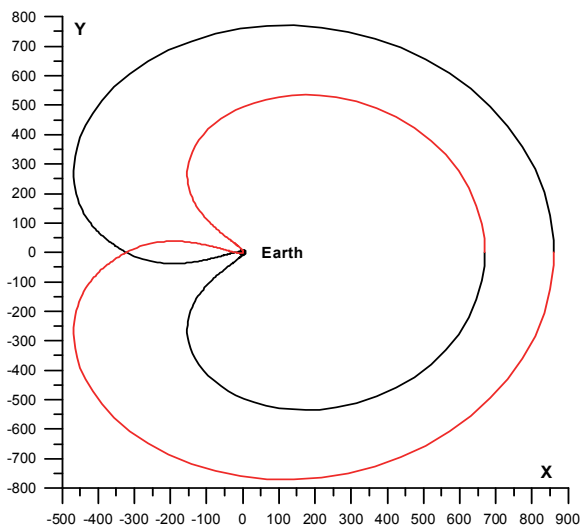


Рис. 9

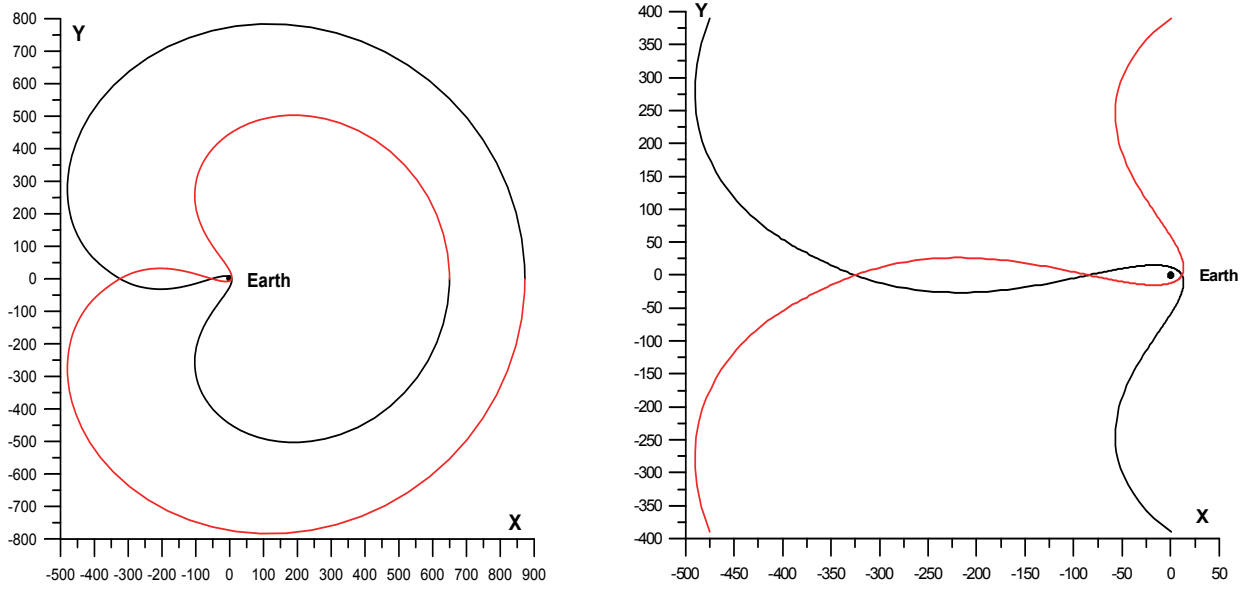


Рис. 10

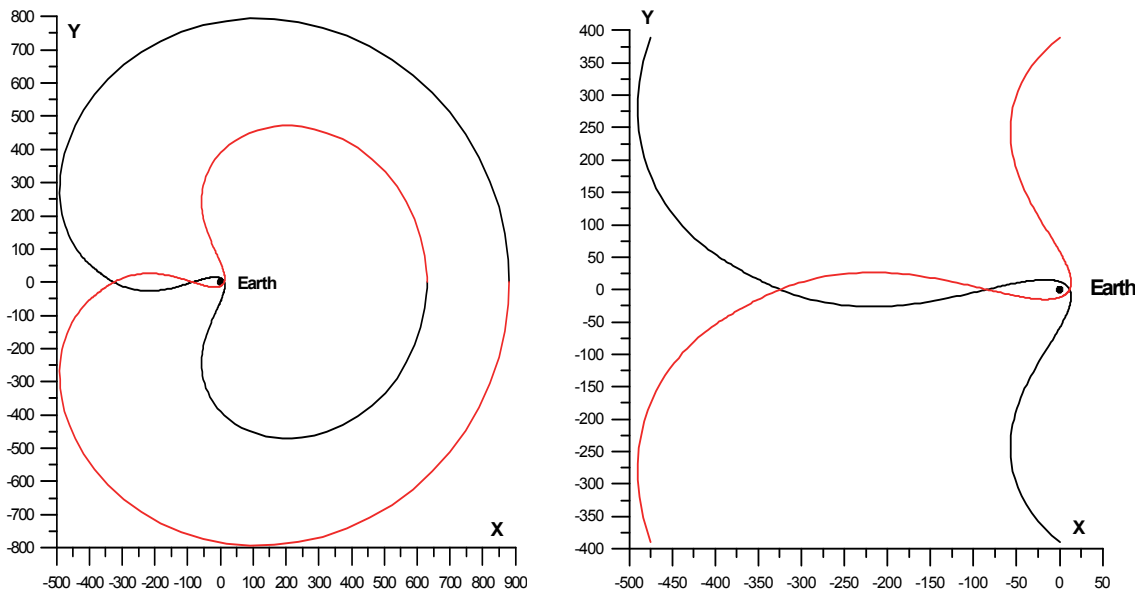


Рис. 11

Примеры простейших орбит с периодами 78 и 144 суток во вращающейся вокруг Земли системе координат даны на рисунках 12 и 13. Расстояния даются в тысячах км, Земля имеет координаты (0,0), Луна – (-384.4,0), точка либрации L_3 – (381.675,0).

