

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Физический
ИНСТИТУТ



*имени
П. Н. Лебедева*

Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

16

И. М. СИЗОВА

**ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕКОТОРЫХ
ИНТЕГРАЛОВ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ
НА АПЕРТУРАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Москва 2014

И.М.Сизова

**Об аппроксимации некоторых интегралов в теории дифракции на
апертурах сложной формы
АННОТАЦИЯ**

В классической задаче дифракции света на ограниченных апертурах расчет потока излучения в заданном конусе угла в дальней зоне Фраунгофера требует вычисления интеграла-свертки функции Бесселя первого порядка с так называемой автокорреляционной функцией (АФ), определяемой интегралом перекрытия по плоскости отверстия двух сдвинутых функций интенсивности поля на отверстии. Расчеты такого типа для апертур сложных форм и произвольных полей на них являются непростой задачей. Поэтому там, где нужна функция потока (астрономия, лазерная техника), обычно ищут приближенные методы расчетов или делают оценки по аналитическим функциям для простых полей и отверстий, которых известны буквально единицы. В работе предложен метод аппроксимации функции потока путем моделирования производной от АФ простыми функциями, допускающими аналитическую свертку с функцией Бесселя или сводящимися к однократным интегралам. В моделях имеются свободные параметры; их выбор позволяет обеспечить как правильное разложение функции потока в начале координат (по углу) и на бесконечности, так и хорошее воспроизведение ее в промежуточной области определения. Недостающие параметры предложено брать из моментов АФ. Обсуждаются и другие источники этих параметров.

I.M.Sizova

**On the approximation of some integrals in the theory of light diffraction
by apertures with complicated shapes
ABSTRACT**

In a classical problem of light diffraction by restricted apertures the evaluation of encircled energy in a definite solid angle in the far-field Fraunhofer zone needs the calculation of an integral - convolution product of Bessel function of the first kind with a so-called optical transfer function (OTF); where OTF is a plane integral over the overlapping area between two displaced field intensity aperture functions averaged overall azimuths. Such calculation for complicated apertures and arbitrary field intensities on them is not an easy task. Therefore, the usual way to estimate the encircled energy in necessity (astronomy, laser technology) is to find the approximate calculation methods or use very few known analytical solutions for simple apertures and field structures. In this paper a method of encircled energy approximation is proposed. The method models the OTF derivative as a simple function that allows an analytical convolution with the Bessel function or reduces to single integrals. These models contain free parameters; their selection allows one to provide both true expansion of an encircled energy in the origin of the angle coordinate and at infinity, as well as good approximation in intermediate domain. Missing parameters are proposed to be taken from the OTF moments. Other sources of these parameters are discussed.

Введение

В работах [1-4] была предпринята попытка аппроксимации функции потока излучения в заданном конусе угла в дальней зоне Фраунгофера при дифракции света на ограниченных апертурах сложной формы и при непостоянном поле на апертуре. Указанная функция потока является интегралом-сверткой функции Бесселя с некоторой вспомогательной функцией, определяемой формой апертуры и распределением падающего излучения на ней. Эта вспомогательная функция, в свою очередь, вычисляется как двойной интеграл по поверхности отверстия. Задачи такого рода возникают во многих областях физики, например, в астрономии, в фотодиссоционных лазерах с накачкой излучением открытых разрядов [5] и т.д. Во всех этих случаях расчет тройного интеграла от осциллирующей функции является времяемкой вычислительной задачей. Такие расчеты трудно поставить на поток, если, например, требуется оценка влияния на результат каких-либо параметров эксперимента или нужна обработка большого объема данных. В то же время во многих случаях точность расчетов функции потока в 10-20% вполне приемлема для практического применения. Поэтому актуальна задача хорошей аппроксимации этой функции на базе какой-то несложно получаемой информации о входных условиях задачи дифракции. Результаты работ [1-4] дали феноменологический способ оценки функции потока, точность которой приемлема при ряде ограничений, как на форму апертуры, так и на структуру падающего поля на ней. Поле должно быть достаточно плавным (гауссовская, лоренцевская, экспоненциальная зависимости и т.д.), а апертура не слишком изрезанной.

В настоящей работе мы вернулись к этой старой задаче аппроксимации функции потока и сделали еще одну попытку нахождения приближенного выражения для нее на базе совсем других соображений, чем использовались в [1-4]. Полученные результаты дают значительно большую точность аппроксимации в более широком диапазоне полей и апертур и, по-видимому, имеют перспективу дальнейшего улучшения в рамках развития предложенной методики.

Основные соотношения

Рассмотрим классическую задачу дифракции излучения, падающего вдоль оси z на перпендикулярное оси плоское отверстие. Будем считать, что фаза излучения на отверстии постоянна (плоская волна), а распределение интенсивности, вообще говоря, произвольное.

Нас интересует функция $\varepsilon(\vartheta)$ - нормированный на полный поток дифрагирующего излучения E_Σ поток излучения в конусе, образующая которого составляет угол ϑ с осью z ,

$$\varepsilon(\vartheta) = \frac{E(\vartheta)}{E_{\Sigma}} = \frac{\int_0^{\vartheta} \vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta, 0) e^{-i \frac{2\pi\vartheta'}{\lambda} (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)} d\xi d\eta \right|^2}{\lambda^2 \iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta, 0)|^2 d\xi d\eta}. \quad (1)$$

Вывод известной формулы (1) подробно описан в [1]. Здесь $E(\vartheta)$ - ненормированный поток; $U(\xi, \eta, 0)$ - поле дифрагирующего излучения в плоскости отверстия ($z = 0$); ξ, η - декартовы координаты в плоскости отверстия; ϑ, φ - полярные координаты пространства, в котором распространяется дифрагирующее излучение (относительно оси z); λ - длина волны излучения; а

$$E_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta, 0)|^2 d\xi d\eta -$$

полный поток излучения через отверстие. Здесь Σ - знак интегрирования по площади отверстия; далее он будет использоваться и для обозначения самой площади отверстия.

Если поле в плоскости отверстия однородно, т.е. $U(\xi, \eta, 0) = Const$ (фазу и для неоднородного поля, как уже сказано, будем полагать постоянной на отверстии; для удобства можно считать ее на нем равной нулю), то формула (1) переходит в

$$\varepsilon(\vartheta) = \frac{\int_0^{\vartheta} \vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \iint_{\Sigma} e^{-i \frac{2\pi\vartheta'}{\lambda} (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)} d\xi d\eta \right|^2}{\lambda^2 \Sigma}, \quad (2)$$

Выражения (1-2) описывают дифрагирующее на плоском отверстии излучение за отверстием и получены по методу Кирхгофа в параксиальной области в приближении Френеля в дальней зоне, называемой зоной Фраунгофера. Они могут быть переписаны в виде [1]

$$\varepsilon(\vartheta) = \frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \int_0^{\infty} T(\rho) J_1\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda} \rho\right) d\rho, \quad (3)$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя первого порядка. В (3) введена так называемая автокорреляционная функция $T(x, y)$, зависящая от декартовых координат x, y в плоскости отверстия и равная

$$T(x, y) = \frac{\iint_{\Sigma} U^*(\xi, \eta, 0) U(\xi + x, \eta + y, 0) d\xi d\eta}{\iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta, 0)|^2 d\xi d\eta}, \quad (4)$$

усредненная по полярному углу ϕ , если вместо декартовых координат x, y ввести в плоскости отверстия полярные координаты ρ, ϕ ($x = \rho \cos \phi$; $y = \rho \sin \phi$),

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\rho, \phi) d\phi. \quad (5)$$

Функция $T(x, y)$ при однородном поле на отверстии интерпретируется как площадь общей части двух сдвинутых друг относительно друга на вектор (x, y) одинаковых отверстий, нормированная на площадь отверстия. Соответственно, $T(\rho)$ в этом случае следует понимать как усреднение этой общей площади по углу направления сдвига при расстоянии сдвига ρ . То есть $T(x, y)$ и $T(\rho)$ при однородном поле являются геометрическими характеристиками формы отверстия. Если поле неоднородно, то $T(x, y)$ и $T(\rho)$ уже будут усредненными полем $U(x, y, 0)$ геометрическими характеристиками. Выражение (3) получается из (1-2) с помощью прямых и обратных Фурье-преобразований функций $T(x, y)$ и $U(x, y, 0)$. Из (4) следует, что $T(0) = 1$.

Из (1-2) для $\varepsilon(\mathcal{G})$ следует, что при малых углах \mathcal{G} (малых значениях величины $2\pi\mathcal{G}/\lambda$) имеет место приближение

$$\varepsilon(\mathcal{G}) \underset{\mathcal{G} \rightarrow 0}{\cong} \pi \Sigma_{eff} \mathcal{G}^2 / \lambda^2 = \frac{1}{4} \left(2\pi \frac{\rho_{1,eff}}{\lambda} \mathcal{G} \right)^2, \quad (6)$$

где величина

$$\Sigma_{eff} = \frac{\left| \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta \right|^2}{\iint_{\Sigma} |U(\xi, \eta, 0)|^2 d\xi d\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, y) dx dy = 2\pi \int_0^{\infty} T(\rho) \rho d\rho \quad (7)$$

при неоднородном поле играет роль эффективной площади, а при однородном просто равна площади отверстия Σ . Очевидно, что $\Sigma_{eff} \leq \Sigma$ и равенство достигается лишь при однородном поле.

Смысл величины размерности длины в (6)

$$\rho_{1,eff} = \sqrt{\Sigma_{eff} / \pi} \quad (8)$$

будет ясен в дальнейшем.

В работе [6] на базе разложения интеграла (3) в ряд по методу Виллиса [7] было показано, что асимптотическое приближение функции $\varepsilon(\mathcal{G})$ при больших значениях величины $2\pi\mathcal{G}/\lambda$ имеет вид

$$\varepsilon(\mathcal{G}) \underset{\mathcal{G} \rightarrow \infty}{\cong} 1 - \frac{(2/\pi)}{(2\pi\rho_{2,eff}\mathcal{G}/\lambda)}, \quad (9)$$

где вторая после (8) величина размерности длины, $\rho_{2,eff}$, определяется как

$$\rho_{2,eff} = \frac{2E_{\Sigma}}{\oint_c |U|^2 dl}. \quad (10)$$

В знаменателе (10) берется интеграл от поля по всему периметру отверстия. В случае однородного поля выражение (10) переходит в

$$\rho_{2,eff} = \rho_2 = 2\Sigma / P, \quad (11)$$

где P – периметр отверстия.

Числовые коэффициенты в (8) и (10) выбраны для удобства так, чтобы в случае кругового отверстия при однородном поле обе эти величины были равными радиусу отверстия. Заметим, что для любого отверстия выполняется соотношение

$$\rho_2 = 2\Sigma / P \leq \sqrt{\Sigma / \pi} = \rho_1 \quad (12)$$

и равенство имеет место лишь для кругового отверстия (в (12) опущен индекс «eff» в выражениях (8) и (10), и в дальнейшем так и будем поступать при однородном поле). Тем более соотношение типа (12) для (8,10) выполняется в случае неоднородного поля. В этом случае даже у кругового отверстия выполнено строгое неравенство.

Итак, для $\varepsilon(\mathcal{G})$ есть приближения при малых и больших значениях аргумента. При этом поведение функции $\varepsilon(\mathcal{G})$ в промежуточной области может быть очень разным; а это, как правило, наиболее интересная для приложений область углов.

Аналитические выражения для $\varepsilon(\mathcal{G})$ получены буквально для единичных случаев отверстий, например, для кругового отверстия при постоянном поле. Это известная функция Релея, имеющая вид

$$\varepsilon_{circ}(\mathcal{G}) = 1 - J_0^2(\Delta) - J_1^2(\Delta), \quad (13)$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков. Здесь через

$$\Delta = 2\pi(\rho / \lambda)\mathcal{G} \quad (14)$$

обозначен аргумент функции Релея (ρ - радиус отверстия). Приближения (6) и (9) хорошо описывают функцию Релея при, соответственно, малых и больших значениях аргумента и, как видно из рис.2 работы [1], совокупность функций (6,9), соединенных в точке их пересечения, является хорошей аппроксимацией всей функции Релея (напомним, что для кругового отверстия при постоянном поле $\rho_{1,eff} = \rho_{2,eff} = \rho$).

Точный численный расчет функции (3) с учетом (4-5) в силу осцилляции подынтегральной функции и необходимости фактически считать тройной интеграл, является непростой задачей и требует, как правило, значительного времени счета. А потребности расчетов таких интегралов для замысловатых отверстий (и неоднородных полей) велики и в астрономии [8], и в других областях физики, например, в конструкциях некоторых лазеров [5]. Во многих из этих случаев расчет функции (3) допустим приближенно, правда, желательно хорошее приближение. В работе [1] мы показали, что при постоянном поле и при не очень больших значениях параметра μ , равного

$$\mu = \rho_1 / \rho_2, \quad (15)$$

неплохим приближением для точной функции $\varepsilon(\mathcal{G})$ является как раз функция Релея (13), взятая от аргумента $\Delta_2 = 2\pi(\rho_2 / \lambda)\mathcal{G}$, где, напоминаем, под ρ_2 мы подразуме-

ваем величину (11), полученную из (10) при постоянном поле (см.(12)). И чем меньше μ , тем это приближение лучше.

Хуже обстоит дело при непостоянном поле. В этом случае величина (15) обычно намного больше, чем она была бы, если бы поле было постоянным. А параметр (10) может быть настолько мал (случаи «мягких» апертур, когда поле по краям исчезающее мало), что асимптотика (9) «работает» только для очень больших углов, когда формулой (1) вообще нельзя пользоваться, потому что мы уже выходим за границы параксиального приближения.

Этот вопрос подробно рассматривался в работах [1-4]. В [1] было показано, что если поле внутри отверстия меняется достаточно плавно (гауссовская зависимость или экспоненциальная), то хорошим приближением $\varepsilon(\mathcal{G})$ может служить функция Релея (13) от аргумента типа (11), в котором вместо площади отверстия использована эффективная площадь (7), а вместо периметра – соответствующий этой эффективной площади периметр, получаемый как длина границы, проходящей по горизонтали рельефа амплитуды поля на отверстии

$$\tilde{\rho}_{2,eff} = 2\Sigma_{eff} / P_{eff}. \quad (16)$$

Более того, оказалось, что в рассмотренных случаях почти без потери точности приближения можно не мучаться с точным расчетом P_{eff} через Σ_{eff} , решая соответствующее трансцендентное уравнение, а взять площадь и периметр отверстия, соответствующего уровню рельефа поля $1/e^2$ от максимального значения (если поле на каких-то частях реальной границы еще не спадает до указанного уровня, то в этих местах берется граница отверстия).

Заметим, что параметр (16) (и тем более его приближение «по уровню $1/e^2$ ») никак не вытекает из определения (10) или каких-либо других строгих математических приближений для $\varepsilon(\mathcal{G})$; получен он феноменологически и применимость его предложена на основе многочисленных расчетов конкретных $\varepsilon(\mathcal{G})$ для отверстий, встречающихся в иодных фотодиссоционных лазерах с гауссовыми или экспоненциальными полями на отверстиях [1,5]. В работе [2] мы предприняли не увенчавшуюся успехом попытку обосновать или улучшить предложенный в [1] феноменологический подход. Оказалось, что предложенное в [1] приближение близко к оптимальному в рассмотренных условиях, но не может быть рекомендовано в других ситуациях. Например, если поле на апертуре имеет в какой-то небольшой области (в «керне») высокое значение, а в остальной, много большей области («периферия»), - малое значение, но интегрально энергии в «керне» и на периферии сравнимы.

Кроме того, параметр длины (16) для подстановки в функцию (13) не удалось ни улучшить, ни приближенно воспроизвести с помощью расчетов через функцию (5), от которой только и зависит $\varepsilon(\mathcal{G})$. В частности, не удалось это сделать перебором параметров длины из комбинаций моментов функции $T(\rho)$.

В настоящей работе предпринята еще одна попытка аппроксимировать $\varepsilon(\vartheta)$ на основе моделирования $T(\rho)$, используя другой подход, чем в работах [1-4].

В работах [9-12] нами было выявлено свойство приближенного подобия некоторых функций, получаемых в результате свертки базовых функций с рядом осциллирующих функций (свертки типа (3)). Этот результат и вдохновил на предпринятую в данной работе попытку. Оговоримся сразу, что подход в обоих случаях был не столько математическим (тем более строго математическим), сколько физическим. Мы рассмотрели функции, описывающие определенные физические объекты, и, опираясь на свойства именно этих объектов, в численных экспериментах выявили свойство приближенного подобия, позволившее предложить методику простой аппроксимации функций, сложно рассчитываемых точно. А именно, в работах [9-12] речь шла об интегральных функциях, получаемых из функций, имеющих смысл спектральных плотностей случайных процессов. Функции, описывающие спектральные плотности, по своему аргументу – частоте, естественно разбить на (в общем случае разнесенные) куски, каждый из которых характеризует слившиеся (вследствие расширения линий) области близлежащих частот. Мы подробно рассмотрели монохромные функции (один кусок) и диахромные (два куска – типа двугорбых функций). Удалось найти математические критерии разделения на «куски», не привязанные к виду функции. И оказалось, что итоговые интегральные функции (свертки наших спектральных плотностей с некоторыми осциллирующими функциями) обладают свойством подобия (почти совпадают при определенной нормировке) и зависят не от конкретного вида спектральных плотностей, а от небольшого количества числовых параметров, вычисляемых через функции этих спектральных плотностей. Так, для монохромных плотностей вид функции вообще не имеет значения, а достаточно через эту плотность вычислить коэффициент подобия, т.е. параметр нормировки аргумента аппроксимируемых функций. Для диахромных функций кроме коэффициента нормировки нужно еще знать три параметра, характеризующих «двугорбость» - две характеристики «частей» плюс параметр разнесенности этих частей. Вероятно, указанная процедура разделения интегральной плотности на «части» может быть продолжена, но без строгого математического обоснования предложенной аппроксимации у нас не хватило времени проводить многократные численные эксперименты. Установив факт подобия, мы взяли вместо точных (монохромных или диахромных) спектральных плотностей простые функции, имеющие те же необходимые числовые параметры, но допускающие аналитическое интегрирование в свертке с рассматриваемыми осциллирующими функциями, и получили приближения нужных интегралов в компактном аналитическом виде, зависящие от упомянутых параметров. Причем, иногда - несколько вариантов с помощью разных математических выражений, численно почти не отличимых.

Что-то похожее захотелось сделать и для аппроксимации $\varepsilon(\vartheta)$ через какие-то характеристики $T(\rho)$. Есть, правда, существенное отличие, связанное с природой функции $T(\rho)$. Она описывает усредненное по углу перекрытие разнесенных на расстояние ρ двух отверстий, рассчитанное с весом, пропорциональным интенсивности

поля на отверстии. При этом, как видно из (6,8-10), важную роль играют эффективная площадь отверстия (7), являющаяся первым моментом функции $T(\rho)$, и параметр (10), обратно пропорциональный производной $T(\rho)$ в нуле аргумента (см. [1,6])

$$T'(0) = -\frac{2}{\pi\rho_{2,eff}}. \quad (17)$$

Поэтому при аппроксимации $\varepsilon(\vartheta)$ было решено опираться не на вид функции $T(\rho)$, как в [9-12], а на замену этой функции другой, удобной для интегрирования по формуле (3) и имеющей с точной $T(\rho)$ ряд одинаковых характеристик. Поскольку, как и в работах [1-4], нет математического обоснования искомого приближения, было решено остановиться на совпадении у модельной и точной $T(\rho)$ их нескольких моментов. Заметим, что, в отличие от работы [2], теперь эти моменты нужны не для поиска линейного параметра в аргументе функции (13), а для выбора параметров при аппроксимации функции $T(\rho)$ в некотором выбранном функциональном виде.

Прежде, чем анализировать функции (3), примем во внимание еще одно соображение. В работах [9-12] функции, приближенное подобие которых мы изучали, как и (3), являлись свертками некоторых базовых функций с осциллирующими. Но при этом осциллирующие функции либо имели абсолютный максимум в нуле аргумента, либо их экстремумы были постоянны по амплитуде (синусы, косинусы). Возможно, этот факт важен, поскольку осцилляции «отрезают» хвосты базовых функций, выделяя роль основных их частей вблизи нуля аргументов.

В выражении (3) ситуация другая. Функция Бесселя первого порядка в нуле аргумента равна нулю и тем самым занижена роль основной части функции $T(\rho)$, имеющей свой абсолютный максимум в нуле. Из этих соображений аппроксимация $\varepsilon(\vartheta)$ проводилась после преобразования (3) к виду

$$\varepsilon(\vartheta) = 1 - \int_0^{\infty} \Gamma(\rho) J_0\left(\frac{2\pi\vartheta}{\lambda}\rho\right) d\rho, \quad (18)$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка, а функция $\Gamma(\rho)$ определяется как

$$\Gamma(\rho) = -T'(\rho). \quad (19)$$

При выводе (18) из (3) учтены свойства функций Бесселя и равенства $J_0(0) = 1$ и $T(0) = 1; T(\infty) = 0$.

Осциллирующая функция Бесселя нулевого порядка имеет уже нужный нам вид – абсолютный максимум в нуле и убывание экстремумов с ростом аргумента.

Надо заметить, что численный расчет $\varepsilon(\vartheta)$ по формуле (18) вместо (3) бессмысленен, поскольку, если функцию $T(\rho)$ для произвольной ситуации еще можно рассчитать численно (хоть это и тройной интеграл, но в принципе возможно), то функцию $\Gamma(\rho)$ как производную от $T(\rho)$ вообще численно рассчитать проблематично – всегда можно промахнуться и пропустить какие-то маловажные изменения в

$T(\rho)$, но заметные в $\Gamma(\rho)$. Поэтому для сравнений аппроксимаций и точных функций будут использованы либо аналитически рассчитываемые функции $\Gamma(\rho)$, либо численный счет по формуле (3).

Итак, будем искать приближение для $\varepsilon(\mathcal{G})$ на базе интеграла (18). Функция $\Gamma(\rho)$ по своему определению удовлетворяет следующим условиям (см. (7,17,19-20))

$$\Gamma(0) = \frac{2}{\pi\rho_{2,eff}}; \quad \int_0^{\infty} \Gamma(\rho)d\rho = 1; \quad \int_0^{\infty} \Gamma(\rho)\rho^2 d\rho = \Sigma_{eff} / \pi. \quad (21)$$

Из (19-20) следуют равенства, связывающие моменты функций $\Gamma(\rho)$ и $T(\rho)$ ($\Gamma(\rho)$ и $T(\rho)$ играют роли плотностей вероятности в определении этих моментов)

$$\int_0^{\infty} \Gamma(\rho)\rho^n d\rho = n \int_0^{\infty} T(\rho)\rho^{n-1} d\rho = \tilde{I}_n. \quad (22)$$

Моменты в (22) обозначены с тильдой, чтобы отличать их от используемых далее перенормированных моментов (31).

Рассмотрим сначала случай однородного поля, когда многие используемые характеристики имеют ясную геометрическую интерпретацию. А потом перейдем к неоднородному полю.

Постоянное (однородное) поле на отверстии

Чтобы удобнее было апеллировать к результатам работ [1-4] и сопоставлять функции в едином безразмерном виде, будем далее нормировать аргументы всех функций на единицу длины ρ_2 (12), имеющую смысл удвоенного отношения площади отверстия к его периметру. И вместо (19) введем безразмерную функцию

$$\tilde{\Gamma}(\zeta) = \frac{\pi\rho_2}{2} \Gamma(\rho = \rho_2\zeta) = -\frac{\pi}{2} T'_{\zeta}(\rho = \rho_2\zeta) \quad (23)$$

от безразмерного аргумента

$$\zeta = \rho / \rho_2. \quad (24)$$

Она равна единице в максимуме (нуле аргумента). Тогда равенства (21) перейдут в

$$\tilde{\Gamma}(0) = 1; \quad \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta)d\zeta = \pi/2; \quad \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta)\zeta^2 d\zeta = \mu^2 \pi/2, \quad (25)$$

где μ - параметр, введенный (15). Во всех дальнейших расчетах предполагается, что параметр μ известен и любая аппроксимация функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ удовлетворяет (25).

Соотношение (18) через (23) переписется в виде

$$\varepsilon(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) J_0(\Delta_2 \zeta) d\zeta, \quad (26)$$

где по аналогии с (14) введен параметр

$$\Delta_2 = 2\pi(\rho_2 / \lambda)\vartheta,$$

от которого теперь будет рассматриваться функция $\varepsilon(\vartheta)$.

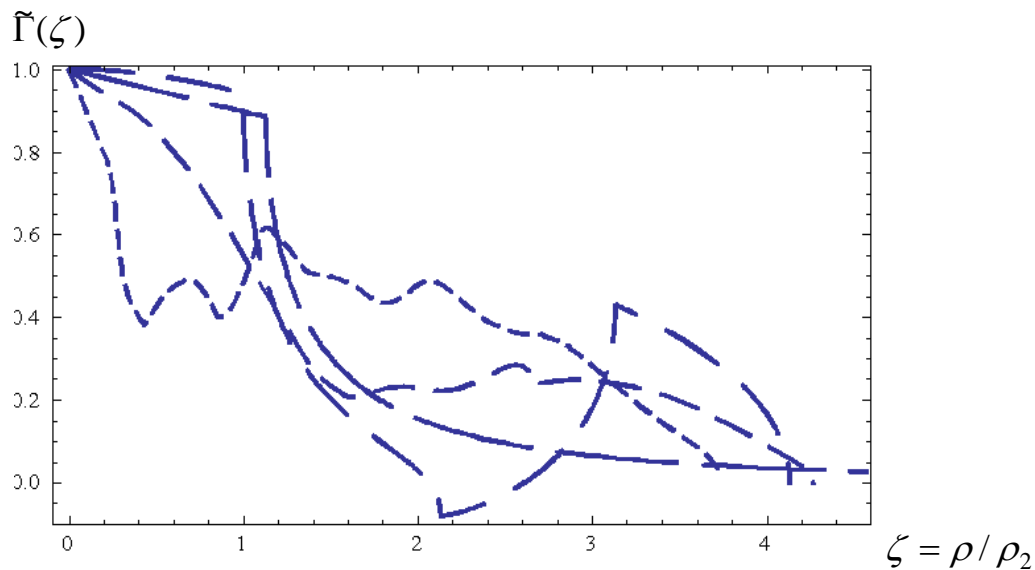


Рис.1

Функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для четырех различных отверстий при значении параметра $\mu = \rho_1 / \rho_2 = 1,77$. Формы отверстий (по возрастанию длины штрихов у кривых): 3O1 ($d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$); 3O2 ($d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$); прямоугольник с отношением сторон $a/b = 9,84$ («хвост» кривой простирается до $\zeta = 8,8$); кольцо с отношением диаметров $d = 0,516$.

