

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Физический
ИНСТИТУТ



имени
П.Н. Лебедева

Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

7

Е.П. ОРЛОВ

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ПРИ
ПРЯМОЛИНЕЙНОМ РЕЛЯТИВИСТСКИ-
УСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ**

Москва 2014

Е.П.Орлов

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ
РЕЛЯТИВИСТСКИ-УСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ

А Н Н О Т А Ц И Я

Проведён сравнительный анализ преобразований пространственно-временных координат события при прямолинейном релятивистски-ускоренном движении, полученных в предыдущей работе на основе концепции 4-мерного пространства компактифицированного до трёх измерений, с известными до сих пор преобразованиями. Показано, что преобразования Мёллера, Подосенова, Парди, Ву и Ли, а также обобщённые преобразования Мёллера-Ву-Ли, полученные Ксу и Клефф и усовершенствованные Эрнстом являются предельными случаями этих новых преобразований. Наибольшее соответствие имеет место с обобщёнными преобразованиями Мёллера-Ву-Ли в форме Эрнста. Наибольшее различие – с преобразованием времени Логунова. Проанализированы факторы, обуславливающие отличие новых преобразований от известных.

E.P.Orlov

COMPARATIVE ANALYSIS OF SPACETIME TRANSFORMATIONS
AT RELATIVISTIC LINEAR ACCELERATION

A B S T R A C T

The comparative analysis of the linear-acceleration transformations of spacetime coordinates of an event, which have been derived in the previous work basing on a concept of a 4-dimensional space compactified to three dimensions, and of the other transformations known before, has been performed. It is shown that transformations by Møller, Podosenov, Pardy, Wu and Lee, or the generalized Møller-Wu-Lee transformations obtained by Hsu and Kleff and improved by Ernst, represent only the limiting case of the new transformations that are studied. The most correspondence takes place in the case of the generalized Møller-Wu-Lee transformations in the Ernst's form. The most distinction is in the case of the Logunov time transformation. The causes of distinctions of the new transformations from the ones known before are analyzed.

Введение

В работе [1] на основе концепции 4-мерного пространства компактифицированного до трёх измерений и вытекающего из этой концепции представления о римановом пространстве событий с косоугольными пространственно-временными локальными базисами были определены системы отсчёта ускоренного и неподвижного наблюдателей и получены преобразования пространственно-временных координат события, наблюдаемого из этих систем. Эти преобразования отличаются от известных преобразований, полученных в работах [2 – 12]. Естественно возникает вопрос, в каком отношении друг к другу находятся, полученные в [1] преобразования и преобразования перечисленных работ? Для ответа на этот вопрос в настоящей работе проведён сравнительный анализ этих преобразований с преобразованиями, полученными в [1] и выявлены факторы, обуславливающие их различие.

1. Системы отсчёта ускоренного и неподвижного наблюдателей

Чтобы в процессе этого анализа было понятно, о чём идёт речь, вспомним, как определяются системы отсчёта ускоренного и неподвижного наблюдателей на основе указанной концепции и как в этих системах определяются пространственные и временные координаты события.

Простейшей моделью 4-мерного мира с компактным четвёртым измерением может служить 4-мерный плоскопараллельный резонатор с однородной, изотропной средой, не обладающей дисперсией скорости распространяющихся в ней волн. Моды такого резонатора с одинаковым продольным индексом ассоциируются с полем, отвечающим какой либо элементарной частице. Зеркала резонатора предполагаются обладающими тем свойством, что коэффициент отражения от них прямой и обратной волн, образующих моду с некоторым продольным индексом, не зависит от поперечных индексов моды. Подчеркнём, что когда говорится о коэффициенте отражения зеркал резонатора не равном единице, то речь идёт не о потерях излучения, а о трансформации моды с заданным продольным индексом в моды с другими продольными индексами. Это соответствует распаду частицы на другие частицы.

При неограниченности резонатора множество поперечных индексов является множеством мощности континуума и может быть охарактеризовано углом между волновыми векторами прямой или обратной волн, образующих моду, и осью резонатора, то есть линией перпендикулярной зеркалам.

В работах [13, 14] было показано, что пространственно-временное многообразие Минковского может быть получено из законов распространения волн в таком резонаторе с учётом резонансного условия по координате дополнительного 4-го измерения, определяющего продольные индексы мод. Мода, волны которой распространяются перпендикулярно зеркалам резонатора, то есть вдоль его оси, рассматривается условно как покоящаяся. Если волны, образующие моду, распространяются под углом к оси резонатора, то, такая мода рассматривается как движущаяся со скоростью $V = c \sin \Theta$, где Θ - угол между волновым вектором прямой волны и осью резонатора, c - скорость распространения волн в резонаторе.

С помощью отображения прямых и обратных волн мод резонатора на всё пространство справа и слева от резонатора эти волны можно заменить одной эквивалентной волной, распространяющейся либо в сторону положительного направления оси координат связанной с дополнительным измерением, либо в сторону противоположного направления. В данной работе рассматривается эквивалентная волна, распространяющаяся в сторону положительного направления указанной оси, что отвечает положительным решениям релятивистских волновых уравнений (Клейна, Фока, Гордона, Дирака и т.д.) [15].

С помощью такого отображения волн в [13, 14] введено понятие евклидова пространства событий. Его спецификой является то, что системы координат в нём являются косоугольными. Пространственные координаты системы отсчёта, связанной с неподвижной модой определяются как проекции точки рассматриваемого пространства на фазовую поверхность эквивалентной волны покоящейся моды. Аналогично определяются пространственные координаты системы отсчёта связанной с движущейся модой. В случае, когда пространство внутри резонатора однородно и изотропно, а отражение от зеркал резонатора не приводит к искажениям фаз волн пространственные оси покоящейся или движущейся системы отсчёта, отвечающие этим координатам, для не взаимодействующих друг с другом мод представляют собой прямые линии ортогональные друг другу.

Косоугольность возникает тогда, когда к пространственным осям добавляется временная ось. Дело в том, что разные поперечные моды с одинаковым продольным индексом в силу указанного выше свойства зеркал резонатора уменьшают свою амплитуду в одно и то же число раз при одинаковом числе отражений образующих их волн от зеркал резонатора. При этом эквивалентные волны отвечающие модам с различными поперечными индексами проходят пути

разной длины до точки рассматриваемого пространства, где их ослабление достигает заданной величины. Это позволяет ввести временные координаты этой точки через соответствующие длины путей, которые прошли волны. При этом время жизни движущейся моды оказывается больше, чем время жизни покоящейся моды в соответствии с известной формулой теории относительности [16].

В случае, когда отражение от зеркал и пространство внутри резонатора однородны, а пространство к тому же изотропно и нет дисперсии скоростей волн, для невзаимодействующих друг с другом мод оси, отвечающие этим координатам, представляют собой прямые линии перпендикулярные плоским фазовым поверхностям эквивалентных волн. Для каждой пары мод эти оси лежат в плоскости волновых векторов волн этих мод. Важно отметить то, что временная ось системы отсчёта связанной с неподвижной модой ортогональна фазовой поверхности эквивалентной волны движущейся моды, а временная ось системы отсчёта связанной с движущейся модой ортогональна фазовой поверхности эквивалентной волны неподвижной моды. Вследствие этого системы координат связанные как с неподвижной, так и с движущейся модой оказываются косоугольными [14].

Пусть теперь в неограниченном плоскопараллельном резонаторе возбуждены две покоящиеся моды с различными и отличными от нуля продольными индексами. И пусть в некоторый момент времени возникает фактор, приводящий к неоднородному по поперечным координатам воздействию на фазы прямой и обратной волн одной из мод. Будем пока рассматривать случай, когда это воздействие не влияет на скорость образующих моду волн в направлении волнового вектора. Это отвечает электромагнитному воздействию на заряженную частицу. В рассматриваемой модели пространства такое воздействие на волну реализуется тогда, когда воздействие происходит на зеркалах резонатора, а именно: при отражении от зеркала резонатора изменение фазы отражённой волны одной из этих мод будет зависеть от координат. Тогда фазовые поверхности эквивалентных волн этой моды будут искривляться.

Далее, как и в случае инерциальных систем отсчёта, из двух эквивалентных волн каждой из мод мы будем рассматривать только те, которые распространяются в положительном направлении оси, соответствующей дополнительному измерению, что отвечает положительным решениям уравнений квантовой электродинамики [15].

Распространение эквивалентных волн мод будем описывать в приближении геометрической оптики. Условия, когда это приближение справедливо, хорошо известны [16]. У моды не подверженной воздействию лучи будут оставаться прямыми, а фазовые поверхности – плоскими. У моды же подверженной воздействию лучи, и фазовые поверхности будут искривляться.

В случае инерциальных систем отсчёта временная координата события в системе отсчёта неподвижного наблюдателя определялась длиной пути, который проходит волна движущейся моды до рассматриваемой точки пространства событий. Теперь же в случае, когда одна из систем отсчёта является ускоренной, для определения временной координаты события в системе отсчёта неподвижного наблюдателя надо определить длину искривлённого луча отвечающего волне ускоряемой моды и идущего в рассматриваемую точку пространства событий.

Введём безразмерную координату $\zeta = \int w dz$ и безразмерное время $\lambda = \int w c dt$, где $w = a(z,t)/c^2 = f(z,t)/(m_0 c^2)$, $a(z,t)$ ускорение в системе отсчёта неподвижного наблюдателя, $f(z,t)$ сила, действующая на частицу. Введённые таким образом безразмерные пространственно-временные координаты позволяют рассматривать не только равноускоренное движение, но и движение с переменным ускорением.

Когда начальная скорость и ускорение направлены в положительном направлении оси z (ζ), зависимость $\zeta(\lambda)$ от времени при начальном значении $\zeta(0) = \bar{\zeta}$, как известно [7, 16], описывается формулой

$$\zeta(\lambda) = \sqrt{1 + (\lambda + \Lambda)^2} - 1 - Z + \bar{\zeta}, \quad (2.1)$$

где $\Lambda = \frac{v(0)/c}{\sqrt{1 - v^2(0)/c^2}} = \gamma_0 \beta_0$, $v(0)$ - начальная скорость ускоряемой моды,

$$\beta_0 = v(0)/c, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(0)/c^2}}, \quad Z = \sqrt{1 + \Lambda^2} - 1 = \gamma_0 - 1.$$

Соответственно, траектория луча, выходящего из точки с координатами $(\lambda' = 0, \zeta = \bar{\zeta})$, описывается формулой:

$$\zeta(\lambda') = \text{ch}(\lambda' + \Lambda') - \text{ch} \Lambda' + \bar{\zeta}, \quad (2.2)$$

где $\lambda' + \Lambda' = \text{arsh}(\lambda + \Lambda)$.

Поверхности равной фазы эквивалентной волны ускоряемой моды, точнее, те кривые, которые образованы пересечением этих поверхностей с плоскостью рисунка и которые будем обозначать как $\zeta_{\perp}(\lambda')$ по причине их ортогональности лучам, описываются формулой [1]

$$\zeta_{\perp}(\lambda') = -\ln \operatorname{th} \frac{\lambda' + \Lambda'}{2} + C, \quad (2.3)$$

где C – константа.

Графики зависимости $\zeta(\lambda')$ и $\zeta_{\perp}(\lambda')$ при $v(0) = 0$ и различных начальных значениях $\zeta = \bar{\zeta}$ и константы C , отличающихся на $1/2$, показаны на рис.1. Мы видим лучи, начинающиеся на оси ординат и искривляющиеся по мере распространения эквивалентной волны так, что выпуклость направлена вниз и вправо. Как уже говорилось выше, линии равной фазы $\zeta_{\perp}(\lambda')$ ортогональны лучам.

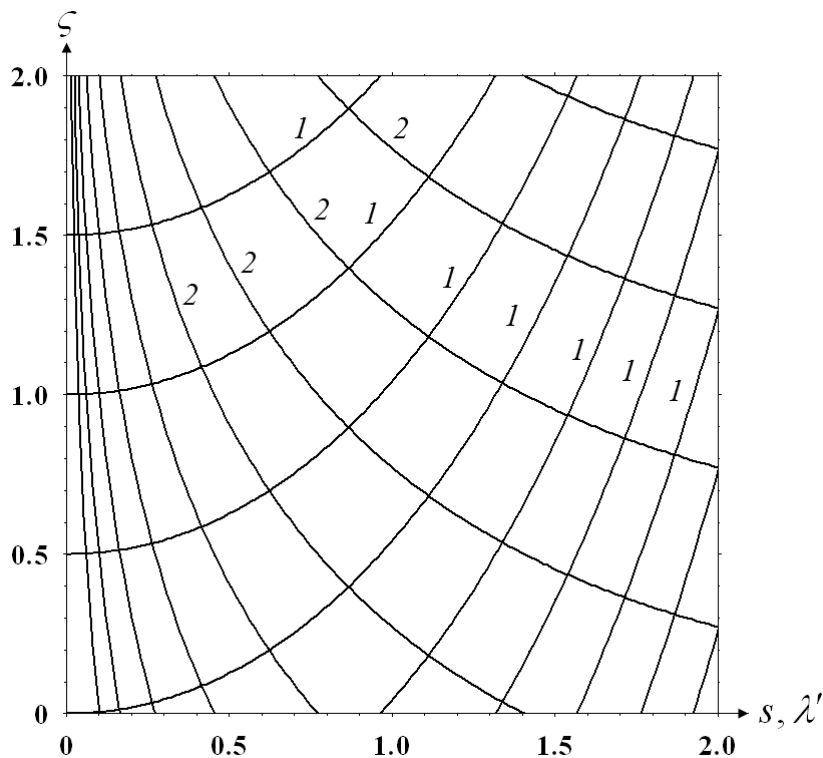


Рис.1. Лучи (1) и линии равной фазы (2) эквивалентной волны ускоряемой моды.

Сравнивая со случаем инерциальных систем отсчёта, мы приходим к выводу, что отсчёт времени в неподвижной системе отсчёта надо производить по траекториям лучей, относящимся к эквивалентной волне ускоряемой моды, а отсчёт расстояний надо производить по фазовым поверхностям эквивалентной

волны неподвижной моды. И наоборот, отсчёт времени в ускоряемой системе отсчёта надо производить по траекториям лучей, относящимся к эквивалентной волне неподвижной моды, а отсчёт расстояний надо производить по фазовым поверхностям эквивалентной волны ускоряемой моды.

Таким образом, лучи, и линии равной фазы (эквифазные кривые линии) эквивалентных волн покоящейся и ускоряемой моды представляют собой координатные линии. На рис.2 изображены координатные сетки, отвечающие неподвижной системе отсчёта *a*) и ускоряемой системе отсчёта *b*).