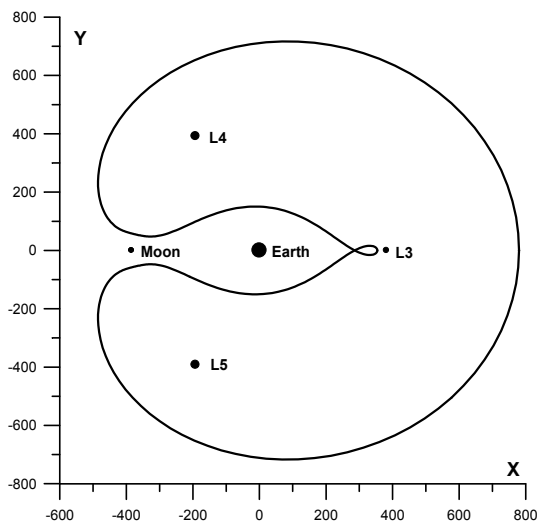


Рис.12

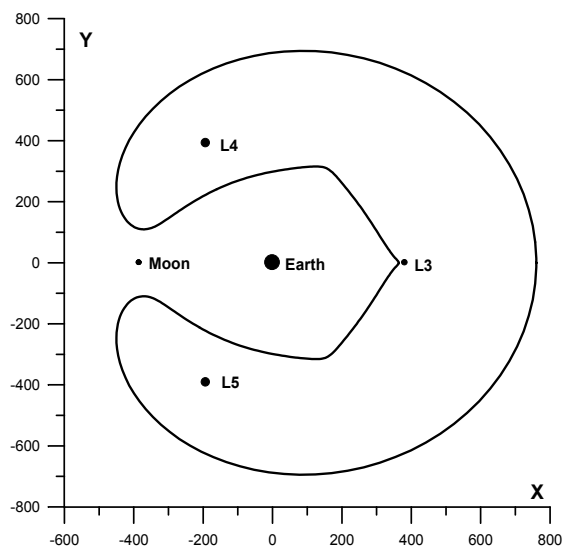


Рис.13

По внутренней стороне подковы облет Земли совершается против часовой стрелки, то есть орбита прямая. По внешней стороне подковы облет Земли совершается уже по часовой стрелке, то есть орбита становится обратной.

Более сложные орбиты содержат дополнительные петли. Пример такой орбиты с периодом 415 суток дан на рис. 14 и ее увеличенный фрагмент в районе точки L_3 – на рис. 15.

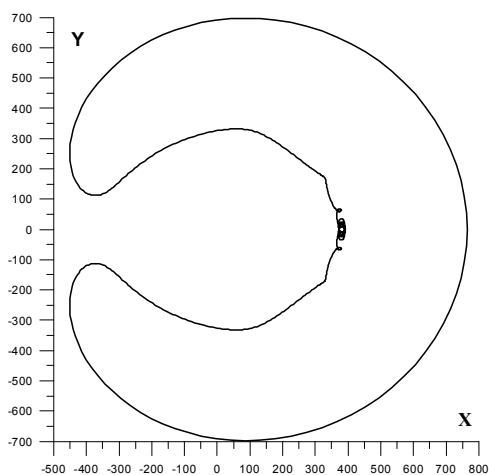


Рис.14

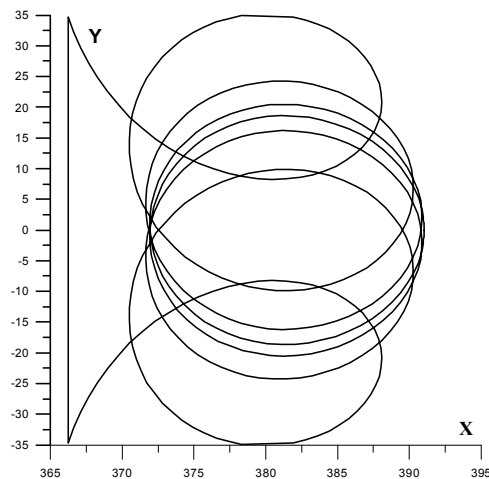


Рис.15

Для продолжения семейства мы перешли (с помощью А.Б. Батхина) на арифметику **четверенной точности (real*16)**, позволяющей правильно определять 33 значащие цифры.

Зависимость константы Якоби C от длительности периода T (в сутках) дана на рис.16.