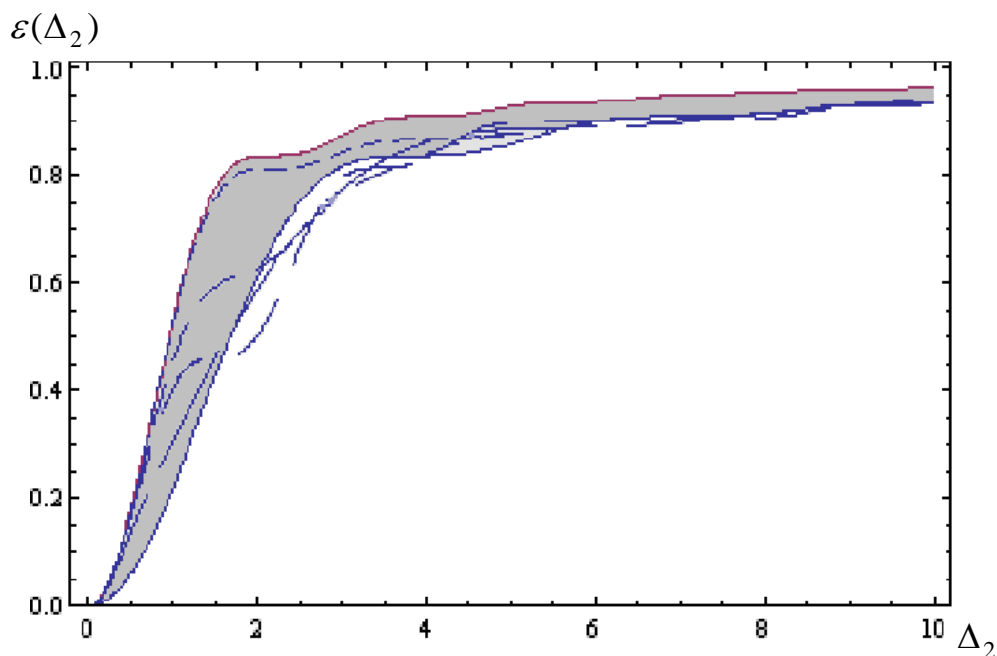


Рис.2

Функции $\varepsilon(\Delta_2)$, рассчитанные для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с рис.1. Штриховые кривые соответствуют кривым на рис.1. Сплошными линиями изображены функции Релея (13) от аргумента Δ_2 (правее) и $\mu\Delta_2$ (левее). Область между ними заштрихована для удобства наблюдения перехода $\varepsilon(\Delta_2)$ между ними.

Напомним, что согласно (6,9), $\varepsilon(\Delta_2)$ имеет при малых и больших значениях Δ_2 , соответственно, вид $\varepsilon(\Delta_2) \underset{\Delta_2 \rightarrow 0}{\cong} \frac{1}{4}(\Delta_2 \mu)^2$ и $\varepsilon(\Delta_2) \underset{\Delta_2 \rightarrow \infty}{\cong} 1 - \frac{(2/\pi)}{\Delta_2}$. И, если на графике с абсциссой Δ_2 начертить две функции Релея (13) от аргументов Δ_2 и $\Delta_1 = \mu \Delta_2$, то точная функция $\varepsilon(\Delta_2)$ в начале координат пойдет по второй кривой, а под конец перейдет на первую кривую. Как следует из (2), она везде неубывает, не превышает значения 1 и может иметь точки перегиба (области темных колец Фраунгофера на дифракционной картине в дальней зоне) вдоль всей своей области определения. В остальном характер перехода $\varepsilon(\Delta_2)$ с одной кривой Релея на другую может быть очень разным при данном значении μ - плавным в промежуточной области значений, резким почти горизонтальным перескоком вблизи верхнего «плато» или переходом с несколькими выраженными точками перегиба. На рис.1 приведен пример 4-х функций (23) для разных форм отверстий при $\mu = 1,77$. Для этого из работы [1] взяты отверстия, для которых получаются качественно разные виды функций $\varepsilon(\Delta_2)$ (они приведены на рис.2): прямоугольное, кольцевое и два зубчатых отверстия (см. это отверстие на рис.7 в [1], воспроизведенное здесь на рис.3). Заметим, что на рис.1 три из функций приведены полностью (до своего нулевого значения), а четвертая (для прямоугольного отверстия) обрезана, т.к. она имеет длинный близкий к нулю «хвост» до $\zeta = 8,8$, но в расчетах, естественно, функция использовалась целиком. На рис.2 функции для зубчатых отверстий рассчитаны в ограниченной области, т.к. расчет соответствующих интегралов требует многих часов времени.

Зубчатые отверстия (ЗО) на рис.3 определяются 3-мя параметрами, сильно влияющими на вид функций и (23), и (26): отношение диаметров d , число вырезов n и скважность отверстия η (т.е. доля кольца, приходящаяся на вырез). Для точного расчета функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ ЗО была разработана методика, использованная в дальнейшем для расчетов $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ кольцевых отверстий с неоднородными полями. По ней были рассчитаны несколько десятков функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для разных наборов параметров, из которых для настоящей работы были выбраны два заметно различных с одним и тем же значением μ (отсюда выбор числа 1,77 для μ): $d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$ (ЗО1) и $d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$ (ЗО2). Заметим, что $\mu = 1,77$ - это довольно большое значение для постоянного поля. Так, у прямоугольника оно соответствует отношению измерений прямоугольника $a/b = 9,84$, а у кольца – отношению диаметров $d = 0,516$. Для кольца и прямоугольника функция $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ описывается аналитически

$$\tilde{\Gamma}_{ring}(\zeta) = \frac{\left\{ \sqrt{(\mu^2 + 1)^2 - \zeta^2}, \zeta \leq \mu^2 + 1 \right\} + \left\{ \sqrt{(\mu^2 - 1)^2 - \zeta^2}, \zeta \leq \mu^2 - 1 \right\} - \left\{ 2\sqrt{\mu^4 - \zeta^2} \sqrt{\zeta^2 - 1} / \zeta, 1 \leq \zeta \leq \mu^2 \right\}}{2\mu^2}, \quad (27)$$

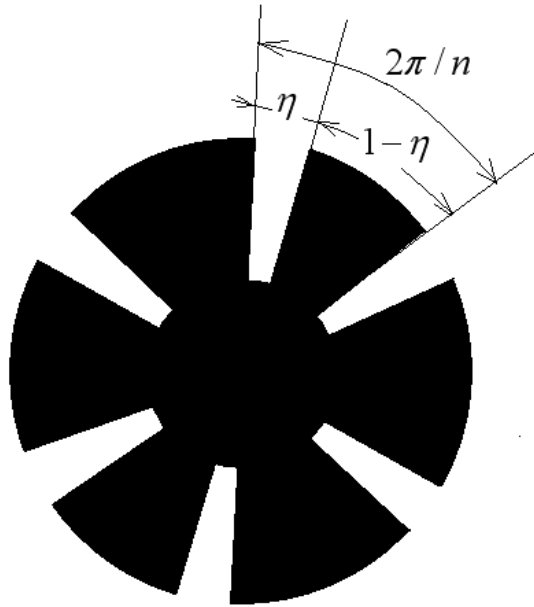


Рис.3

Зубчатое отверстие (закрашено) – ЗО, для которого рассчитывались функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon(\Delta_2)$ при однородном поле. Отверстие обладает симметрией поворота относительно центра концентрических кругов. Форма отверстия определяется тремя параметрами – отношением радиусов кругов d , степенью симметрии поворота n , скважностью вырезов η .

$$\tilde{\Gamma}_{rect}(\zeta) = \begin{cases} 1 - \theta, & \theta \leq 0,5 \left(1 - \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right) \\ \left[\frac{0,5 \left[1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} - \sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right)^2 - 4/\zeta^2} \right]}{-\sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right)^2 - 4/\zeta^2}} \right], & 0,5 \left(1 - \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right) \leq \theta \leq 0,5 \left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right) \\ \left[\frac{\theta - 0,5 \sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right)^2 - 4/\zeta^2}}{-0,5 \sqrt{\left(1 - \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right)^2 - 4/\zeta^2}} \right], & 0,5 \left(1 + \sqrt{1 - 4/(\pi\mu^2)} \right) \leq \theta \leq \sqrt{1 - 2/(\pi\mu^2)} \end{cases} \quad (28)$$

где для краткости введено обозначение $\theta = \frac{\zeta}{\pi\mu^2}$. Оба выражения (27-28) приведены от параметра (15) μ , который для кольца через отношение радиусов кругов d выражается формулой $\mu = \sqrt{(1+d)/(1-d)}$, а для прямоугольников – через измерения прямоугольника a, b формулой $\mu = (a+b)/\sqrt{\pi ab}$. Для кольца нет ограничений на значение $\mu \in [1, \infty)$, а для прямоугольника $\mu \in [2/\sqrt{\pi} \approx 1,13, \infty)$.

Из рис.1 видно, как заметно могут различаться функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ при одном и том же значении μ , а рис.2 иллюстрирует, что переход реальной функции $\varepsilon(\Delta_2)$ с функции Релея от аргумента $\mu\Delta_2$ в начале координат на функцию Релея от аргумента Δ_2 при больших значениях Δ_2 может происходить по-разному и в разных областях аргумента. Эти две функции Релея (в основном, вторая, если интересоваться большими значениями $\varepsilon(\Delta_2)$) и есть та аппроксимация реальной $\varepsilon(\Delta_2)$, которую нам дает разложение интеграла (3) в ряд в нуле и по методу Виллиса [5].

Чтобы улучшить аппроксимацию $\varepsilon(\Delta_2)$, рассмотрим несколько простых моделей функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. Их выбор продиктован тремя соображениями. Во-первых, ищем $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в виде функций, допускающих аналитический расчет интеграла с функцией Бесселя нулевого порядка (см.(26)), в крайнем случае, интеграл, который можно затабулировать для быстрого практического применения. Во-вторых, параметры моделей должны быть легко рассчитываемы через характеристики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (или $T(\zeta)$). И, в-третьих, следует использовать такие характеристики $T(\zeta)$, которые в равной степени годятся и для неоднородного поля на апертуре, чтобы в дальнейшем применять предлагаемые приближения и в такой ситуации. Так, из последних соображений не годится в качестве характеристики ζ_{\max} (для которого $\tilde{\Gamma}(\zeta \geq \zeta_{\max}) = 0$ и $T(\zeta \geq \zeta_{\max}) = 0$), поскольку, хотя для однородного поля это, как правило, хорошая характеристика, для неоднородного поля это не так, особенно для «мягких» апертур, когда поле на апертуре (или его существенной части) исчезающее мало.

Функций, допускающих аналитический расчет интеграла с $J_0(qx)$ (q - произвольное число), не так уж много. Остановимся на постоянной функции, линейной функции (обе встречаются в (28) и интегралы от них в произвольном интервале выражаются через известные спецфункции) и функции вида

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (29)$$

которая определяет $\tilde{\Gamma}_{\text{circ}}(\zeta) = \sqrt{1 - (\zeta/2)^2}$ для кругового отверстия и присутствует в двух первых слагаемых в выражении (27) для кольцевого отверстия (она дает аналитическое выражение при свертке с $J_0(qx)$ на интервале $[0; a]$). В одной из моделей используем также функцию вида третьего слагаемого в (27)

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{x^2 - 1} / x, \quad (30)$$

интеграл от которой с $J_0(qx)$ на интервале $[1; a]$, хотя и не рассчитывается аналитически, но зависит от одного параметра, и при необходимости может быть затабулирован для практического применения.

Аналитически интегрируется еще произведение функции (29) с линейной, но в наши модели такие функции не «вписались».

Заметим, что даже функции (27-28) аналитически не интегрируются с $J_0(qx)$ (только некоторые их части), а рассчитываются через одинарные интегралы.

Итак, ограничимся перечисленными моделями $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ при условии $\tilde{\Gamma}(0) = 1$ (см.(25)), зависящими от 3-х, 4-х и 5-ти параметров. Два других равенства из обязательного набора (25) для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ обеспечат значения двух параметров в каждой модели. Остальные (один, два или три) надо откуда-то взять. Отталкиваясь от равенств (25), используем в качестве «источника» параметров моменты функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (или, согласно (22), моменты на единицу меньшего порядка функции $T(\zeta)$), а именно

$$I_1 = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta d\zeta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} T(\zeta) d\zeta; I_3 = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta^3 d\zeta = 3 \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} T(\zeta) \zeta^2 d\zeta; I_4 = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\zeta) \zeta^4 d\zeta = 4 \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} T(\zeta) \zeta^3 d\zeta. \quad (31)$$

В (31) пропущены нулевой и второй моменты $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, поскольку они уже использованы в (25). Подчеркнем еще раз, что нет никаких строгих математических обоснований выбора именно моментов функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для нахождения параметров модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (как, впрочем, и выбора самих моделей). Наш поиск сугубо феноменологический и нацелен скорее на иллюстрацию факта существования, а не на обоснованный выбор. Факта существования значительно лучшего приближения для $\varepsilon(\Delta_2)$, чем $\varepsilon_{circ}(\Delta_2)$ (см. (13)), на основе знания всего лишь одной-трех цифр, характеризующих отверстие и поле на нем, т.е. $T(\zeta)$.

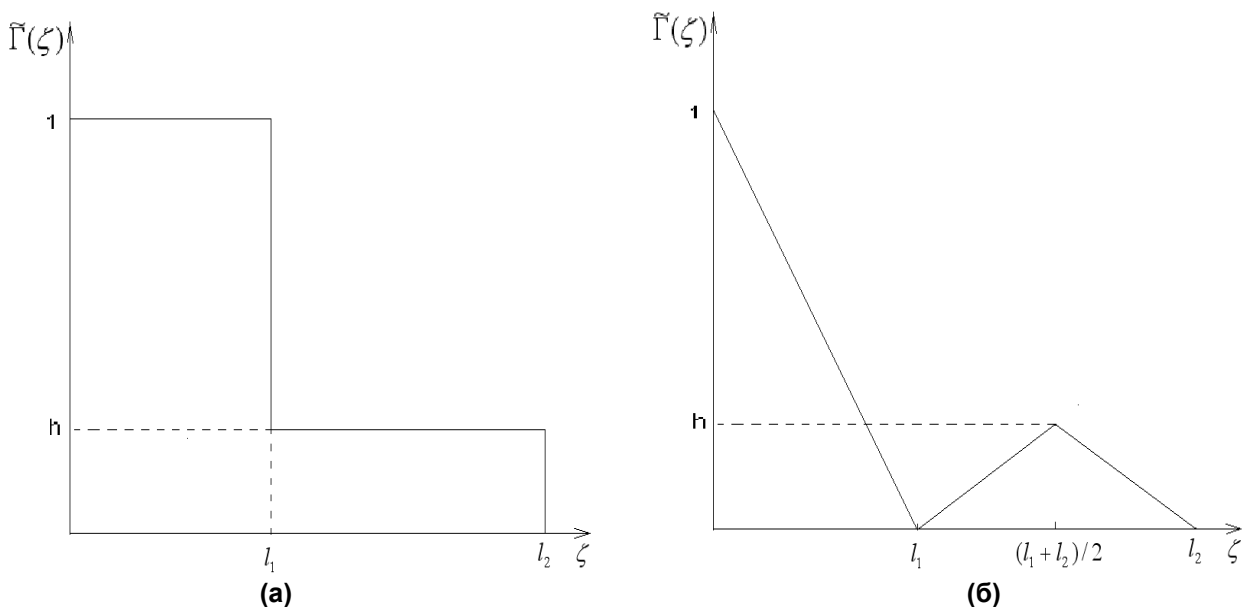


Рис.4

Однопараметрические модели функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. Два из трех параметров, фигурирующих на графиках, определяются уравнениями (25), один параметр – свободный. По смыслу функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для обеих моделей $0 < l_1 \leq l_2$, а значение h , вообще говоря, не регламентировано, в том числе оно может быть и отрицательно.

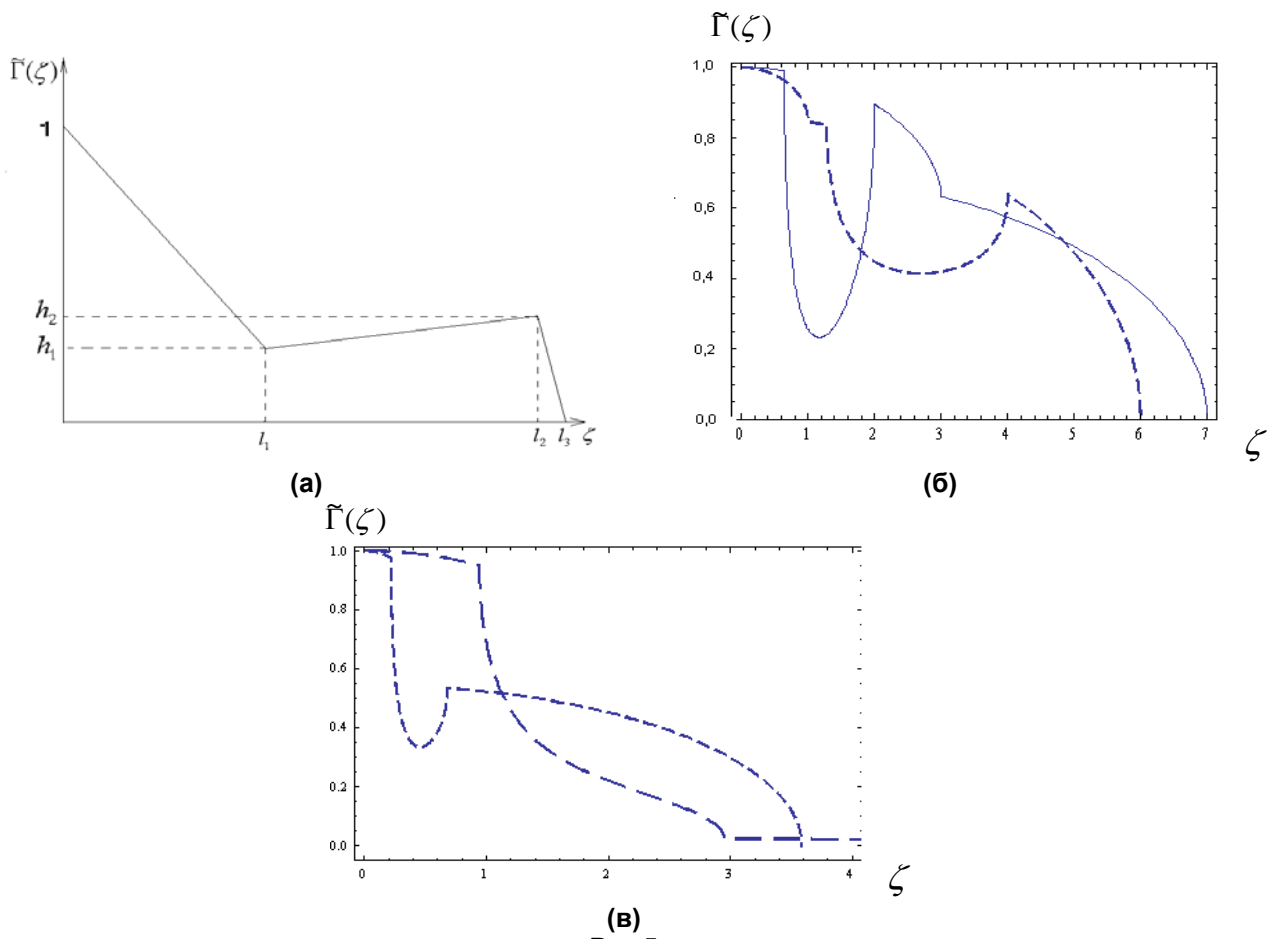


Рис.5

Двухпараметрические модели функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.

(а) - Два из четырех параметров, фигурирующих на графиках, определяются уравнениями (25), два других параметра – свободные. По смыслу функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ у модели должно быть $0 < l_1 \leq l_2$. Соотношение между h_1, h_2 может быть произвольным, в том числе, вообще говоря, один из них или оба могут быть отрицательными.

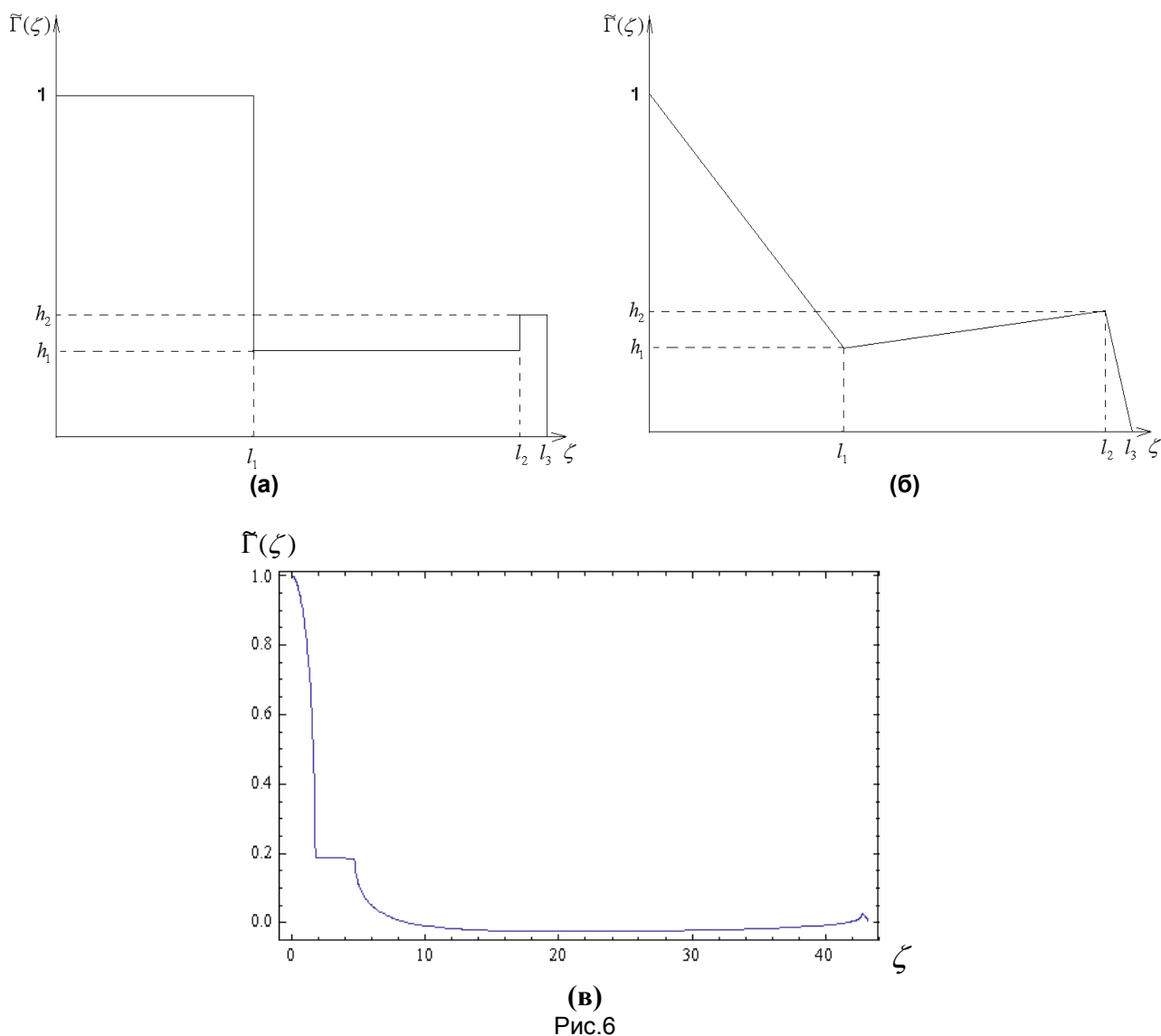
(б) - Функции, описываемые уравнением (49), где предполагается, что выполнено (25), (51) и (52), что определяет 5 параметров из 7 в (49). Два параметра остаются свободными.

(в) - Функции, описываемые уравнением (49), где предполагается, что выполнено (25), (51) и (53), что определяет 5 параметров из 7 в (49). Два параметра остаются свободными.

Вид функций типа (б) и (в) может быть более разнообразным, чем представлено на графиках.

На рис.4-6 показаны использованные модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. В каждой модели, учитывая равенства (25), для расчета всех параметров надо использовать на 2 меньше моментов, чем число параметров на рисунках (т.е. I_1 на рис.4, $I_1; I_3$ на рис.5 и $I_1; I_3; I_4$ на рис.6). Задача с помощью подбора параметров максимально приблизиться к точному виду функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ не ставилась. Поэтому и ограничения на параметры моделей были минимальными (например, на значения узловых точек по вертикали - h_i), допуская, возможно, и не очень реалистичные виды модельных функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. Была задача показать, что даже с помощью таких нехитрых моделей можно значительно улучшить приближение для $\varepsilon(\Delta_2)$. По той же причине значения пара-

метров вычислялись из моментов, а не подбором для максимального приближения к реальной $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, хотя, как будет видно дальше, часто именно так и получалось. Предполагалось, что точный вид $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ неизвестен, а потому опираться на него нельзя.



Трехпараметрические модели функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.

(а,б) - Два из четырех параметров, фигурирующих на графиках, определяются уравнениями (25), три параметра – свободные. По смыслу функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ у модели должно быть $0 < l_1 \leq l_2 \leq l_3$. Соотношение между h_1, h_2 может быть произвольным, в том числе, вообще говоря, один из них или оба могут быть отрицательными.

(в) - Функция, описываемая уравнением (49), где из выполнения (25) и условия (51) определяются 4 параметра из 7. Три параметра остаются свободными. Вид этой функции может быть очень разнообразным.

Чтобы проиллюстрировать, что поиски не бессмысленны, на рис.7 показаны для самой простой модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с рис.4а варианты кривых $\varepsilon(\Delta_2)$ при $\mu = 1,77$ и варьировании параметра l_2 , на который из второго равенства (25) накладывается

только одно ограничение - $l_2 \geq \pi/2$. Два других параметра (l_1 и h) модели находятся при этом из (25) с помощью уравнений

$$h^2 - 2h \frac{3\pi\mu^2 + l_2(l_2^2 - 0,75\pi^2)}{3\pi\mu^2 + 4l_2^2(l_2 - 0,75\pi)} + \frac{\pi(3\mu^2 - 0,25\pi^2)}{3\pi\mu^2 + 4l_2^2(l_2 - 0,75\pi)} = 0; l_1 = \frac{0,5\pi - l_2h}{1 - h}, \quad (32)$$

где в квадратном уравнении все коэффициенты положительны (это следует из $l_2 \geq \pi/2$ и $\mu \geq 1$). Вообще говоря, при каких-то μ и l_2 могут не существовать действительные корни h квадратного уравнения. Если же существуют, то их два и оба положительны. Для какого-то из этих положительных корней может не выполняться условие $l_2h < \pi/2$, необходимое для положительности l_1 (что при этом $l_1 \leq l_2$ следует из $l_2 \geq \pi/2$). Для $\mu = 1,77$ расчеты по (32) показали, что существование действительных корней h и положительность l_1 имеют место примерно при $l_2 \geq \pi$ и лишь для меньшего корня h . При этом $h < 1$ (это следует и из того, что при $l_2 \geq \pi/2$ дробь при линейном члене квадратного уравнения в (32) меньше единицы).