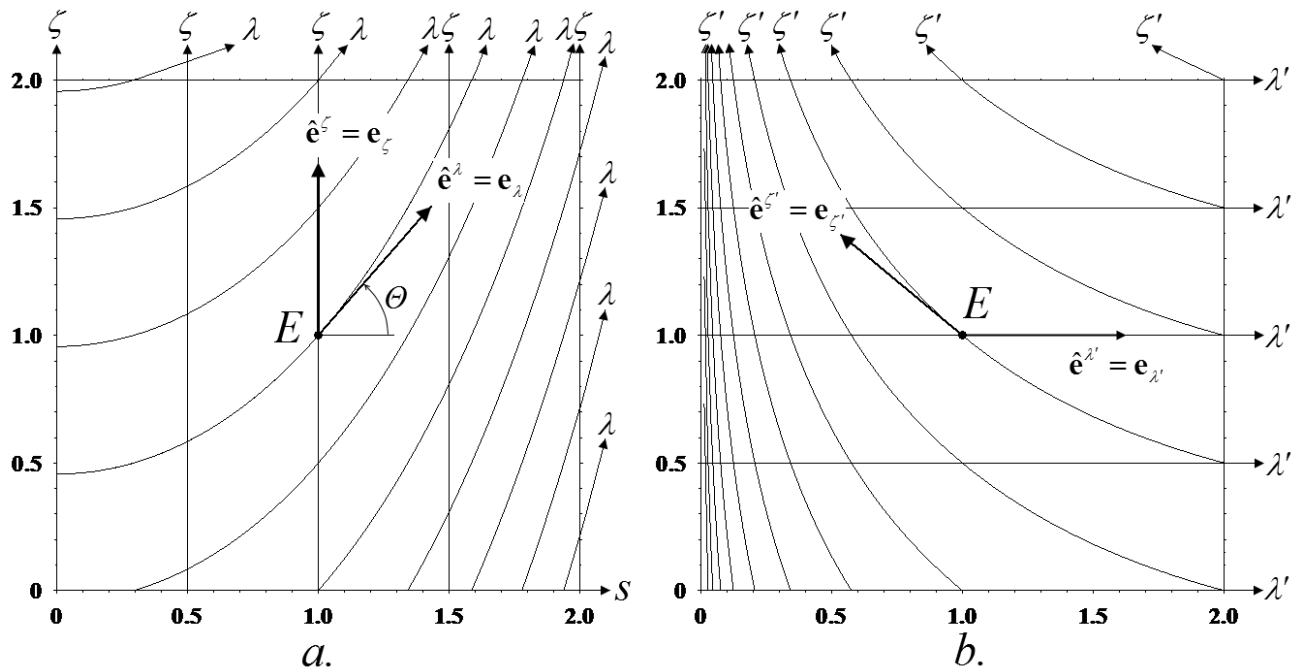


Рис.2. Координатная сетка системы отсчёта жёстко связанной с неподвижной модой *a*) и координатная сетка системы отсчёта жёстко связанной с ускоряемой модой *b*). Буквами λ и ζ' обозначены соответственно лучи и линии равной фазы эквивалентной волны ускоряемой моды, буквами λ' и ζ – лучи и линии равной фазы эквивалентной волны неподвижной моды.

Видно, что данное пространство событий является римановым пространством, а не псевдоримановым. В каждой точке E этого пространства можно построить локальный косоугольный базис для определения контравариантных координат, которые, так же как и в случае инерциальных систем отсчёта определяются как параллельные проекции на соответствующие оси. Для системы отсчёта жёстко связанной с неподвижной модой это базисные векторы e_λ, e_ζ , а

для системы отсчёта жестко связанной с ускоряемой модой – $\mathbf{e}_{\lambda'}, \mathbf{e}_{\zeta}'$. Угол между векторами $\mathbf{e}_{\lambda}, \mathbf{e}_{\zeta}$ равен $\frac{\pi}{2} - \Theta$, а между векторами $\mathbf{e}_{\lambda'}, \mathbf{e}_{\zeta}'$ он равен $\frac{\pi}{2} + \Theta$, где

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \operatorname{sh}(\lambda' + \Lambda').$$

Для определения ковариантных координат, определяемых как ортогональные проекции [17, 18], строятся базисы $\hat{\mathbf{e}}^{\lambda}, \hat{\mathbf{e}}^{\zeta}$ и $\hat{\mathbf{e}}^{\lambda'}, \hat{\mathbf{e}}^{\zeta}'$, которые совпадают с первоначальными базисными векторами, то есть $\hat{\mathbf{e}}^{\lambda} = \mathbf{e}_{\lambda}, \hat{\mathbf{e}}^{\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta}, \hat{\mathbf{e}}^{\lambda'} = \mathbf{e}_{\lambda'}, \hat{\mathbf{e}}^{\zeta}' = \mathbf{e}_{\zeta}'$.

В работе [1] показано, что ковариантные и контравариантные координаты события E в случае ускоренного движения частицы надо отсчитывать так, как показано на рис.3. В самом деле, если справа от прямой $\lambda' = 0$ распрямить лучи, то получим, что они будут наклонены под углом $\Theta(0) = \Theta|_{\lambda'=0}$ с

$$\operatorname{tg} \Theta(0) = \frac{v(0)/c}{\sqrt{1 - v^2(0)/c^2}} = \Lambda. \text{ При этом контравариантные и ковариантные коор-}$$

динаты события, изображённые на рис.3, превратятся в соответствующие координаты в случае относительного движения двух инерциальных систем [1, 14].

Таким образом, отсчёт времени в неподвижной системе отсчёта надо производить по траектории луча, проходящего через начало координат, а отсчитывать расстояния в ускоряемой системе отсчёта в моменты времени соответствующие значениям $\lambda = \underline{\lambda}_{\text{орт}}$ надо по соответствующим фазовым поверхностям, точнее по линиям их пересечения с плоскостью рисунка.

Обратим внимание на то, что различным точкам фазовой поверхности отвечают различные значения контравариантной временной координаты $\bar{\lambda}$. Поэтому число отражений лучей, идущих в разные точки, разное. Значит и уменьшение амплитуды волны, происходящее на пути от начального положения фазовой поверхности до конечного её положения за счёт потерь из-за трансформации данной моды в моды с другими продольными индексами, в разных точках тоже разное. Но всем точкам фазовой поверхности отвечает одно и тоже значение ковариантной временной координаты $\underline{\lambda}_{\text{орт}}$. Поэтому именно ковариантную временную координату естественно связать с временем, измеряемым в неподвижной системе отсчёта.

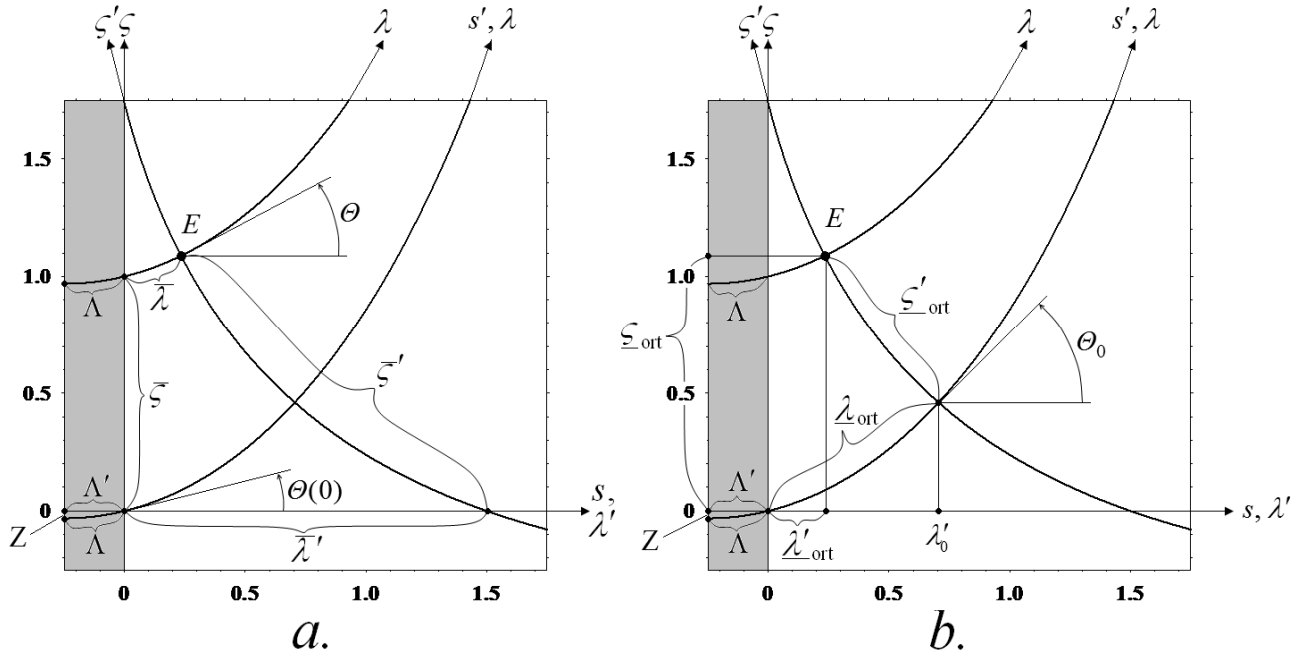


Рис.3. Иллюстрация к определению типа координат события – контравариантных координат *a*), и ортогональных ковариантных координат *b*). Область определения временных координат $\lambda \geq 0$, $\lambda' \geq 0$, пространственных - $-\infty < \zeta < \infty$, $-\infty < \zeta' < \infty$. Закрашенная область иллюстрирует геометрический смысл величин Λ , Λ' и $Z = \sqrt{1 + \Lambda^2} - 1 = \text{ch } \Lambda' - 1$.

Выше говорилось, что отсчитывать расстояния в ускоряемой системе отсчёта в моменты времени соответствующие значениям $\lambda = \underline{\lambda}_{\text{ort}}$ надо по соответствующим фазовым поверхностям, точнее по линиям их пересечения с плоскостью рисунка. В [1] показано, что контравариантная координата события *E* выражается формулой

$$\bar{\zeta}' = \ln \frac{\text{sh}(\bar{\lambda}' + \Lambda')}{\text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')} = \ln \frac{\text{sh}(\bar{\lambda}' + \Lambda')}{\bar{\lambda} + \Lambda} = \ln \frac{\text{tg } \Theta}{\text{tg } \Theta_0}, \quad (2.4)$$

а ковариантная – формулой

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln \frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda}{\bar{\lambda} + \Lambda} = \ln \frac{\text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda')}{\text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')} = \ln \frac{\text{tg } \Theta_0}{\text{tg } \Theta}. \quad (2.5)$$

При выводе этих формул использованы очевидные соотношения, вытекающие из геометрического смысла производной

$$\bar{\lambda} + \Lambda = \text{sh}(\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda') = \text{tg } \Theta, \quad (2.6)$$

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda = \text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') = \text{tg } \Theta_0, \quad (2.7)$$

$$\text{sh}(\bar{\lambda}' + \Lambda') = \text{tg } \bar{\Theta}, \quad (2.8)$$

где $\Theta = \Theta(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})$, $\Theta_0 = \Theta(\lambda'_0)$ и $\bar{\Theta} = \Theta(\bar{\lambda}')$ соответственно углы, определяющие наклоны касательных к лучам в точках с координатами $(\bar{\lambda} = \text{sh}(\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda') - \Lambda, \bar{\zeta})$, $(\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') - \Lambda, \underline{\zeta}_{\text{ort}} = \text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') - \text{ch} \Lambda')$, и $(\bar{\lambda}', \bar{\zeta}' = 0)$ лежащих на одной и той же фазовой поверхности.

2. Преобразования координат события

В [1] получены следующие преобразования координат при пересчёте координат события, измеренных в неподвижной системе отсчёта, к координатам события в ускоряемой системе отсчёта

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \ln \frac{1 + E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 - E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}} - \Lambda'. \quad (3.1)$$

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln \left[\frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda}{2} \frac{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z} \right)^2}{E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}} \right]. \quad (3.2)$$

где

$$\Lambda' = \text{arsh} \Lambda = \text{arsh}(\gamma_0 \beta_0) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}. \quad (3.3)$$

$$E(\xi) = e^{\sqrt{1+\xi^2} - 1} \frac{\sqrt{1+\xi^2} - 1}{\xi}. \quad (3.4)$$

Формулы преобразования координат в ускоряемой системе отсчёта к координатам неподвижной системы отсчёта имеют вид

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} = e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') - \Lambda. \quad (3.5)$$

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \ln \frac{E\left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)}{\text{th}\left(\frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda'}{2}\right)} - Z. \quad (3.6)$$

Отметим, что поскольку $\lambda = \int w(z, l) dl = \frac{c}{K_0} \int F(z, t) dt = \frac{1}{m_0 c} \int f(z, t) dt$, а

$$\zeta = \int w(z, l) dz = \frac{1}{K_0} \int F(z, t) dz = \frac{1}{m_0 c^2} \int f(z, t) dz, \text{ то полученные преобразования,}$$

а также выражения для траекторий лучей и фазовых поверхностей носят универсальный характер и годятся равным образом, как в случае равноускоренного

движения, так и в случае ускоренного движения под действием сил, которые зависят от пространственных координат и времени. Таким образом, можно говорить о законах подобия ускоренно движущихся систем отсчёта.

Представим полученные результаты в обычных обозначениях для случая равноускоренного движения. В этом случае $\underline{\lambda}_{\text{ort}} = wl = at/c$, $\underline{\zeta}_{\text{ort}} = wz = az/c^2$, $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = wl' = at'/c$, $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = wz' = az'/c^2$. Преобразования координат события при переходе от неподвижной системы отсчёта к ускоряемой системе отсчёта (3.1), (3.2), и, соответственно, обратные преобразования (3.5), (3.6) в обычных обозначениях выглядят следующим образом

$$t' = \frac{c}{a} \left(\ln \frac{1 + E(at/c + \gamma_0 \beta_0) e^{-(\gamma_0 - 1 + az/c^2)}}{1 - E(at/c + \gamma_0 \beta_0) e^{-(\gamma_0 - 1 + az/c^2)}} - \text{arsh}(\gamma_0 \beta_0) \right), \quad (3.7)$$

$$z' = \frac{c^2}{a} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{at}{c} + \gamma_0 \beta_0 \right) \frac{1 - \left(E(at/c + \gamma_0 \beta_0) e^{-(\gamma_0 - 1 + az/c^2)} \right)^2}{E(at/c + \gamma_0 \beta_0) e^{-(\gamma_0 - 1 + az/c^2)}} \right], \quad (3.8)$$

$$t = \frac{c}{a} \left(e^{az'/c^2} \text{sh}(at'/c + \text{arsh}(\gamma_0 \beta_0)) - \gamma_0 \beta_0 \right), \quad (3.9)$$

$$z = \frac{c^2}{a} \left(\ln \frac{E \left(e^{az'/c^2} \text{sh}(at'/c + \text{arsh}(\gamma_0 \beta_0)) \right)}{\text{th} \frac{at'/c + \text{arsh}(\gamma_0 \beta_0)}{2}} - \gamma_0 + 1 \right). \quad (3.10)$$

Для сравнения этих преобразований с известными преобразованиями и вытекающими из них следствиями нам также понадобятся преобразования координатных дифференциалов и псевдориманова метрика, вытекающая из этих преобразований.