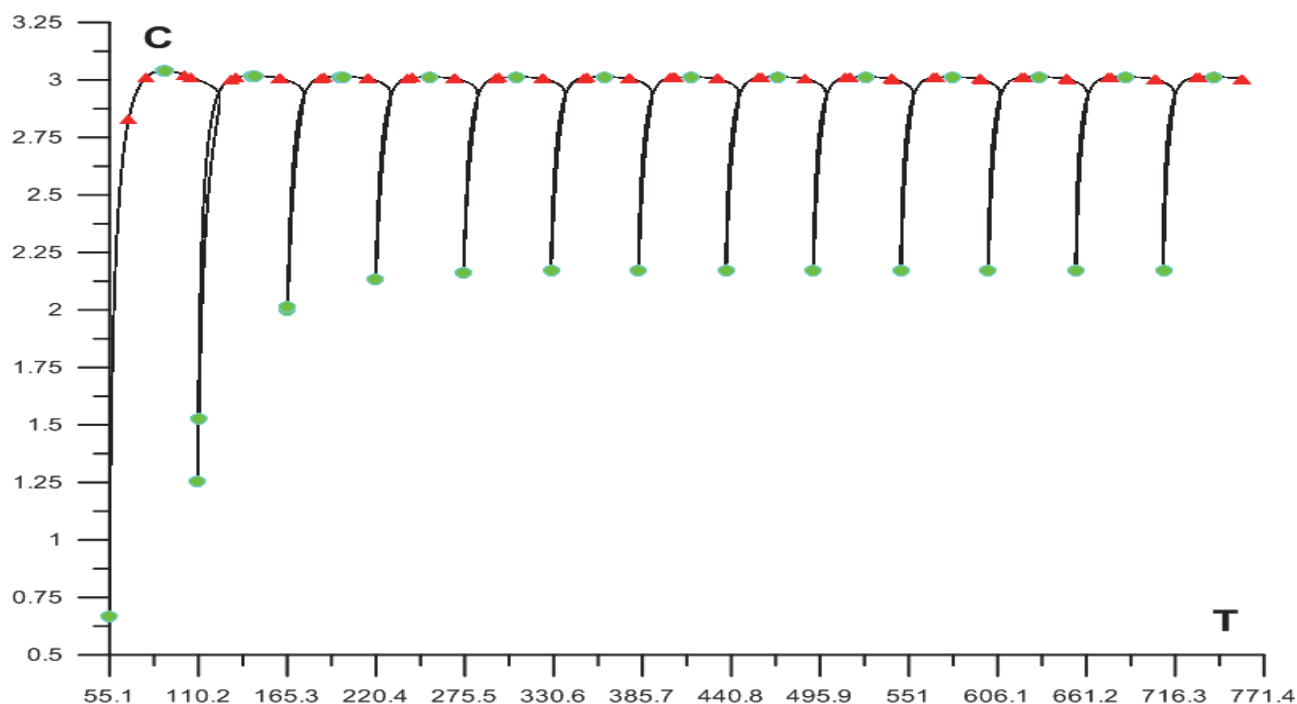


Рис.16

Мы построили 13 частей семейства, возможно, их число бесконечно. На рисунке красным цветом помечены точки вертикального резонанса 1/1, зеленым – плоского. Подробная информация об этих точках дана в таблицах 3 и 4. Строки в этих таблицах пронумерованы числом k .

Таблица 3. Резонансы 1/1 в плоскости.

k	a_1	v_1	T	C	s_2	s_1	n_1	n_2
1	759.600835	-.09867553	55.005043	.66623498	.73894	1.0001	5	3
2	344.136955	.86609366	89.033504	3.04056994	-1.0156	1.0000	3	3
3	344.176290	.86648747	89.537896	3.04053082	-1.0008	1.0000	3	3
4	706.350498	.03491679	109.927028	1.25263895	.22646	1.0000	9	5
5	705.738279	.11440454	110.200209	1.52699978	-.64146	.99999	7	5
6	364.201780	1.00230300	143.566188	3.01763982	-.79708	1.0000	2	5
7	364.253533	1.00324374	145.239917	3.01755216	-.96861	1.0000	2	5
8	680.461772	.25824571	165.630917	1.99688100	-1.5472	1.0001	7	7
9	681.017359	.26307117	165.625350	2.01102141	-1.6639	.99999	7	7
10	378.296393	1.00489238	198.431461	3.01237108	-.82666	1.0000	3	7
11	378.414328	1.00499265	199.824053	3.01235350	-.96826	.99998	3	7
12	679.195610	.30394166	220.376902	2.13036939	-1.8040	1.0000	9	9
13	679.393990	.30427936	220.362971	2.13132943	-1.8297	1.0000	9	9
14	386.369628	.99741632	253.635194	3.01159522	-.92585	1.0001	3	9
15	386.387923	.99739935	253.932604	3.01159464	-.95176	1.0000	3	9
16	682.521810	.31463696	274.776306	2.16100443	-1.9027	1.0001	11	11
17	682.559239	.31466094	274.771257	2.16107401	-1.9096	1.0001	11	11
18	389.531800	.99373577	307.857567	3.01150665	-.91917	1.0000	3	11
19	389.534374	.99373238	307.953231	3.01150659	-.92829	.99999	3	11
20	685.201042	.31720489	329.080137	2.16847161	-1.9791	1.0000	13	13
21	685.207567	.31720705	329.078460	2.16847814	-1.9813	.99997	13	13
22	390.632160	.99239217	361.889472	3.01149690	-.89279	1.0000	5	13
23	390.632993	.99239082	361.961682	3.01149686	-.90059	1.0000	5	13

