

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

**Физический**  
**ИНСТИТУТ**



*имени*  
*П.Н. Лебедева*

Российской академии наук

**Ф И А Н**

ПРЕПРИНТ

**3**

Е.П. ОРЛОВ

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ  
ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ РЕЛЯТИВИСТСКИ-  
УСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ В КОНЦЕПЦИИ  
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ**

Москва 2014

Е.П.Орлов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ПРИ  
ПРЯМОЛИНЕЙНОМ РЕЛЯТИВИСТСКИ-УСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ  
В КОНЦЕПЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ

А Н Н О Т А Ц И Я

В настоящей работе построены системы отсчёта координат как прямолинейно ускоряемого, так и неподвижного наблюдателей, и получены преобразования пространственно-временных координат события, измеряемых в этих системах. Вывод преобразований проведён на основе концепции 4-мерного пространства компактифицированного до трёх измерений, а также вытекающего из этой концепции представления о римановом пространстве событий с косоугольными пространственно-временными локальными базисами. Полученные преобразования являются более общими, чем известные до сих пор, и при определённых значениях координат переходят либо в преобразования и метрику Мёллера, либо Подосенова, либо в преобразования Ву и Ли, а также в обобщённые преобразования Мёллера-Ву-Ли, полученные Ксу и Клефф и усовершенствованные Эрнстом.

E.P.Orlov

LINEAR-ACCELERATION TRANSFORMATIONS OF SPACETIME  
IN THE CONCEPT OF EXTRA DIMENSION

A B S T R A C T

In this work the reference frames for both linear-accelerated and unmoved observer are built. On this base the transformations of space-time coordinates of an event measured in these frames are obtained. These transformations have been derived from a concept of 4-dimensional space compactified to three dimensions, as well and on the notion of the Rymann space with the oblique-angled local space-time bases following from this concept. The transformations obtained in this work are more general than the ones known so far. Under certain values of the coordinates they can be reduced to the Møller or Podosenov transformations and metrics, or to the Wu and Lee transformations, or to the generalized Møller-Wu-Lee transformations obtained by Hsu and Kleff and improved by Ernst.

## Введение

Изучение релятивистски-ускоренного движения заряженных частиц занимает значительное место в современной физике высоких энергий [1 - 3]. Для ответа на некоторые вопросы, связанные с ускоренным движением, как, например, вопрос об излучении и радиационном трении заряженных частиц, вопрос об их временах жизни при высоких энергиях, о законах взаимодействия с электромагнитным полем [см. 4 – 6 и имеющиеся там ссылки] требуется привлечение понятия системы координат ускоренного наблюдателя. Это понятие охарактеризовано авторами книги [7] следующим образом: *«очень легко соединить слова в выражение: система координат ускоренного наблюдателя. Однако гораздо труднее отыскать понятие, которому оно могло бы соответствовать. Самое разумное, что можно сразу же сказать про это выражение, это то, что при серьезном рассмотрении оно оказывается противоречивым»*.

Комментируя это высказывание в пояснениях к своему докладу, выставленному на сайте [8], С.А.Подосенов пишет: «... оставаясь в рамках специальной теории относительности нельзя построить жёсткую равноускоренную неинерциальную систему отсчёта...». Под такой системой отсчёта понимается система, определение которой, обобщающее классическую концепцию жёсткого движения, было дано Борном в 1909 году [9]. Согласно этому определению, движение континуума называется жестким, если для любой пары частиц тела «расстояние» между ними, определяемое как ортогональный интервал между соответствующими парами мировых линий частиц среды, остается постоянным в течение движения.

Вскоре в 1910 г. Герглотц [10] и Ноезер [11] доказали, что такие жёсткие по Борну движения обладают только тремя степенями свободы. Этот результат в сильной степени затормозил на длительный период последующее изучение жёсткого движения сначала в специальной, а позже и в общей теории относительности. Только в 1943 году появилась работа Мёллера [12], в которой были получены преобразования, удовлетворяющие понятию жёсткого движения по Борну. Но неинерциальная система отсчёта Мёллера не является глобально равноускоренной. Каждая из частиц среды Мёллера движется с постоянным ускорением, но эти ускорения не равны друг другу (подробное обсуждение этого вопроса см. в книге [6]).