3. Преобразования координатных дифференциалов

Дифференцируя (3.5), (3.6), и учитывая, что

$$\frac{dE(\xi)}{d\xi} = E(\xi) \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\xi}, \quad (4.1)$$

получаем преобразования штрихованных координатных дифференциалов

$$d\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') \left(\text{cth}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \right). \quad (4.2)$$

$$d\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \frac{\text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') - 1}{\text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')} d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}, \quad (4.3)$$

где $\text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') = e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')$, $\text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') = \sqrt{1 + \left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)^2}$.

Эти формулы можно представить в тригонометрической форме, если учесть, что $\text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') = \text{tg } \Theta_0$, $\text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') = \frac{1}{\cos \Theta}$, а $\text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') = \frac{1}{\cos \Theta_0}$. Тогда

$$d\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \text{tg } \Theta_0 \left(\frac{1}{\sin \Theta} d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \right), \quad (4.4)$$

$$d\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \frac{1}{\cos \Theta_0} \left(\frac{1 - \cos \Theta \cos \Theta_0}{\sin \Theta} d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \right), \quad (4.5)$$

где $\text{tg } \Theta_0 = e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{tg } \Theta$, $\cos \Theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{tg } \Theta\right)^2}}$.

В полученных выражениях координаты отсчитываются от начала системы отсчёта, связанной с неподвижной модой. Будем теперь отсчитывать координаты от рассматриваемой точки E , то есть перейдём к локальным системам отсчёта. Переход к локальным системам отсчёта соответствует тому, что в формулах (4.2) и (4.3) надо положить $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \lambda'_0 = \underline{\zeta}'_{\text{ort}} = 0$. Так как в процессе переноса начала координат в рассматриваемую точку сумма $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda' = \dot{\Lambda}'$ не меняется, а сумма $\lambda'_0 + \Lambda' \rightarrow \underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda'$, то, как видно из (4.2), (4.3), получаются преобразования Лоренца, записанные в гиперболической форме:

$$d\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \text{ch } \dot{\Lambda}' d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \text{sh } \dot{\Lambda}' d\underline{\zeta}'_{\text{ort}},$$

$$d\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \text{sh } \dot{\Lambda}' d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \text{ch } \dot{\Lambda}' d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}.$$

Из тригонометрической формы сразу видно, что при переходе к локальным системам координат $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \rightarrow 0$ и значение $\Theta_0 \rightarrow \Theta$. При этом преобразования (4.4), (4.5) опять же превращаются в преобразования Лоренца, записанные теперь в тригонометрической форме:

$$d\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \frac{1}{\cos \Theta} d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \text{tg } \Theta d\underline{\zeta}'_{\text{ort}},$$

$$d\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \text{tg } \Theta d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \frac{1}{\cos \Theta} d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}.$$

Для того чтобы получить преобразование координатных дифференциалов относящихся к пространству покоящейся моды продифференцируем (3.1) и (3.2). В результате получаем

$$d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{2E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2} \left(\frac{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2}}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - d\underline{\zeta}_{\text{ort}} \right), \quad (4.6)$$

$$d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \left(\frac{1}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda} - \frac{1 + \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2} \frac{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2}}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda} \right) d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \frac{1 + \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}. \quad (4.7)$$

Перейдём к гиперболической и тригонометрической формам. Так как (3.1)

можно представить также в виде $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \text{arsh} \frac{2E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2} - \Lambda'$, то

$$\text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') = \text{tg } \Theta = \frac{2E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2}, \quad (4.8)$$

$$\text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') = \frac{1}{\cos \Theta} = \frac{1 + \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2}, \quad (4.9)$$

$$\text{th}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') = \sin \Theta = \frac{2A(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 + \left(A(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2}, \quad (4.10)$$

а

$$\text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') = \text{tg } \Theta_0 = \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda, \quad (4.11)$$

$$\text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') = \frac{1}{\cos \Theta_0} = \sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2}, \quad (4.12)$$

$$\text{th}(\lambda'_0 + \Lambda') = \sin \Theta_0 = \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda}{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2}}. \quad (4.13)$$

Используя эти выражения, получаем

$$d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')(\text{cth}(\lambda'_0 + \Lambda')d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - d\underline{\zeta}_{\text{ort}}), \quad (4.14)$$

$$d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = -\frac{\text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') - 1}{\text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda')}d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')d\underline{\zeta}_{\text{ort}}. \quad (4.15)$$

В тригонометрической форме эти выражения принимают вид

$$d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \text{tg } \Theta \left(\frac{1}{\sin \Theta_0} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - d\underline{\zeta}_{\text{ort}} \right), \quad (4.16)$$

$$d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \frac{1}{\cos \Theta} \left(-\frac{1 - \cos \Theta \cos \Theta_0}{\sin \Theta_0} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + d\underline{\zeta}_{\text{ort}} \right). \quad (4.17)$$

При переходе к локальному базису, как и следовало ожидать, опять получают преобразования Лоренца

$$d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \text{ch } \dot{\Lambda}' d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - \text{sh } \dot{\Lambda}' d\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \frac{1}{\cos \Theta} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - \text{tg } \Theta d\underline{\zeta}_{\text{ort}}, \quad (4.18)$$

$$d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = -\text{sh } \dot{\Lambda}' d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \text{ch } \dot{\Lambda}' d\underline{\zeta}_{\text{ort}} = -\text{tg } \Theta d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \frac{1}{\cos \Theta} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}. \quad (4.19)$$

Возвращаясь от гиперболических функций к их выражению через величину E , получаем следующие преобразования для координатных дифференциалов в локальной системе отсчёта, начало которой находится в точке $\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}}$ системы отсчёта, связанной с неподвижной модой:

$$d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{1 + \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z} \right)^2}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z} \right)^2} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - \frac{2E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z} \right)^2} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}, \quad (4.20)$$

$$d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = -\frac{2E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z} \right)^2} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \frac{1 + \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z} \right)^2}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z} \right)^2} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}. \quad (4.21)$$

Поскольку эти формулы будут использоваться ниже при сравнении с формулами, из которых получены преобразования в [11], то для большей достоверности получим их также непосредственно из формул (4.6) и (4.7). В локальной системе отсчёта формулы (4.6) и (4.7) принимают вид

$$d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{2E(\dot{\Lambda})e^{-\dot{Z}}}{1 - \left(E(\dot{\Lambda})e^{-\dot{Z}} \right)^2} \left(\frac{\sqrt{1 + \dot{\Lambda}^2}}{\dot{\Lambda}} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - d\underline{\zeta}_{\text{ort}} \right), \quad (4.22)$$

$$d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \left(\frac{1}{\dot{\Lambda}} - \frac{1 + (E(\dot{\Lambda})e^{-\dot{Z}})^2}{1 - (E(\dot{\Lambda})e^{-\dot{Z}})^2} \frac{\sqrt{1 + \dot{\Lambda}^2}}{\dot{\Lambda}} \right) d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \frac{1 + (E(\dot{\Lambda})e^{-\dot{Z}})^2}{1 - (E(\dot{\Lambda})e^{-\dot{Z}})^2} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}. \quad (4.23)$$

где

$$\dot{\Lambda} = \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') = \bar{\lambda} + \Lambda = e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) = \frac{2E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + Z)}}{1 - (E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + Z)})^2}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \underline{\zeta}'_{\text{ort}} - \bar{\zeta} + Z = \sqrt{1 + \dot{\Lambda}^2} - 1 = \\ &= \frac{2(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + Z)})^2}{1 - (E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + Z)})^2} = E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + Z)} \dot{\Lambda}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Найдём теперь $E(\dot{\Lambda})$. Так $E(\dot{\Lambda}) = \frac{\sqrt{1 + \dot{\Lambda}^2} - 1}{\dot{\Lambda}} \exp(\sqrt{1 + \dot{\Lambda}^2} - 1)$, то найдём

сначала $\sqrt{1 + \dot{\Lambda}^2} - 1$. Подставляя в это выражение формулу для $\dot{\Lambda}$, получаем

$$\sqrt{1 + \dot{\Lambda}^2} - 1 = E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + Z)} \dot{\Lambda} = Z,$$

откуда получаем

$$E(\dot{\Lambda})e^{-\dot{Z}} = E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + Z)}.$$

Подставляя затем эти формулы в (4.22) и (4.23) опять приходим к формулам (4.20) и (4.21).

4. Псевдориманова метрика пространства ускоряемой системы отсчёта

Получим теперь выражение для безразмерного интервала между двумя бесконечно близкими событиями $d\sigma^2 = w^2 ds^2 = d\underline{\lambda}_{\text{ort}}^2 - d\underline{\zeta}_{\text{ort}}^2$ в переменных $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$ и $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$. Как было показано выше эти ковариантные переменные, определённые в римановом пространстве событий равны контравариантным переменным, определённым в псевдоримановом пространстве событий. Поэтому компоненты метрического тензора этого псевдориманова пространства событий будем писать с нижними индексами, не забывая о том, что ковариантные переменные $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$ и $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ в псевдоримановом пространстве событий являются контравариантными переменными. Используя формулы (4.2) и (4.3), получаем

$$d\sigma^2 = w^2 ds^2 = g_{\lambda'\lambda'} d\underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2 + 2g_{\lambda'\zeta'} d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} + d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}{}^2 \quad (5.1)$$

где компоненты метрического тензора определяются по формулам:

$$g_{\lambda'\lambda'} = \frac{-1 + 2\sqrt{1 + \left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)^2} \text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') - \text{ch}^2(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')}{\text{sh}^2(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')}, \quad (5.2)$$

$$g_{\lambda'\zeta'} = \frac{\sqrt{1 + \left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)^2} - \text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')}{\text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')}, \quad (5.3)$$

$$g_{\zeta'\zeta'} = -1. \quad (5.4)$$

Можно показать, что интервал, задаваемый выражением (5.1) с компонентами (5.2), (5.3) и (5.4), является инвариантом. Представление о поведении компонент метрического тензора $g_{\lambda'\lambda'}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ и $g_{\lambda'\zeta'}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ дают графики этих функций на рис.4. Область допустимых значений функции $g_{\lambda'\lambda'}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ ищем из неравенства $g_{\lambda'\lambda'}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2, \underline{\zeta}'_{\text{ort}}) \geq 0$, то есть

$$-1 + 2\sqrt{1 + \left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)^2} \text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') - \text{ch}^2(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') \geq 0.$$

Из этого неравенства получаем условие допустимых преобразований $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \geq \underline{\zeta}'_{\text{ort}}$, где $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln\left(\frac{1}{2} \text{th}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)$ является уравнением линии пересечения поверхности $g_{\lambda'\lambda'}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ с плоскостью $g_{\lambda'\lambda'}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}}) = 0$, рис.4,а. Когда $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda' > 3$ $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \approx \ln(1/2) \approx -0,693$.

Решая же уравнение $\sqrt{1 + \left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)^2} = \text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')$, которое следует из (5.3), получаем уравнение линии пересечения поверхности, задаваемой функцией $g_{\lambda'\zeta'}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$ с плоскостью $g_{\lambda'\zeta'}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}}) = 0$, имеющее вид $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = 0$.

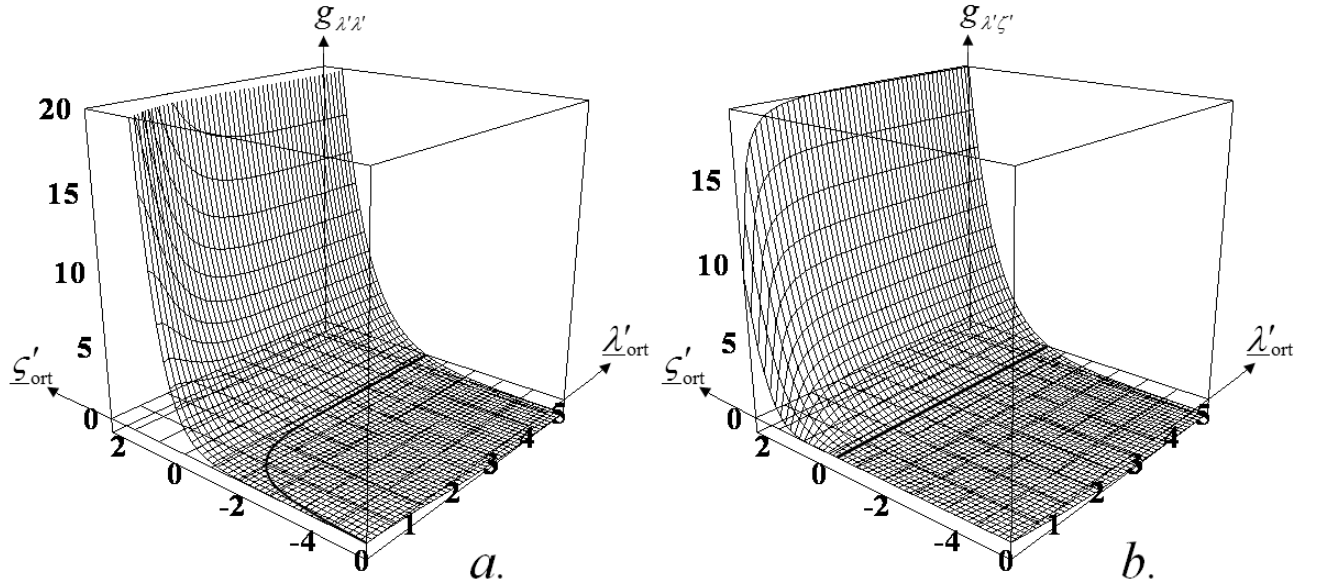


Рис.4. Поверхности, задаваемые функцией $g_{\lambda\lambda'}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}})$ а) и функцией $g_{\lambda'\zeta'}(\lambda'_{\text{ort}}, \zeta'_{\text{ort}})$ б). Жирная изогнутая линия слева и жирная прямая справа разделяет области положительных и отрицательных значений функций.