24	686.800238	.31782114	383.358588	2.17033142	-2.0519	1.0000	15	15
25	686.801682	.31782152	383.357856	2.17033261	-2.0528	.99994	15	15
26	391.002306	.99193394	415.898947	3.01149583	-.86080	1.0000	7	15
27	391.002726	.99193310	415.968572	3.01149580	-.86920	1.0000	7	15
28	687.667265	.31796443	437.630279	2.17079793	-2.1249	1.0000	17	17
29	687.667729	.31796460	437.629792	2.17079845	-2.1256	1.0000	17	17
30	391.125459	.99178081	469.905925	3.01149571	-.82511	1.0000	9	17
31	391.125747	.99178014	469.975266	3.01149568	-.83432	1.0000	9	17
32	688.118645	.31799490	491.900166	2.17091521	-2.1993	.99992	19	19
33	688.118825	.31799503	491.899740	2.17091561	-2.1998	1.0000	19	19
34	688.349235	.31799979	546.169571	2.17094471	-2.2751	1.0001	21	21
35	688.349298	.31799992	546.169161	2.17094508	-2.2757	1.0001	21	21
36	391.166286	.99172997	523.912626	3.01149570	-.78609	1.0001	11	19
37	391.166531	.99172935	523.981936	3.01149567	-.79611	1.0001	11	19
38	391.179805	.99171313	577.919297	3.01149569	-.74392	1.0000	13	21
39	391.180035	.99171253	577.988604	3.01149566	-.75471	1.0000	13	21
40	688.465957	.31799964	600.438849	2.17095214	-2.3526	1.0000	23	23
41	688.465964	.31799976	600.438443	2.17095250	-2.3532	.99995	23	23
42	391.184280	.99170756	631.925965	3.01149569	-.69878	1.0000	15	23
43	391.184505	.99170696	631.995271	3.01149566	-.71030	1.0000	15	23
44	688.524773	.31799890	654.708092	2.17095401	-2.4318	.99999	25	25
45	688.524752	.31799903	654.707687	2.17095436	-2.4324	1.0000	25	25
46	391.185761	.99170571	685.932632	3.01149569	-.65085	1.0000	17	25
47	391.185984	.99170512	686.001938	3.01149566	-.66304	1.0000	17	25
48	688.554342	.31799837	708.977327	2.17095448	-2.5128	1.0001	27	27
49	688.554307	.31799849	708.976922	2.17095483	-2.5135	.99991	27	27
50	391.186251	.99170510	739.939299	3.01149569	-.60031	.99998	19	27
51	391.186474	.99170451	740.008605	3.01149566	-.61314	1.0001	19	27

Таблица 4. Резонансы 1/1 по вертикали.

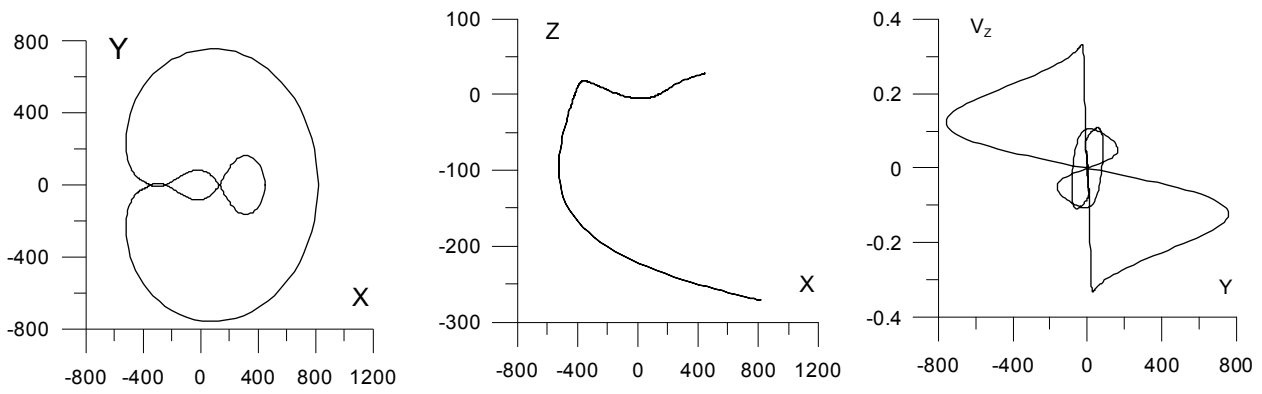
k	a ₁	v ₁	T	C	s ₂	s ₁	n ₁	n ₂
1	409.900000	.63584151	67.010481	2.82901143	1.0001	4466.0	3	3
2	354.208028	.81750753	78.147506	3.01311246	1.0000	2411.6	3	3
3	352.636635	.84398522	102.068488	3.02157680	1.0001	7567.7	3	5
4	356.215635	.83151360	105.471384	3.01278919	1.0000	12785.	3	5
5	387.835779	.92695230	129.960308	3.00205843	1.0000	3828.4	3	5
6	375.030779	.96475061	133.811975	3.01190529	1.0001	1902.2	3	5
7	383.183732	.95410955	160.244935	3.00789207	1.0000	1.0017	3	7
8	385.425232	.94772389	161.182098	3.00640335	1.0010	6465.0	3	7
9	394.780351	.95653085	185.721449	3.00685908	1.0000	1.0026	3	7
10	386.978351	.97805688	188.333070	3.01000419	1.0000	1.0031	3	7
11	396.956975	.95727187	214.629632	3.00713057	1.0000	1.0032	3	7
12	399.950475	.94929175	215.661558	3.00579297	1.0000	1.0007	3	9
13	401.375402	.95623654	240.265027	3.00753794	1.0000	1.0030	3	9
14	394.608902	.97419192	242.658977	3.00976108	1.0000	1.0042	3	9
15	404.732238	.94985514	268.938014	3.00677884	1.0003	1.0230	3	9
16	407.897238	.94167089	269.970824	3.00543333	1.0000	1.0049	3	11
17	403.855720	.95563382	294.617123	3.00794270	1.0000	.35185E+06	5	11
18	397.588105	.97201027	296.945066	3.00986120	1.0000	.18150E+06	5	11
19	408.325927	.94491402	323.224137	3.00644546	1.0000	.14463E+07	5	11
20	411.592593	.93657481	324.263746	3.00503404	1.0000	.18737E+07	5	13
21	404.128077	.95686969	348.943463	3.00829484	1.0000	.29131E+07	7	13
22	398.306037	.97201288	351.225060	3.00999688	1.0000	.15201E+07	7	13
23	410.182588	.94160688	377.519760	3.00608047	1.0000	.14120E+08	7	15