В последние два-три десятка лет интерес к проблемам, связанным с ускоренным движением стал возрастать. Часть опубликованных работ относится к

поиску путей возврата прежних шести степеней свободы (к которым мы привыкли в механике Ньютона), как на основе разного рода ослаблений или модификаций понятия жёсткости по Борну [13 – 17], так и на основе пересмотра самого этого понятия и того как его применять [18]. Другая часть относится к поиску преобразований координат события наблюдаемого из системы отсчёта, связанной с ускоряемой частицей из системы отсчёта, связанной с неподвижным наблюдателем, например [19, 20, 21, 5, 22, 23, 24, 25, 26].

Однако на наш взгляд данная тема исследований далеко не исчерпана. Все упомянутые работы выполнены либо в рамках псевдоевклидовой, либо псевдоримановой геометрии пространства событий. Полученные в этих работах преобразования основываются на дополнительных соображениях, которые в определённых отношениях нельзя признать удовлетворительными. Кроме того результаты некоторых из этих работ не согласуются друг с другом.

В настоящей работе подход к определению системы отсчёта ускоренного наблюдателя и подход к поиску преобразований координат события наблюдаемого из этой системы и из системы отсчёта, связанной с неподвижным наблюдателем, отличается от подходов в упомянутых выше работах. Он реализуется на основе концепции 4-мерного пространства компактифицированного до трёх измерений. Такое пространство позволяет вести рассмотрение ускоренного движения в римановом (а не псевдоримановом) пространстве событий, используя наглядные геометрические образы.

Идея о дополнительном четвёртом пространственном измерении была выдвинута в работах Калуцы [27] и Клейна [28] и обсуждалась во многих работах, см., например, [29 – 34]. В настоящее время идея дополнительных пространственных измерений интенсивно обсуждается в связи с разработкой теории струн [35], космологии мира на бране [36] и геометрической теорией фундаментальных взаимодействий [37 – 39].

Простейшей моделью 4-мерного мира с компактным четвёртым измерением может служить 4-мерный плоскопараллельный резонатор с однородной, изотропной средой, не обладающей дисперсией скорости распространяющихся в ней волн. Моды такого резонатора с одинаковым продольным индексом ассоциируются с полем, отвечающим какой либо элементарной частице. Зеркала резонатора предполагаются обладающими тем свойством, что коэффициент отражения от них прямой и обратной волн, образующих моду с некоторым продольным индексом, не зависит от поперечных индексов моды. Подчеркнём, что когда го-

ворится о коэффициенте отражения зеркал резонатора не равном единице, то речь идёт не о потерях излучения, а о трансформации моды с заданным продольным индексом в моды с другими продольными индексами. Это соответствует распаду частицы на другие частицы.

При неограниченности резонатора множество поперечных индексов является множеством мощности континуума и может быть охарактеризовано углом между волновыми векторами прямой или обратной волн, образующих моду, и осью резонатора, то есть линией перпендикулярной зеркалам.

В работах [40, 41] было показано, что пространственно-временное многообразие Минковского может быть получено из законов распространения волн в таком резонаторе с учётом резонансного условия по координате дополнительного 4-го измерения, определяющего продольные индексы мод. Мода, волны которой распространяются перпендикулярно зеркалам резонатора, то есть вдоль его оси, рассматривается условно как покоящаяся. Если волны, образующие моду, распространяются под углом к оси резонатора, то, такая мода рассматривается как движущаяся со скоростью  $V = c \sin \Theta$ , где  $\Theta$  - угол между волновым вектором прямой волны и осью резонатора,  $c$  - скорость распространения волн в резонаторе.

С помощью отображения прямых и обратных волн мод резонатора на всё пространство справа и слева от резонатора эти волны можно заменить одной эквивалентной волной, распространяющейся либо в сторону положительного направления оси координат связанной с дополнительным измерением, либо в сторону противоположного направления. В данной работе рассматривается эквивалентная волна, распространяющаяся в сторону положительного направления указанной оси, что отвечает положительным решениям релятивистских волновых уравнений (Клейна, Фока, Гордона, Дирака и т.д.) [42].