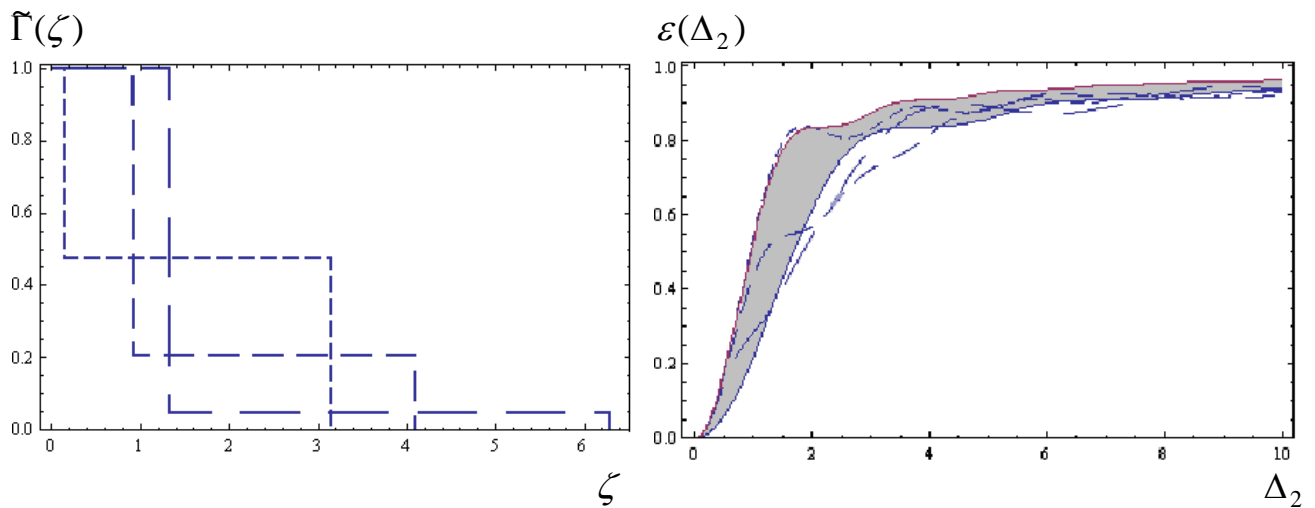


Рис.7

Слева показаны графики модельных кривых рис.4а при $\mu = 1,77$ и значениях $l_2 = \pi; 1,3\pi; 2\pi$ (по возрастанию длины штрихов кривых). Справа - графики соответствующих им кривых (26), изображенных теми же типами кривых. Как и на рис.2, сплошными линиями приведены функции Релея (13) от аргумента Δ_2 (правее) и $\Delta_1 = \mu\Delta_2$ (левее), а область между этими функциями заштрихована.

Из сопоставления рис.7 и рис.2 видно, что виды кривых $\varepsilon(\Delta_2)$ на рис.7 при изменении параметра l_2 действительно могут принимать формы, очень похожие на реальные кривые с рис.2, и есть надежда решить поставленную задачу. Но видно также, что кривые на рис.7 могут иметь области «нефизичного» поведения (в данном случае области убывания, что невозможно для реальной функции $\varepsilon(\Delta_2)$). На рис.7 этим в той или иной степени грешат все три приведенные кривые. И, как будет видно ниже, то же самое будет свойственно многим полученным далее приближениям по разным моделям при выборе параметров через моменты. Это говорит о том, что приближе-

ния для $\varepsilon(\Delta_2)$, которые таким образом получаются, действительно просто модели. В феноменологическом подходе трудно ответить, в чем тут причина – естественная неточность любого приближения или выбор не тех моделей.

Подобное рис.7 исследование было проведено и для модели с рис.4б. И получены такие же результаты.

Рассчитаем параметры моделей с рис.4-6 из моментов функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. В табл.1 приведены значения моментов (31) для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с рис.1.

Таблица 1

Численно рассчитанные моменты функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с рис.1 (см. (31)).

	I_1	I_3	I_4
Прямоугольник $a/b = 9,84$	1,852	21,956	126,624
Кольцо $d = 0,516$	1,996	15,541	53,223
Зубчатое отверстие 1	2,316	12,014	31,913
Зубчатое отверстие 2	2,124	13,934	43,410

Для модели на рис.4а параметры рассчитываются из уравнений (использован момент I_1)

$$l_1 + l_2 = 2\pi \frac{3\mu^2 - 2I_1}{8I_1 - \pi^2}; l_1 l_2 = \frac{3\mu^2 \pi^2 - 16I_1^2}{8I_1 - \pi^2}; h = \frac{\pi - 2l_1}{2(l_2 - l_1)}. \quad (33)$$

Необходимым условием существования действительных $0 < l_1 \leq l_2$ является ограничение на I_1 (учитывая, что $\mu \geq 1$),

$$\pi^2 / 8 < I_1 < 1,5\mu^2; \sqrt{3}\pi\mu / 4,$$

которое при $\mu = 1,77$ дает $1,234 < I_1 < 4,7; 2,408$, чему, как видно из табл.1, удовлетворяют все четыре примера. А выполнены ли достаточные условия, легче рассчитать конкретно. В табл.2 приведены рассчитанные по (33) параметры модели с рис.4а для четырех примеров рис.1. Видно, что для всех четырех параметры существуют и, как будет показано ниже на графиках, вполне реалистично воспроизводят не только $\varepsilon(\Delta_2)$, но и сами функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.

Таблица 2

Параметры моделей (а) и (б) с рис.4, рассчитанные по формулам (33,34).

	Модель (а)			Модель (б)		
	l_1	l_2	h	l_1	l_2	h
Прямоугольник $a/b = 9,84$	1,288	5,948	0,061	3,078	14,002	0,006
Кольцо $d = 0,516$	1,053	4,515	0,150	2,875	6,408	0,075
Зубчатое отверстие 1	0,251	3,210	0,446	1,441	3,192	0,971
Зубчатое отверстие 2	0,764	3,779	0,268	2,455	4,067	0,426

Для модели на рис.4б параметры рассчитываются из уравнений (использован момент I_1)

$$l_1^4 - 3\pi l_1^3 + 3(3\pi^2 - 16I_1)l_1^2 + 18\pi(3\mu^2 - 2I_1)l_1 + 18(14I_1^2 - 3\pi^2\mu^2) = 0;$$

$$l_2 = \frac{4I_1 - \pi l_1 + l_1^2/3}{\pi - l_1}; \quad h = \frac{(\pi - l_1)^2}{2(2I_1 - \pi l_1 + 2l_1^2/3)}. \quad (34)$$

Опять же не задаваясь целью написать в общем виде, при каких условиях на I_1 и μ существуют решения (34), удовлетворяющие $0 < l_1 \leq l_2$, и, если существуют, то сколько их, рассчитаем их численно для четырех рассматриваемых примеров. Все четыре существуют и единственны; они также приведены в табл.2.

На рис.8а приведены функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ для прямоугольного отверстия с рис.1 и две модели этой функции с рис.4а,б с параметрами из табл.2; на рис.8б – точная функция $\varepsilon(\Delta_2)$ и 2 функции $\varepsilon_{\text{mod}}^{a,\bar{b}}(\Delta_2)$, соответствующие моделям рис.8а; а на рис.8в, для оценки точности аппроксимации реальной функции модельными, показаны функции относительной погрешности аппроксимации

$$\chi(\Delta_2) = \frac{\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2) - \varepsilon(\Delta_2)}{\varepsilon(\Delta_2)}. \quad (35)$$

На рис.9а-в приведены такие же функции, что и на рис.8а-в, но для кольцевого отверстия с рис.1. А на рис.10-11а-б – то же самое для, соответственно, зубчатых отверстий 1 и 2, но без графиков (в) (из экономии времени на длительный пересчет функций (35)).

Функции $\varepsilon_{\text{mod}}^{a,\bar{b}}(\Delta_2)$ на рис.8-11 вычисляются с помощью (26) из моделей $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис.4а,б и выражаются аналитически через специальные функции Струве и Бесселя. Интегралы от функции Бесселя нулевого порядка и от свертки ее с линейной функцией равны, соответственно,

$$\int_0^a J_0(y \cdot x) dx = aF(y \cdot a) \quad \text{и} \quad \int_0^a x J_0(y \cdot x) dx = \frac{a}{y} J_1(y \cdot a), \quad (36)$$

где через $F(x)$ обозначена функция

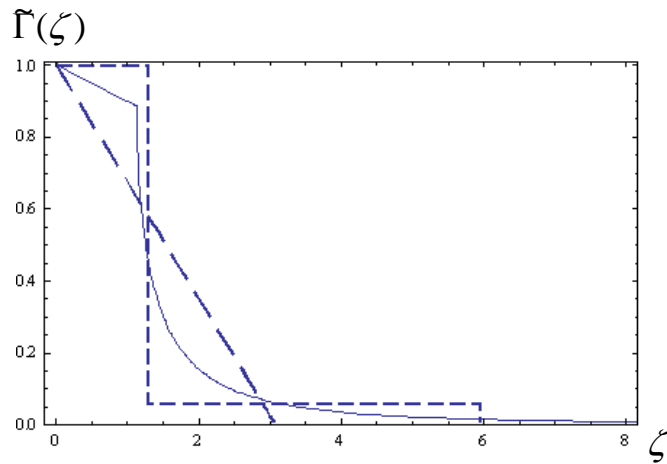
$$F(x) = J_0(x) + \frac{\pi}{2} (J_1(x)H_0(x) - J_0(x)H_1(x)), \quad (37)$$

в которой $J_i(x)$ и $H_i(x)$, соответственно, функции Бесселя и Струве порядка i .

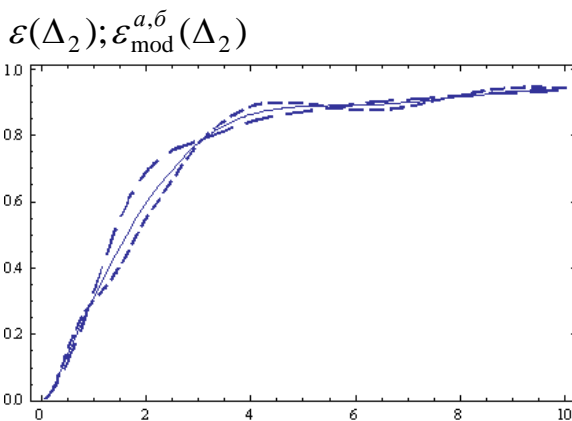
Тогда функции $\varepsilon_{\text{mod}}^{a,\bar{b}}(\Delta_2)$ для моделей $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис.4а,б равны, соответственно,

$$\varepsilon_{\text{mod}}^a(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi} [l_1(1-h)F(l_1\Delta_2) + l_2hF(l_2\Delta_2)]; \quad (38)$$

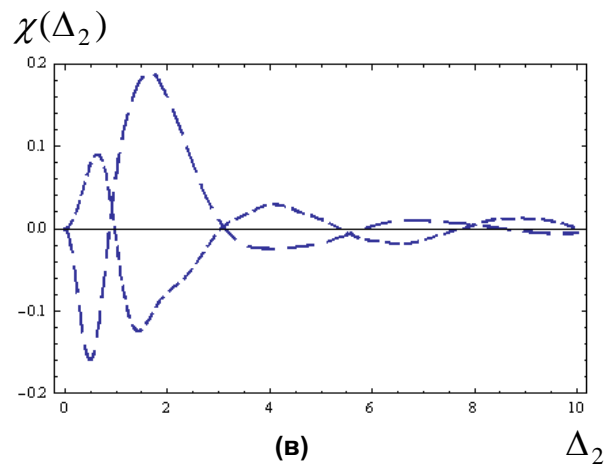
$$\varepsilon_{\text{mod}}^{\delta}(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi(l_2 - l_1)} \left[\frac{l_1((2h-1)l_1 + l_2)F(l_1\Delta_2) - (l_1 + l_2)^2 hF\left(\frac{l_1 + l_2}{2}\Delta_2\right) + 2l_2^2 hF(l_2\Delta_2) - ((2h-1)l_1 + l_2)J_1(l_1\Delta_2) - 2(l_1 + l_2)hJ_1\left(\frac{l_1 + l_2}{2}\Delta_2\right) + 2l_2 hJ_1(l_2\Delta_2)}{\Delta_2} \right]. \quad (39)$$



(а)



(б)



(в)

Рис.8

Для прямоугольного отверстия с $\mu = 1,77$ ($a/b = 9,84$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых с рис.4а,б (штриховые линии) с параметрами из табл.2 (у модели (б) обрезан «хвост», простирающийся до $\zeta \cong 14$ - см.табл.2);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых (а) (типы линий соответствуют);

(в) – графики функции $\chi(\Delta_2)$ для модельных функций из (б) (типы линий соответствуют).

Из рис.8-10 видно, что модель функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис.4а заметно лучше, чем рис.4б. Это не кажется странным, поскольку модель рис.4б содержит элементы, которые вовсе не обязаны присутствовать в функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ - нулевое значение в середине области определения, т.е. наличие второго экстремума, и представление его в виде именно равнобедренного треугольника. Кроме того, что во всех 4-х рассмотренных

случаях отклонение $\varepsilon_{\text{mod}}^a(\Delta_2)$ от $\varepsilon(\Delta_2)$ на всем интервале Δ_2 укладывается в диапазон 10% (в то время, как для $\varepsilon_{\text{mod}}^b(\Delta_2)$ оно иногда доходит и до 40%), у модели рис.4а есть еще по крайней мере 3 преимущества перед моделью рис.4б.

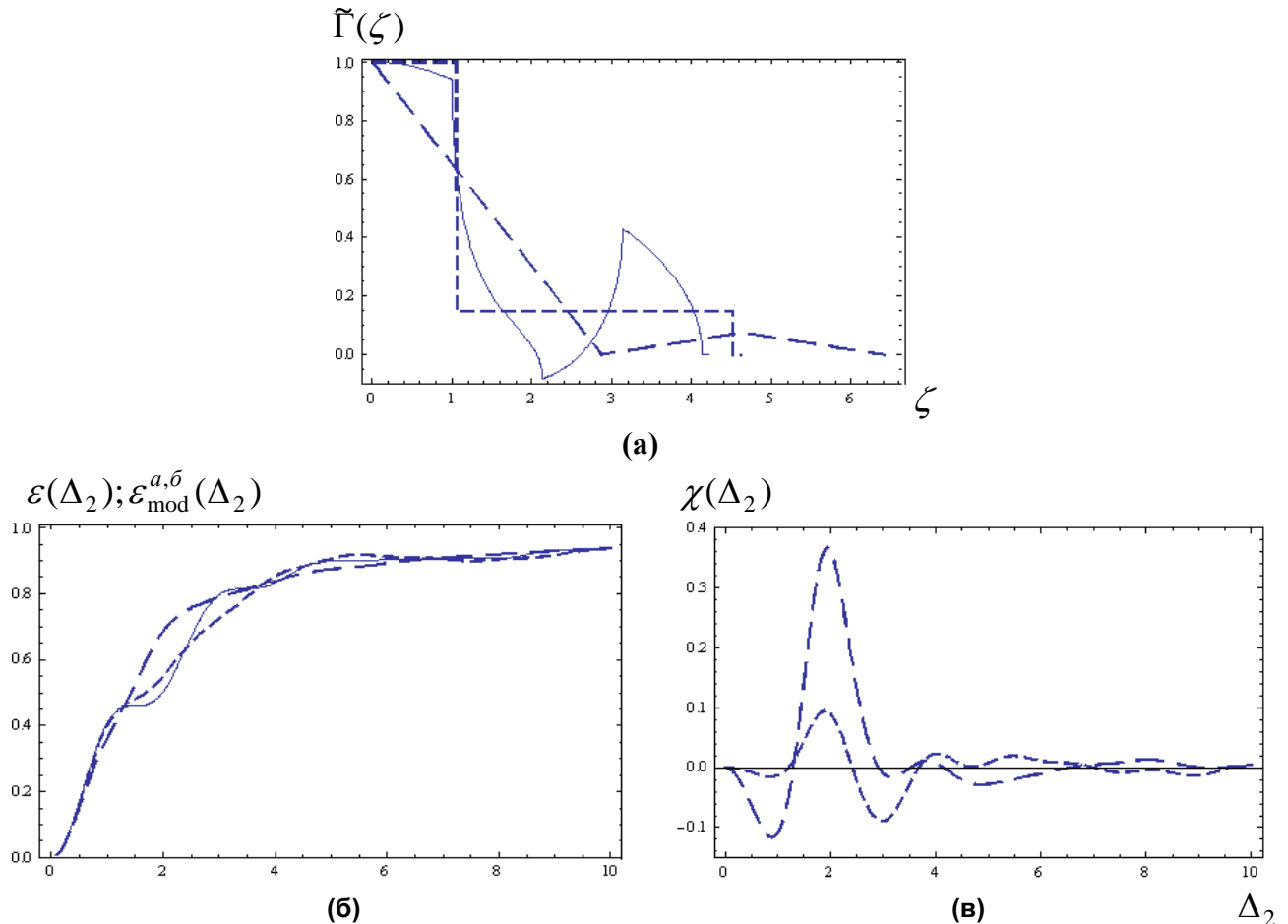


Рис.9

Для кольцевого отверстия с $\mu = 1,77$ ($d = 0,516$):

- (а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых с рис.4а,б с параметрами из табл.2 (штриховые линии);
- (б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых (а) (типы линий соответствуют);
- (в) – графики функции $\chi(\Delta_2)$ для модельных функций из (б) (типы линий соответствуют).

Во-первых, при многих значениях параметров модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ области нефизичного поведения функций $\varepsilon_{\text{mod}}^b(\Delta_2)$ (области, где она убывает) значительно больше, чем у функции $\varepsilon_{\text{mod}}^a(\Delta_2)$ (см. рис.10-11), и они заметно ярче выражены.

Во-вторых, модель рис.4а математически проще модели рис.4б. Квадратное уравнение (33) для l_i решается аналитически и несложно выписать условия на параметры μ и I_1 , при которых существует необходимое решение (притом оно всегда

единственно). А уравнение 4-й степени (34) надо решать в основном численно и заранее трудно оценить, при каких параметрах нужные решения существуют и сколько их. Видно, что даже среди 4-х рассмотренных на рис.8-11 примеров нашелся один, когда найденные параметры модели рис.4б дают явно совсем неудачные приближения для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon(\Delta_2)$ (см. 301 в табл.2 и рис.10а).

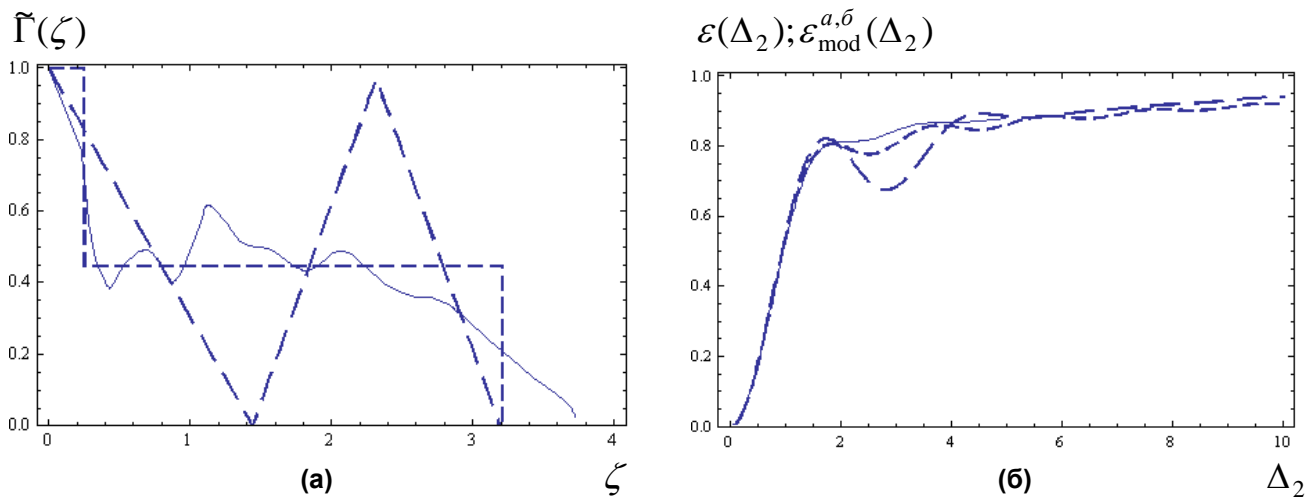


Рис.10

Для зубчатого отверстия 301 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$):

- (а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых с рис.4а,б с параметрами из табл.2 (штриховые линии);
- (б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых (а) (типы линий соответствуют).

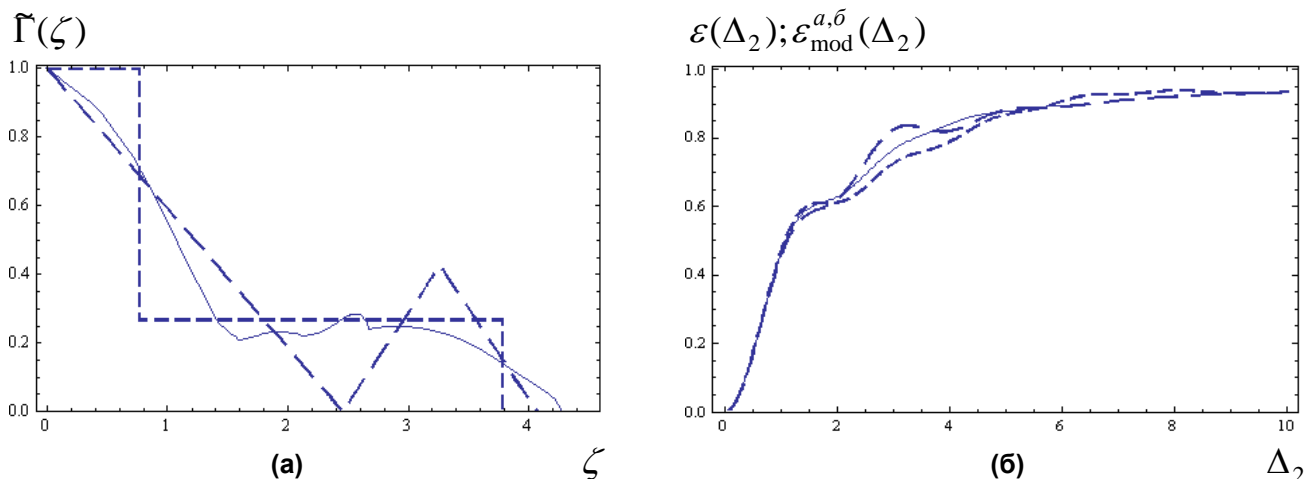


Рис.11

Для зубчатого отверстия 302 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$):

- (а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых с рис.4а,б с параметрами из табл.2 (штриховые линии);
- (б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых (а) (типы линий соответствуют).

И, в-третьих, еще одно интересная особенность модели рис.4а. Обе модели (а) и (б) зависят от одного свободного параметра, не обусловленного обязательными уравнениями (25). Этот параметр рассчитывался из первого момента $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, но можно было бы искать его и из других соображений, например, положить l_2 равным значению ζ_{\max} , при котором точная функция $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (или, что то же самое, $T(\zeta)$) обращается в ноль. При конечном габарите отверстия такое значение всегда существует. Для сравнения для всех 8-ми соответствующих рис.8-11 случаев сделаны такие расчеты для модели рис.4а,б и $\varepsilon_{\text{mod}}^{a,\bar{b}}(\Delta_2)$. У модели рис.4а параметры в двух случаях, когда расчеты велись через момент или через ζ_{\max} , различались, но не сильно, и во всех 4-х примерах почти на всем интервале Δ_2 функция $\varepsilon_{\text{mod}}^a(\Delta_2)$ с параметрами, взятыми из момента, оказалась ближе к точной функции. Пожалуй, это можно сказать и о модели самой функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, хотя для такой простой модели, как на рис.4а, трудно на глаз оценить качество приближения прямоугольников к функциям с рис.1. Что же касается модели рис.4б, то здесь сравнение оказалось интересным. Для двух отверстий – прямоугольного и 3О2, отличия $\varepsilon_{\text{mod}}^{\bar{b}}(\Delta_2)$, да и самих модельных функций при расчетах параметров через момент и через ζ_{\max} оказались мало различными; для отверстия 3О1 оба приближения оказались в близкой степени неудачными. А вот для кольцевого отверстия результат оказался неожиданным. Он приведен на рис.12. Здесь сплошными линиями и штриховыми линиями с длинными штрихами воспроизведены кривые с рис.9а,б. А кривые с короткими штрихами соответствуют модели рис.4б, рассчитанной из предположения $l_2 = \zeta_{\max}$. Из рис.12а видно, что как модель функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ кривая с короткими штрихами явно лучше, чем с длинными штрихами (она почти оптимум, если подбирать свободный параметр модели из соображений максимально приближения к $\tilde{\Gamma}(\zeta)$). Но при этом функция $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$ получается почти везде хуже, чем получалась с параметрами, рассчитанными из момента. Она немного лучше в интервале $\Delta_2 \in [1,5; 2,5]$ («срезается» верхушка у кривой с длинными штрихами на рис.9в) при явном ухудшении приближения в остальной области Δ_2 .

Таким образом, из рис.8-12 можно сделать следующие выводы.

Можно заметно улучшить аппроксимацию точной функции $\varepsilon(\Delta_2)$ для постоянного поля на апертуре с помощью даже простейшей модели функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в виде ступенчатой функции из двух прямоугольников (рис.4а) с одним свободным параметром, который может быть найден из первого момента $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. То есть для довольно хорошего приближения $\varepsilon(\Delta_2)$ достаточно знать лишь еще один числовой параметр отверстия (кроме площади и периметра). Мы воспользовались в качестве такого па-

раметра первым моментом функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (т.е. интегралом от $T(\zeta)$ - см.(31)), но, вероятно, он не лучший из возможных, как, впрочем, и сама модель функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.

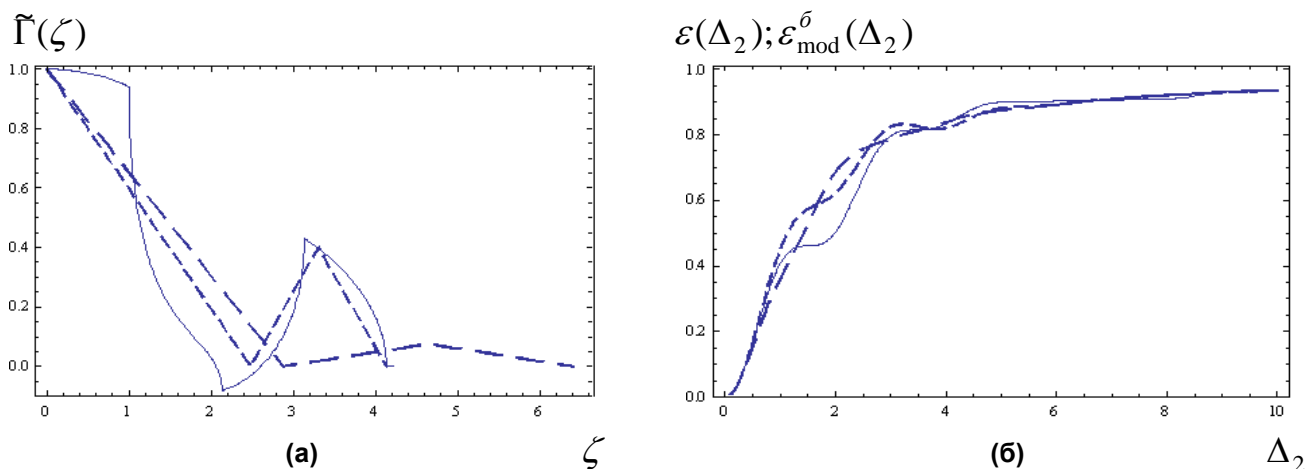


Рис.12

Для кольцевого отверстия с $\mu = 1,77$ ($d = 0,516$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых рис.4б с параметрами из табл.2 (длинные штрихи) и из предположения $l_2 = \zeta_{\max}$ (короткие штрихи);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{\bar{b}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых (а) (рисунки линий соответствуют).

Модель $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, использованная для расчета приближения функции $\varepsilon(\Delta_2)$, имеет значение, но для правильного ее выбора необходимо иметь математическое обоснование предлагаемого способа аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$. Здесь только показано, что другая простая однопараметрическая модель $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (рис.4б) заметно хуже прямоугольной, причем, сразу по нескольким причинам.