24	413.489741	.93321367	378.553741	3.00461267	1.0000	.18129E+08	7	15
25	403.605591	.95885913	403.264738	3.00861035	1.0000	.24280E+08	9	15
26	398.432591	.97230343	405.387194	3.01007171	1.0061	.13248E+08	9	15
27	398.207591	.97289196	405.504497	3.01012649	.99999	.12806E+08	9	15
28	411.412632	.93895623	431.815302	3.00569695	1.0000	.13788E+09	9	17
29	414.618632	.93084568	432.804093	3.00423578	1.0010	.17386E+09	9	17
30	402.849566	.96102446	457.583427	3.00889336	1.0000	.20263E+09	11	17
31	397.851066	.97402953	459.783128	3.01024546	1.0000	.10797E+09	11	17
32	412.442031	.93650495	486.112148	3.00529345	1.0000	.13438E+10	11	19
33	402.053230	.96315572	511.899971	3.00914733	1.0000	.16922E+10	13	19
34	397.425330	.97521160	514.062323	3.01035472	1.0000	.91000E+09	13	19
35	397.426230	.97520924	514.061791	3.01035451	1.0000	.91014E+09	13	19
36	413.411640	.93410507	540.409241	3.00487143	1.0001	.13064E+11	13	21
37	416.771640	.92564514	541.420621	3.00324633	1.0000	.16293E+11	13	21
38	413.405244	.93412123	540.407276	3.00487436	1.0000	.13058E+11	13	21
39	401.278314	.96518831	566.214896	3.00937564	1.0000	.14139E+11	15	21
40	396.995314	.97636063	568.341048	3.01045465	1.0000	.76687E+10	13	21
41	414.356319	.93173805	594.702705	3.00443696	1.0001	.12656E+12	15	23
42	417.725319	.92327271	595.707146	3.00276154	1.0001	.15637E+12	17	23
43	400.545824	.96709872	620.527362	3.00958042	1.0001	.11821E+12	17	23
44	396.580824	.97745510	622.619357	3.01054611	1.0001	.64609E+11	15	23
45	415.289804	.92939232	648.992246	3.00399130	.99993	.12219E+13	17	25
46	418.679804	.92089117	649.994517	3.00225895	1.0001	.14973E+13	19	25
47	399.862795	.96887846	674.835999	3.00976344	.99996	.98927E+12	19	25
48	396.185995	.97849405	676.898326	3.01063019	1.0001	.54396E+12	17	25
49	416.248719	.92698346	703.287590	3.00351898	.99994	.11781E+14	19	27
50	419.648719	.91847440	704.285309	3.00173372	1.0000	.14309E+14	21	27
51	399.216847	.97056260	729.146162	3.00993000	1.0000	.82747E+13	21	27
52	395.811847	.97947798	731.178125	3.01070755	1.0000	.45759E+13	19	27
53	417.207657	.92457810	757.580857	3.00303280	.99990	.11323E+15	23	29
54	420.620657	.91605363	758.575863	3.00119258	.99991	.13638E+15	23	29

Видно, что они образуют пары с очень близкими значениями и на графике воспринимаются как одна точка. Для вертикального резонанса четные строки дают начало семейств с выходом по скорости и симметричные по z , нечетные - с выходом по координате. Мы приводим образцы не самых сложных орбит первых десяти семейств.