Для более наглядного перехода к локальной системе отсчёта запишем (5.2) и (5.3) в тригонометрической форме

$$g_{\lambda\lambda'} = \frac{-1 + 2 \cos \Theta / \cos \Theta_0 - \cos^2 \Theta}{\sin^2 \Theta}, \quad (5.5)$$

$$g_{\lambda'\zeta'} = \frac{\cos \Theta / \cos \Theta_0 - 1}{\sin \Theta}. \quad (5.6)$$

При переходе в локальную систему отсчёта $\Theta_0 \rightarrow \Theta$, то $g_{\lambda\lambda'} \rightarrow 1$, а $g_{\lambda'\zeta'} \rightarrow 0$

Наконец, приводя квадратичную форму (5.1) к диагональному виду, получаем $d\sigma^2 = dT'^2 - dZ'^2$, где

$$dT' = \sqrt{g_{\lambda\lambda'}} d\lambda'_{\text{ort}} + \frac{g_{\lambda'\zeta'}}{\sqrt{g_{\lambda\lambda'}}} d\zeta'_{\text{ort}},$$

$$dZ' = \sqrt{-\frac{\|g_{ik'}\|}{g_{\lambda\lambda'}}} d\zeta'_{\text{ort}} = \frac{e^{\zeta'_{\text{ort}}}}{\sqrt{g_{\lambda\lambda'}}},$$

поскольку детерминант матрицы

$$\|g_{ik'}\| = -\frac{\text{sh}^2 \lambda'_0}{\text{sh}^2 \lambda'_{\text{ort}}} = -\frac{\left(e^{\zeta'_{\text{ort}}} \text{sh} \lambda'_{\text{ort}}\right)^2}{\text{sh}^2 \lambda'_{\text{ort}}} = -e^{2\zeta'_{\text{ort}}}.$$

При переходе к обычным обозначениям в выражении для квадрата интервала

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 = g_{\lambda'\lambda'} c^2 dt'^2 + 2g_{\lambda'\zeta'} c dt' dz' + g_{\zeta'\zeta'} dz'^2$$

компоненты метрического тензора принимают вид

$$g_{\lambda'\lambda'} = \frac{-1 + 2\sqrt{1 + e^{az'/c^2} \operatorname{sh}\left(\Lambda' + \frac{at'}{c}\right)^2} \operatorname{ch}\left(\Lambda' + \frac{at'}{c}\right) - \operatorname{ch}^2\left(\Lambda' + \frac{at'}{c}\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\Lambda' + \frac{at'}{c}\right)}, \quad (5.7)$$

$$g_{\lambda'\zeta'} = \frac{\sqrt{1 + e^{az'/c^2} \operatorname{sh}\left(\Lambda' + \frac{at'}{c}\right)^2} - \operatorname{ch}\left(\Lambda' + \frac{at'}{c}\right)}{\operatorname{sh}\left(\Lambda' + \frac{at'}{c}\right)}, \quad g_{\zeta'\zeta'} = -1. \quad (5.8)$$

Видно, что в пределе, когда $a \rightarrow 0$ $g_{\lambda'\lambda'} \rightarrow 1$, а $g_{\lambda'\zeta'} \rightarrow 0$.

5. Сравнение с преобразованиями Мёллера и Подосёнова

Сравним полученные в [1] преобразования с преобразованиям, полученными Мёллером [2]. Эти преобразования в обычных обозначениях имеют вид:

$$t = \frac{c}{a} \operatorname{sh} \frac{at'}{c} + \frac{z'}{c} \operatorname{sh} \frac{at'}{c}, \quad (6.1)$$

$$z = z' \operatorname{ch} \frac{at'}{c} + \frac{c^2}{a} \left(\operatorname{ch} \frac{at'}{c} - 1 \right), \quad (6.2)$$

в обозначениях же настоящей работы

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \operatorname{sh} \underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \underline{\zeta}'_{\text{ort}} \operatorname{sh} \underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \quad (6.3)$$

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \underline{\zeta}'_{\text{ort}} \operatorname{ch} \underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \operatorname{ch} \underline{\lambda}'_{\text{ort}} - 1. \quad (6.4)$$

Покажем, что эти преобразования являются предельным случаем полученных в настоящей работе преобразований когда $|\underline{\zeta}'_{\text{ort}}| \ll 1$. В обычных обозначениях в случае равноускоренного движения это условие выглядит как $a|z'|/c^2 \ll 1$.

Действительно, разлагая в (3.5) в ряд $e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}$ и, удерживая линейный член разложения, получаем формулу (6.3), а в обычных обозначениях формулу Мёллера для t (6.1). Разложение же формулы (3.6) для $\underline{\zeta}_{\text{ort}}$ по малой величине $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ с точностью до линейных членов имеет вид

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \ln E(\xi) \Big|_{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}=0} + \underline{\zeta}'_{\text{ort}} \frac{E'(\xi)}{E(\xi)} \Big|_{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}=0} \text{sh } \underline{\lambda}'_{\text{ort}} - \ln \text{th } \frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}}{2}, \quad \xi = e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh } \underline{\lambda}'_{\text{ort}}.$$

Так как

$$E(\xi) \Big|_{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}=0} = e^{\text{ch } \underline{\lambda}'_{\text{ort}} - 1} \text{th } \frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}}{2}, \quad \text{а } \frac{E'(\xi)}{E(\xi)} \Big|_{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}=0} = \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\xi} \Big|_{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}=0} = \frac{\text{ch } \underline{\lambda}'_{\text{ort}}}{\text{sh } \underline{\lambda}'_{\text{ort}}},$$

то

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \text{ch } \underline{\lambda}'_{\text{ort}} \underline{\zeta}'_{\text{ort}} + \text{ch } \underline{\lambda}'_{\text{ort}} - 1,$$

что совпадает с формулой (6.4) и в обычных обозначениях с формулой преобразования Мёллера (6.2).

Другой предельный случай реализуется в случае, когда $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ произвольно, а $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$ настолько мало, что $e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh } \underline{\lambda}'_{\text{ort}} \approx \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \ll 1$. В этом случае имеем $\underline{\lambda}_{\text{ort}} \approx \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}$, а $\underline{\zeta}_{\text{ort}} \approx \underline{\zeta}'_{\text{ort}}$, а метрика совпадает с метрикой Подосёнова [5, 6]. Действительно, разлагая выражения (5.2) и (5.3) по малой величине $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}$, получаем

$$g_{\lambda'\lambda'} = e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}, \quad g_{\lambda'\zeta'} = \frac{1}{2} \underline{\lambda}'_{\text{ort}} \left(e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} - 1 \right).$$

Тогда

$$d\sigma^2 = e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} d\underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2 + \underline{\lambda}'_{\text{ort}} \left(e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} - 1 \right) d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} - d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}{}^2$$

Так как второе слагаемое третьего порядка малости, то им можно пренебречь по сравнению с двумя другими второго порядка малости. В результате получаем метрику Подосёнова

$$d\sigma^2 = e^{2\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} d\underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2 - d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}{}^2$$

или в обычных обозначениях

$$ds^2 = e^{2az'/c^2} c^2 dt'^2 - dz'^2. \quad (6.5)$$

Когда $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = a|z'|/c^2 \ll 1$, то из (6.5) следует метрика

$$ds^2 = \left(1 + az'/c^2 \right)^2 c^2 dt'^2 - dz'^2,$$

полученная в работах Ву и Ли.

6. Сравнение с преобразованиями Ву и Ли и обобщёнными преобразованиями Мёллера-Ву-Ли

Выясним теперь, в каком отношении полученные в [1] преобразования находятся к преобразованиям Ву и Ли [3], и обобщённым преобразованиям Мёллера-Ву-Ли, полученным Ксу и Клефф в [8], которые в обозначениях настоящей работы выглядят следующим образом:

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{1}{2\gamma_0} \ln \frac{(1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}} + \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0)(1 - \beta_0)}{(1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}} - \underline{\lambda}_{\text{ort}} - \beta_0)(1 + \beta_0)}, \quad (7.1)$$

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \sqrt{(1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}})^2 - (\beta_0 + \underline{\lambda}_{\text{ort}})^2} - 1/\gamma_0. \quad (7.2)$$

Эти преобразования были усовершенствованы Эрнстом [10] и записываются в виде

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{1}{2} \ln \frac{(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0(1 + \beta_0))(1 - \beta_0)}{(\underline{\zeta}_{\text{ort}} - \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0(1 - \beta_0))(1 + \beta_0)}, \quad (7.3)$$

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \sqrt{(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0)^2 - (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0\gamma_0)^2} - 1. \quad (7.4)$$

Усовершенствование состоит в том, что в формулах, полученных Эрнстом также как и в формулах работы [1] фигурирует «естественный» масштаб времени и пространственной координаты, в то время как в формулах (7.1), (7.2) масштаб времени и масштаб пространственной координаты в γ_0 раз отличается от «естественного». То есть если в преобразованиях работы [1] и работы Эрнста $\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \int wcdt$, $\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \int wdz$, $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \int wcdt'$, $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \int wdz'$, то в соответствии с работой Ксу и Клефф $\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \int wc\gamma_0 dt$, $\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \int w\gamma_0 dz$, $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \int wc\gamma_0 dt'$, $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \int w\gamma_0 dz'$.

Отметим, что формула (7.3) может быть записана в более компактном виде

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \text{arth} \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0\gamma_0}{\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0} - \text{arth} \beta_0. \quad (7.5)$$

Метрика, отвечающая этим преобразованиям такая же, какая получается из метрики Подосёнова (6.5) при $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \ll 1$ ($az'/c^2 \ll 1$).

Авторы работы [12] также дают вывод этих формул другим более простым по сравнению с [3, 4, 8 – 10] методом, но относят их только к настоящему времени, а для событий, относящихся к прошлому и будущему, получают формулы вида

$$\begin{aligned} \lambda'_{\text{ort}} &= \text{arth} \frac{\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0} - \text{arth} \beta_0 = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0(1 + \beta_0)}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} - \underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0(1 - \beta_0)}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \sqrt{(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0)^2 - (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0)^2} - 1. \quad (7.7)$$

Прежде чем переходить к сравнению (7.3) и (7.4) с (3.1) и (3.2) выясним область существования функций, описывающих те и другие преобразования. Рассмотрим сначала функции (7.6) и (7.7). Область допустимых значений функции (7.6) $-\underline{\lambda}_{\text{ort}} - \gamma_0 \beta_0 - 1 < \underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1 < \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0 + 1$ перекрывает световой конус, рис.5,*a*, в то время как область допустимых значений функции (7.7) $\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1 < -\underline{\lambda}_{\text{ort}} - \gamma_0 \beta_0 - 1$, $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0 + 1 < \underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1$ не попадает в него, рис.5,*b*. Поверхности, задаваемые этими функциями, показаны на рис.6, *a*) и *b*), соответственно.

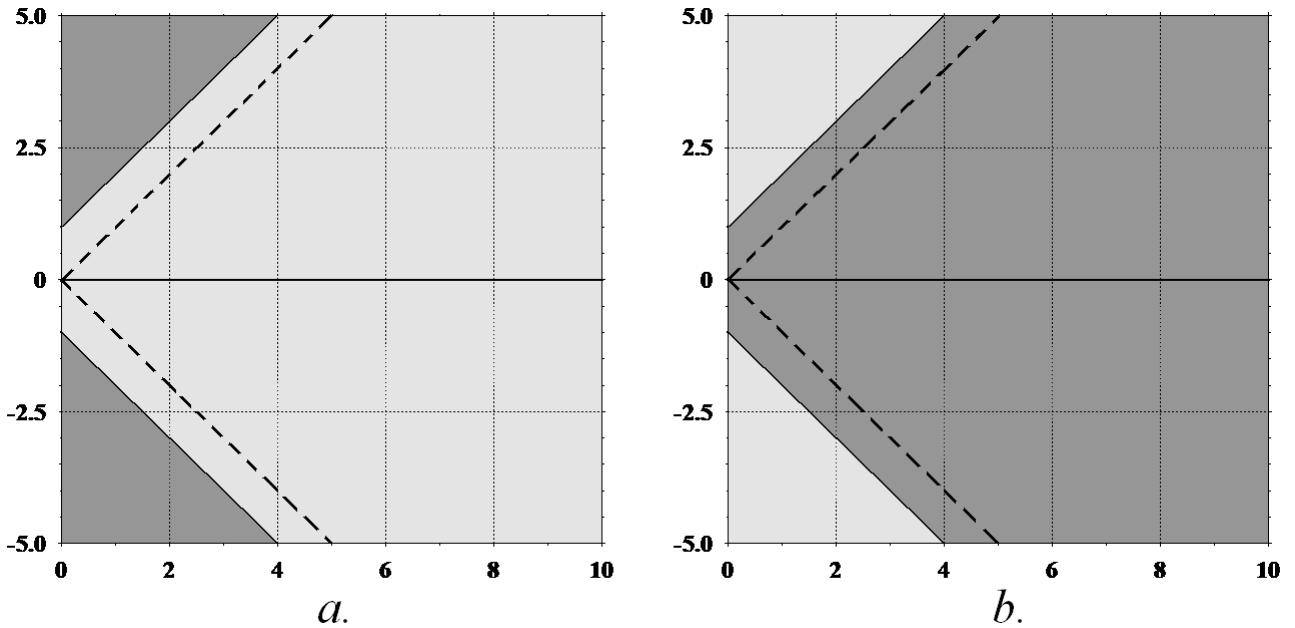


Рис.5. Область допустимых значений функций (7.6) *a*) и (7.7) *b*). По оси абсцисс отложены значения $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0$, а по оси ординат – значения $\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1$. Светлые области – области допустимых значений. Штриховые линии – линии светового конуса.

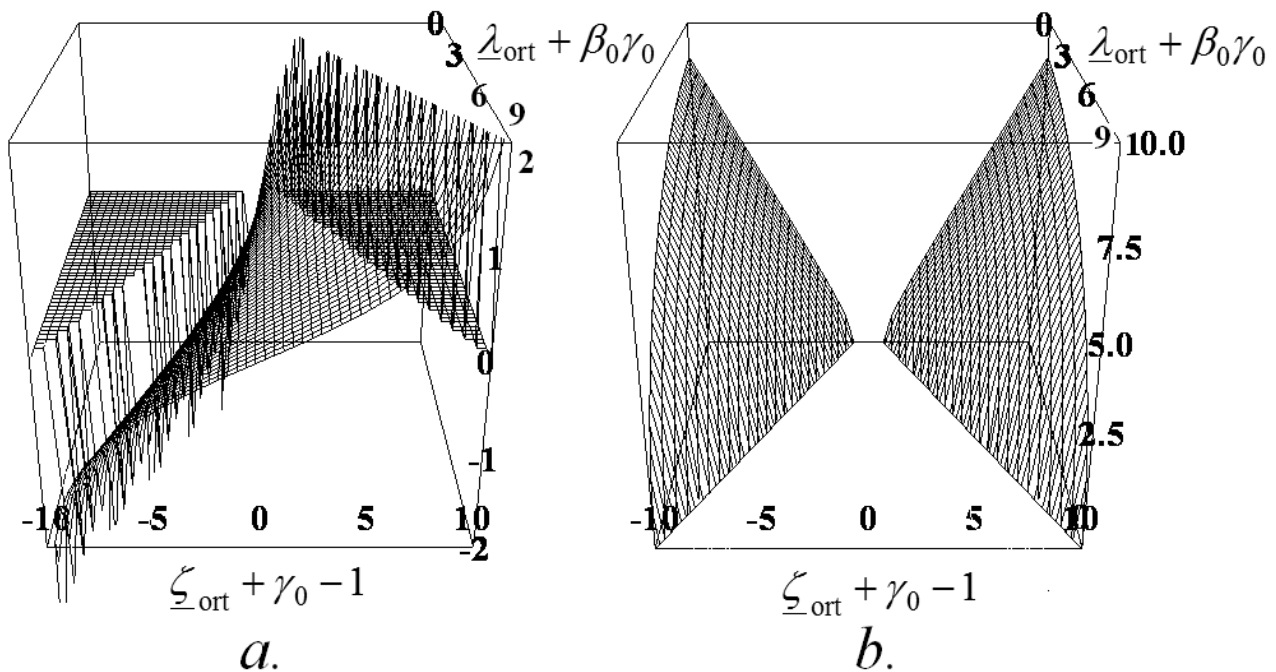


Рис.6. Поверхности, задаваемые функциями (7.6) *a*) и (7.7) *b*). По вертикальной оси отложены значения $\lambda'_{\text{ort}} + \text{arth } \beta_0$ *a*) и ζ'_{ort} *b*).