С помощью такого отображения волн в [40, 41] введено понятие евклидова пространства событий. Его спецификой является то, что системы координат в нём являются косоугольными. Пространственные координаты системы отсчёта, связанной с неподвижной модой определяются как проекции точки рассматриваемого пространства на фазовую поверхность эквивалентной волны покоящейся моды. Аналогично определяются пространственные координаты системы отсчёта связанной с движущейся модой. В случае, когда пространство внутри резонатора однородно и изотропно, а отражение от зеркал резонатора не приводит к искажениям фаз волн пространственные оси покоящейся или движущейся си-

стемы отсчёта, отвечающие этим координатам, для не взаимодействующих друг с другом мод представляют собой прямые линии ортогональные друг другу.

Косоугольность возникает тогда, когда к пространственным осям добавляется временная ось. Дело в том, что разные поперечные моды с одинаковым продольным индексом в силу указанного выше свойства зеркал резонатора уменьшают свою амплитуду в одно и то же число раз при одинаковом числе отражений образующих их волн от зеркал резонатора. При этом эквивалентные волны отвечающие модам с различными поперечными индексами проходят пути разной длины до точки рассматриваемого пространства, где их ослабление достигает заданной величины. Это позволяет ввести временные координаты этой точки через соответствующие длины путей, которые прошли волны. При этом время жизни движущейся моды оказывается больше, чем время жизни покоящейся моды в соответствии с известной формулой теории относительности [43].

В случае, когда отражение от зеркал и пространство внутри резонатора однородны, а пространство к тому же изотропно и нет дисперсии скоростей волн, для невзаимодействующих друг с другом мод оси, отвечающие этим координатам, представляют собой прямые линии перпендикулярные плоским фазовым поверхностям эквивалентных волн. Для каждой пары мод эти оси лежат в плоскости волновых векторов волн этих мод. Важно отметить то, что временная ось системы отсчёта связанной с неподвижной модой ортогональна фазовой поверхности эквивалентной волны движущейся моды, а временная ось системы отсчёта связанной с движущейся модой ортогональна фазовой поверхности эквивалентной волны неподвижной моды. Вследствие этого системы координат связанные как с неподвижной, так и с движущейся модой оказываются косоугольными [41].

При описанном выше подходе для формирования понятий и выводов теории относительности нет необходимости использовать второй постулат А.Эйнштейна, либо принимать гипотезу о псевдоевклидовости пространства-времени. В предположении однородности и изотропности пространства внутри резонатора и отсутствии дисперсии скорости, распространяющихся в нём волн, а также независимости коэффициента трансформации моды от её поперечных индексов этот постулат и гипотеза о псевдоевклидовости являются следствием резонансного условия для волн, образующих моды резонатора.

## 1. Контравариантные и ковариантные координаты события в случае инерциальных систем отсчёта

Прежде чем переходить к описанию релятивистски-ускоренного движения напомним, как относительное движение двух инерциальных систем отсчёта описывается в евклидовом 4-мерном пространстве событий.

Как показано в работах [40, 41] для описания относительного движения двух инерциальных систем отсчёта нужно в этом пространстве ввести два косоугольных 4-мерных базиса –  $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , определяющий оси системы отсчёта, связанной с неподвижной модой, и  $\mathbf{e}_{l'}, \mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}$ , определяющий оси системы отсчёта, связанной с движущейся вдоль оси  $z$  модой, рис.1,*a*. Оси времени  $l = ct$  и  $l' = ct'$  направлены по базисным векторам  $\mathbf{e}_l$  и  $\mathbf{e}_{l'}$ , векторы  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}$  определяют направления пространственных осей. Вектор  $\mathbf{e}_l$  повернут относительно вектора  $\mathbf{e}_{l'}$  на угол  $\Theta$ , связанный со скоростью относительного движения  $V$  как  $\sin \Theta = V/c$ , в то время как базисный вектор  $\mathbf{e}_z$  повернут относительно вектора  $\mathbf{e}_{z'}$  на угол  $-\Theta$ .