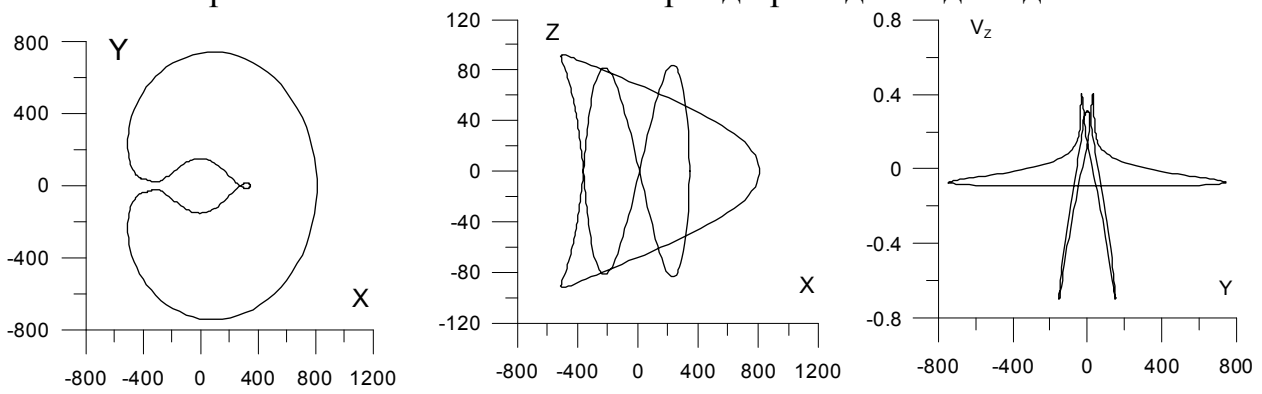
4. Примеры пространственных периодических решений, порождаемых при вертикальных резонансах 1/1 плоских решений.

Орбиты даются в проекциях на плоскости XY , XZ и YV_z .



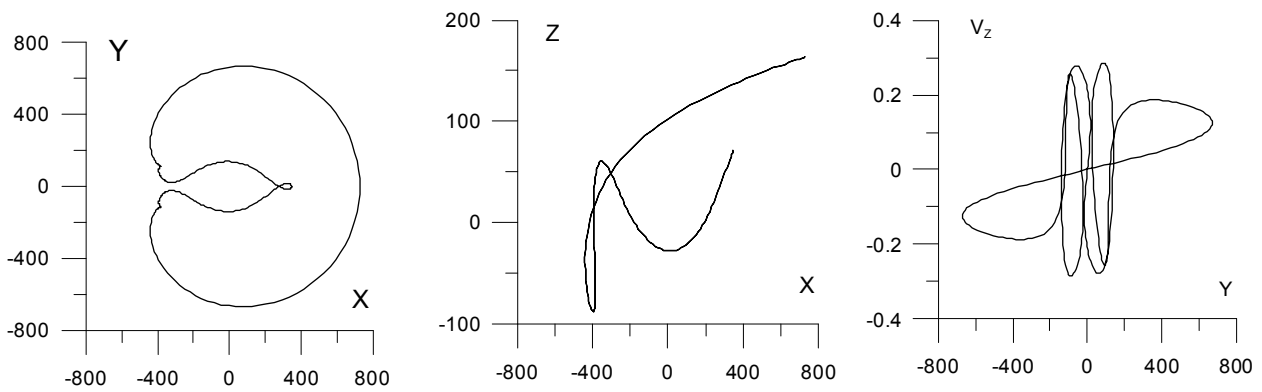
Орбита семейства 1 с периодом 64.9526198 суток

Кривая на плоскости **XZ** за период проходит дважды.