Рис.12 иллюстрирует также заключение, что для хорошей аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ надо правильно выбрать дополнительный параметр (или параметры) отверстия, который путем выбора модельной функции для интеграла (26) будет «внедрен» в приближение $\varepsilon(\Delta_2)$ (вида (38) или какого-то другого). При этом вовсе не обязательно упомянутая модельная функция для интеграла (26) будет хорошим приближением самой функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ или даже хорошим представлением ее облика. Она, вероятно, должна отражать какую-то существенную особенность $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, определяющую среднюю часть функции $\varepsilon(\Delta_2)$. Поведение $\varepsilon(\Delta_2)$ при Δ_2 вблизи нуля определяется параметром μ , значение при больших значениях Δ_2 - тем, что $\tilde{\Gamma}(0) = 1$ (расчеты показали, что интеграл (26) при больших значениях аргумента слабо чувствителен к поведению $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ вблизи нуля), а вот поведение $\varepsilon(\Delta_2)$ в промежуточной области аргумента определяться еще какими-то числами, характеризующими $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.

Теперь посмотрим несколько усложненных моделей функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ из прямоугольников и треугольников, зависящих от большего числа параметров (двух, трех), и проверим, улучшит ли это аппроксимацию $\varepsilon(\Delta_2)$ по сравнению с моделями рис.4.

На рис.5а представлена двухпараметрическая модель функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, являющаяся расширением модели рис.4а. Она отлична от последней в начале координат (что слабо влияет на поведение $\varepsilon(\Delta_2)$ и лишь при больших значениях аргумента), а в области $[l_1, l_2]$ может быть горизонтальной (как на рис.4а), возрастающей или убывающей. Теперь в определении параметров модельной функции задействовано больше информации об отверстии – два момента, I_1 и I_3 из (31).

Из уравнений (25,31) для параметров модели рис.5а получаются уравнения $(\pi^2 - 6I_1)l_2^4 + 12\pi(\mu^2 - I_1)l_2^3 + 4(27I_1^2 - 3\pi^2\mu^2 - 5I_3)l_2^2 + 8\pi(5I_3 - 9\mu^2I_1)l_2 + 12(3\pi^2\mu^4 - 10I_1I_3) = 0$;

$$l_1 = \frac{\pi l_2^2 - 12I_1 l_2 + 6\pi\mu^2}{l_2^2 - 2\pi l_2 + 6I_1}; \quad h_2 = \frac{6I_1 + l_1 l_2 - \pi(l_1 + l_2)}{l_2(l_2 - l_1)}; \quad h_1 = \frac{\pi - l_1 - h_2(l_2 - l_1)}{l_2}. \quad (40)$$

Кроме существования у первого из уравнений (40) действительного положительного корня должны также выполняться условия $0 < l_1 \leq l_2$. На $h_{1,2}$, вообще говоря, не накладывается никаких дополнительных условий.

Функция $\varepsilon_{\text{mod}}^{5a}(\Delta_2)$ из (26) для модели рис.5а имеет вид

$$\varepsilon_{\text{mod}}^{5a}(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi(l_2 - l_1)} \left[\frac{l_1[l_2(1-h_1) - l_1(1-h_2)]F(l_1\Delta_2) + l_2[l_2h_1 - l_1h_2]F(l_2\Delta_2) - [l_2(1-h_1) - l_1(1-h_2)]J_1(l_1\Delta_2) - l_2(h_2 - h_1)J_1(l_2\Delta_2)}{\Delta_2} \right]. \quad (41)$$

Аналогично рис.5а можно рассмотреть еще одну двухпараметрическую модель $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ - модернизацию модели рис.4б, где треугольник во второй части функции уже не равнобедренный, но в l_1 функция по-прежнему равна нулю. Эта модель используется дальше в некоторых расчетах при неоднородных полях, но здесь, не приводя формулы для нее, сразу (см. рис.6б) возьмем модель и с неравнобедренным треугольником и при произвольном значении функции в точке l_1 , поскольку разделение через ноль $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ на две части не так уж и часто встречается.

На рис.6а,б представлены две трехпараметрические модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, для расчета параметров которых надо задействовать три момента (31), I_1 , I_3 и I_4 . Модель рис.6а – это расширение модели рис.4а, добавление к ней еще одного прямоугольника. А модель рис.6б – это снятие ограничений модели рис.4б: в точке l_1 функция не обязана равняться нулю и треугольник на конце может быть не равнобедренным.

Для параметров модели рис.6а имеем

$$h_2 = \frac{2I_1 + l_1 l_2 - \pi(l_1 + l_2)/2}{(l_3 - l_2)(l_3 - l_1)}; \quad h_1 = \frac{\pi/2 - l_1 - h_2(l_3 - l_2)}{(l_2 - l_1)}; \quad (42)$$

а $0 < l_1 \leq l_2 \leq l_3$ находятся как три корня кубического уравнения

$$l^3 - al^2 + bl - c = 0, \quad (43)$$

где a, b, c имеют смысл $a = l_1 + l_2 + l_3$; $b = l_1l_2 + l_2l_3 + l_1l_3$; $c = l_1l_2l_3$ и равны

$$a = \frac{10I_4(I_1 - \pi^2/8) + \pi[4I_1I_3 + 9\pi^2\mu^4/8 - 6\mu^2(I_1^2 + I_3)]}{8I_1(I_3 - I_1^2) + \pi^2(12\mu^2I_1 - 4I_3 - 9\mu^4)/4},$$

$$b = \frac{\pi(1,5\mu^2 - I_1)a + 0,75\pi^2\mu^2 - 4I_3}{2I_1 - \pi^2/4}; \quad c = \frac{(0,75\pi^2\mu^2 - 4I_1^2)a + \pi(3\mu^2I_1 - 2I_3)}{2I_1 - \pi^2/4}. \quad (44)$$

Для существования модели рис.6а необходимо, чтобы все три корня кубического уравнения (43) были положительны, т.е. как минимум должны быть положительны числа a, b, c .

Расчет параметров модели рис.6б проводится похожим образом - $h_{1,2}$ вычисляются из соотношений

$$h_2 = \frac{6I_1 + l_1l_2 - \pi(l_1 + l_2)}{l_3(l_3 - l_1)}; \quad h_1 = \frac{\pi - l_1 - h_2(l_3 - l_1)}{l_2}, \quad (45)$$

а $l_{1,2,3}$ - тоже корни кубического уравнения (43), где теперь параметры a, b, c равны

$$b = \frac{45\pi I_4(\mu^2 - I_1) + 20I_3(9I_1^2 - 5I_3) + 6\pi^2\mu^2(5I_3 - 9\mu^2I_1)}{9[\pi^2\mu^2(2I_1 - \mu^2) - 6I_1^3] + 5I_3(6I_1 - \pi^2)};$$

$$a = \frac{(6I_1 - \pi^2)b + 2(10I_3 - 3\pi^2\mu^2)}{6\pi(\mu^2 - I_1)}; \quad c = \frac{(\pi^2\mu^2 - 6I_1^2)b + 2(3\pi^2\mu^4 - 10I_3I_1)}{\pi(\mu^2 - I_1)}. \quad (46)$$

Функция $\varepsilon_{\text{mod}}^{\delta a}(\Delta_2)$ из (26) для модели рис.6а имеет вид

$$\varepsilon_{\text{mod}}^{\delta a}(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi} [l_1(1 - h_1)F(l_1\Delta_2) + l_2(h_1 - h_2)F(l_2\Delta_2) + l_3h_2F(l_3\Delta_2)], \quad (47)$$

а для модели рис.6б -

$$\varepsilon_{\text{mod}}^{\delta b}(\Delta_2) = 1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{l_2(1 - h_1) - l_1(1 - h_2)}{(l_2 - l_1)} \left[l_1F(l_1\Delta_2) - \frac{J_1(l_1\Delta_2)}{\Delta_2} \right] + l_2 \frac{h_1(l_3 - l_2) - h_2(l_3 - l_1)}{(l_2 - l_1)(l_3 - l_2)} \left[l_2F(l_2\Delta_2) - \frac{J_1(l_2\Delta_2)}{\Delta_2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{h_2l_3}{(l_3 - l_2)} \left[l_3F(l_3\Delta_2) - \frac{J_1(l_3\Delta_2)}{\Delta_2} \right] \right\}. \quad (48)$$

Таблица 3
Параметры модели рис.5а, рассчитанные по формулам (40).

	l_1	l_2	h_1	h_2
Прямоугольник $a/b = 9,84$	3,067	27,518	0,00344	-0,000842
Кольцо $d = 0,516$	2,785	12,206	0,0367	-0,00976
Зубчатое отверстие 1	0,283	3,359	0,549	0,329
Зубчатое отверстие 2	1,825	6,406	0,240	-0,0485

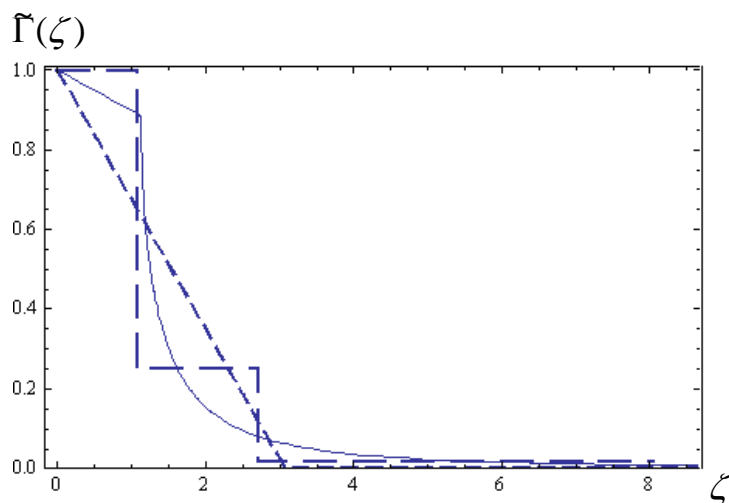
Таблица 4

Параметры модели рис.6а, рассчитанные по формулам (42-44).

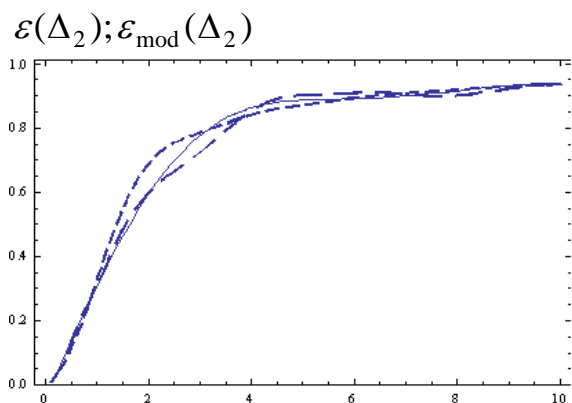
	l_1	l_2	l_3	h_1	h_2
Прямоугольник $a/b = 9,84$	1,065	2,705	8,043	0,251	0,0178
Зубчатое отверстие 1	0,211	3,026	4,163	0,466	0,0414
Зубчатое отверстие 2	0,676	2,233	4,020	0,346	0,199

Параметры модели рис.6б, рассчитанные по формулам (43,45-46).

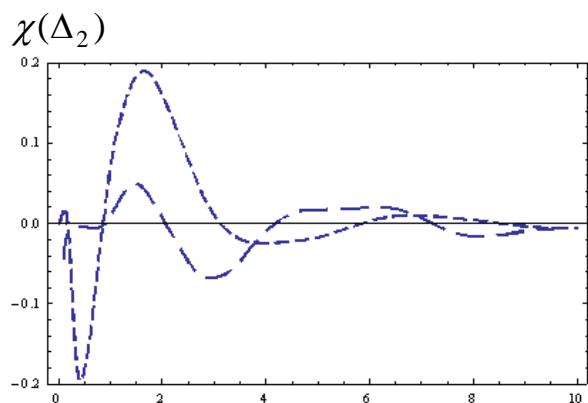
	l_1	l_2	l_3	h_1	h_2
Зубчатое отверстие 1	0,820	1,456	3,928	0,206	0,650



(а)



(б)



(в)

Δ_2

Рис.13

Для прямоугольного отверстия с $\mu = 1,77$ ($a/b = 9,84$):

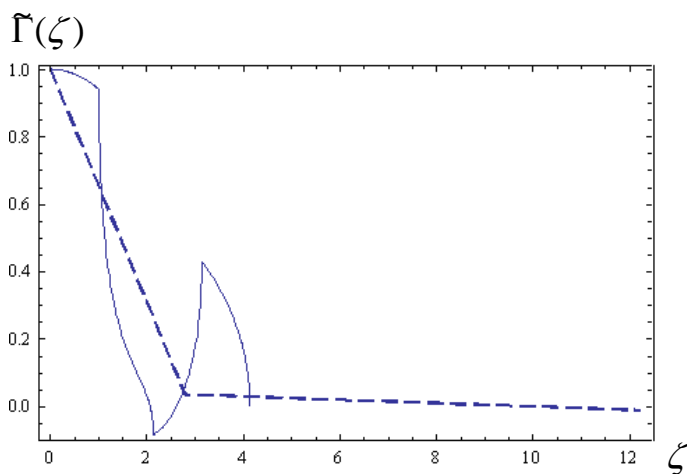
(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых рис.5а с параметрами из табл.3 (короткие штрихи) и рис.6а с параметрами из табл.4 (штрихи средней длины);

(б) – графики точной функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых (а) (типы линий соответствуют);

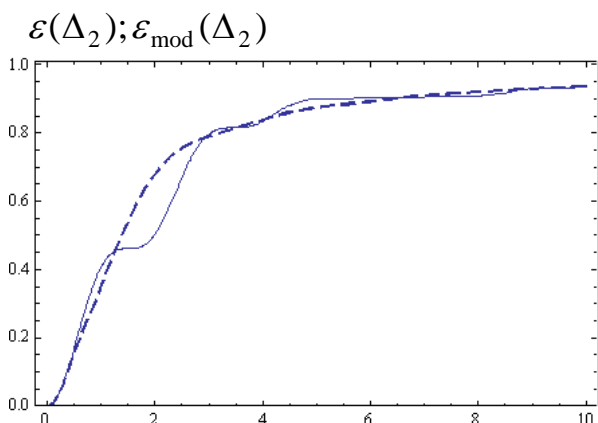
(в) – графики функции $\chi(\Delta_2)$ для функций из (б) (типы линий соответствуют).

Рассчитанные параметры моделей $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис.5а и рис.6а,б для 4-х рассматриваемых примеров отверстий с $\mu = 1,77$ приведены, соответственно, в табл.3,4. Для

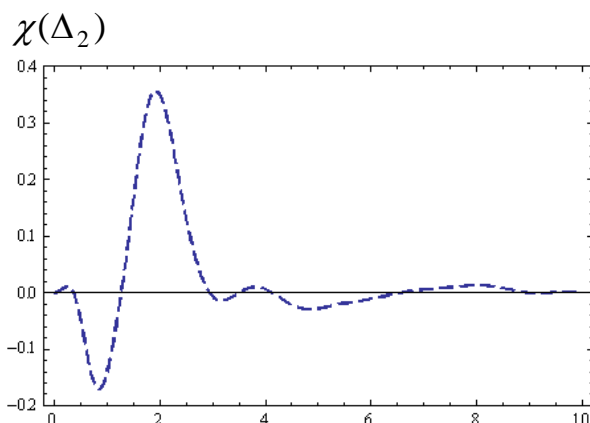
модели рис.5а они оказались единственными для каждого отверстия, для модели рис.6а,б они и могли быть только единственными. Модель рис.5а существует для всех 4-х примеров, модель рис.6а – для 3-х (не существует для кольцевого отверстия), а модель рис.6б имеется лишь для одного отверстия - 3О1.



(а)



(б)



(в)

Δ_2

Рис.14

Для кольцевого отверстия с $\mu = 1,77$ ($d = 0,516$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельной кривой рис.5а с параметрами из табл.3 (штриховая линия);

(б) – графики точной функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{5a}(\Delta_2)$ (41), рассчитанной для модельной кривой (а) (штриховая линия);

(в) – график функции $\chi(\Delta_2)$ для функции из (б).

На рис.13-16 для моделей рис.5а и рис.6а,б приведены графики того же типа, что и, соответственно, на рис.8-11 для моделей рис.4. Из сравнения этих рисунков видно, что лишь модель рис.6а дает некоторое улучшение приближения функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (наибольшее относительное отклонение уменьшается в 1,5-2 раза), да и то не везде. Остальные модели только хуже модели рис.4а при явном усложнении расчетов параметров и анализа их существования. То есть вывод, по крайней мере, для рассмотренных примеров, такой, что хорошую аппроксимацию $\varepsilon(\Delta_2)$ можно получить

с помощью выражений (38) или (47), если, конечно, существуют необходимые для них параметры. Параметры можно рассчитать из моментов функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, но нельзя исключить и других возможных путей их нахождения.

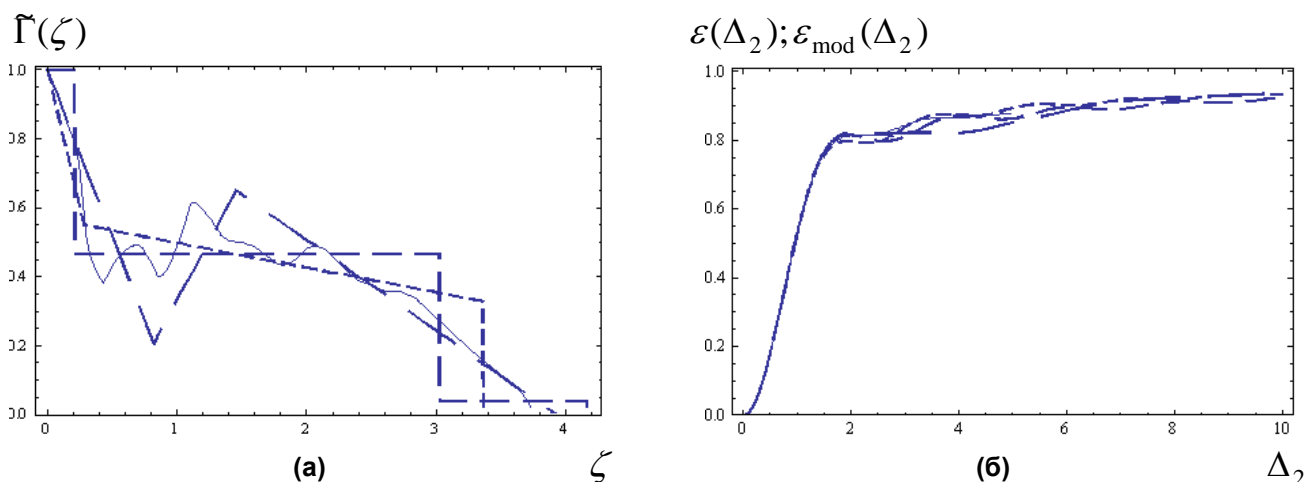


Рис.15

Для зубчатого отверстия 3O1 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$):

- (а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых рис.5а с параметрами из табл.3 (короткие штрихи) и рис.6а,б с параметрами из табл.4 (средние и длинные штрихи);
 (б) – графики точной функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых (а) (типы линий соответствуют).

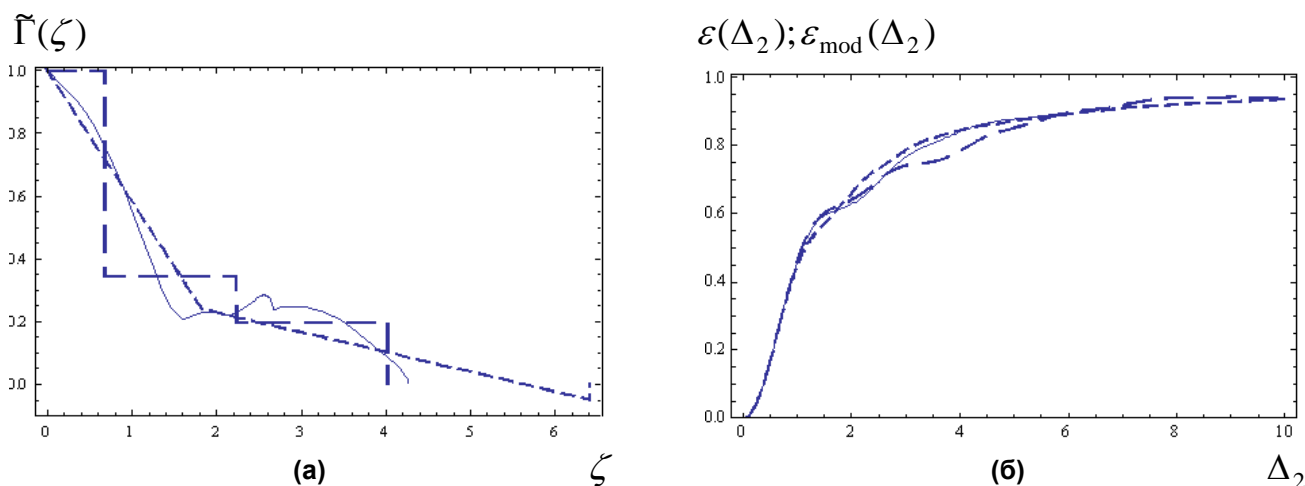


Рис.16

Для зубчатого отверстия 3O2 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$):

- (а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых с рис.5а с параметрами из табл.3 (короткие штрихи) и рис.6а с параметрами из табл.4 (штрихи средней длины);
 (б) – графики точной функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$, рассчитанных для модельных кривых (а) (типы линий соответствуют).

Рассмотрим еще одну модель функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, примеры которой представлены на рис.5б,в и рис.6в. Модель эта взята из функции $\tilde{\Gamma}_{\text{ring}}(\zeta)$ (27) для кольцевого от-

версия. Как видно из (27), функция $\tilde{\Gamma}_{ring}(\zeta)$ состоит из двух функций вида (29), описывающих функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ двух кругов, составляющих кольцо, и функции вида (30) - что-то вроде интерференционного члена. В $\tilde{\Gamma}_{ring}(\zeta)$ параметры всех трех слагаемых определяются числом μ (15); в модели будем считать эти параметры свободными

$$\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta) = \left\{ \alpha \sqrt{a^2 - \zeta^2}, \zeta \leq a \right\} + \left\{ \beta \sqrt{b^2 - \zeta^2}, \zeta \leq b \right\} + \left\{ \gamma \sqrt{c^2 - \zeta^2} \sqrt{\zeta^2 - g^2} / \zeta, g \leq \zeta \leq c \right\}. \quad (49)$$

В (49) имеется 7 параметров, на которые наложим некоторые ограничения по смыслу (кроме естественного требования действительности):

$$0 < a \leq b; \quad 0 < g \leq c; \quad c \leq b; \quad \alpha, \beta > 0, \quad (50)$$

где соотношения между a и b выбраны для определенности; второе неравенство вытекает из вида функции (30); а третье и четвертое неравенства обусловлены тем, что их невыполнение обычно приводит к нетипичному для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, а то и нереальному для $\varepsilon_{mod}^{(r)}(\Delta_2)$ видам функций (см. ниже). Два последних ограничения в каких-то случаях можно было бы снять, но поскольку и так во всех примерах будут не по одному удовлетворяющему (50) решению, дающих вполне приемлемые аппроксимации точных $\varepsilon(\Delta_2)$, нет смысла это делать в рамках наших задач.

Учитывая три условия (25), в (49) остаются 4 свободных параметра. Если идти по тому пути, что и раньше, т.е. использовать для нахождения недостающих 4-х параметров моменты функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, то к (31) надо добавить еще 5-ый момент. Однако расчеты показали, что в общем виде получить параметры из моментов не удастся не только аналитически, но и численно из системы уравнений, к которым сводится система (25,31) плюс 5-й момент, по крайней мере, с помощью стандартного пакета программ Wolfram Mathematica 7. Связано это, по-видимому, с тем, что в упомянутую систему параметры g, c входят через аргументы эллиптических интегралов, т.е. система достаточно сложная - интегральная, и к тому же она, по всей вероятности, имеет много решений как комплексных, так и действительных. Для последнего утверждения есть веские основания, как будет видно из дальнейшего.

Поэтому были выбраны три упрощенных модели (49) с одним-двумя изначальными ограничениями на параметры, аналогичными связям параметров в $\tilde{\Gamma}_{ring}(\zeta)$ (27) или взятыми из дополнительных соображений. Первое ограничение – фиксированная связь параметров g, c , которую для определенности выразим через μ соответственно этой связи в (27),

$$p = g / c = 1 / \mu^2. \quad (51)$$

Это соотношение было использовано во всех моделях (49) (сводя тем самым количество оставшихся свободных параметров максимум к трем). Связь параметров (51) принципиальна для решения системы уравнений на параметры, т.к. аргументы эллиптических интегралов, получаемых при расчетах моментов (25,31), зависят лишь

от p , и таким образом эти интегралы переводятся в численные коэффициенты в системе уравнений на остальные параметры. Тогда система (25,31) сводится к алгебраической системе уравнений, все решения которой легко вычисляются численно.

Второе использованное ограничение - это равенство

$$\alpha = \beta, \quad (52)$$

также соответствующее (27).

И третье ограничение – равенство параметров

$$a = c. \quad (53)$$

Суть ограничения (53) в модели (49) (не имеющая место в (27)) в том, что вследствие него на кривой $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ при чаще всего встречающейся ситуации $\gamma < 0$ отсутствуют характерные клювообразные выбросы вверх или вниз (наблюдаемые как раз у функции кольцевого отверстия), получающиеся из-за несовпадения максимальных значений аргументов первого и третьего слагаемых в (49). Наложение ограничения (53) не имеет какого-то особого смысла в рассмотренных примерах, поскольку, вообще говоря, выбросы у точных функций нередко имеются. Но оказалось, что (53) не ухудшает возможности аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ (в отличие от условия (52)), позволяя при этом уменьшить число свободных параметров модели. К тому же, как видно из табл.5,6 (см. ниже), почти у каждого из рассмотренных примеров здесь и в следующем разделе одно (а то и более) решений на параметры близко условию (53).

Была рассмотрена модель (49) при выполнении только (51) (тогда остаются 3 свободных параметра, вычисляемых с помощью трех моментов (31)), и при выполнении (51-52) или (51,53) (тогда остаются 2 свободных параметра, вычисляемых из двух первых моментов (31)).

Модели на рис.5б,в включают в себя по 2 ограничения ((51) и (52) или (53)), а модель на рис.6в – лишь одно (51).

Расчет модели (49) из (25,31) с учетом (51) и (52) для четырех примеров отверстий с рис.1 при $\mu = 1,77$ показал, что при этом ни в одном из этих примеров (кроме точно (27)) не существует решений для параметров, удовлетворяющих (50). Требование (52) оказалось слишком жестким. Поэтому далее эта модель была исключена из рассмотрения; и здесь не приводятся формулы для расчета параметров для нее.