Поскольку функция (7.7) предназначена для описания области, которая не совпадает с областью допустимых значений этой функции, а функция (7.6) задаётся в области, которая не совпадает с областью допустимых значений функций, полученных в [1], то нет смысла сравнивать их с функциями (7.6) и (7.7). Поэтому в данной работе будет проведено сравнение только с функциями (7.3) и (7.4), а также с функциями (7.1) и (7.2).

Для функций (7.3) и (7.4) область допустимых значений определяется неравенствами $\zeta_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1 > \lambda_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0 - 1$ (на рис.7,*a* это область *I*) и $\zeta_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1 < -(\lambda_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0) - 1$ (на рис.7,*a* это область *II*). В действительности область *II* не имеет физического смысла, так как в ней как это следует из (7.3) $\lambda'_{\text{ort}} = \int wcdt' < 0$. Это хорошо видно на рис.8,*a*.

Поэтому функции (7.3) и (7.4) будем сравнивать с функциями (3.1) и (3.2) в области *I*, определяемой неравенством $\zeta_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1 > \lambda_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0 - 1$.

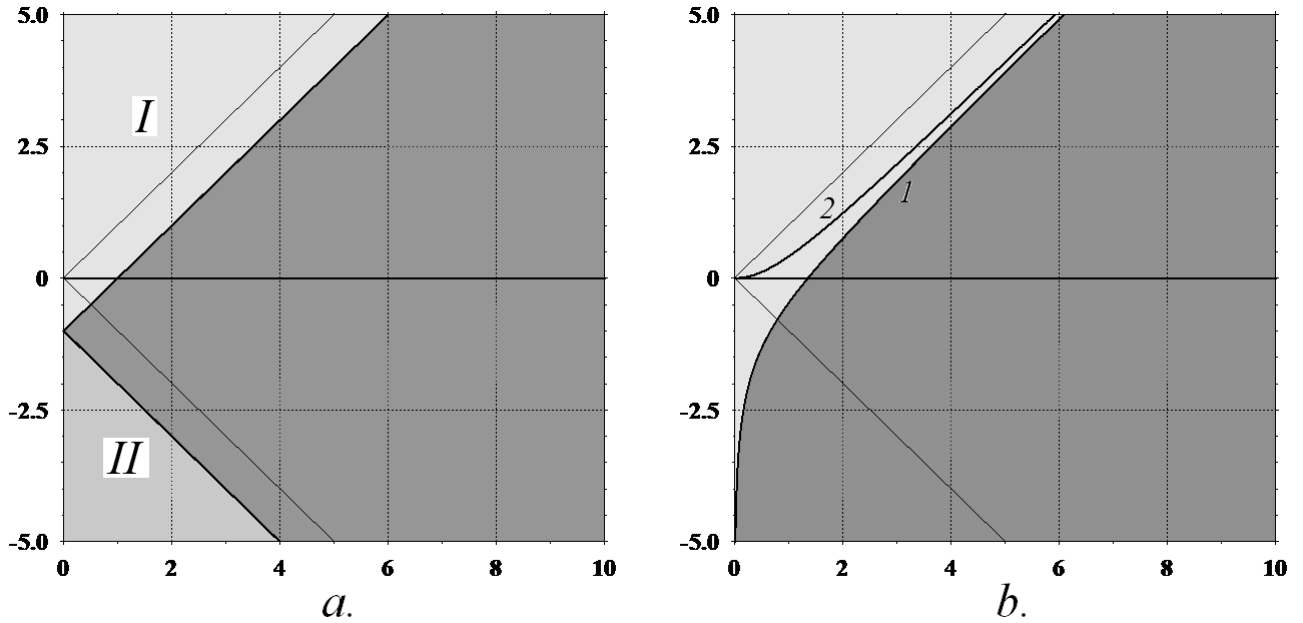


Рис.7. Светлая область – область допустимых значений функций (7.3), (7.4) *a*) и функций (3.1), (3.2) *b*). По оси абсцисс отложены значения $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0$, а по оси ординат – значения $\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1$. Линии разрыва функций $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ и $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ – жирные наклонные прямые для преобразований Эрнста *a*) и кривая *I* для преобразований работы [1] *b*). Тонкие наклонные линии – линии светового конуса.

Найдём теперь область допустимых значений функций (3.1) и (3.2). Как следует из выражений для этих функций, эта область для обеих функций определяется неравенством

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1 > \ln E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0). \quad (7.8)$$

Раскрывая $E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0)$ по формуле (3.4), получаем выражение

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1 > \ln \frac{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0)^2} - 1}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0} + \sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0)^2} - 1,$$

которое при значениях $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0 \gg 1$ совпадает с областью *I* допустимых значений функций (7.3) и (7.4). Линия *I* разрыва функций (3.1) и (3.2) $\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1 = \ln E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0)$ и область их допустимых значений показаны на рис.7,*b*. Поверхности, задаваемые функциями (3.1) и (3.2), показаны на рис.9.

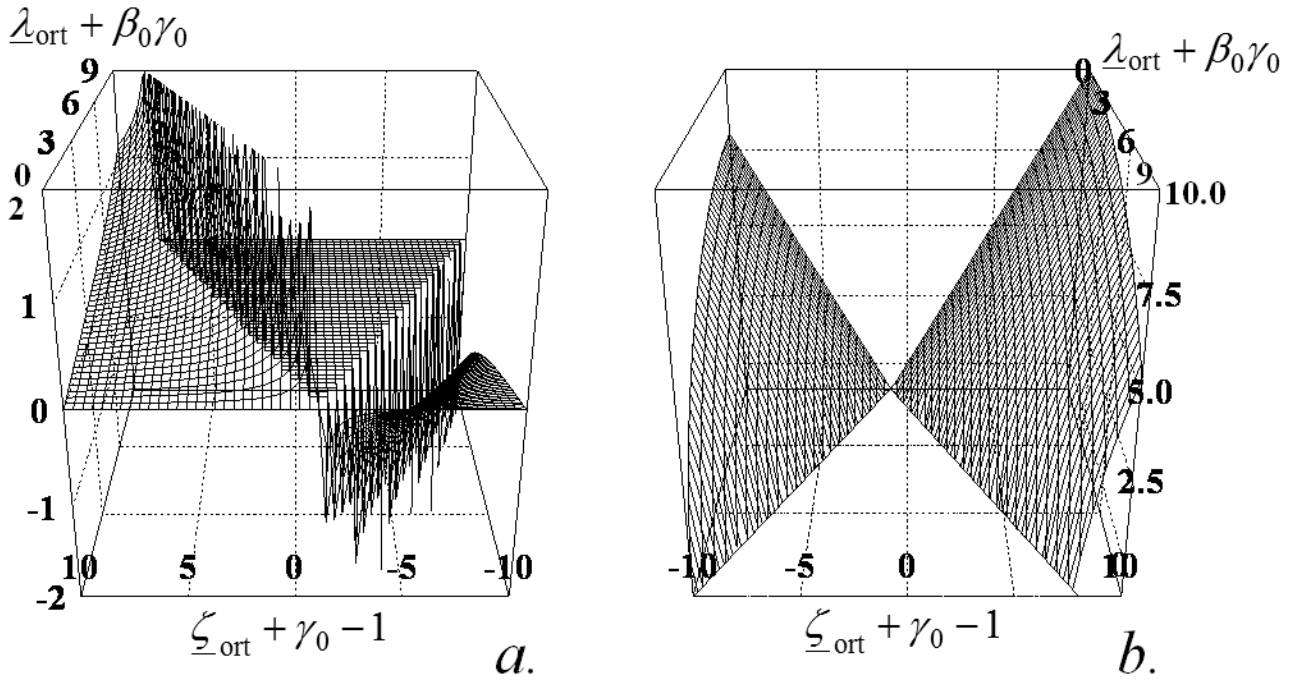


Рис.8. Поверхности, задаваемые функциями (7.3) *a*) и (7.4) *b*). По вертикальной оси отложены значения $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \text{arth } \beta_0$ *a*) и $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ *b*).

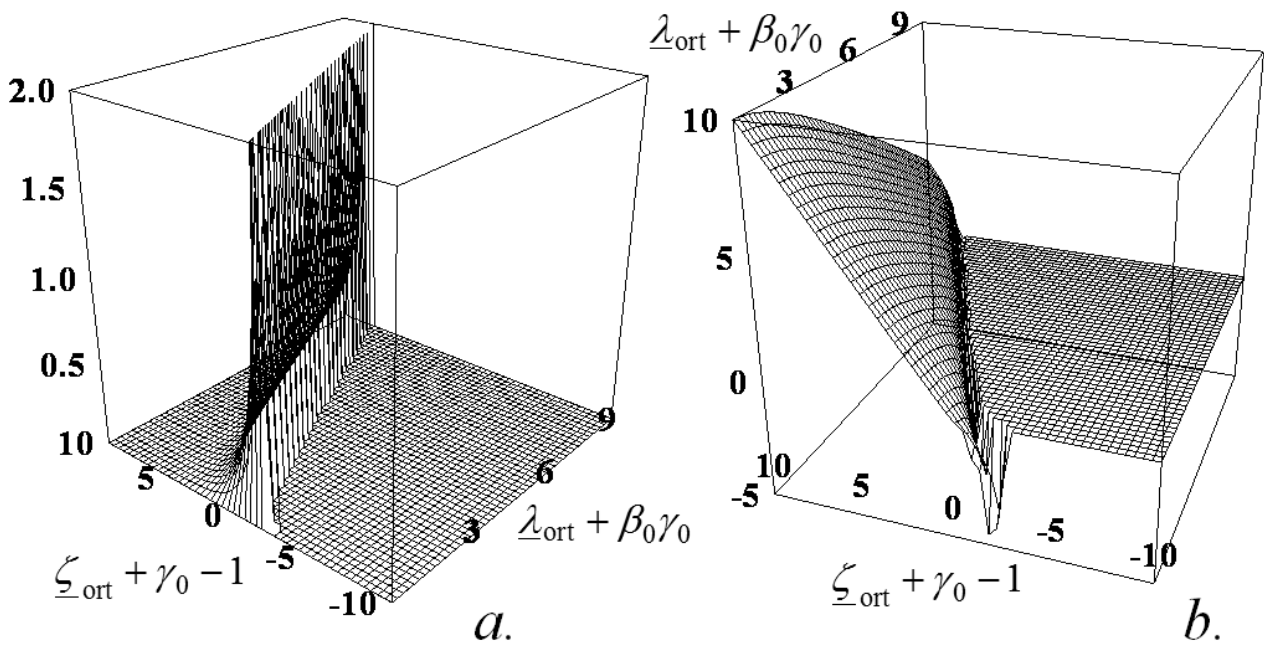


Рис.9. Поверхности, задаваемые функциями (3.1) *a*) и (3.2) *b*). По вертикальной оси отложены значения $\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \text{arth } \beta_0$ *a*) и $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ *b*).

На следующем рисунке показано, как отличаются друг от друга поверхности, задаваемые функциями (3.1) и (7.3) *a*) и функциями (3.2) и (7.4) *b*).

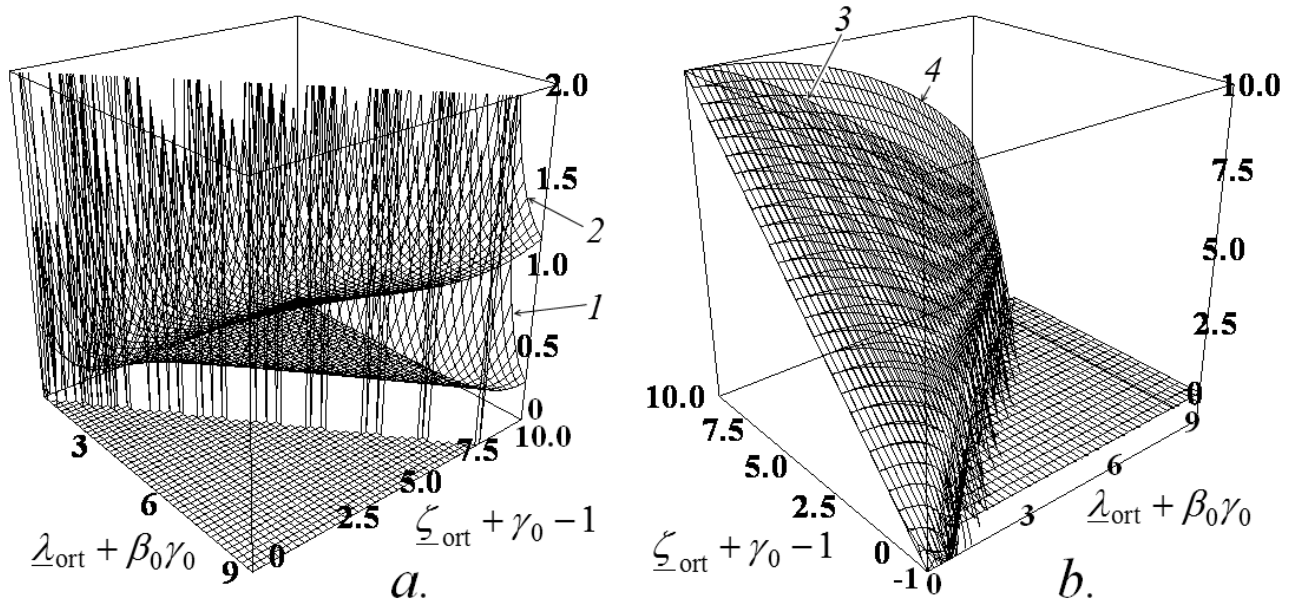


Рис.10. Поверхности, задаваемые функциями (3.1) (1), (7.3) (2) и функциями (3.2) (3), (7.4) (4). По вертикальной оси отложены значения $\lambda'_{\text{ort}} + \text{arth } \beta_0$ *a*) и ζ'_{ort} *b*).