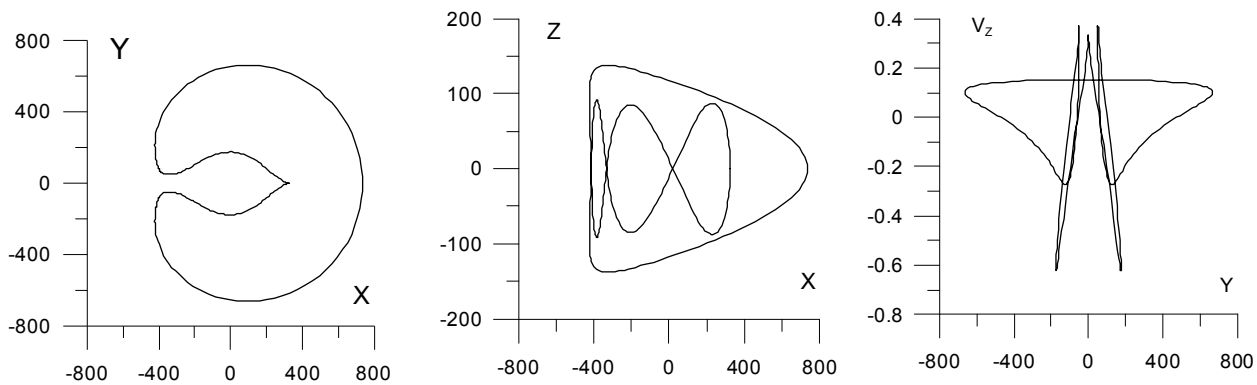


Орбита семейства 2 с периодом 76.4241963 суток

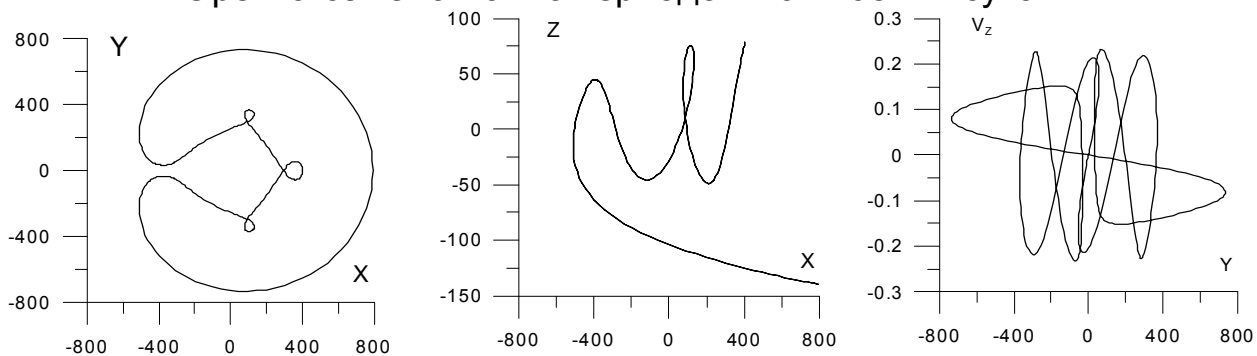
Кривая на плоскости **YV_z** симметрична относительно точки (**Y=0, V_z=0**).



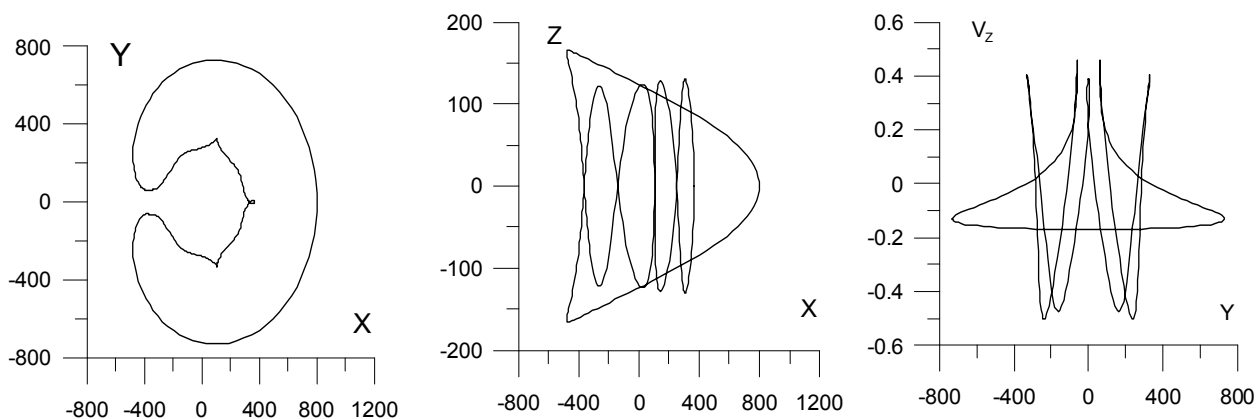
Орбита семейства 3 с периодом 97.4193095 суток



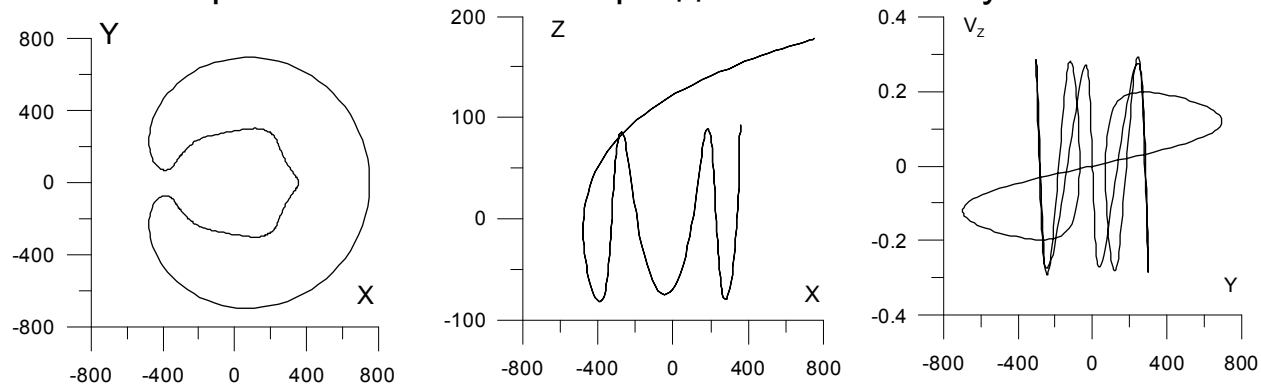
Орбита семейства 4 с периодом 101.798144 суток



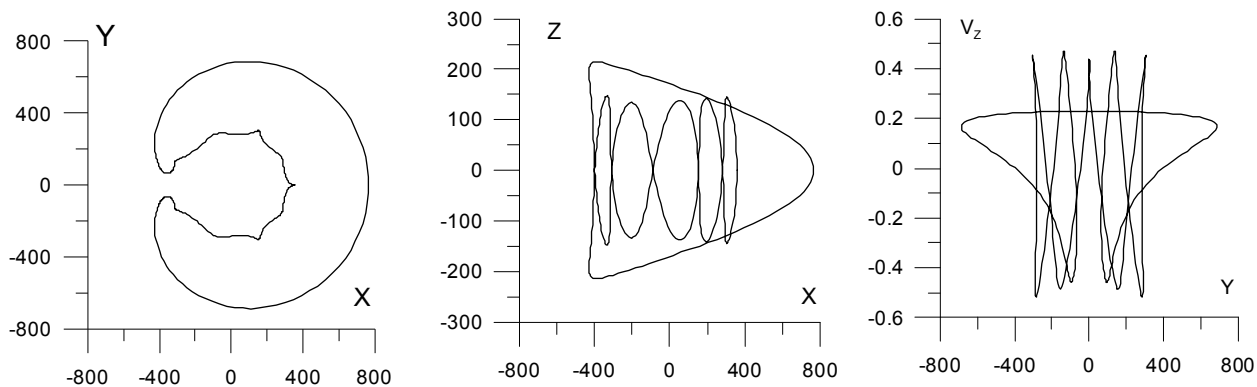
Орбита семейства 5 с периодом 123.548630 суток