У модели (49) с учетом (51) имеется 6 параметров; они находятся из условий (25,31), которые сводятся к системе 3-х алгебраических уравнений для промежуточных величин $z = 2 - b + \alpha a(b - a)$; $t = 3I_1 - zc \frac{f_1}{(1-p)^2}$ и $s = 8\mu^2 - zc^2(1+p)^2$:

$$z = \frac{(3I_1 - t)^2}{(8\mu^2 - s)} \cdot \frac{(1+p)^2(1-p)^4}{f_1^2}; \quad \frac{[s - t(2-z)]^2}{t - (2-z)^2} = 7,5I_3 - t^2 - \frac{f_1 f_2}{(1-p^2)^4} \cdot \frac{(8\mu^2 - s)^2}{(3I_1 - t)^2};$$

$$\frac{s^2(2-z)^3 + t^2 s(2-z)^2 - t(t^3 + 4s^2)(2-z) + s(2t^3 + s^2)}{[t - (2-z)^2]^2} = \frac{32}{\pi} I_4 - \frac{(1+p^2)}{(1-p^2)^4} f_1^2 \frac{(8\mu^2 - s)^3}{(3I_1 - t)^2}. \quad (54)$$

Здесь через $f_{1,2}$ обозначены алгебраические выражения от двух полных эллиптических интегралов 1 и 2 рода - $K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}}$ и $E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$:

$$f_1(p) = (1+p^2)E(\sqrt{1-p^2}) - 2p^2K(\sqrt{1-p^2});$$

$$f_2(p) = (1+p^4-p^2)E(\sqrt{1-p^2}) - \frac{p^2(1+p^2)}{2}K(\sqrt{1-p^2}).$$

Все параметры в (49) вычисляются через неизвестные z, t, s уравнений (54):

$$a, b = x \mp \sqrt{x^2 - y}, \text{ где } x = \frac{s-t(2-z)}{2[t-(2-z)^2]}; \quad y = \frac{s(2-z)-t^2}{[t-(2-z)^2]};$$

$$c = \frac{f_1}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{(8\mu^2-s)}{(3I_1-t)}; \quad g = c \cdot p; \quad \alpha = \frac{z-2+b}{a(b-a)}; \quad \beta = \frac{1-\alpha a}{b}; \quad \gamma = \frac{z}{c^2(1-p)^2}. \quad (55)$$

Функции $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ для (49) имеют вид (первые два слагаемых интегрируются в (26) аналитически и дают функции вида (13), а последнее слагаемое остается в виде интеграла)

$$\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2) = 1 - \frac{1}{2} \{ \alpha a^2 \Phi(\Delta_2 a/2) + \beta b^2 \Phi(\Delta_2 b/2) \} - \frac{2\gamma}{\pi} \int_g^c J_0(\Delta_2 \zeta) \frac{\sqrt{c^2 - \zeta^2} \sqrt{\zeta^2 - g^2}}{\zeta} d\zeta, \quad (56)$$

где $\Phi(x) = J_0^2(x) + J_1^2(x)$ - функция, фигурирующая в (13).

Таблица 5

Параметры модели (49), рассчитанные по формулам (54-55) и удовлетворяющие условиям (50). В предположении $g/c = 1/\mu^2 = 0,3192$ при $\mu = 1,77$. Используются моменты из табл.1.

	a	b	g	c	α	β	γ
Прямоугольник $a/b = 9,84$	1,582	8,425	2,642	8,278	0,550	0,01537	-0,0147
	3,013	8,635	0,955	2,993	0,323	0,00296	-0,2785
	1,634	8,797	1,253	3,924	0,598	0,00256	0,0286
Кольцо $d = 0,516$	$\mu^2 + 1 =$ =2,133	$\mu^2 + 1 =$ =4,133	1	$\mu^2 =$ =3,133	$0,5/\mu^2 =$ =0,160	$0,5/\mu^2 =$ =0,160	$-1/\mu^2 =$ =-0,0319
	1,441	13,07	4,124	12,92	0,609	0,00935	-0,0111
Зубчатое отверстие 1	0,214	8,005	2,537	7,950	2,341	0,06224	-0,0716
	1,619	3,648	0,333	1,044	0,311	0,13625	-1,2407
	0,366	3,446	0,904	2,832	1,762	0,09430	0,1131
Зубчатое отверстие 2	0,944	9,302	2,951	9,245	0,739	0,03253	-0,0372
	1,908	4,258	0,601	1,882	0,359	0,07392	-0,3946
	1,017	4,380	1,177	3,687	0,766	0,05052	0,0379

Подстановка в (54) моментов из табл.1 дает для каждого из отверстий большой набор решений, из которых действительными решениями, дающими удовлетворяющие (50) значения параметров (55), оказались по три набора для прямоугольного и двух зубчатых отверстий и 2 набора для кольцевого отверстия (одно совпадающее с

(27), другое – нет). Эти параметры (55) приведены в табл.5. Функции $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ для этих решений вместе с точными функциями для отверстий, а также функции (35) для прямоугольного и кольцевого отверстий приведены на рис.17-20.

Из сравнения рис.17-19 (пока без кольцевого отверстия) с рис.8,10-11,13,15-16 можно сделать три вывода.

- При всей непохожести полученных трех модельных функций (49) для каждого из отверстий, функции $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ для них оказались довольно близки между собой.

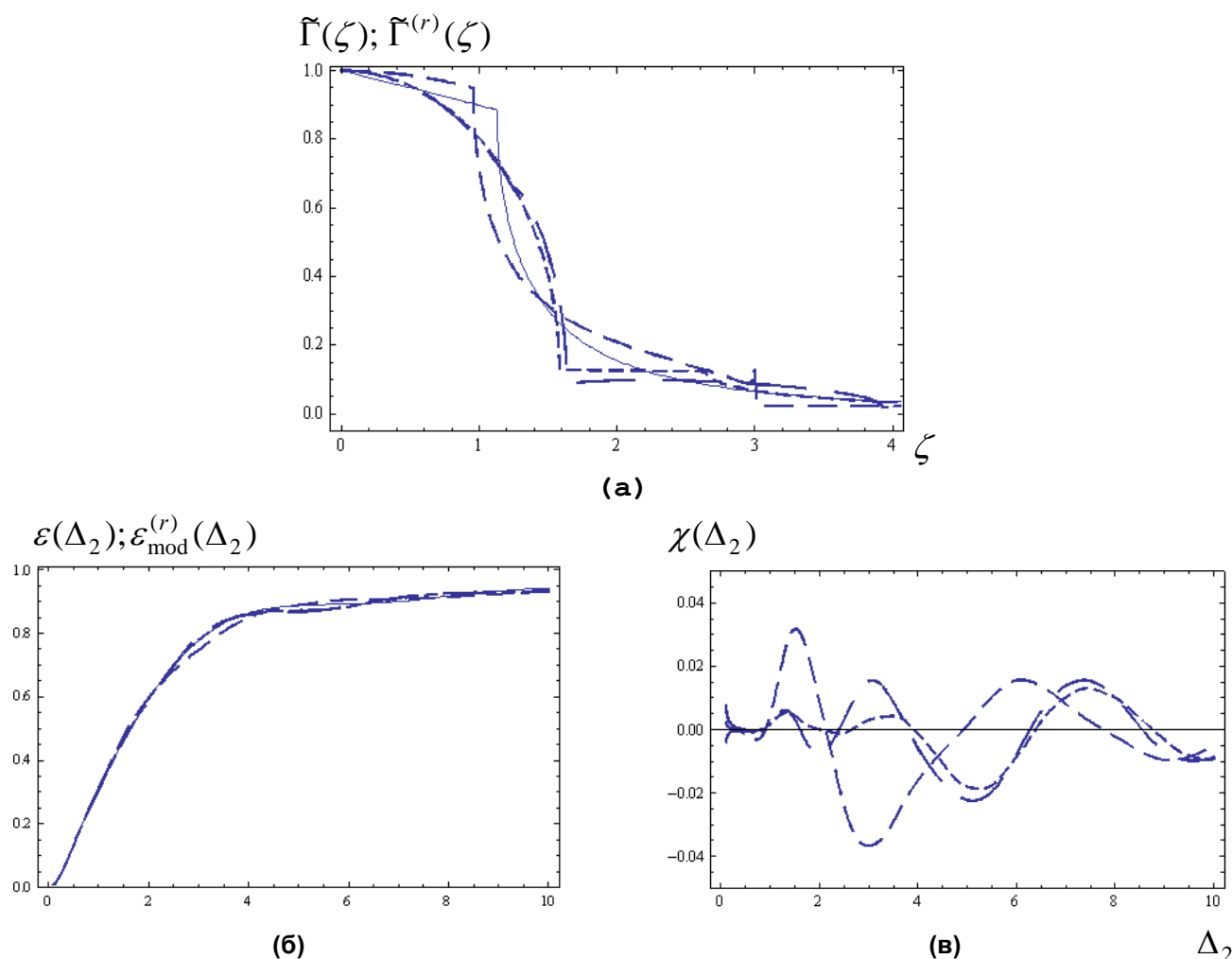


Рис.17

Для прямоугольного отверстия с $\mu = 1,77$ ($a/b = 9,84$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ с параметрами из табл.5 (штриховые линии; длины штрихов возрастают по порядку написания трех наборов параметров в таблице). И у точной функции и у всех трех моделей на графике обрезаны «хвосты» близкой длины; у точной функции - 8,8, у моделей 8,4-8,8;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ с параметрами из табл.5 (штриховые линии; типы линий соответствуют (а));

(в) – графики функции $\chi(\Delta_2)$ для функций из (б) (типы линий соответствуют).

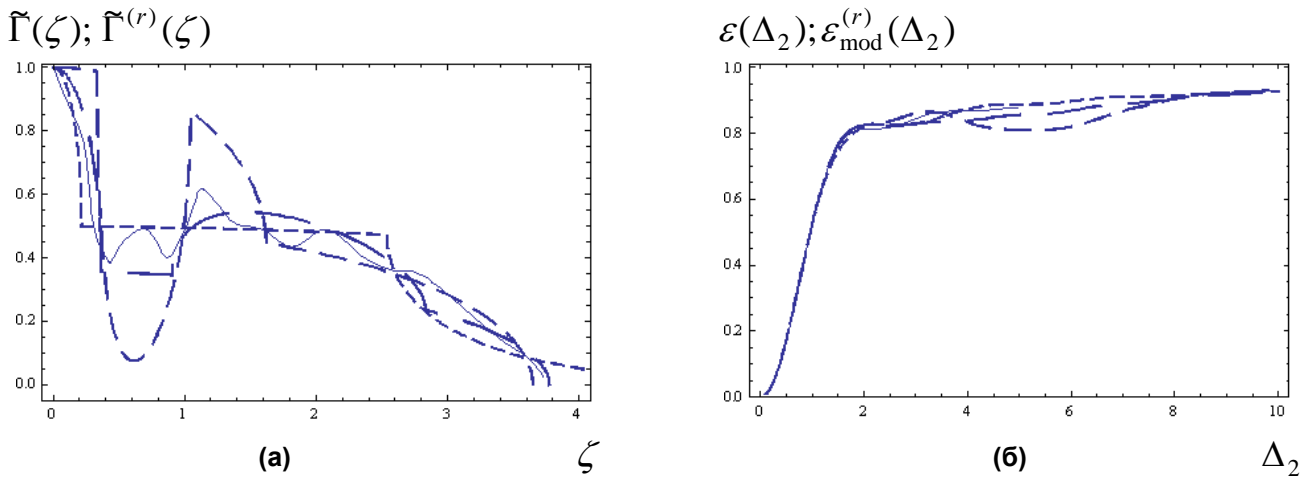


Рис.18

Для зубчатого отверстия 3O1 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ с параметрами из табл.5 (штриховые линии; длины штрихов возрастают по порядку написания трех наборов параметров в таблице). Одна из кривых $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ (короткие штрихи, первый набор в табл.5) имеет «хвост» $b = 8,0$, который обрезан на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ с параметрами из табл.5 (штриховые линии; типы линий соответствуют (а)).

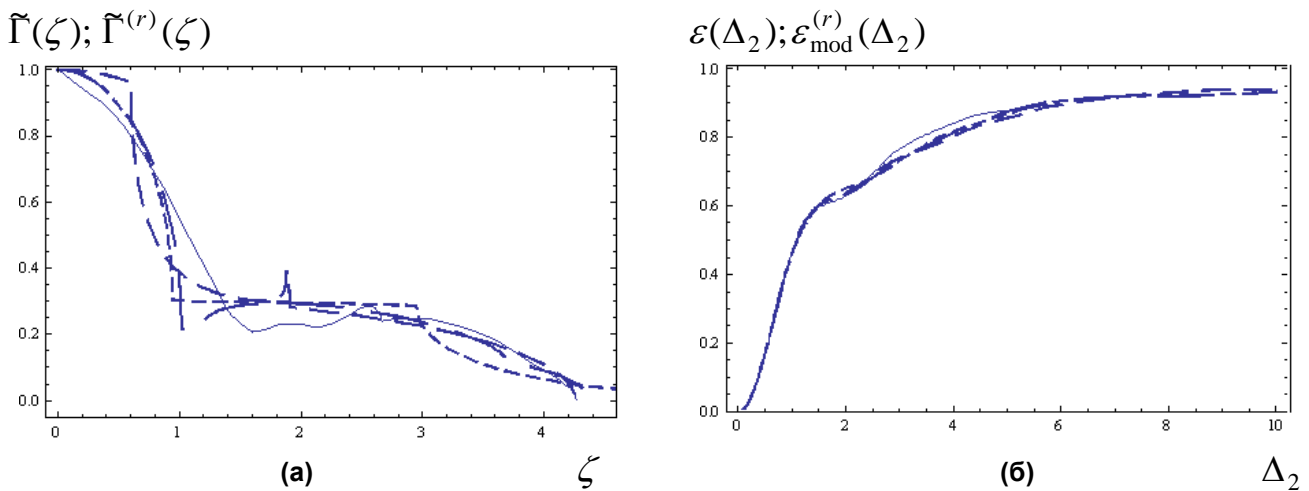


Рис.19

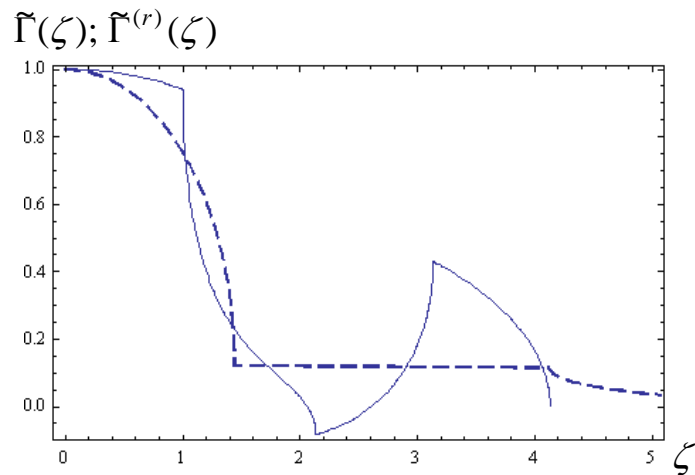
Для зубчатого отверстия 3O2 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модельных кривых $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ с параметрами из табл.5 (штриховые линии; длины штрихов возрастают по порядку написания трех наборов параметров в таблице). Одна из кривых $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ (короткие штрихи, первый набор в табл.5) имеет «хвост» $b = 9,3$, который обрезан на графике;

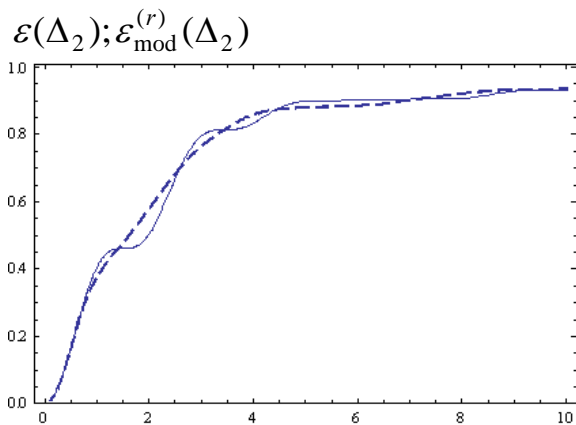
(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ с параметрами из табл.5 (штриховые линии; типы линий соответствуют (а)).

- Точность аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ полученными функциями $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ почти везде не хуже, чем функциями $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta_2)$ моделей рис.4а,б, рис.5а и рис.6а, а подчас и заметно лучше лучших из них.

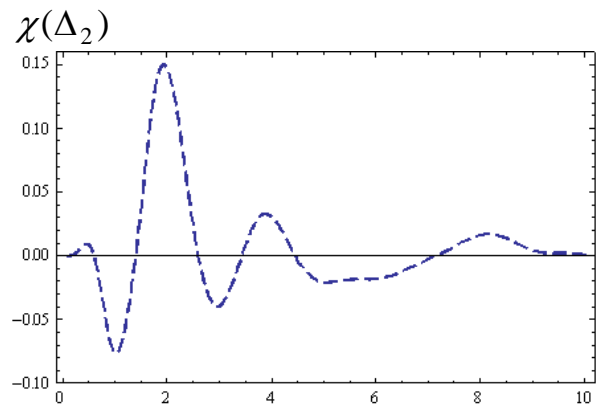
- Среди трех функций $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ имеется явно лучшая (или лучшие) аппроксимации; и соответствующие им модели (49) лучше представляют функцию $\tilde{\Gamma}(\zeta)$.



(а)



(б)



(в)

Δ_2

Рис.20

Для кольцевого отверстия с $\mu = 1,77$ ($d = 0,516$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и несовпадающей с ней модельной кривой $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ с параметрами из табл.5 (штриховая линия). Кривая $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ имеет «хвост» $b = 13,07$ который обрезан на графике;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$, соответствующей $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ из (а) (штриховая линия);

(в) – график функции $\chi(\Delta_2)$ для функции из (б).

Небезынтересно также, что для всех трех отверстий (без кольца) у одной из полученных функций (49) значение параметра γ положительно (в отличие от функ-

ции (27), где оно отрицательно), а у двух других – отрицательно. Причем аппроксимация $\varepsilon(\Delta_2)$ при положительном γ для этих отверстий не из худших среди полученных (на рис.17-19 эти варианты представлены кривыми с самыми длинными штрихами).

И уж совсем удивительным оказался результат аппроксимации для кольцевого отверстия, представленный на рис.20. Здесь из уравнений получились 2 набора параметров (49), один воспроизводящий функцию (27), а другой – нет; причем последний дает функцию, сильно внешне отличную от (27). У нее «срезаны» характерные особенности точной функции и даже имеется «хвост», длина которого более чем в 3 раза превышает максимальное значение (27). И, тем не менее, она в целом немногим хуже (и то не везде) воспроизводит точную функцию $\varepsilon(\Delta_2)$, чем лучшая найденных моделей – модель рис.4а (см. рис. 9).

Третья рассмотренная модель (49) предполагает выполнение условий (51) и (53), т.е. содержит 2 свободных параметра после учета обязательных уравнений (25). Из двух первых уравнений (31) (на моменты I_1 и I_3) получается в этом случае 2 алгебраических уравнения для параметров a и b

$$\begin{aligned} & (a^2 + ab + b^2)[2af_1 - (1-p)^2(3I_1 + ab)] + a^2(1-p^2)^2[3I_1 + ab - 2(a+b)] = ; \\ & = (8\mu^2 + ab(a+b))[af_1 - (1-p)^2(a+b)] \\ & (a^2 + b^2)(a+b)[2af_1 - (1-p)^2(3I_1 + ab)] + a^3 f_3 [3I_1 + ab - 2(a+b)] = , \\ & = (7,5I_3 + ab(a^2 + ab + b^2))[af_1 - (1-p)^2(a+b)] \end{aligned} \quad (57)$$

где $f_{1,2}$ определены в (54-55).

Через решения (57) остальные параметры (49) находятся из соотношений

$$\gamma = \frac{3I_1 + ab - 2(a+b)}{[af_1 - (1-p)^2(a+b)]a^2}; \quad \alpha = \frac{b-2 + \gamma a^2(1-p)^2}{a(b-a)}; \quad \beta = \frac{1-\alpha a}{b}; \quad c = a; \quad g = c \cdot p. \quad (58)$$

Таблица 6

Параметры модели (49), рассчитанные из (57-58) и удовлетворяющие условиям (50) и (53). В предположении $g/c = 1/\mu^2 = 0,3192$ при $\mu = 1,77$. Используются моменты из табл.1.

	$a = c$	b	g	α	β	γ
Прямоугольник $a/b = 9,84$	2,107	8,197	0,672	0,459	0,00408	-0,1509
	2,950	8,575	0,942	0,330	0,00309	-0,2725
Кольцо $d = 0,516$	0,852	4,780	0,272	0,913	0,04642	0,8210
	3,212	1,187	1,025	0,124	0,14355	-0,3761
Зубчатое отверстие 1	0,679	3,588	0,217	0,671	0,15169	-1,2256
Зубчатое отверстие 2	0,923	4,243	0,295	0,736	0,07566	0,0290
	1,867	4,252	0,593	0,368	0,07463	-0,3860

Подстановка в (57) моментов из табл.1 тоже дает для каждого из четырех отверстий большой набор решений, из которых действительными, дающими удовлетворяющие (50) значения параметров, оказались по два набора для прямоугольника, кольца и второго зубчатого отверстия и 1 набор для первого зубчатого отверстия. Эти

параметры приведены в табл.6. Функции $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ для них вместе с точными функциями, а также функции (35) для прямоугольного и кольцевого отверстий приведены на рис.21-24.

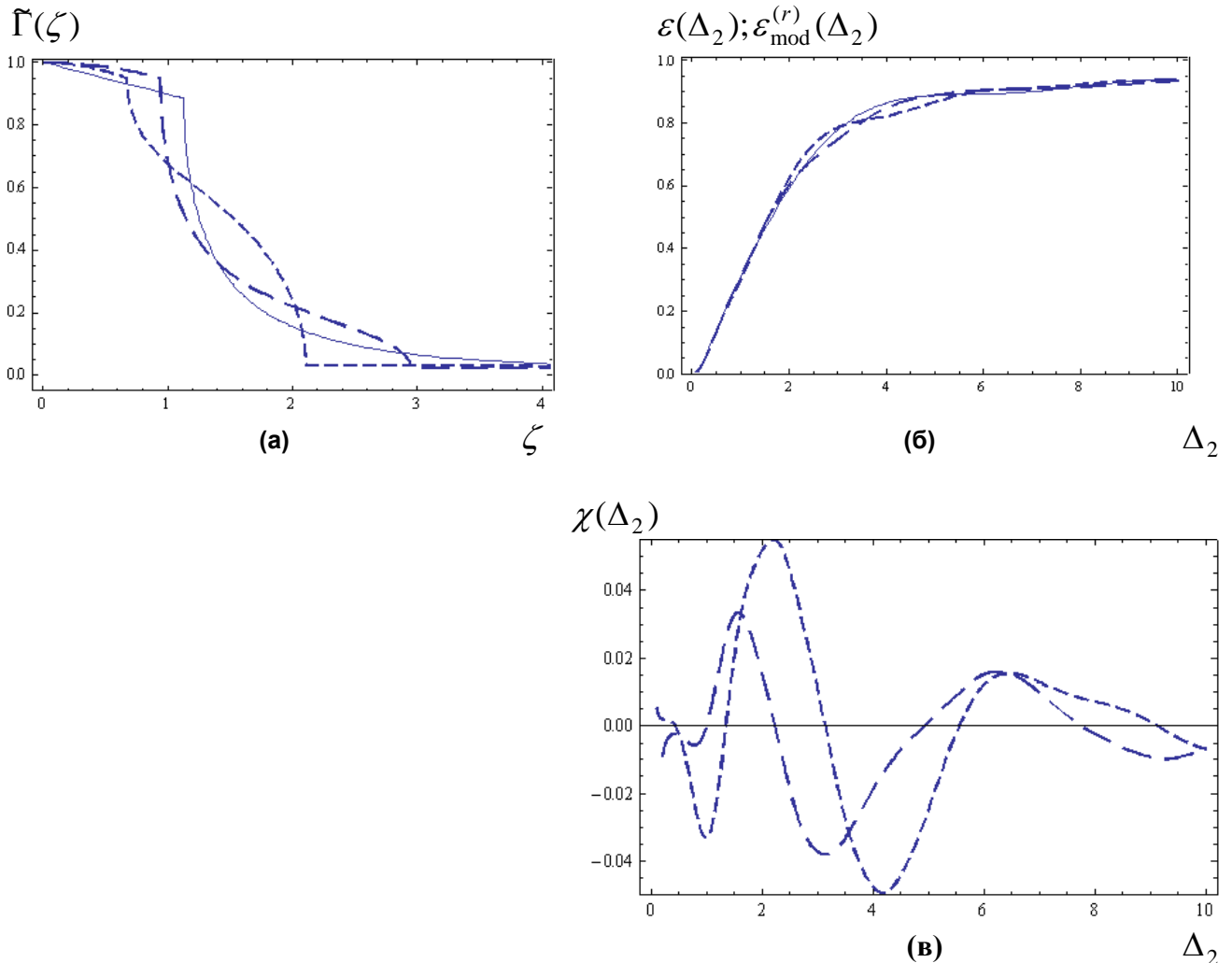


Рис.21

Для прямоугольного отверстия с $\mu = 1,77$ ($a/b = 9,84$):

- (а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и двух моделей (49) с ограничениями (51,53) с параметрами из табл.6 (штриховые линии; длины штрихов возрастают по порядку написания двух наборов параметров в таблице). У всех функций на графике обрезаны близкие по длине «хвосты»;
- (б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ (формула (56)) с параметрами из табл.6 (штриховые линии; типы линий соответствуют (а));
- (в) – графики функции $\chi(\Delta_2)$ для функций из (б) (типы линий соответствуют).

Из сравнения рис.21-24 с рис.17-20 можно сделать вывод, что наложение на параметры (49) дополнительного ограничения (53) не только не ухудшает качества аппроксимации функции $\varepsilon(\Delta_2)$, а, наоборот, его улучшает. Это, вообще говоря, не кажется странным. Ограничение (53) (в отличие от (52)) по-видимому, не сильно уменьшает разнообразия функций (49) в смысле отражения каких-то важных для рас-

чета $\varepsilon(\Delta_2)$ топологических свойств отверстий. В то же время, уменьшение числа свободных параметров с 3-х до 2-х делает модель $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ более гибкой. Может, хватило бы и одного свободного параметра, но не удалось придумать еще одного разумного изначального ограничения на параметры (49). Далее, для неоднородных полей на отверстиях, будет видно еще одно преимущество модели (49,51,53) по сравнению с (49,51) – функция $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ для нее имеет более реалистичный вид. В примерах для однородного поля это не так заметно, а для неоднородного поля будет заметно.

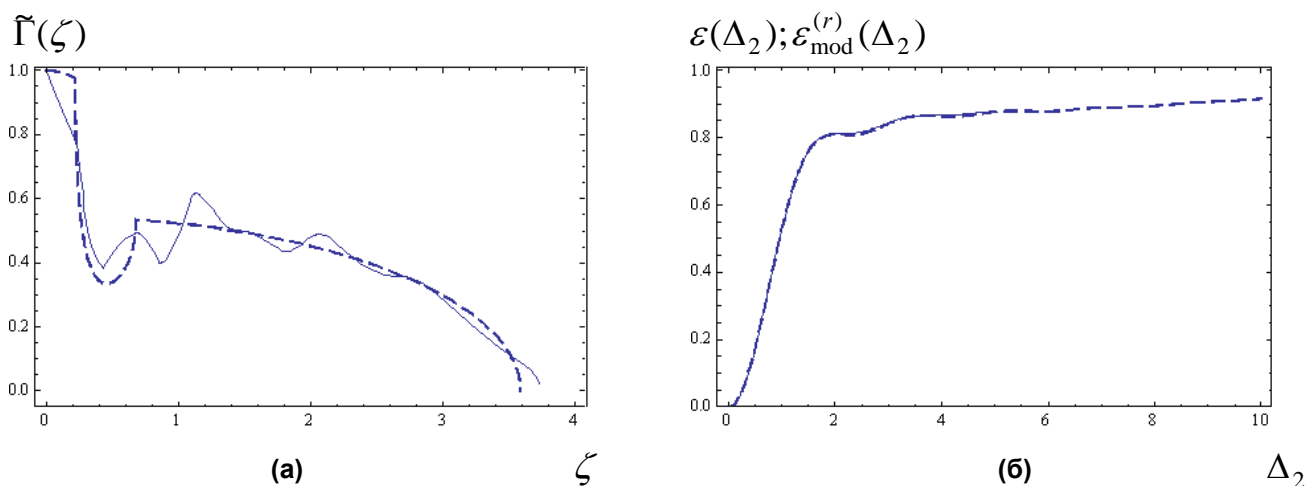


Рис.22

Для зубчатого отверстия 3О1 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модели (49) с ограничениями (51,53) с параметрами из табл.6 (штриховая линия);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ (формула (56)) с параметрами из табл.6 (штриховая линия).