Мы видим, что, несмотря на существенное различие, при некоторых значениях аргументов рассматриваемых функций поверхности близко подходят друг к другу и должны описываться одинаковыми функциями. Докажем это, анализируя поведение функций (3.1) и (3.2) в различных частях их области допустимых значений. Для этого сначала запишем формулы (3.1) и (3.2) в другом виде, который в определённых случаях оказывается более удобным для сравнения. Учтём, что

$$\text{tg}\Theta = \text{sh}(\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda') = \bar{\lambda} + \Lambda = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\text{tg}\Theta_0 = \text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') = \lambda_{\text{ort}} + \Lambda = \frac{\beta(\lambda'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2(\lambda'_0)}}$$

где $\beta = v/c$, $\beta(\lambda'_0) = v|_{\lambda'=\lambda'_0}/c$. Тогда

$$\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda' = \text{arsh}(\bar{\lambda} + \Lambda) = \text{arsh} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

В результате формулы (3.1) и (3.2) с учётом (3.3) можно записать в виде

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \ln \frac{1+\beta_0}{1-\beta_0} \right) = \text{arth } \beta - \text{arth } \beta_0, \quad (7.9)$$

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln \left(\frac{\beta(\lambda'_0)}{\sqrt{1-\beta^2(\lambda'_0)}} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \right), \quad (7.10)$$

где в соответствии с (4.10) и (4.13)

$$\beta = \sin \Theta = \frac{2E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 + \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z} \right)^2} = \frac{\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0}{\sqrt{1 + (\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0)^2}}, \quad (7.11)$$

$$\beta(\lambda'_0) = \sin \Theta_0 = \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda}{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2}}. \quad (7.12)$$

Так как $\frac{\beta(\lambda'_0)}{\sqrt{1-\beta^2(\lambda'_0)}} = \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda$, то

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln \left((\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \right). \quad (7.13)$$

Совсем не сложно показать, что запись анализируемых формул в виде (7.9) и (7.10) эквивалентна записи в виде (3.1) и (3.2), соответственно.

Из рис.10 видно, что поверхности, задаваемые функциями (3.1) и (3.2) близки друг к другу вблизи плоскости $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0 = 0$. Действительно, поскольку при $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0 \ll 1$ $E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) \approx \frac{1}{2}(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)$, то из формулы (3.2) получаем

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \approx \ln \left(\frac{1}{e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - (\gamma_0 - 1)}} \right) = \underline{\zeta}_{\text{ort}} + (\gamma_0 - 1), \text{ что совпадает с результатом, получаемым}$$

из формулы (7.4) при указанном выше условии. Что касается поверхностей, задаваемых функциями (3.1) и (3), то для их совпадения в области I , рис.7 требуется выполнение двух условий $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0 \ll 1$ и $|\underline{\zeta}_{\text{ort}} + (\gamma_0 - 1)| \ll 1$. Действительно, при выполнении этих условий функции (3.1) и (3.2) могут быть записаны в виде, полученном Эрнстом в [10]. Для этого воспользуемся их представлением в виде (7.9) и (7.10). В самом деле, при выполнении упомянутых выше условий (7.11) и (7.12) принимают вид

$$\beta \approx \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0}{e^{\underline{\zeta}_{\text{ort}} + (\gamma_0 - 1)}} \approx \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0}{\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0}, \quad \beta(\lambda'_0) \approx \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda.$$

Подставляя эти выражения в (7.9) и (7.10), получаем

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \text{arth} \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0}{\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0} - \text{arth} \beta_0,$$

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln \sqrt{(1 + (\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1))^2 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0)^2}.$$

Формула для $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$ совпадает с формулой (7.3). Поскольку во второй формуле $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0 \ll 1$ и $|\underline{\zeta}_{\text{ort}} + (\gamma_0 - 1)| \ll 1$, то подкоренное выражение близко к единице и тогда эту формулу можно приближённо записать в виде

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \sqrt{(1 + (\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - 1))^2 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0)^2} - 1,$$

что совпадает с формулой (7.4).

Покажем теперь, что формулы (3.1) и (3.2) переходят в формулы (7.3) и (7.4) не только вблизи начала координат, но также вблизи всей линии 2 на рис.7.

Принимая во внимание, что $\sqrt{1 + (\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0)^2} = \underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - \bar{\zeta}$, преобразуем (7.11) к виду

$$\beta = \frac{\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0}{\sqrt{1 + (\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0)^2}} = \frac{\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0}{\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - \bar{\zeta}}. \quad (7.14)$$

Подставляя (7.14) в (7.9) и (7.10), получаем

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \text{arth} \frac{\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0}{\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - \bar{\zeta}} - \text{arth} \beta_0, \text{ и}$$

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln \left(\frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \gamma_0 \beta_0}{\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0} \sqrt{(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0 - \bar{\zeta})^2 - (\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0)^2} \right). \quad (7.15)$$

Сравнивая эти выражения с (7.5) и (7.13), видим, что совпадение происходит тогда, когда $\bar{\zeta} = 0$. Это означает, что рассматриваемые точки риманова пространства событий лежат на луче, выходящем из начала координат, рис.3 (на рис.7 это линия 2). Но тогда $\bar{\lambda} = \underline{\lambda}_{\text{ort}}$ и $(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0)^2 - (\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0)^2 = 1$. При этом выражение под знаком логарифма в (7.15) тоже обращается в единицу. Если теперь рассматривать события, лежащие рядом с упомянутым лучом, но такие, что

$\left| \sqrt{(\underline{\zeta}_{\text{ort}} + \gamma_0)^2 - (\bar{\lambda} + \gamma_0 \beta_0)^2} - 1 \right| \ll 1$, то логарифм можем разложить по этой малой величине. В результате приходим опять к формулам (7.5), (7.4).

Преобразования Ву и Ли получаются из (7.5), (7.4) автоматически, поскольку они выведены для случая нулевой начальной скорости, $\beta_0 = 0$ ($\gamma_0 = 1$). Условия $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0 \ll 1$ и $|\underline{\zeta}_{\text{ort}} + (\gamma_0 - 1)| \ll 1$ принимают при этом вид $\underline{\lambda}_{\text{ort}} \ll 1$ и $|\underline{\zeta}_{\text{ort}}| \ll 1$.

Покажем теперь, что при условии $\underline{\lambda}_{\text{ort}} \ll \Lambda = \beta_0 \gamma_0 \ll 1$, $|\underline{\zeta}_{\text{ort}}| \ll 1$ преобразования [1] совпадают также с преобразованиями Ксу и Клефф. Разложим $E(\Lambda + \underline{\lambda}_{\text{ort}})$ по малой величине $\underline{\lambda}_{\text{ort}}$, удерживая только линейные по $\underline{\lambda}_{\text{ort}}$ члены.

Имеем $E(\Lambda + \underline{\lambda}_{\text{ort}}) \approx E(\Lambda) + \left. \frac{\partial E(\Lambda + \underline{\lambda}_{\text{ort}})}{\partial(\Lambda + \underline{\lambda}_{\text{ort}})} \right|_{\underline{\lambda}_{\text{ort}}=0} \underline{\lambda}_{\text{ort}}$. Так как

$$\left. \frac{\partial E(\Lambda + \underline{\lambda}_{\text{ort}})}{\partial(\Lambda + \underline{\lambda}_{\text{ort}})} \right|_{\underline{\lambda}_{\text{ort}}=0} = E(\Lambda) \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2}}{\Lambda}, \text{ а } E(\Lambda) = \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1}{\Lambda} e^Z, \text{ то}$$

$$E(\Lambda + \underline{\lambda}_{\text{ort}}) \approx \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1}{\Lambda} \left(1 + \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2}}{\Lambda} \underline{\lambda}_{\text{ort}} \right) e^Z.$$

Подставляя это выражение в формулу (7.11), и учитывая, что при условии $\underline{\lambda}_{\text{ort}} \ll \beta_0 \gamma_0 \ll 1$ выполняется также условие $\underline{\lambda}_{\text{ort}} \ll \Lambda / \sqrt{1 + \Lambda^2} = \beta_0$, получаем

$$\beta = \frac{v}{c} \approx \frac{2 \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1}{\Lambda} \left(1 + \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2}}{\Lambda} \underline{\lambda}_{\text{ort}} \right)}{1 + \left(\frac{\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1}{\Lambda} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2}}{\Lambda} \underline{\lambda}_{\text{ort}} \right)} \frac{1}{1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}}}.$$

Далее, учитывая тождество $1 + \left(\frac{\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1}{\Lambda} \right)^2 = 2 \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2}}{\Lambda} \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1}{\Lambda}$, имеем

$$\beta \approx \frac{\Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} \frac{1 + \frac{1}{\Lambda} \underline{\lambda}_{\text{ort}}}{1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}}} = \frac{\beta_0 + \underline{\lambda}_{\text{ort}} / \gamma_0}{1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}}} \quad (7.16)$$

Подставляя (7.16) в формулу (7.9), получаем

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}} + \underline{\lambda}_{\text{ort}}/\gamma_0 + \beta_0)/(1 - \beta_0)}{(1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}} - \underline{\lambda}_{\text{ort}}/\gamma_0 - \beta_0)/(1 + \beta_0)}. \quad (7.17)$$

Подставляя же (7.16) в (7.13) и учитывая, что

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \frac{\sqrt{(1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}})^2 - (\beta_0 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}/\gamma_0)^2}}{\beta_0 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}/\gamma_0}, \quad \Lambda + \underline{\lambda}_{\text{ort}} \approx \gamma_0 \left(\beta_0 + \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\gamma_0} \right)$$

получаем

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \approx \ln \left(\gamma_0 \sqrt{(1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}})^2 - (\beta_0 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}/\gamma_0)^2} \right). \quad (7.18)$$

Так как $\underline{\zeta}_{\text{ort}} \ll 1$ и $\underline{\lambda}_{\text{ort}}/\gamma_0 \ll \beta_0 \ll 1$, то выражение под знаком логарифма близко к единице. Тогда представим (7.18) в виде

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \approx \ln \left(1 + \gamma_0 \left(\sqrt{(1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}})^2 - (\beta_0 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}/\gamma_0)^2} - \frac{1}{\gamma_0} \right) \right).$$

Разлагая логарифм, получаем

$$\frac{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}{\gamma_0} \approx \sqrt{(1 + \underline{\zeta}_{\text{ort}})^2 - \left(\beta_0 + \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\gamma_0} \right)^2} - \frac{1}{\gamma_0}. \quad (7.19)$$

Видим, что полученные формулы (7.17), (7.19) и формулы Ксу и Клефф совпадают, когда $\gamma_0 - 1 \ll 1$.

Выясним теперь, откуда проистекает расхождение между преобразованиями, полученными в [1] и преобразованиями Ву и Ли, обобщёнными преобразованиями Мёллера-Ву-Ли, полученными Ксу и Клефф и усовершенствованными Эрнстом. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Ву и Ли используют два чисто кинематических постулата:

- 1) Инвариантная метрика прямолинейно и равномерно ускоряемой системы отсчёта, движущейся вдоль оси z , определяется выражением
$$ds^2 = g_{00}(z')c^2 dt'^2 - dz'^2 = c^2 dt'^2 - dz'^2, \quad (7.20)$$
(дифференциалы x и y полагаем равными нулю).
- 2) Имеет место локальное лоренцево сокращение длины

$$(\partial z / \partial z')_t = \sqrt{1 - v^2(x', t)/c^2}. \quad (7.21)$$

Как упоминалось выше в работах Ву и Ли для компоненты метрического тензора при dt'^2 получена формула $g_{00} = \left(1 + az'/c^2\right)^2$, что совпадает с результатом Подосёнова в случае, когда $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = |z'|/c^2 \ll 1$ и результатом работы [1] в

случае, когда $e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh } \underline{\lambda}'_{\text{ort}} \approx \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \ll 1$. Однако, как видно из (5.2), когда не выполняется условие $e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh } \underline{\lambda}'_{\text{ort}} \approx \underline{\lambda}'_{\text{ort}} e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \ll 1$ величина g_{00} становится зависящей не только от $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$, но и от $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$. Таким образом, с точки зрения подхода работы [1] постулировать метрику в виде (7.20) можно только в весьма узком диапазоне значений $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$ и $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$.

Этот вывод, однако, ещё ничего не говорит о том, какие математические операции приводят к отличию результатов работы [1] от результатов упомянутых работ [3, 4, 8, 9]. Найдём их. Соотношение (7.21) не вызывает сомнений, так как оно следует из очевидных соотношений $d\underline{\zeta}_{\text{ort}}/d\underline{\zeta}' = \cos \Theta$, $d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}/d\underline{\zeta} = \cos \Theta$, $d\underline{\lambda}_{\text{ort}}/d\underline{\lambda}' = \cos \Theta$, $d\underline{\lambda}'_{\text{ort}}/d\underline{\lambda} = \cos \Theta$, см. [14] и рис.11. Для точек риманова пространства событий, лежащих на кривой $\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \text{const}$ (линия 2 на рис.11), $d\underline{\zeta}' = d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ и из первого написанного выше соотношения получаем $\left(\frac{\partial \underline{\zeta}_{\text{ort}}}{\partial \underline{\zeta}'_{\text{ort}}}\right)_{\underline{\lambda}_{\text{ort}}} = \cos \Theta$, то есть в обычных обозначениях выражение (7.21) постулата 2).

Рассмотрим теперь соотношение

$$dv(x', t) = dv(x'(x, t), t) = dv(x, t), \quad (7.22)$$

с помощью которого из (7.21) Ву и Ли получают решение для скорости $v(z, t)$. Для этого обратимся к формуле (7.11) для $\beta = v/c$. Для упрощения выкладок введём обозначение $X = E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}$. Дифференцируя β , получаем представление дифференциала скорости через $d\underline{\lambda}_{\text{ort}}$ и $d\underline{\zeta}_{\text{ort}}$

$$\frac{dv(\underline{\zeta}_{\text{ort}}, \underline{\lambda}_{\text{ort}})}{c} = 2X \frac{1 - X^2}{(1 + X^2)^2} \left(\frac{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2}}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - d\underline{\zeta}_{\text{ort}} \right). \quad (7.23)$$

Но из (4.7) имеем

$$\frac{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2}}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - d\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \frac{1 - X^2}{1 + X^2} \left(\frac{d\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda} - d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \right). \quad (7.24)$$

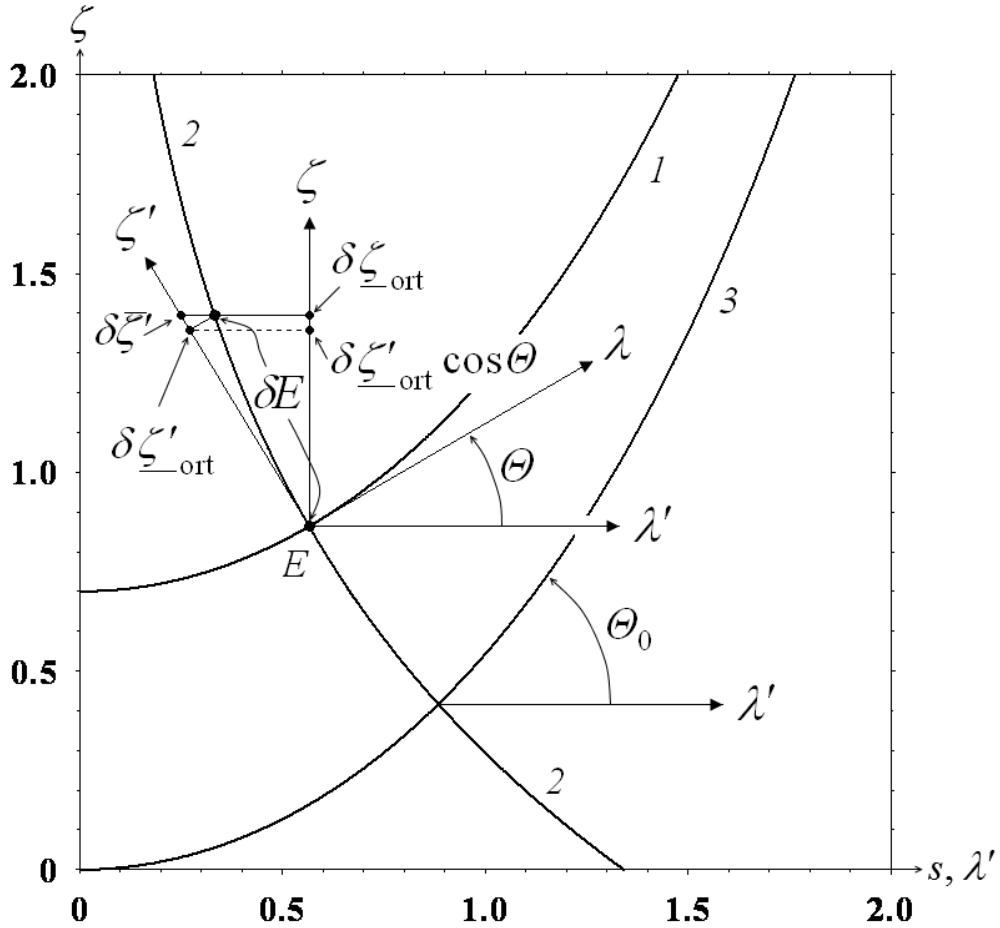


Рис.11. . Иллюстрация к доказательству постулата 2) Ву и Ли и соотношения (7.22). Кривые 1 и 3 – траектории лучей эквивалентной волны ускоряемой моды, кривая 2 образована пересечением её фазовой поверхности с плоскостью рисунка.