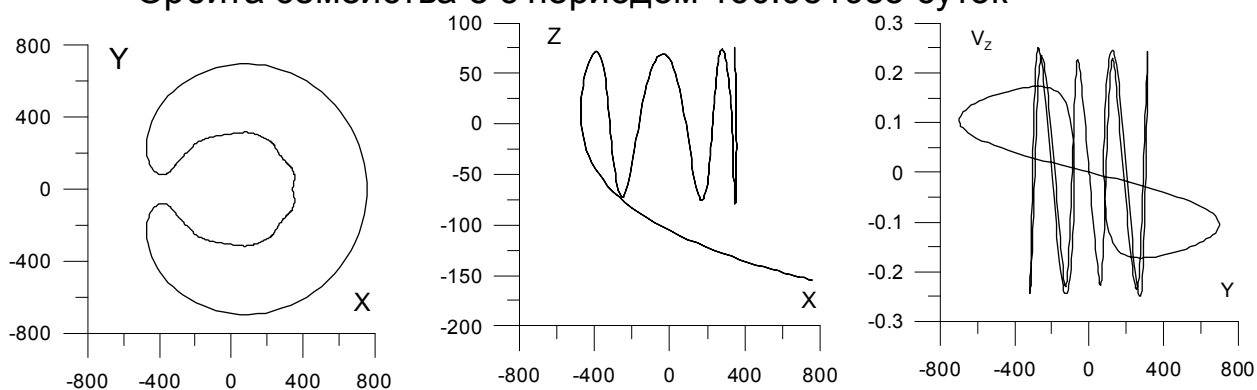
Орбита семейства 6 с периодом 133.517029 суток



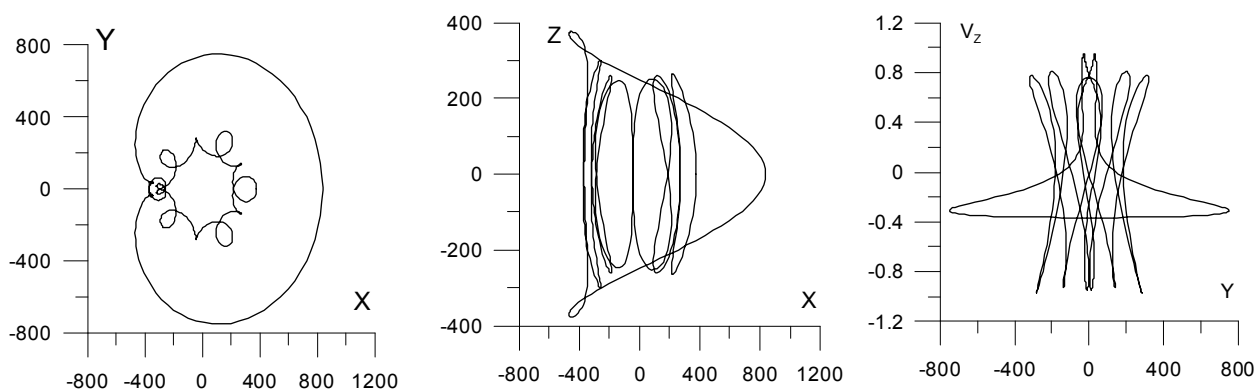
Орбита семейства 7 с периодом 158.634702 суток



Орбита семейства 8 с периодом 160.951985 суток



Орбита семейства 9 с периодом 185.959863 суток



Орбита семейства 10 с периодом 189.421378 суток

Литература

1. Eugene Rabe. Determination and Survey of Periodic Trojan Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies. : ASTRON. J. **66**, № 9, 1961.
2. Al. F. Schanzle. Horseshoe-Shaped Orbits in the Jupiter-Sun Restricted Problem. ASTRON. J. 72, № 2, 1967.
3. D. B. Taylor. Horseshoe Periodic Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies for a Sun-Jupiter Mass Ratio.:Astron. Astrophys. 103, 1981.
4. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М., Наука, 1982, 656с.

5. А.Пуанкаре Новые методы небесной механики.- Избр. тр. Т. 1,2.М. Наука, 1971,1972.
6. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. М., Наука, 1982, с. 296.
7. Крейсман Б.Б. Семейства периодических решений гамильтоновых систем. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел. Космич. исследования, 2005, том 43, №2. С.88-110.
8. Крейсман Б.Б. Периодические решения пространственной ограниченной задачи трех тел. Космич. исслед., 2009, том 47, №1. С. 64-78.

Подписано в печать 25.08.2014 г.
Формат 60x84/16. Заказ № 40. Тираж 140 экз. П.л 1,25.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640