Если сравнить параметры из табл.5 с параметрами из табл.6, то видно, что у трех отверстий, кроме кольцевого, в табл.5 есть по одному решению близкому к одному из решений из табл.6. В табл.5 это средние строчки параметров для каждого из отверстий; им на рис.17-19 соответствуют кривые со штрихами промежуточной длины. А в табл.6 это последние строчки для каждого из отверстий; им на рис.21-23 соответствуют кривые с более длинными штрихами (там, где есть по два решения). Случайно или нет, но именно эти решения из табл.6 – наилучшие из аппроксимаций. А для соответствующих им решений из табл.5 ситуация такая. Для прямоугольника и 3О2 имеет место хорошее совпадение параметров этих близких моделей из табл.5 и 6. И для этих отверстий упомянутые модели из табл.5 тоже среди лучших. Что же касается 3О1, то средняя модель из табл.5 явно не лучшая, но при этом она как раз заметно отлична от единственного решения модели (49,51,53), которая вообще близка к идеалу. Конечно, делать серьезные выводы всего лишь из четырех примеров не стоит. Но, по крайней мере, видно, что модель (49,51,53) обладает рядом преимуществ по сравнению с моделью (49,51) и не обладает некоторыми недостатками последней.

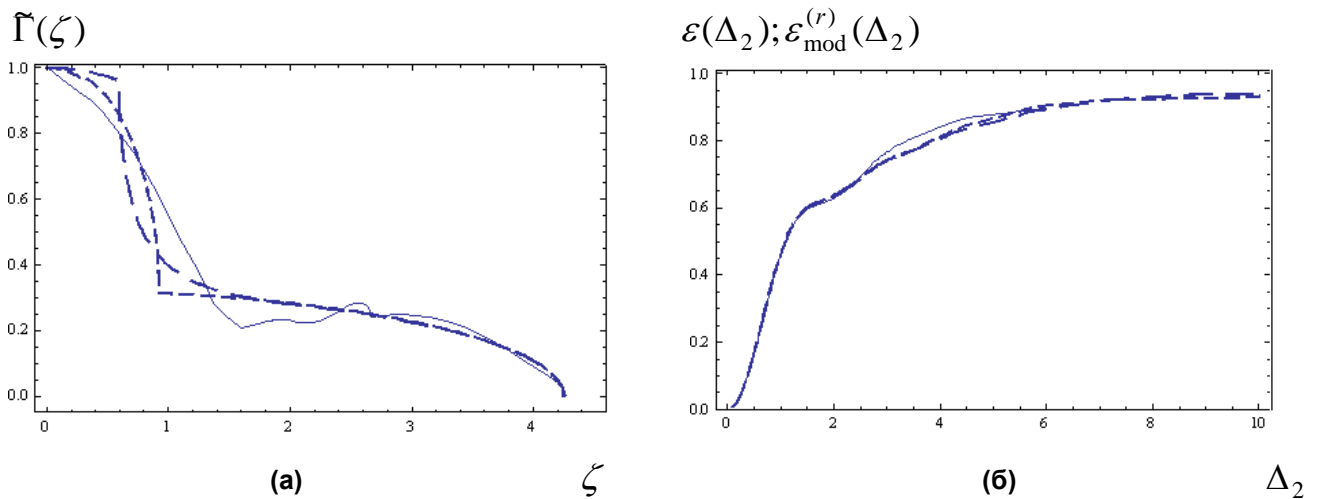


Рис.23

Для зубчатого отверстия 302 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и двух моделей (49) с ограничениями (51,53) с параметрами из табл.6 (штриховые линии; длины штрихов возрастают по порядку написания двух наборов параметров в таблице);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ (формула (56)) с параметрами из табл.6 (штриховые линии; типы линий соответствуют (а)).

Что же касается моделей (49) для кольцевого отверстия, то тут вообще неожиданная ситуация. Одна из двухпараметрических моделей (49,51,53) (вторая строчка в табл.6, кривая с длинными штрихами на рис.24) является, как видно из рис.24, хорошей моделью не только функции $\varepsilon(\Delta_2)$, но и $\tilde{\Gamma}_{\text{ring}}(\zeta)$, хотя в последней условие (53) не выполнено. Две другие представленные модели (49,51) на рис.20 и (49,51,53) на рис.24 тоже неплохие, относительная погрешность аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ с их помощью укладываются в 15%. И при этом обе эти модели не особенно хорошо аппроксимируют $\tilde{\Gamma}_{\text{ring}}(\zeta)$, особенно вторая на рис.24, имеющая выброс в начале координат за счет третьего слагаемого в (49) с положительным коэффициентом γ (см. табл.6). Однако на точность аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ это, как видно, сильно не влияет.

Надо заметить, что если подбирать параметры функции (49) без каких-либо ограничений (с учетом обязательных уравнений (25), что оставляет 4 свободных параметра), из соображений максимально приблизиться к точной функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, то для трех наших отверстий (без кольца; для него и так существует точный набор параметров), можно несколько улучшить аппроксимацию $\tilde{\Gamma}(\zeta)$. Но это не обязательно даст лучше аппроксимацию точной $\varepsilon(\Delta_2)$. На рис.25-27 представлены такие примеры при условии $a = c$. Из сравнения рис.25-27 с рис.17-19 и рис.21-23 видно, что для всех трех отверстий аппроксимация $\varepsilon(\Delta_2)$ практически не улучшается за счет некоторого улучшения аппроксимации $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в рамках модели (49).

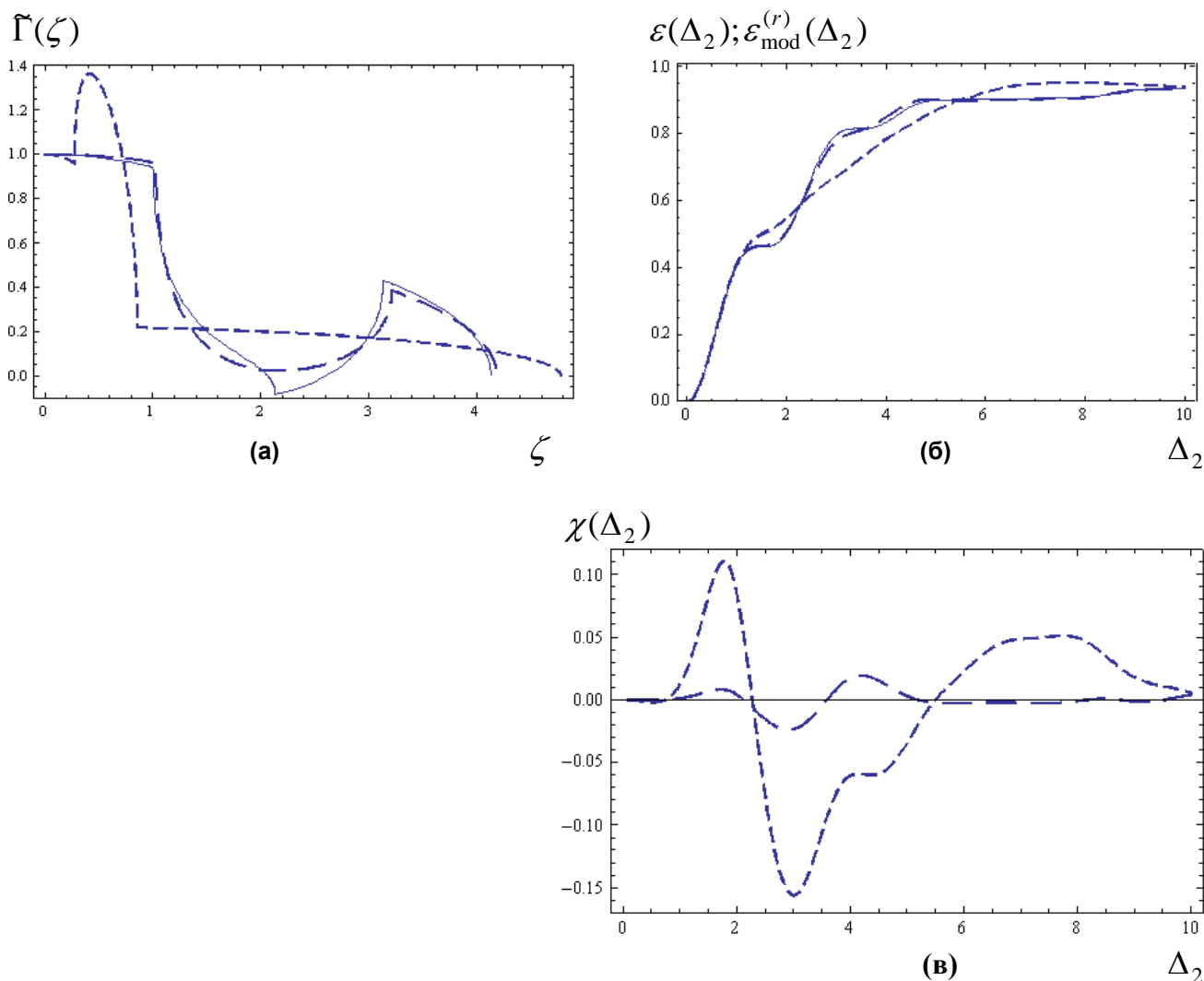


Рис.24

Для кольцевого отверстия с $\mu = 1,77$ ($d = 0,516$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и двух моделей (49) с ограничениями (51,53) с параметрами из табл.6 (штриховые линии; длины штрихов возрастают по порядку написания двух наборов параметров в таблице);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ (формула (56)) с параметрами из табл.6 (штриховые линии; типы линий соответствуют (а));

(в) – графики функции $\chi(\Delta_2)$ для функций из (б) (типы линий соответствуют).

Итак, подведем итоги аппроксимации функций $\varepsilon(\Delta_2)$ при дифракции постоянных по апертуре полей. Показано, что есть (по крайней мере, для примеров в данной работе, и ряда других) простые модели функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, через которые искомые хорошие аппроксимации рассчитываются по формуле (26) аналитически или через односторонний интеграл, значения которого могут быть затабулированы. Наиболее удачными из таких моделей $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ оказались модели кусочно-постоянных функций, представленные на рис.4а и рис.6а, состоящие из двух или трех прямоугольников, а также модель, представленная формулой (49), являющаяся обобщением функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$

для кольцевого отверстия (с произвольными параметрами). Аппроксимации функций $\varepsilon(\Delta_2)$ для этих моделей описываются, соответственно, выражениями (38,47,56).

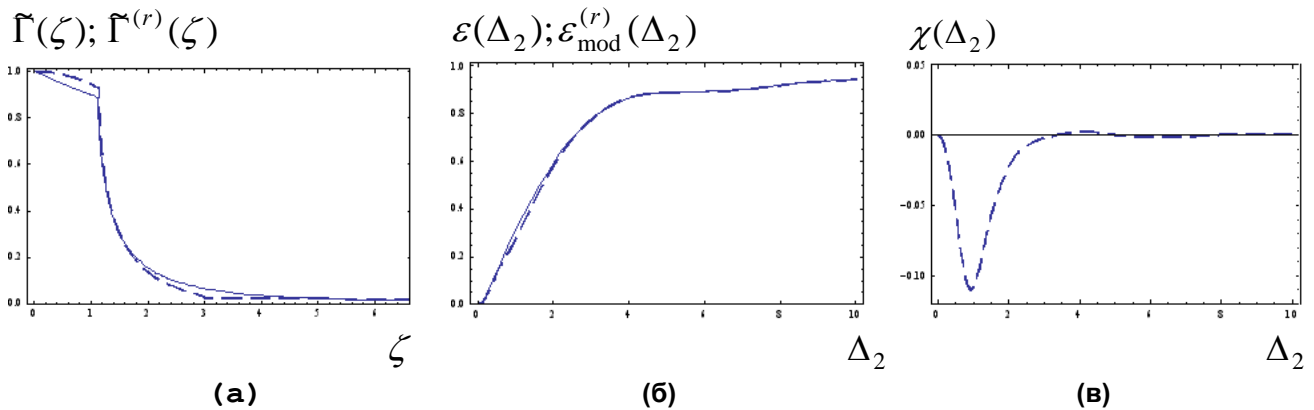


Рис.25

Для прямоугольного отверстия с $\mu = 1,77$ ($a/b = 9,84$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и кривой (49) с вручную подобранными параметрами (штриховая линия). Параметры подбирались из соображений наилучшей аппроксимации точной функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с учетом уравнений (25) и при условии $a = c$. У обеих функций оказались почти совпадающие «хвосты» длины 8,8;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ с параметрами кривой (а) (штриховая линия);

(в) – график функции $\chi(\Delta_2)$ для $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ из (б).

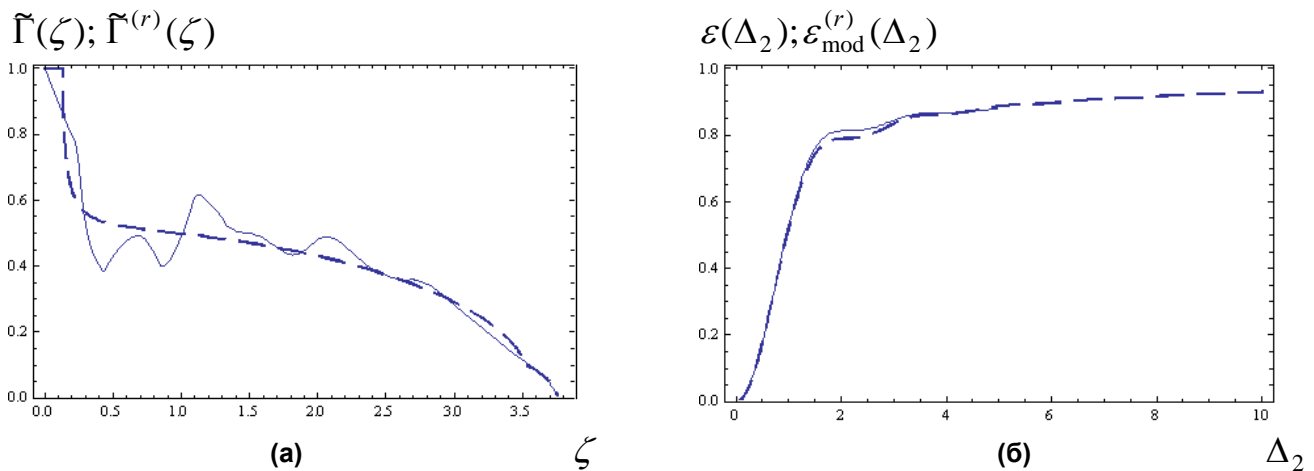


Рис.26

Для зубчатого отверстия ЗО1 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,77$; $n = 10$; $\eta = 0,25$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и кривой (49) с вручную подобранными параметрами (штриховая линия). Параметры подбирались из соображений наилучшей аппроксимации точной функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с учетом уравнений (25) и при условии $a = c$;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ с параметрами кривой (а) (штриховая линия).

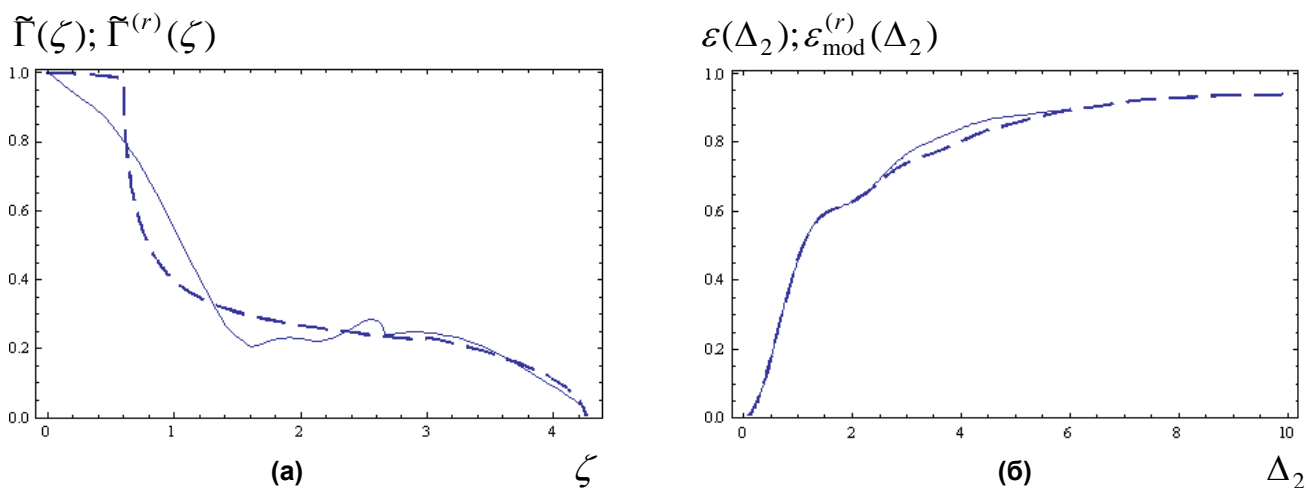


Рис.27

Для зубчатого отверстия 3O2 с $\mu = 1,77$ ($d = 0,25$; $n = 3$; $\eta = 1/3 = 0,33$):

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и кривой (49) с вручную подобранными параметрами (штриховая линия). Параметры подбирались из соображений наибольшей аппроксимации точной функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с учетом уравнений (25) и при условии $a = c$;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta_2)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta_2)$ с параметрами кривой (а) (штриховая линия).

Все эти модели имеют по несколько свободных параметров, не определяемых обязательными уравнениями (25) для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$: модель рис.4а - один параметр, модель рис.6а - три, а модель (49) – четыре. В качестве источника этих параметров мы воспользовались моментами (31) функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (т.е. моментами функции $T(\zeta)$ - см. (22)). В этом случае модели рис.4а и рис.6а, если существуют, то лишь в одном варианте (см. (33,42-44)). В модели же (49) в полном виде не так легко рассчитать параметры из моментов (тут уже нужны 4 момента, больше, чем в (31)), уравнения получаются интегральными через эллиптические интегралы. Упростив ситуацию - уменьшив на единицу количество свободных параметров в (49) с помощью условия (51), имеющего место для точной функции (27) для кольцевого отверстия, для трех из рассмотренных примеров удалось получить по три набора параметров модели (49), а для кольцевого отверстия – два, из которых одно совпадает с точной функцией, а другое нет и довольно заметно от нее отличается. Все три варианта для каждого отверстия (а также второй вариант для кольцевого) дали весьма неплохие аппроксимации точной функции $\varepsilon(\Delta_2)$, а лучшие из них оказались заметно лучше моделей рис.4а и рис.6а (тоже хороших - относительная погрешность в пределах 10% во всем интервале определения). Еще удачнее оказались аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ с помощью модели (49) для $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с двумя ограничениями на параметры – (51) и (53) и, соответственно, с двумя свободными параметрами. В этом случае нахождение указанных параметров через моменты I_1 и I_3 (31) тоже дало не по одному набору возможных решений, лучшие из которых заметно лучше и моделей рис.4а,6а и моделей (49,51).

При этом воспроизводство модельными функциями точных функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ могло быть весьма приближенным, подчас отражая лишь общий контур функции. Особенно это заметно в вариантах модели (49,51) с дополнительными ограничениями или без них. Отсюда напрашиваются 3 вывода.

Для хорошей аппроксимации $\varepsilon(\Delta_2)$ не требуется хорошее воспроизводство функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, важны какие-то элементы этой функции. Образно говоря, посредством $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ в модель $\varepsilon(\Delta_2)$ вводится дополнительная информация о функции $\tilde{T}(\zeta)$ в виде ограниченного количества чисел (одно, два, три).

Возможно, моменты - не лучший источник информации об этих числах. Во всяком случае, в модели (49) они не дают выбора между несколькими вариантами, из которых есть явно лучшие.

Тем не менее, предложенный подход аппроксимации мы полагаем хорошим и перспективным даже в нашем феноменологическом варианте. Но желательно бы найти математическое обоснование подхода и, вследствие этого, более адекватный выбор моделей и источников параметров.

Неоднородное поле на отверстии

Согласно работам [1-2], при неоднородном поле на отверстии имеется намного более грубая аппроксимация $\varepsilon(\Delta)$ на основе лишь условий (25). Предложенная в [1-4] в качестве аппроксимации функция (13) с некоторой феноменологической нормировкой аргумента в целом несколько улучшала ситуацию, но лишь для плавных полей типа гаусса или экспоненты. Точность аппроксимации при этом значительно хуже (по сравнению с постоянным полем на отверстии). И все уже совсем плохо, если поле не плавное. Например, когда в какой-то небольшой области отверстия («керне») поле резко падает, а потом на значительной части отверстия («периферии») малое, но не нулевое и интегрально по энергии сравнимо с областью «керна». К тому же расчет этой феноменологической нормировки функции (13) при непостоянном поле – отдельная математическая задача, непросто решаемая, а использование приближенных величин только ухудшает и без того не очень хорошую ситуацию.

Посмотрим, что дает предложенный выше подход для постоянных полей в случае непостоянных полей. Выберем лучшие и простейшие варианты аппроксимации из предыдущего раздела, т.е. остановимся главным образом на приближениях $\varepsilon(\Delta)$ функциями (38-39,47-48,56), т.е. модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ с рис.4, рис.6а и модели (49).

С математической стороны задача аппроксимации $\varepsilon(\Delta)$ абсолютно не отличается от случая однородного поля. Вместо нормировочных параметров (12) теперь используются (8) и (10). Берется система (21) и какое-то количество уравнений (22) для функции (19).

Чтобы сделать задачу идентичной системе (25,31), перенормируем функцию (19) по обеим осям так, чтобы уравнения (21) совпали с системой (25). Легко видеть, что для этого аргумент ρ надо нормировать на $\rho_{2,eff}$ (10), а саму функцию (19) – на

$\frac{2}{\pi\rho_{2,eff}}$, т.е. теперь под функцией $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и аргументом ζ будем понимать

$$\tilde{\Gamma}(\zeta) = \frac{\pi\rho_{2,eff}}{2} \Gamma(\rho = \zeta\rho_{2,eff}). \quad (59)$$

Формула (59) – полный аналог (23-24) с заменой ρ_2 на (10). При этом в последнем уравнении (25) параметр μ (15) заменяется на (см. (8,10))

$$\mu_{eff} = \rho_{1,eff} / \rho_{2,eff}. \quad (60)$$

Собственно, основная причина ухудшения ситуации с аппроксимацией $\varepsilon(\Delta)$ при неоднородном поле заключается в том, что величина (60) теперь может быть во много раз больше, чем (15) в случае однородного поля. Если начертить (как на рис.2) на одном графике две функции Релея (13) - от аргумента $\Delta_{2,eff} = 2\pi(\rho_{2,eff} / \lambda)\mathcal{G}$ (с ней точная функция $\varepsilon(\Delta_{2,eff})$ совпадет при больших значениях аргумента), и от аргумента $\Delta_{1,eff} = 2\pi(\rho_{1,eff} / \lambda)\mathcal{G} = \mu_{eff}\Delta_{2,eff}$ (с ней функция $\varepsilon(\Delta_{2,eff})$ совпадет в начале координат), то две эти функции Релея будут сильно разнесены, переход $\varepsilon(\Delta_{2,eff})$ с одной на другую может быть весьма разнообразен, и по сути отсутствует информация о поведении $\varepsilon(\Delta_{2,eff})$ во всей значимой области своего определения.

Для функции (59) из (22) получаются уравнения, идентичные (31), где в правых частях стоят величины

$$I_{n,eff} = \left(\frac{\pi}{2\rho_{2,eff}} \right)^n \tilde{I}_n. \quad (61)$$

Таким образом, остается сравнить для неоднородных полей точные функции $\varepsilon(\Delta_{2,eff})$ с приближениями (38-39,47-48,56), где параметры рассчитываются через (60-61).

Поскольку точный расчет функции $\varepsilon(\Delta_{2,eff})$ при неоднородном поле даже для простых отверстий требует часов расчета в пакете программ Wolfram Mathematica 7, для иллюстрации было решено ограничиться тремя примерами из тех, для которых была получена наихудшая аппроксимация в работах [1-2]. Было выбрано простое кольцевое отверстие и поля, спадающие по радиусу к центру или к периферии, т.е. обладающие, как и отверстие, круговой симметрией.

Пример 1. Кольцевое отверстие с отношением радиусов $d = 0,2$ и полем, спадающим по радиусу от центра к периферии по формуле

$$U(r) = \exp\left(-\frac{|r-r_1|}{\delta(r_2-r_1)}\right), \quad (62)$$

где r расстояние от центра; $r_2 > r_1$ - радиусы кольца; δ - параметр, характеризующий крутизну спада поля. Было взято $\delta = 0,1$, т.е. экспоненциальный спад поля от внутреннего радиуса к внешнему составлял $e^{-10} \cong 0,0000454$.

Пример 2. Кольцевое отверстие с отношением радиусов $d = 0,7$ и полем, спадающим по радиусу тоже по формуле (62), но к центру. Теперь $\delta = 0,4$, т.е. экспоненциальный спад поля от внешнего радиуса к внутреннему составлял $e^{-2,5} \cong 0,0821$.

Пример 3. Кольцевое отверстие с отношением радиусов $d = 0,5$ и полем, спадающим по радиусу к периферии по формуле

$$U(r) = \begin{cases} \sqrt{1-\alpha(r-r_1)}, & r_1 \leq r \leq r^* \\ \delta = \sqrt{1-\alpha(r^*-r_1)}, & r^* \leq r \leq r_2 \end{cases}, \quad r^* = \frac{1-\delta^2}{\alpha} + r_1, \quad (63)$$

т.е. имеется «кern», где интенсивность (U^2) спадает линейно, и «периферия», где поле постоянно. Взяты параметры (63) $\alpha = 32/r_2$; $\delta = \sqrt{0,02} \cong 0,141$, что соответствует $r^* \cong 0,53r_2$ и примерно равенству энергий, заключенных в «кернах» (E_1) и на «периферии» (E_2), - $E_1/E_2 \cong 1,11$. «Кern» в этом случае представляет собой очень узкое кольцо по сравнению с областью отверстия - $r_1/r_2 = 0,5$; $r^*/r_2 = 0,53$. Число $\delta^2 = 0,02$ примерно равно числу $e^{-4} \cong 0,018$, т.е. числу, которым в работах [1-2] был оценен уровень интенсивности поля, по которому следует проводить эффективную границу отверстия при неоднородном поле на апертуре.

В таблице 7 представлены параметры (60-61) для **примеров 1-3**, а в таблице 8 рассчитанные из них по формулам (33-34, 42-44) параметры моделей рис.4а,б и рис.6а. Для модели рис.6а решение (42-44) существует лишь для **примера 1**.

Таблица 7

Численно рассчитанные значения μ_{eff} (60) и эффективные моменты $I_{n,eff}$ (61) для кольцевых отверстий с $d = r_1/r_2$ и полями из **примеров 1-3** (см. (62-63)).

	μ_{eff}	$I_{1,eff}$	$I_{3,eff}$	$I_{4,eff}$
Пример 1: $d = 0,2$; поле (62) спадает от центра; $\delta = 0,1$	3,367	3,606	112,183	781,281
Пример 2: $d = 0,7$; поле (62) спадает к центру; $\delta = 0,4$	5,335	4,352	701,305	12009,90
Пример 3: $d = 0,5$; поле (63) спадает от центра; $\alpha = 32/r_2$; $\delta^2 = 0,02$,	12,033	10,045	8553,33	336280,5

Таблица 8

Параметры моделей рис.4 и рис.6а, рассчитанные, соответственно, по формулам (33-34) и (42-44) для **примеров 1-3** из табл.7 (в нормировке на $\rho_{2,eff}$ согласно (59)).