Подставляя (7.24) в (7.23), получаем представление дифференциала скорости через $d\underline{\lambda}_{\text{ort}}$ и $d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$

$$\frac{dv(\underline{\zeta}'_{\text{ort}}, \underline{\lambda}_{\text{ort}})}{c} = 2X \frac{(1 - X^2)^2}{(1 + X^2)^3} \left(\frac{d\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda} - d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \right). \quad (7.25)$$

Возьмём их отношение

$$\frac{dv(\underline{\zeta}'_{\text{ort}}, \underline{\lambda}_{\text{ort}})}{dv(\underline{\zeta}_{\text{ort}}, \underline{\lambda}_{\text{ort}})} = \frac{1 - X^2}{1 + X^2} \frac{\frac{d\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda} - d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}{\frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda}{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2}} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - d\underline{\zeta}_{\text{ort}}}, \quad (7.26)$$

и используя соотношения (4.9) и (2.7) представим его в тригонометрической форме

$$\frac{dv(\underline{\zeta}'_{\text{ort}}, \underline{\lambda}_{\text{ort}})}{dv(\underline{\zeta}_{\text{ort}}, \underline{\lambda}_{\text{ort}})} = \cos \Theta \frac{\frac{d\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\text{tg } \Theta_0} - d\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}{\frac{d\underline{\lambda}_{\text{ort}}}{\sin \Theta_0} - d\underline{\zeta}_{\text{ort}}}. \quad (7.27)$$

На кривой $\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \text{const}$ $d\underline{\lambda}_{\text{ort}} = 0$ и $d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \cos \Theta = d\underline{\zeta}_{\text{ort}}$ (см. также (4.17)). Поэтому на этой кривой $\frac{dv(\underline{\zeta}'_{\text{ort}}, \underline{\lambda}_{\text{ort}})}{dv(\underline{\zeta}_{\text{ort}}, \underline{\lambda}_{\text{ort}})} = \frac{d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} \cos \Theta}{d\underline{\zeta}_{\text{ort}}} = 1$ и (7.22) выполняется. Таким образом, мы видим, что постулаты, используемые Ву и Ли, согласуются с результатами работы [1].

Рассмотрим теперь граничное условие, используемое Ву и Ли, а также Ксу и Клефф

$$v = at + v_0 \text{ для } z = 0.$$

В обозначениях работы [1] это условие выглядит как

$$\beta = \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \beta_0 \gamma_0 \text{ для } \underline{\zeta}_{\text{ort}} = 0. \quad (7.28)$$

Сравним это условие с тем, что получается из выражения (4.10) для $\beta = \sin \Theta$. Обнуляя в нём $\underline{\zeta}_{\text{ort}}$, получаем граничное условие вида

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{2A(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) \exp(1 - \sqrt{1 + \Lambda^2})}{1 + \left(A(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) \exp(1 - \sqrt{1 + \Lambda^2}) \right)^2},$$

которое совпадает с граничным условием (7.28) только в случае когда $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda \ll 1$. Таким образом, приходим к выводу, что отличие результатов работ [3, 4, 8, 9] от результатов [1] связано с использованием в этих работах приближённого граничного условия.

7. Сравнение с преобразованиями Логунова

Полученные в [1] преобразования отличаются также от преобразований, полученных Логуновым в книге [7]. Они получены для релятивистски-равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью. Рассмотрены два случая:

- а) когда время остаётся одним и тем же в обеих системах отсчёта,
- б) когда в качестве времени выбирается собственное время какой-либо точки (например, начала координат) ускоряемой системы отсчёта.

Преобразования координат при переходе от покоящейся системы отсчёта к ускоряемой и при обратном переходе в случае а) в обычных обозначениях имеют вид

$$t' = t, \quad z' = z - \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c} \right)^2} - 1 \right);$$

$$t = t', \quad z = z' + \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{at'}{c} \right)^2} - 1 \right),$$

а в обозначениях настоящей работы

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \underline{\lambda}_{\text{ort}}, \quad \underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \underline{\zeta}_{\text{ort}} - \left(\sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} - 1 \right); \quad (8.1)$$

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \quad \underline{\zeta}_{\text{ort}} = \underline{\zeta}'_{\text{ort}} + \left(\sqrt{1 + \underline{\lambda}'_{\text{ort}}^2} - 1 \right). \quad (8.2)$$

В случае б) -

$$t' = \frac{c}{a} \operatorname{arsh} \left(\frac{at}{c} \right) = \ln \left(\frac{at}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c} \right)^2} \right), \quad z' = z - \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c} \right)^2} - 1 \right);$$

$$t = \frac{c}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{at'}{c} \right), \quad z = z' + \frac{c^2}{a} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{at'}{c} \right) - 1 \right)$$

и в обозначениях настоящей работы

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \operatorname{arsh} \underline{\lambda}_{\text{ort}} = \ln \left(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} \right), \quad \underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \underline{\zeta}_{\text{ort}} - \left(\sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} - 1 \right); \quad (8.3)$$

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \operatorname{sh} \underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \quad \underline{\zeta}_{\text{ort}} = \underline{\zeta}'_{\text{ort}} + \operatorname{ch} \underline{\lambda}'_{\text{ort}} - 1. \quad (8.4)$$

На рис.12 показаны поверхности, задаваемые функциями $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$, $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\underline{\lambda}_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$ работы [1] и (8.1), полученными в книге [7].

Мы видим, что поверхность, задаваемая первой функцией (8.1), относящейся к временной координате, весьма сильно отличается от поверхности, задаваемой функцией (3.1). Ни в каких предельных случаях они не совпадают. Поверхность, относящаяся к пространственной координате, хотя и в меньшей степени, тоже отличается от поверхности из [1] и Ву и Ли. Приближённое совпадение имеет место только тогда, когда $\underline{\lambda}_{\text{ort}} \ll 1$ (см. также рис.10 и пояснения к нему в тексте).

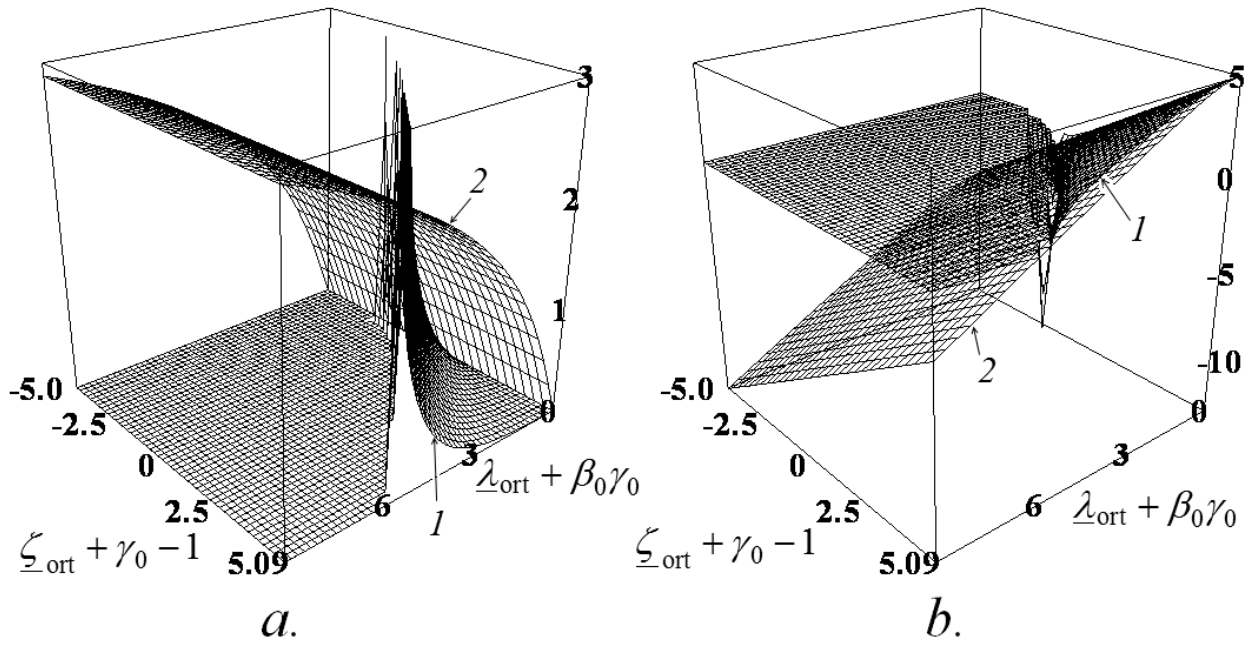


Рис.12. . Поверхности, задаваемые функциями $\lambda'_{ort}(\lambda_{ort}, \zeta_{ort})$ а) и $\zeta'_{ort}(\lambda_{ort}, \zeta_{ort})$ б). Цифра 1 указывает на поверхности из [1], а 2 – из [7].

Выясним, с чем связано рассматриваемое различие. Для этого обратимся к рис.13. Рис.13,а иллюстрирует случай а), а рис.13,б – случай б).

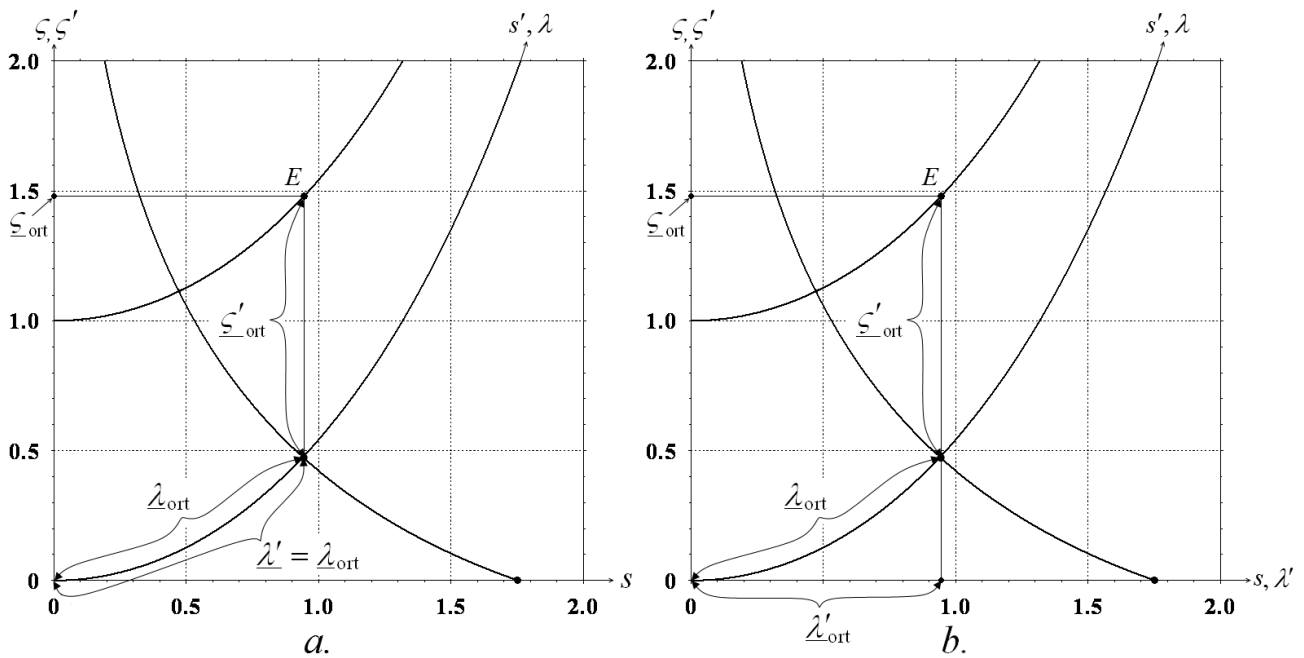


Рис.13. Иллюстрация к тексту, поясняющая на основе образов риманова пространства событий работы [1] способ определения пространственной и временной координаты события в [7].

Из рисунков видно, что и в том и другом случаях величина $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ отсчитывается не по фазовой поверхности эквивалентной волны ускоряемой моды, в отличие от того, как это делается в [1] и п. 2 данной работы (см. рис.3,*b*). Деформации фазовых поверхностей, обусловленные ускорением, не принимаются в расчёт в процессе вывода преобразований координат. Иными словами в известных преобразованиях ускоряемая система отсчёта наделяется свойством абсолютной жёсткости, что недопустимо с точки зрения теории относительности.

Что касается времени, то в рассматриваемой модели пространства время в ускоряемой системе не может быть положено равным времени в покоящейся системе отсчёта либо же равным $(c/a)\text{arsh}(at/c)$. Как показано выше время в ускоряемой системе отсчёта определяется набегом фазы эквивалентной волны покоящейся моды при её распространении до рассматриваемой точки риманова пространства событий. Время же в покоящейся системе отсчёта определяется набегом фазы эквивалентной волны ускоряемой моды при её распространении до той же точки пространства событий. Поскольку фазовые поверхности эквивалентной волны ускоряемой моды искривлены, то набег фазы этой волны до рассматриваемой точки всегда отличается от набега фазы плоской эквивалентной волны неподвижной моды. Причём разность набегов фазы зависит от пространственной и временной координаты события.