Модель рис.4а	l_1	l_2		h	
Пример 1	0,837	8,037		0,102	
Пример 2	1,194	18,120		0,0223	
Пример 3	1,057	35,872		0,01476	
Модель рис.4б	l_1	l_2		h	
Пример 1	2,121	9,074		0,147	
Пример 2	2,615	21,779		0,0275	
Пример 3	2,301	41,309		0,0215	
Модель рис.6а	l_1	l_2	l_3	h_1	h_2
Пример 1	0,613	2,824	8,850	0,239	0,0714

На рис.28-30 для **примеров 1-3** показаны графики точных функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon(\Delta)$ (сплошными линиями) и моделей этих функций (штриховыми линиями) – прямоугольных моделей рис.4а,6а (у **примера 1**) и моделей рис.4а,б (у **примеров 2 и 3**) для функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (расчет параметров, соответственно, по формулам (33-34) и (42-44)) и полученных из них функций $\varepsilon_{mod}(\Delta)$ (соответственно, формулы (38-39) и (47)). Для сопоставления результатов настоящей работы с данными работы [2] на рис.28-30 линейный параметр (10) в нормировке аргументов всех функций заменен на параметр длины $\tilde{\rho}_{2,eff}$ (16), предложенный в [1-2], т.е. на рис.28-30 перенормированы как аргумент (24) ζ (теперь $\zeta = \rho / \tilde{\rho}_{2,eff}$), так и аргумент (14) Δ (теперь $\Delta = 2\pi(\tilde{\rho}_{2,eff} / \lambda)\vartheta$). Напомним, что параметр $\tilde{\rho}_{2,eff}$ равен феноменологическому аналогу параметра (11) при неоднородном поле на апертуре; он не равен величине (10), рассчитываемой из производной функции $T(\rho)$ в нуле (см. (18)), а по аналогии с (11) равен частному от эффективной площади (7) (которая меньше площади отверстия), деленной на соответствующий этой эффективной площади периметр, получаемый как длина границы, проходящей по горизонтали рельефа амплитуды поля на отверстии. В [1-2] мы предложили аппроксимировать точные функции $\varepsilon(\Delta)$ с помощью функции Релея (13) от того же аргумента Δ . Эта функция также приведена на рис.28-30 (графики (б)) кривыми с самыми длинными штрихами. Видно, что эта функция для **примеров 1-3** плохая аппроксимация во всей области определения - и в начале координат и при больших значениях аргумента.

Учитывая, что модельные функции для $\tilde{\Gamma}$ и функции ε_{mod} по описанной выше схеме соответствуют нормировке ρ на $\rho_{2,eff}$ (10), для сравнения их с точными $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon(\Delta)$ на рис.28-30, нормированными на $\tilde{\rho}_{2,eff}$ (16), они перенормировывались по оси абсцисс на отношение $\tilde{\rho}_{2,eff} / \rho_{2,eff}$.

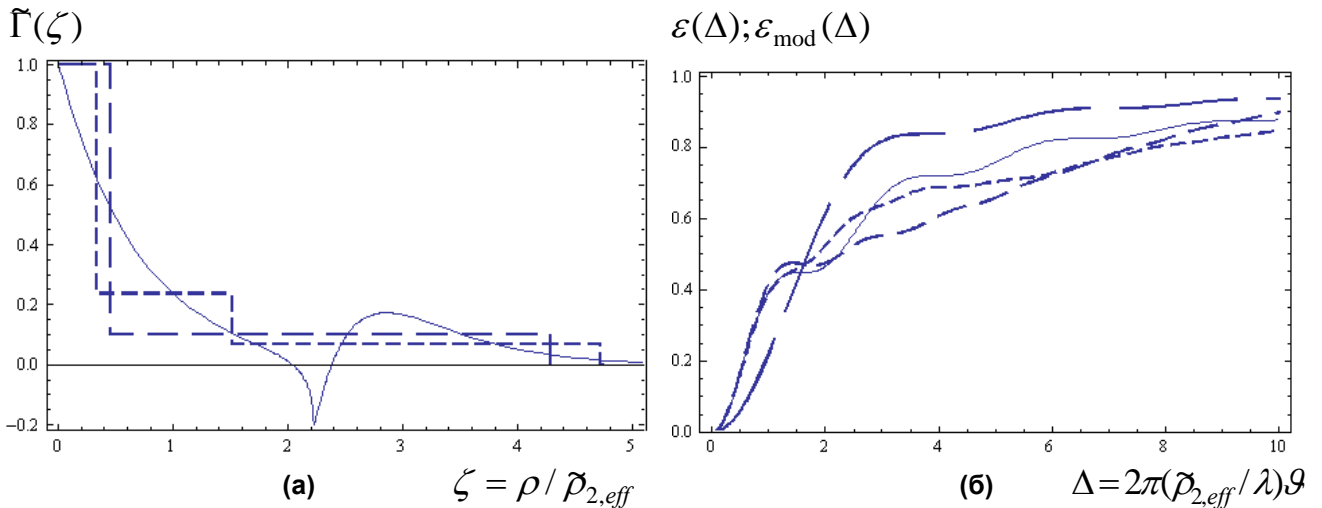


Рис.28

Для примера 1:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия, «хвост» урезан) и моделей рис.4а (длинные штрихи) и рис.6а (короткие штрихи) с параметрами из табл.7-8;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta)$ (формулы (38) и (47)) с параметрами из табл.7-8 (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым графика (а)). Кривая с самыми длинными штрихами – функция Релея (13) от аргумента Δ .

И аргумент (24) ζ в (а) и аргумент (14) $\Delta = 2\pi(\tilde{\rho}_{2,\text{eff}} / \lambda)g$ в (б) нормированы на параметр длины $\tilde{\rho}_{2,\text{eff}}$ (16), который соответствует нормировке, предложенной в работах [1-2] (см. текст).

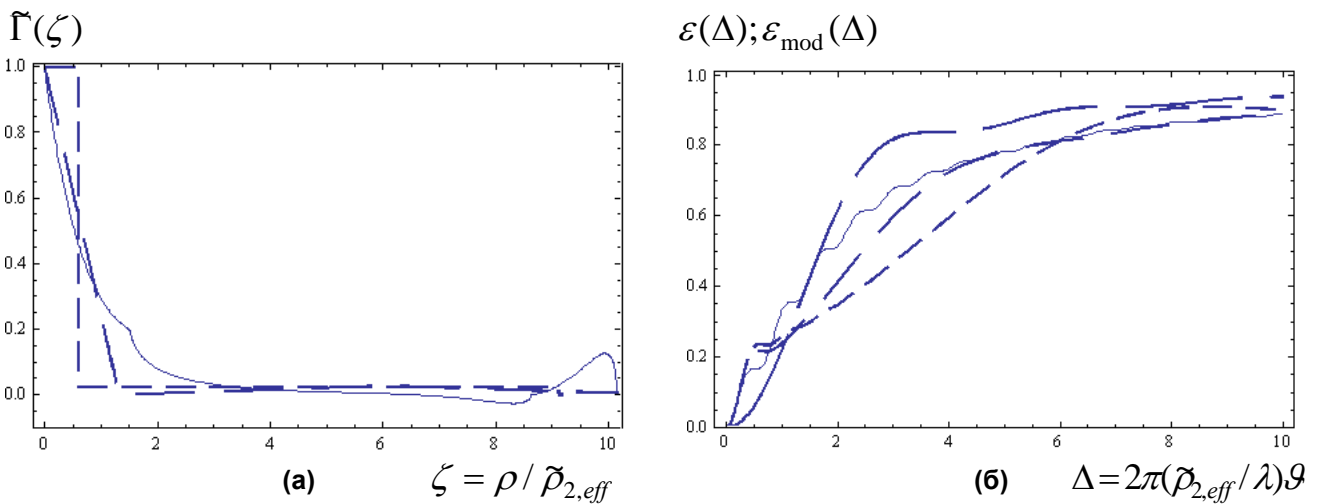


Рис.29

Для примера 2:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей рис.4а (штриховая линиям со средними штрихами) и рис.4б (длинные штрихи) с параметрами из табл.7-8;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta)$ (формулы (38-39)) с параметрами из табл.7-8 (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым графика (а)). Кривая с самыми длинными штрихами – функция Релея (13) от аргумента Δ .

Нормировка аргументов функций такая же, как на рис.28.

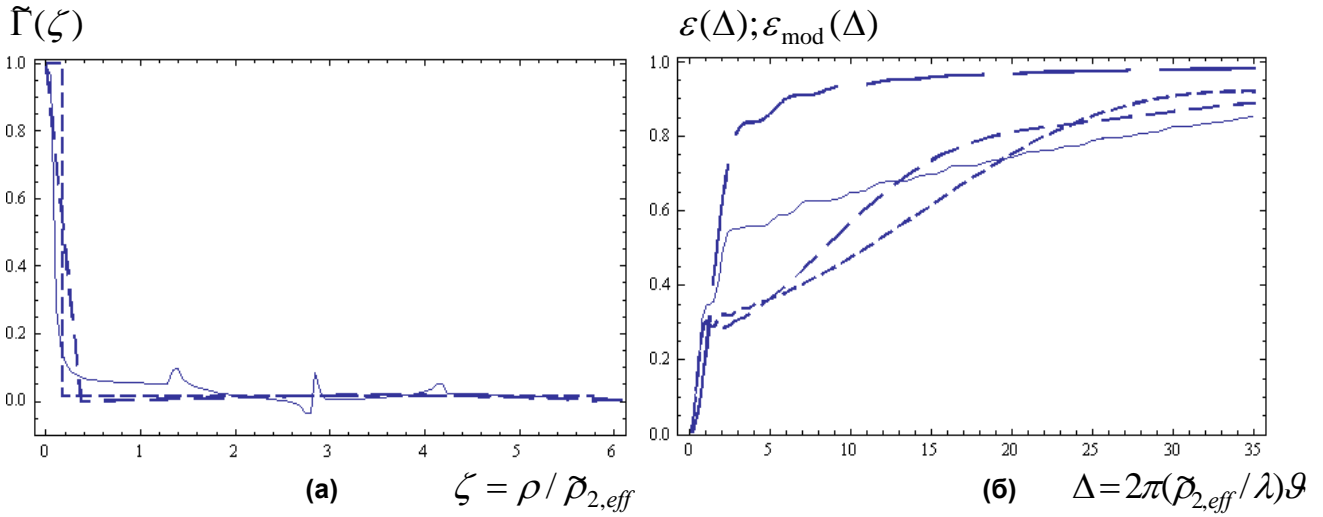


Рис.30

Для примера 3:

(а) - графики функции $\Gamma(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей рис.4а (штриховая линиям с короткими штрихами) и рис.4б (средние штрихи) с параметрами из табл.7-8;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}(\Delta)$ (формулы (38-39)) с параметрами из табл.7-8 (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым графика (а)). Кривая с самыми длинными штрихами – функция Релея (13) от аргумента Δ . Нормировка аргументов функций такая же, как на рис.28-29.

Для примера 1 из (62,10,16) имеем

$$\rho_{2,\text{eff}} = \frac{\delta(1-d)\{2d + \delta(1-d) - [2 + \delta(1-d)]e^{-2/\delta}\}}{2(d + e^{-2/\delta})} r_2; \quad \check{\rho}_{2,\text{eff}} = \left(\sqrt{\frac{\Sigma_{\text{eff}}}{\pi r_2^2} + d^2} - d \right) r_2,$$

где из (7)

$$\frac{\Sigma_{\text{eff}}}{\pi r_2^2} = 8\delta(1-d) \frac{\{d + \delta(1-d) - [1 + \delta(1-d)]e^{-1/\delta}\}^2}{2d + \delta(1-d) - [2 + \delta(1-d)]e^{-2/\delta}}.$$

Для примера 2 из (62,10,16) имеем

$$\rho_{2,\text{eff}} = \frac{\delta(1-d)\{2 - \delta(1-d) - [2d - \delta(1-d)]e^{-2/\delta}\}}{2(1 + de^{-2/\delta})} r_2; \quad \check{\rho}_{2,\text{eff}} = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Sigma_{\text{eff}}}{\pi r_2^2}} \right) r_2,$$

где из (7)

$$\frac{\Sigma_{\text{eff}}}{\pi r_2^2} = 8\delta(1-d) \frac{\{1 - \delta(1-d) - [d - \delta(1-d)]e^{-1/\delta}\}^2}{2 - \delta(1-d) - [2d - \delta(1-d)]e^{-2/\delta}}.$$

Для примера 3 из (63,10,16) имеем

$$\rho_{2,\text{eff}} = \frac{\delta^2(1-d^2) + \left(\frac{1-\delta^2}{\alpha r_2}\right)^2 \left(\frac{1-\delta^2}{3} + d\alpha r_2\right)}{(d + \delta^2)} r_2; \quad \check{\rho}_{2,\text{eff}} = \left(\sqrt{\frac{\Sigma_{\text{eff}}}{\pi r_2^2} + d^2} - d \right) r_2,$$

где из (7)

$$\frac{\Sigma_{eff}}{\pi r_2^2} = \frac{\left\{ \delta(1-d^2) - \frac{1}{15} \left(\frac{1-\delta}{\alpha r_2} \right)^2 \left(\frac{(1-\delta)(3\delta^2 + 9\delta + 8)}{3} - 10d\alpha r_2(\delta + 2) \right) \right\}^2}{\delta^2(1-d^2) + \left(\frac{1-\delta^2}{\alpha r_2} \right)^2 \left(\frac{1-\delta^2}{3} + d\alpha r_2 \right)}$$

Из рис.28-30 видно, что $\varepsilon_{mod}(\Delta)$ значительно лучше аппроксимируют точные функции, чем предложенная в [1-2] функция Релея, но не так хорошо, как при постоянной амплитуде поля. По своему построению $\varepsilon_{mod}(\Delta)$ совпадают с точными функциями и в начале координат и при больших значениях аргументов. Возможно, даже в рамках прямоугольных и треугольных моделей рис.4 и рис.6а можно было бы подобрать лучшие приближения $\varepsilon_{mod}(\Delta)$, но не из условий на моменты.

На рис.31 для **примера 1** также рассмотрены две треугольных модели с рис.4 и 6. Аппроксимации функций $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ и $\varepsilon(\Delta)$ на рис.31 сделаны с помощью треугольной модели функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ рис.4б (с одним параметром) и уже упомянутой (без формул) треугольной модели с двумя параметрами типа рис.6б с дополнительным ограничением $h_1 = 0$ (отличие этих моделей в том, что в первой из них второй треугольник равнобедренный, а во второй – нет). Из сравнения рис.31 с рис.28 видно, что треугольные аппроксимации $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ здесь лучше прямоугольных. Для **примеров 2-3** на рис.29-30 также треугольная модель рис.4б дает лучше аппроксимацию функции $\varepsilon(\Delta)$.

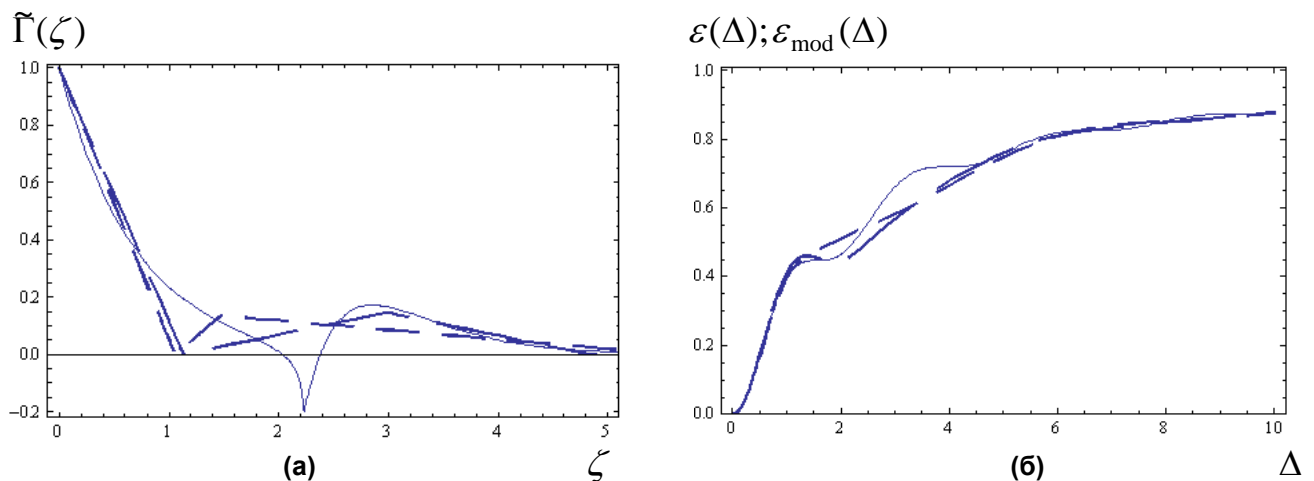


Рис.31

Для **примера 1**:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей рис.4б (длинные штрихи; параметры из табл.7-8) и рис.6б при ограничении $h_1 = 0$ (средние штрихи; формулы для параметров не приведены в работе);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{mod}(\Delta)$ (формулы (39) и (48) при $h_1 = 0$) с параметрами кривых графика (а) (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым графика (а)).

Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.28-30.

Посмотрим теперь, что дает модель (49) с ограничением (51) для **примеров 1-3** с неоднородным полем. Действительные параметры (55) этой модели, получающиеся из уравнений (54) с параметрами из табл.7-8 и удовлетворяющие ограничениям (50), приведены в табл.9.

Таблица 9

Параметры модели (49,51) (рассчитанные по формулам (54-55)) и модели (49,51,53) (рассчитанные по формулам (57-58)), удовлетворяющие условиям (50) для **примеров 1-3** кольцевых отверстий с полями (62-63). Используются моменты из табл.7.

Модель (49,51)	a	b	g	c	α	β	γ
Пример 1	0,731	40,53	3,571	40,49	1,064	0,00548	-0,0056
	0,0521	9,087	0,794	9,0035	3,382	0,09064	-0,0815
	5,417	9,090	0,509	5,773	0,157	0,0164	-0,1431
	0,369	9,501	0,157	1,781	2,431	0,01081	0,2630
Пример 2	7,413	17,808	0,611	17,38	0,022	0,047	-0,0502
	1,089	126,45	4,442	126,43	0,805	0,00097	-0,00097
	5,026	22,63	0,218	6,193	0,195	0,000925	-0,0951
Пример 3	20,565	34,712	0,227	32,91	0,0131	0,02104	-0,027
	20,068	43,199	0,152	21,968	0,0483	0,000725	-0,0395
Модель (49,51,53)	$a = c$	b	g		α	β	γ
Пример 1	1,554	9,475	0,137		0,577	0,01097	-0,1880
	6,353	10,052	0,560		0,146	0,00723	-0,1377
Пример 2	2,573	24,078	0,090		0,383	0,000647	-0,1473
Пример 3	7,538	59,506	0,052		0,132	0,000085	-0,1035

Для **примера 1** получились 4 набора таких параметров. Четыре набора функций $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ (49) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$ (56) для этих параметров вместе точными функциями (все в нормировке на $\tilde{\rho}_{2,\text{eff}}$ (64)) приведены на рис.32. Видно, что все 4 функции (56) являются хорошими приближениями точной функции, какие-то чуть лучше, какие-то чуть хуже. Хотя кривая (49) с самыми длинными штрихами имеет отсутствующий у точной функции заметный выброс (максимум) в начале координат вследствие того, что $\gamma > 0$. Кроме того, она, а также две кривые (49) с короткими штрихами, не имеют клювообразного выступа, присутствующего на точной кривой. А кривая (49) со средними штрихами имеет такой выступ, но расположен он заметно дальше, чем у точной кривой. Но, вообще говоря, цель «подгонять» $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ под $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ не ставилась.

Для **примера 2** получились 3 набора параметров модели (49,51). Аналог рис.32 для этого примера приведен на рис.33. И здесь та же картина. Все три модели дают неплохую аппроксимацию точной функции $\varepsilon(\Delta)$. Даже кривая с самыми длинными штрихами, имеющая ряд нефизичных областей (локальные спады) и у которой самая неточная аппроксимация $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, как приближение не хуже остальных, а в некоторых областях аргумента даже лучше.

Для **примера 3** получились 2 набора параметров модели (49,51). Аналог рис.32-33 для этого примера приведен на рис.34. Видно, что здесь модели $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$ дают не очень удачные аппроксимации точной функции $\varepsilon(\Delta)$, заметно хуже, чем на рис.30. В обоих вариантах имеется нефизичный провал в начале координат, а затем нефизичные многочисленные колебания в средней части графика. И хотя в целом значения функций при $\Delta \geq 2$ все-таки ближе к реальным значениям, чем функция Реллея (13) от аргумента Δ на рис.30, колебательное поведение $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$ и провал в начале координат вблизи $\Delta \approx 1$ нивелируют преимущество данных моделей.

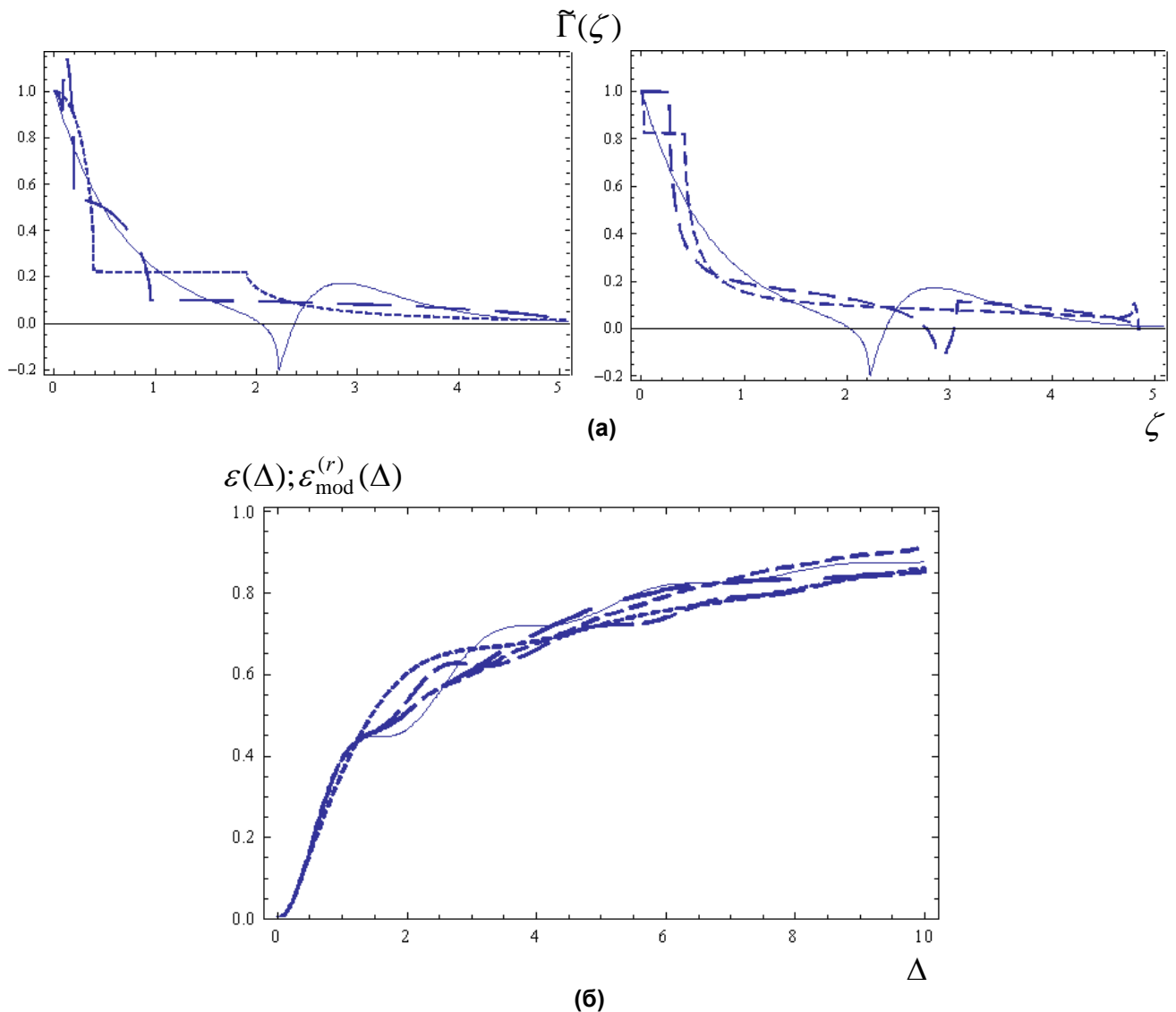


Рис.32

Для **примера 1**:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и 4 варианта модели (49) с ограничением (51) с параметрами из табл.9 (штриховые линии со штрихами разной длины). «Хвосты» у некоторых моделей и у самой функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ обрезаны. Для наглядности рисунок разбит на два и на каждом с точной функцией сравниваются по два варианта модели (49);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$ (56) с параметрами из табл.9 (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым графика (а)).
 Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.28,31.

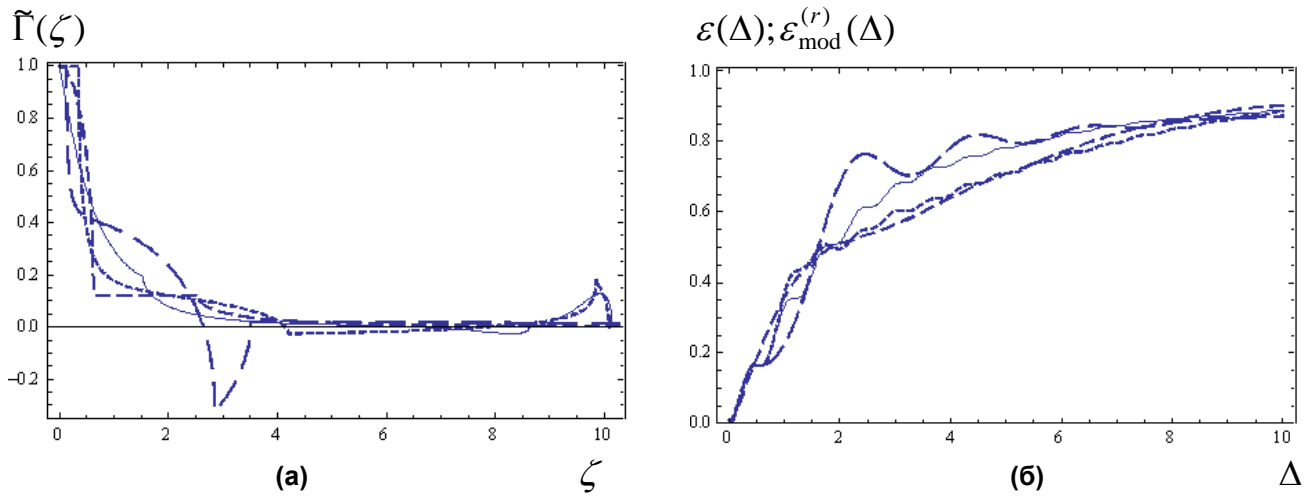


Рис.33

Для примера 2:

(а) - графики функции $\hat{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и 3 варианта модели (49) с ограничением (51) с параметрами из табл.9 (штриховые линии со штрихами разной длины). «Хвосты» у некоторых моделей обрезаны;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$ (56) с параметрами из табл.9 (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым графика (а)).
 Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.29.

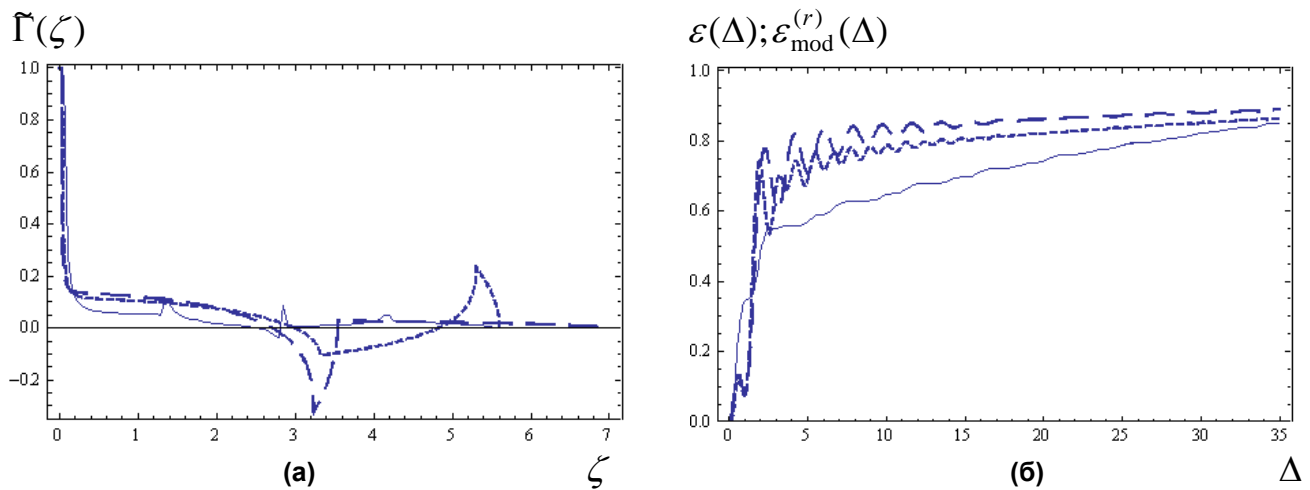


Рис.34

Для примера 3:

(а) - графики функции $\hat{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и 2 варианта модели (49) с ограничением (51) с параметрами из табл.9 (штриховые линии со штрихами разной длины). «Хвосты» у некоторых моделей обрезаны;

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$ (56) с параметрами из табл.9 (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым графика (а)).
 Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.30.

И, наконец, рассмотрим модель (49) с двумя ограничениями на параметры – (51) и (53), и, соответственно, с 2 свободными параметрами, рассчитываемыми из двух моментов (61) - $I_{1,eff}, I_{3,eff}$. Напомним, что модель (49,51,53) взята с целью сократить количество учитываемых моментов в уравнениях (31) без потери разнообразия аппроксимационных функций. И с целью показать, что даже с дополнительными ограничениями у модели (49) есть варианты неплохого во всех смыслах приближения для функции $\varepsilon(\Delta)$.

Действительные параметры модели (49,51,53) для **примеров 1-3**, получающиеся из уравнений (57-58) с параметрами из табл.7-8 и удовлетворяющие ограничениям (50), также приведены в табл.9.

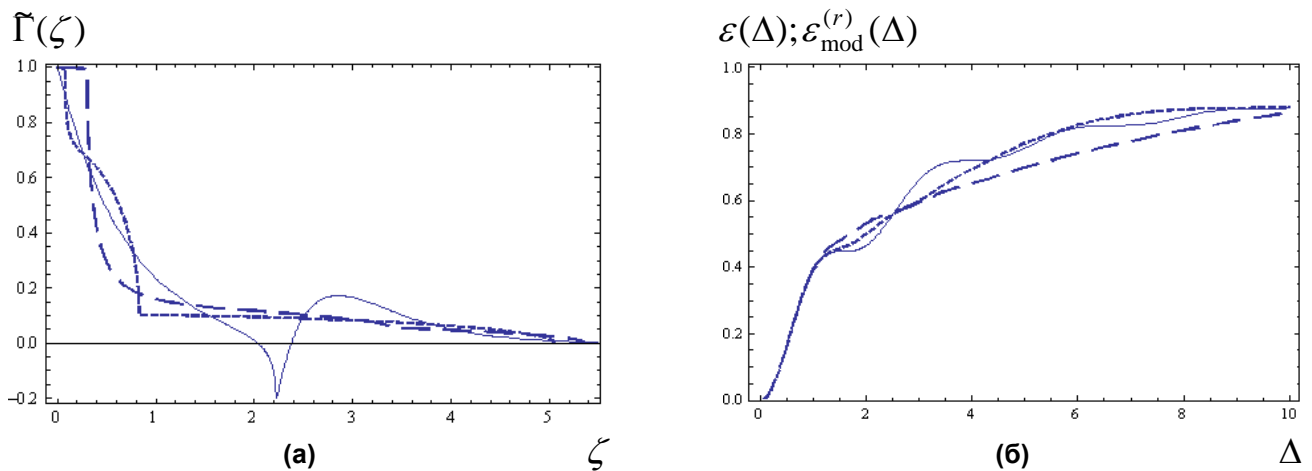


Рис.35

Для **примера 1**:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модели (49) с ограничениями (51,53) с параметрами из табл.9 (штриховые линии);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{mod}^{(r)}(\Delta)$ (56) с параметрами из табл.9 (штриховые линии; длины штрихов соответствуют кривым графика (а)).

Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.28,31-32.

Для **примера 1** получились 2 таких набора параметров. Результаты приведены на рис.35. Аппроксимации функций $\varepsilon(\Delta)$ получились даже лучше, чем на рис.32. Интересно заметить, что среди 4-х решений для модели (49,51) на рис.32 и в табл.9 было лишь одно, в котором условие (53) приближенно выполнялось (третья строчка в табл.9, $a \approx 5,42$; $c \approx 5,77$; кривая со смещенным относительно точной кривой клювообразным выбросом на рис.32а), в остальных трех случаях параметры a и c различались в разы. Параметры второго набора модели (49,51,53) в табл.9 (на рис.35 кривые с длинными штрихами) оказались довольно близки этим параметрам модели (49,51) с рис.32 ($a = c = 6,353$). И, как легко видеть, эта модель на рис.35 не хуже аппроксимирует точную функцию $\varepsilon(\Delta)$, чем соответствующая ей модель на рис.32 (хотя клювообразный выброс у функции $\tilde{\Gamma}^{(r)}(\zeta)$ пропал). Лучший же в модели (49,51,53)

– первый набор параметров в табл.9 (короткие штрихи на рис.35); он вообще из лучших среди всех 6-ти моделей на рис.32,35.

Для **примера 2 и 3** система (57-58) дает по одному действительному решению, удовлетворяющему условиям (50). Результаты приведены, соответственно, на рис.36 и рис.37.

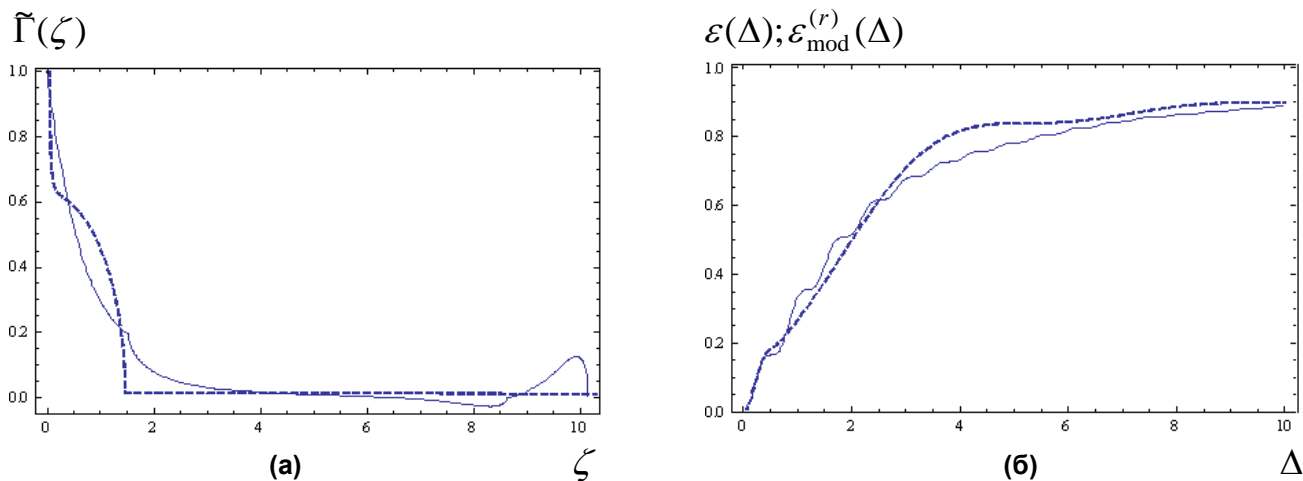


Рис.36

Для **примера 2:**

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модели (49) с ограничениями (51,53) с параметрами из табл.9 (штриховая линия, «хвост» обрезан);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$ (56) с параметрами из табл.9 (штриховая линия).

Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.29,33.

Из сравнения рис.36 и рис.33 для **примера 2** видно, что модель (49,51,53) (рис.36) дает приближение функции $\varepsilon(\Delta)$ лучше всех трех вариантов модели (49,51) на рис.33. Из табл.9 также видно, что при этом среди трех моделей (49,51) нет такой, где бы приблизительно выполнялось условие (53), и параметры модели (49,51,53) существенно отличаются от всех этих трех.

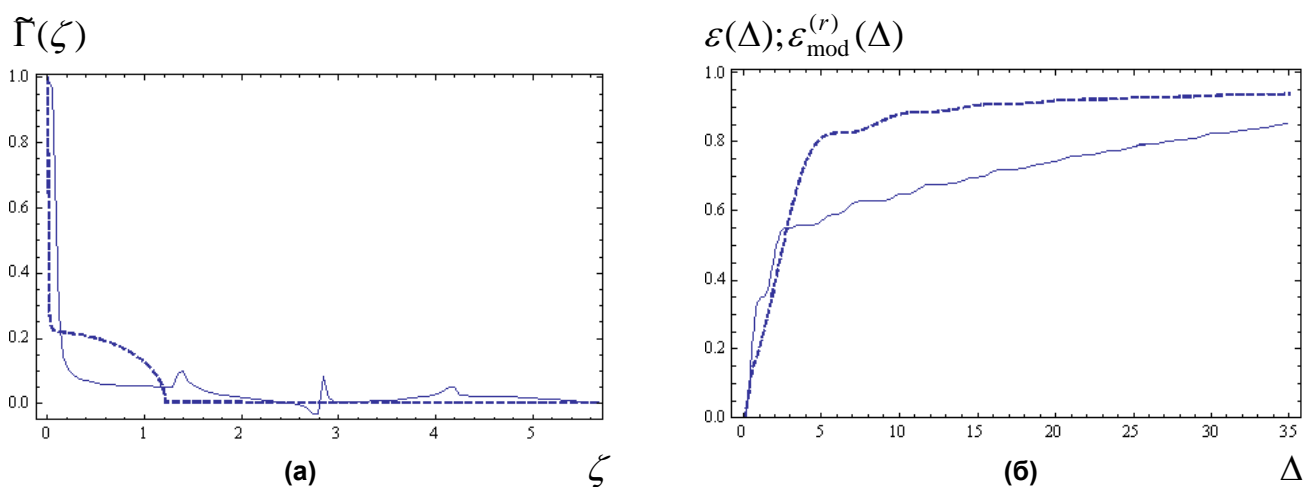


Рис.37

Для **примера 3:**

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и модели (49) с ограничениями (51,53) с параметрами из табл.9 (штриховая линия, «хвост» обрезан);

(б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$ (56) с параметрами из табл.9 (штриховая линия).

Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.30,34.

Из сравнения рис.37 и рис.34 для **примера 3** видно, что модель (49,51,53) на рис.37 дает приближение $\varepsilon(\Delta)$ близкое в среднем значениям $\varepsilon(\Delta)$ на рис.34, но вид функции при этом становится реалистичным – пропадают и нефизичный провал в начале координат и нефизичные колебания в средней части графика. Из табл.9 также видно, что, хотя для **примера 3** среди двух моделей (49,51) у второй приближенно выполнено условие (53), параметры модели (49,51,53) существенно отличаются от параметров обеих моделей (49,51). Функция $\varepsilon_{\text{mod}}^{(r)}(\Delta)$ модели (49,51,53) хорошо аппроксимирует точную функцию лишь на начальном подъеме вплоть до $\varepsilon(\Delta) \leq 0,55$; в области «плато» она заметно выше точной (хотя все-таки ниже, чем кривая (13) от аргумента Δ - см. рис.30).

По поводу рис.37 возникает естественный вопрос, можно ли так подобрать параметры модели (49,51,53) (или (49) с меньшими ограничениями), чтобы и для **примера 3** точность аппроксимации функции $\varepsilon(\Delta)$ стала лучше – лучше в области «плато» без потери точности в области «подъема»? Ответ положительный.

Если в модели (49) опираться только на уравнения (25) и предположить (53), то остаются три свободных параметра. Удобно взять в качестве таковых p , $a = c$ и b . Тогда остальные параметры (49) через них выразятся в виде

$$\gamma = \frac{8\mu^2 - a(a+b)(2-b) - 2b^2}{a^2(1-p)^2 [a^2 p(p+2) - b(a+b)]}; \quad \alpha = \frac{\gamma a^2 (1-p)^2 + b - 2}{a(b-a)}; \quad \beta = \frac{1 - \alpha a}{b}; \quad g = cp. \quad (64)$$

В качестве иллюстрации на рис.38 показаны для **примера 3** два вручную подобранных варианта модели (49,53) с параметрами, удовлетворяющими (64), заметно более удачно аппроксимирующие точную функцию $\varepsilon(\Delta)$ (и функцию $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, кстати, тоже), чем рис.30,34,37. Реально подбирались 2 параметра, поскольку в одной модели (кривые с короткими штрихами на рисунках) предположено условие (51), а в другой величина b взята примерно равной значению ζ_{max} , при котором точное $T(\zeta)$ обращается в ноль. Видно, что совпадение точной и приближенных кривых очень хорошее, т.е. теорема существования хорошего приближения в рамках модели (49,53) (или даже (49,51,53)) доказана, но параметры ее надо искать не из моментов (31).

Для **примеров 1-2** была еще просчитана модель (49) с ограничениями (51-52). Для **примера 1** таких решений не нашлось, для **примера 2** нашлось два решения и оба дали аппроксимации не лучше (хотя и не хуже), чем на рис.33, с большим количеством локальных экстремумов, как у кривой с самыми длинными штрихами на рис.33. Для **примера 3** эта модель не считалась.

Из табл.5,9 видно также, что, по-видимому, еще одним хорошим ограничением модели (49,51) (сводящим вместе с (25) модель к двум независимым параметрам) могло бы быть ограничение

$$c = b. \quad (65)$$

Во всяком случае, из табл.5,9 следует, что во всех рассмотренных примерах в вариантах модели (49,51) и уравнений (25,31) условие (65) выполняется не реже, чем условие (53) (а обычно чаще), и точнее. В настоящей работе такой вариант модели (49) не исследовался, т.к. теорема существования хорошей аппроксимации моделью (49) доказана, а какой-то новой информации еще один ее вариант не добавит.

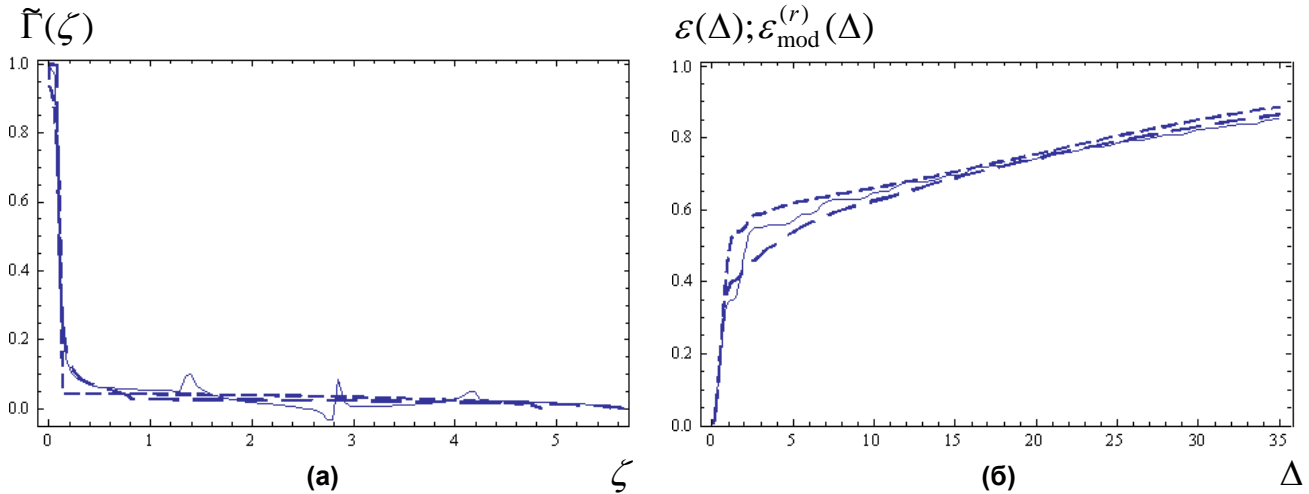


Рис.38

Для примера 3:

(а) - графики функции $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ (сплошная линия) и моделей (49) с ограничением (53) с вручную подобранными параметрами (штриховые линии). Для кривой с короткими штрихами предполагалось выполнение условия (51) (при этом $1/\mu_{eff}^2 \cong 0,007$), поэтому независимо подбирались параметры $a = 0,8$ и $b = 30$. Для кривой с длинными штрихами предполагалось, что $b = 35$, что примерно равно ζ_{max} в точной функции, поэтому независимо подбирались параметры $a = 5$ и $p = 0,1$. Остальные параметры модели определялись равенствами (64) исходя из уравнений (25) и условия (53); (б) – графики функции $\varepsilon(\Delta)$ (сплошная линия) и $\varepsilon_{mod}^{(r)}(\Delta)$ (56) с параметрами из графиков (а) (штриховые линии; типы линий соответствуют (а)). Нормировки аргументов на графиках такие же, как на рис.30,34,37.

Таким образом, получается, что наиболее удачным вариантом модели (49) является вариант ограничения ее параметров условиями (51,53), сводящий вместе с уравнениями (25) число свободных параметров в (49) к двум. Почти во всех рассмотренных примерах (кроме **примера 3** – см. (63)) выбор этих двух свободных параметров из двух первых уравнений (31) на моменты дает весьма хорошие и реальные по виду приближения $\varepsilon_{mod}^{(r)}(\Delta)$ (56) к точному $\varepsilon(\Delta)$ (лучше, чем, например, кусочно-линейные модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$, рассмотренные выше). В **примере 3** параметры из моментов дают хоть и лучшее приближение, чем все остальные рассмотренные варианты модели (49), но все-таки хуже, чем кусочно-линейные модели $\tilde{\Gamma}(\zeta)$ на рис.30. Однако ручной подбор этих двух свободных параметров позволяет получить очень хорошую

аппроксимацию $\varepsilon(\Delta)$ (намного лучше, чем на рис.30), хотя нет соображений, как получить эти удачные параметры из объективных условий. Возможно, замена ограничения (53) на (65) привела бы к лучшей аппроксимации на базе моментов (31) и для **примера 3**, но все равно нет математического обоснования, почему это так и будет ли так и в других экзотических случаях отверстий или полей на них.

Подведем итоги. Как и в случае постоянной амплитуды поля на отверстии, для непостоянного поля предложенная методика позволяет получить хорошие приближения точных функций $\varepsilon(\Delta)$. Они по построению совпадают с точными функциями, как в начале координат, так и асимптотически при больших значениях аргумента. В промежуточной области, как обычно, качество приближения хуже, однако оно заметно лучше, чем предложенное нами в работах [1-2].

В этой работе, вообще говоря, не ставилась цель получить универсальную приближенную функцию для $\varepsilon(\Delta)$, зависящую от нескольких параметров отверстия и поля на нем в виде моментов (31). Скорее хотелось показать принципиальную возможность такой аппроксимации. Аппроксимирующие функции брались из соображений либо интегрируемости в свертке с функцией Бесселя, либо из набора функций, полученных для известных частных примеров отверстий. Моменты, как источник вычисления параметров модельной функции, тоже были использованы от бедности и из соображений аналогии с моментами (21).

Выводы

Функция $\varepsilon(\mathcal{G})$ (18) является сверткой функции $\Gamma(\rho)$ (19) - производной от функции $T(\rho)$ с обратным знаком, с функцией Бесселя нулевого порядка. В работе [6] было показано, что значение функции $\Gamma(\rho)$ в начале координат определяет поведение функции $\varepsilon(\mathcal{G})$ при больших значениях аргумента (см.(9)), а из разложения (1) вблизи нуля аргументов [1] следует, что второй момент $\Gamma(\rho)$ (см.(21)) определяет поведение $\varepsilon(\mathcal{G})$ вблизи нуля (см.(6)). Оба этих значения определяются базовыми геометрическими характеристиками отверстия – площадью и периметром, усредненными по распределению поля на отверстии, т.е. при постоянном поле просто площадью и периметром. Однако эти значения, выраженные через площадь и периметр (или их усредненные аналоги при неоднородном поле), не отражают всего разнообразия поведения функции $\varepsilon(\mathcal{G})$ в промежуточной области своего определения. Так же как и сами площадь и периметр (с усреднением или без) не отражают всего разнообразия возможных видов отверстий и полей на них.

Предположим, что существуют еще некоторое количество характеристик отверстия и поля на нем, которые определяют особенность поведения функции $\varepsilon(\mathcal{G})$ в промежуточной области аргумента между (6) и (9). Тогда можно надеяться, что путем

удачной аппроксимации функции $\Gamma(\rho)$, так, чтобы она удовлетворяла не только соотношениям (21), но и некоторым другим, определяемым этими дополнительными геометрическими характеристиками отверстия, можно получить хорошую аппроксимацию всей функции $\varepsilon(\mathcal{G})$ (18). Не имея базовой теории такой аппроксимации и, следовательно, не претендуя на удачность выбора как самих дополнительных геометрических характеристик, так и способа «учета» их в виде модели $\Gamma(\rho)$, тем не менее на нескольких характерных примерах как при постоянном поле на отверстии, так и при непостоянном, удалось показать, что поставленная задача может иметь несложное и неплохое решение.

В качестве характеристик были взяты еще несколько низших моментов функции $\Gamma(\rho)$ (от одного до трех – первый, третий и четвертый). А в качестве модели $\Gamma(\rho)$ – функции, которые интегрируются аналитически в свертке с функцией Бесселя (набор многочленов нулевого и первого порядков), и набор функций, входящих в точные функции $\Gamma(\rho)$ для кругового и кольцевого отверстий при постоянной амплитуде поля, которые частично интегрируются в свертке с функцией Бесселя, частично выражаются через однократный однопараметрический интеграл, который при необходимости может быть затабулирован. Оказалось, что для неплохой аппроксимации $\varepsilon(\mathcal{G})$ (в пределах 10-15% относительной погрешности), в обоих случаях достаточно задействовать 1-2 низших момента (первый и третий). Учет большего количества моментов не улучшает ситуацию по точности аппроксимации, и ухудшает ее по другим показателям (чаще случается отсутствие решения на параметры модели, аппроксимирующая функция приобретает «нефизичные» черты – локальные экстремумы, и т.д.). Характерно то, что хорошая аппроксимация $\varepsilon(\mathcal{G})$ вовсе не требует, чтобы таковой являлась и использованная модель $\Gamma(\rho)$. Ей достаточно быть всего лишь «носителем» важных черт отверстия, выраженных в виде характерных чисел.

Осуществляя моделирование $\varepsilon(\mathcal{G})$ феноменологически, подбором, не ставилась цель связать использованные моменты $\Gamma(\rho)$ с топологическими характеристиками отверстия и поля на нем. Также за пределами внимания остался оптимальный выбор модельной функции для $\Gamma(\rho)$. В частности, линейная функция и функция (29) – не единственные, аналитически интегрируемые в свертке с Бесселем. Таковой же, например, будет произведение линейной функции на (29). Но и в указанных ограничениях получено для рассмотренных примеров хорошее приближение для $\varepsilon(\mathcal{G})$, в частности, в виде функций (38-39,47,49), параметры которых рассчитываются, соответственно, по формулам (33-34), (42-44) и (54-55), если в (49) использовано только ограничение (51), и (57-58), если ограничения (51,53). Причем, расчеты показали, что в целом модели с тремя дополнительными моментами хуже, чем с одним-двумя. Они чаще отсутствуют для конкретно взятой ситуации, их функции $\varepsilon_{\text{mod}}(\mathcal{G})$ имеют как правило больше и более ярко выраженные «нефизичные» черты – локальные экстремумы, а точность аппроксимации их по сравнению с моделями с меньшим числом пара-

метров далеко не всегда лучше. Поэтому можно остановиться на простых однопараметрических моделях (38), (39) и двухпараметрической (49) с ограничениями (51,53).

Литература

1. **Сизова И.М.** *О подобии при дифракции света на апертурах сложной формы.* Препринт ФИАН №252. Москва, 1988. 48 с.
2. **Сизова И.М.** *Подобие световых потоков в дальней зоне при дифракции на апертурах сложной формы.* Препринт ФИАН №189. Москва, 1990. 47 с.
3. **Sizova I.M.** Similarity of light fluxes diffracted in the far field by apertures of complicated shape. *J.Soviet Laser Research.* 1992. V.13. No.1. P.25-45.
4. **Sizova I.M.** Approximate scaling relationships of light diffraction by apertures with complicated shapes. *Appl. Opt.* 1992. V.31.No.28.P.5930-5936.
5. **Борович Б.Л., Зуев В.С., Катулин В.А., Михеев Л.Д., Николаев Ф.А., Носач О.Ю., Розанов И.Б.** Сильноточные излучающие разряды и газовые лазеры с оптической накачкой. – М.: Изд-во ВИНТИ «Итоги науки и техники, сер.Радиотехника».1978.Т.15.
6. **Clark P.P., Howard J.W., Freniere E.R.** *Asymptotic approximation to the encircled energy function for arbitrary aperture shapes.* *Appl.Opt.* 1984. V.23, No 2. P.353-357.
7. **Willis H.F.** *A formula for expanding an integral as a series.* *Philos.Mag.* 1948. V.39. P.455-459.
8. **Harvey J.E., Ftaclas C.** *Diffraction effects of telescope secondary mirror spiders on various image-quality criteria.* *Appl.Opt.* 1995. V.34, No 28. P.6337-6349.
9. **Орлов Е.П.,Сизова И.М.** *О подобии статистических характеристик спонтанного усиления квантового усилителя при различных коэффициентах усиления.* Препринт ФИАН №28. Москва, 2001. 44 с.
10. **Орлов Е.П.,Сизова И.М.** *О подобии и универсальных функциях статистических характеристик случайных процессов.* Препринт ФИАН №21. Москва, 2008. 50 с.
11. **Орлов Е.П.,Сизова И.М.** *Подобие статистических характеристик узкополосных случайных процессов с произвольными спектрами. Часть I. Компактные спектры.* Препринт ФИАН №14. Москва, 2010. 40 с.
12. **Орлов Е.П.,Сизова И.М.** *Подобие статистических характеристик узкополосных случайных процессов с произвольными спектрами. Часть II. Некомпактные диахромные спектры.* Препринт ФИАН №19. Москва, 2011. 105 с.

Подписано в печать 7.07.2014 г.
Формат 60x84/16. Заказ № 36. Тираж 140 экз. П.л 3,75.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640