8. Сравнение с преобразованиями Парди

В работе [11] Парди рассматривает преобразование пространственно-временных координат в случае равноускоренного движения при нулевой начальной скорости. Он получает следующие преобразования

$$t' = \frac{c}{2a} \left(\frac{at}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} + \ln \left(\frac{at}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} \right) \right) - \frac{z}{c} \frac{at}{c},$$

$$z' = z \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - \frac{at^2}{2},$$

которые в обозначениях настоящей работы и работы [1] принимают вид

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \frac{1}{2} \left(\left(\underline{\lambda}_{\text{ort}} \sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} \right) + \ln \left(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} \right) \right) - \underline{\lambda}_{\text{ort}} \underline{\zeta}_{\text{ort}}, \quad (9.1)$$

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \underline{\zeta}_{\text{ort}} \sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} - \frac{1}{2} \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2. \quad (9.2)$$

Из рис.14 видно, что поверхности, задаваемые функциями $\underline{\lambda}'_{ort}(\underline{\lambda}_{ort}, \underline{\zeta}_{ort})$, $\underline{\zeta}'_{ort}(\underline{\lambda}_{ort}, \underline{\zeta}_{ort})$ работы [1] и полученными Парди, также как и в случае преобразований Логунова, весьма сильно отличаются друг от друга. Приблизжённое совпадение и с преобразованиями [1] и с преобразованиями Ву и Ли имеет место лишь при условии $\underline{\lambda}_{ort} \ll 1$, $\underline{\zeta}_{ort} \ll 1$. Это легко показать путём разложения соответствующих функций по малым величинам $\underline{\lambda}_{ort}$ и $\underline{\zeta}_{ort}$, что уже неоднократно делалось выше. В результате для всех преобразований получаем одинаковые выражения

$$\underline{\lambda}'_{ort} \approx \underline{\lambda}_{ort} (1 - \underline{\zeta}_{ort}), \quad \underline{\zeta}'_{ort} \approx \underline{\zeta}_{ort} - \frac{1}{2} \underline{\lambda}_{ort}^2 (1 - \underline{\zeta}_{ort}).$$

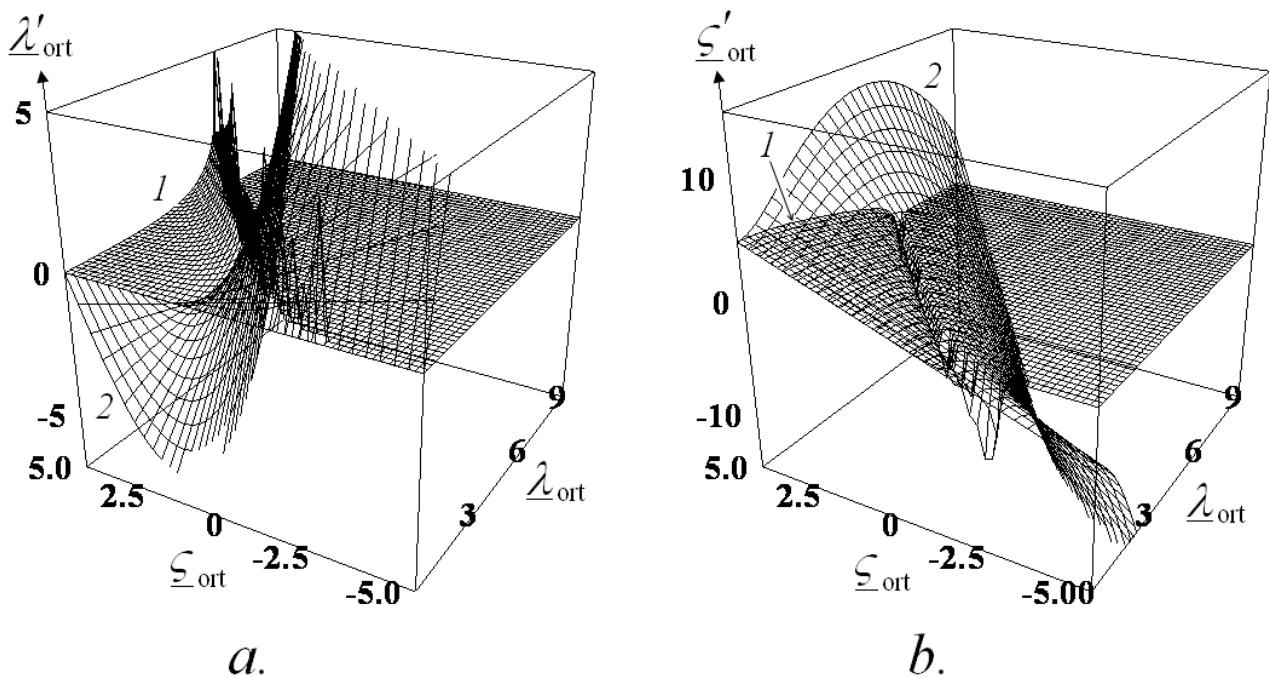


Рис.14. Поверхности, задаваемые функциями $\underline{\lambda}'_{ort}(\underline{\lambda}_{ort}, \underline{\zeta}_{ort})$ а) и $\underline{\zeta}'_{ort}(\underline{\lambda}_{ort}, \underline{\zeta}_{ort})$ б). Цифра 1 указывает на поверхности из [1], а 2 – из [11].

Выясним в чём причина расхождений с преобразованиями Парди. Поскольку Парди исходит из преобразований Лоренца в заданной точке в заданный момент времени, то есть в локальной системе координат, то обратимся к формулам (4.18) и (4.19).

Так как $\dot{\Lambda}' = \underline{\lambda}'_{ort} + \Lambda'$, то $\text{sh } \dot{\Lambda}' = \bar{\lambda} + \Lambda$ и (4.18) и (4.19) принимают вид

$$d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \sqrt{1 + (\bar{\lambda} + \Lambda)^2} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - (\bar{\lambda} + \Lambda) d\underline{\zeta}_{\text{ort}},$$

$$d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = -(\bar{\lambda} + \Lambda) d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \sqrt{1 + (\bar{\lambda} + \Lambda)^2} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}.$$

Будем далее для простоты рассматривать случай, который рассматривает Парди, а именно случай, когда начальная скорость равна нулю. Тогда $\Lambda = 0$ и

$$d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \sqrt{1 + \bar{\lambda}^2} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - \bar{\lambda} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}, \quad (9.3)$$

$$d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = -\bar{\lambda} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \sqrt{1 + \bar{\lambda}^2} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}, \quad (9.4)$$

Мы видим, что в правые части этих выражений входит контравариантная временная координата $\bar{\lambda}$. Парди же для вывода преобразований координат использует систему

$$dt' = \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} dt - \frac{at}{c^2} dz, \quad (9.5)$$

$$dz' = -at dt + \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} dz, \quad (9.6)$$

которая в обозначениях настоящей работы имеет вид

$$d\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} - \underline{\lambda}_{\text{ort}} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}, \quad (9.7)$$

$$d\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = -\underline{\lambda}_{\text{ort}} d\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \sqrt{1 + \underline{\lambda}_{\text{ort}}^2} d\underline{\zeta}_{\text{ort}}. \quad (9.8)$$

Сравнивая эту систему с системой (9.3), (9.4), мы видим, что Парди неявно отождествляет контравариантную координату $\bar{\lambda}$ с ортогональной ковариантной координатой $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$. Но как видно из (2.5) $\bar{\lambda} = \underline{\lambda}_{\text{ort}} e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}$, а $e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}$, как следует из (3.2)

$$e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} = \frac{1}{\underline{\lambda}_{\text{ort}}} \frac{2E(\underline{\lambda}_{\text{ort}}) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}}}}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}}) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}}}\right)^2}.$$

В результате получается система уравнений (4.20), (4.21), которая при постоянном ускорении и нулевой начальной скорости в обычных обозначениях имеет вид

$$dt' = \frac{1 + \left(E(at/c) e^{-az/c^2}\right)^2}{1 - \left(E(at/c) e^{-az/c^2}\right)^2} dt - \frac{2E(at/c) e^{-az/c^2}}{1 - \left(E(at/c) e^{-az/c^2}\right)^2} \frac{dz}{c},$$

$$dz' = -\frac{2E(at/c)e^{-az/c^2}}{1 - \left(E(at/c)e^{-az/c^2}\right)^2} cdt + \frac{1 + \left(E(at/c)e^{-az/c^2}\right)^2}{1 - \left(E(at/c)e^{-az/c^2}\right)^2} dz.$$

Мы видим, что эта система уравнений отличается от системы уравнений (9.5), (9.6), которую получил Парди в результате неявного отождествлении контравариантной координаты $\bar{\lambda}$ с ковариантной координатой $\underline{\lambda}_{\text{ort}}$. Понятно, что результаты интегрирования этих систем будут отличаться друг от друга.

9. Заключение

В настоящей работе проведён сравнительный анализ преобразований пространственно-временных координат события, наблюдаемого из системы отсчёта, связанной с ускоренным наблюдателем, и из инерциальной системы отсчёта неподвижного наблюдателя с известными до сих пор преобразованиями. Вывод преобразований проведён на основе концепции 4-мерного пространства компактифицированного до трёх измерений, а также вытекающего из этой концепции представления о римановом пространстве событий с косоугольными пространственно-временными локальными базисами.

Показано, что полученные на основе этой концепции преобразования и вытекающая из них псевдориманова метрика пространства ускоряемой системы отсчёта являются более общими, чем известные до сих пор преобразования Мёллера, Подосенова, Парди, Ву и Ли, а также обобщённые преобразования Мёллера-Ву-Ли, полученные Ксу и Клефф и усовершенствованные Эрнстом, которые являются предельными случаями этих новых преобразований. Так, преобразования и метрика Мёллера получаются из них, когда $a|z'|/c^2 \ll 1$. Преобразования и метрика Подосенова получается в другом предельном случае, когда z' произвольно, а t' и ускорение a таковы, что $\frac{at'}{c} \exp\left(\frac{az'}{c^2}\right) \ll 1$. Преобразования Ву и Ли, а также Парди получаются из них при условии, что начальная скорость $v(0) = \beta_0 c = 0$, $at/c \ll 1$ и $a|z|/c^2 \ll 1$. Обобщённые преобразования Мёллера-

Ву-Ли получаются из них при условии, что $\frac{at}{c} \ll \frac{\beta_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \ll 1$, $\frac{a|z|}{c^2} \ll 1$, а пре-

образования полученные Эрнстом – при условии, что $\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \frac{at}{c} \ll 1$ и

$$\left| 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{az}{c^2} \right| \ll 1.$$

Наибольшее соответствие имеет место с обобщёнными преобразованиями Мёллера-Ву-Ли в форме Эрнста. Наибольшее различие – с преобразованием времени Логунова и преобразованиями Парди.

Проанализированы факторы, обуславливающие отличие новых преобразований от известных. Расхождение с преобразованиями Мёллера-Ву-Ли обусловлено тем, что при их выводе используется приближённое граничное условие для скорости. Расхождение с преобразованиями Логунова происходит из-за различия в определении расстояний и времени в ускоряемой системе отсчёта. В модели пространства с дополнительным измерением расстояния в ускоряемой системе отсчёта отсчитываются по искривлённой фазовой поверхности эквивалентной волны ускоряемой моды резонатора, в то время как в работе Логунова эти расстояния с точки зрения этой модели отсчитываются по плоской фазовой поверхности эквивалентной волны неподвижной моды. Кроме того не учитываются зависимости временных координат от пространственных.

Расхождение с преобразованиями Парди связано с тем, что Парди, опять же с точки зрения этой модели, неявно отождествляет контравариантную временную координату события в системе отсчёта, связанной с неподвижной модой, и ковариантную координату того же события в той же системе отсчёта.

Автор выражает благодарность Г.В. Склизкову за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Орлов Е.П.** *Преобразование пространства-времени при прямолинейном релятивистски-ускоренном движении в концепции дополнительного измерения.* Препринт ФИАН № 3. Москва, 2014. 34 с.
2. **Møller C.** *On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox.* Kobenhavn. 1943. (Труды Датской АН. Т. 20. № 19.) P. 1 – 24.
3. **Ta-You Wu, Lee Y.C.** The clock paradox in the relativity theory. Intern. J. Theoretical Phys. 1972. V. 5. Issue 5. P. 307 – 323.

4. **Ta-You Wu.** Theoretical Physics. 1978. V. 4. Theory of Relativity. (Lian Jing Publishing Co., Taipei. 1978) P. 172 – 175.
5. **Подосёнов С.А.** *Геометрические свойства неинерциальных систем отсчёта в релятивистской механике* – В кн: Дискуссионные вопросы теории относительности и гравитации. – М.: Наука, 1982, С. 95 – 103.
6. **Подосёнов С. А.** *Пространство, время и классические поля связанных структур.* М. 2000, "Компания Спутник+".
7. **Логунов А.А.** *Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. 272 с.
8. **Hsu J.P. and Silvia M. Kleff.** *Generalized Møller-Wu-Lee Transformations for Accelerated Frames.* Chinese Journal of Physics. 1998. V. 36. No. 6. P. 768 – 777.
9. **Jong-Ping Hsu.** *General-Linear-Acceleration Transformations of Spacetime, Jerks and Limiting 4-Dimensional Symmetry.* Chinese Journal of Physics. 2002. V. 40. No. 3. P. 265 – 276.
10. **Andreas Ernst.** *On Hyperbolic Motion and Limiting Four-Dimensional Symmetry.* Chinese Journal of Physics. 2002. V. 40. No. 6. P. 583 – 589.
11. **Pardy M.** *The space-time transformations between accelerated systems.* <http://arxiv:gr-qc/03022007v1> 12 Feb 2003.
12. **Foukzon Jaykov, Podosenov S.A.** *Simple derivation of the Generalized Möller-Wu-Lee transformations. Born rigid constant accelerated motion on a curved Lorentzian manifold.* <http://arxiv.org/abs/0803.3930v3> 11 May 2009.
13. **Орлов Е.П.** *Пространственно-временные отношения между модами резонатора с параллельными плоскими зеркалами.* Препринт ФИАН № 16. Москва, 2004. 17 с.
14. **Орлов Е.П.** *Описание пространственно-временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора с помощью косоугольных систем координат.* Препринт ФИАН № 16. Москва, 2009. 32 с.
15. **Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** *Квантовая электродинамика (Серия: «Теоретическая физика», том IV).* М.: Физматлит. 2001. 720 с.
16. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** *Теория поля (Серия: «Теоретическая физика», том II).* М.: Физматлит. 1988. 512 с.
17. **Паули В.** *Теория относительности.* // Пер. с немецкого под ред. В.Л.Гинзбурга и В.П.Фролова. М.: Наука, 1991. С. 50.
18. **Кочин Н.Е.** *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.* М.: Наука, 1965. С. 371.

Подписано в печать 21.02.2014 г.
Формат 60x84/16. Заказ № 10. Тираж 140 экз. П.л 2,75.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640