Параллельные проекции события (точки  $E$  евклидова пространства событий) на координатные оси представляют собой контравариантные координаты этого события. Для большей наглядности контравариантные координаты будем обозначать с помощью черты над знаком, обозначающим координату, а ковариантные – с помощью черты под знаком координаты. Из рис.1,*a* видно, что контравариантные координаты события  $E$ , в штрихованной системе координат, выражаются через контравариантные координаты в не штрихованной системе по формулам

$$\bar{l}' = \frac{\bar{l} + \bar{z} \sin \Theta}{\cos \Theta} = \gamma(\bar{l} + \beta \bar{z}), \quad \bar{x}' = \bar{x}, \quad \bar{y}' = \bar{y}, \quad \bar{z}' = \frac{\bar{z} + \bar{l} \sin \Theta}{\cos \Theta} = \gamma(\bar{z} + \beta \bar{l}) \quad (1)$$

где, как обычно,  $\beta = V/c$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ .

Соответственно обратные преобразования

$$\bar{l} = \frac{\bar{l}' - \bar{z}' \sin \Theta}{\cos \Theta} = \gamma(\bar{l}' - \beta \bar{z}'), \quad \bar{x} = \bar{x}', \quad \bar{y} = \bar{y}', \quad \bar{z} = \frac{\bar{z}' - \bar{l}' \sin \Theta}{\cos \Theta} = \gamma(\bar{z}' - \beta \bar{l}'). \quad (2)$$

Для определения ковариантных проекций в каждой из систем отсчёта, вводятся, так называемые, взаимные базисы с векторами  $\mathbf{e}^l, \mathbf{e}^x, \mathbf{e}^y, \mathbf{e}^z$  и  $\mathbf{e}^{l'}, \mathbf{e}^{x'}, \mathbf{e}^{y'}, \mathbf{e}^{z'}$ , определяемыми из приведённых ниже условий [44]:

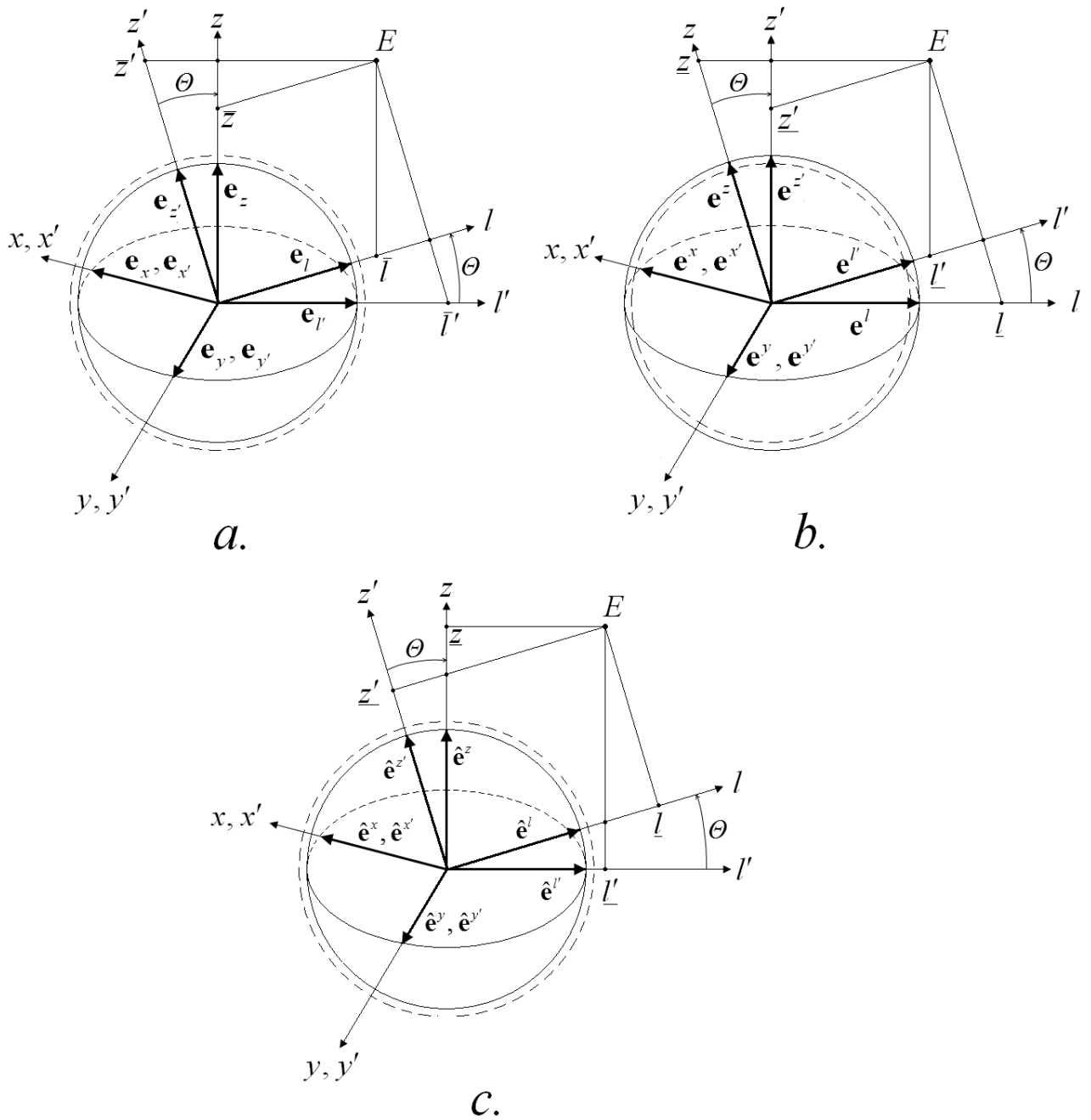


Рис.1. Изображение контравариантных и ковариантных координат события  $E$  в евклидовом пространстве событий с косоугольными системами координат

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_l \mathbf{e}^l &= 1, & \mathbf{e}_l \mathbf{e}^x &= 0, & \mathbf{e}_l \mathbf{e}^y &= 0, & \mathbf{e}_l \mathbf{e}^z &= 0, \\
 \mathbf{e}_x \mathbf{e}^l &= 0, & \mathbf{e}_x \mathbf{e}^x &= 1, & \mathbf{e}_x \mathbf{e}^y &= 0, & \mathbf{e}_x \mathbf{e}^z &= 0, \\
 \mathbf{e}_y \mathbf{e}^l &= 0, & \mathbf{e}_y \mathbf{e}^x &= 0, & \mathbf{e}_y \mathbf{e}^y &= 1, & \mathbf{e}_y \mathbf{e}^z &= 0, \\
 \mathbf{e}_z \mathbf{e}^l &= 0, & \mathbf{e}_z \mathbf{e}^x &= 0, & \mathbf{e}_z \mathbf{e}^y &= 0, & \mathbf{e}_z \mathbf{e}^z &= 1.
 \end{aligned}$$

И



$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_l \mathbf{e}^{l'} &= 1, & \mathbf{e}_l \mathbf{e}^{x'} &= 0, & \mathbf{e}_l \mathbf{e}^{y'} &= 0, & \mathbf{e}_l \mathbf{e}^{z'} &= 0, \\
\mathbf{e}_x \mathbf{e}^{l'} &= 0, & \mathbf{e}_x \mathbf{e}^{x'} &= 1, & \mathbf{e}_x \mathbf{e}^{y'} &= 0, & \mathbf{e}_x \mathbf{e}^{z'} &= 0, \\
\mathbf{e}_y \mathbf{e}^{l'} &= 0, & \mathbf{e}_y \mathbf{e}^{x'} &= 0, & \mathbf{e}_y \mathbf{e}^{y'} &= 1, & \mathbf{e}_y \mathbf{e}^{z'} &= 0, \\
\mathbf{e}_z \mathbf{e}^{l'} &= 0, & \mathbf{e}_z \mathbf{e}^{x'} &= 0, & \mathbf{e}_z \mathbf{e}^{y'} &= 0, & \mathbf{e}_z \mathbf{e}^{z'} &= 1.
\end{aligned}$$

Поскольку относительное движение происходит вдоль оси  $z$ , то для большей наглядности введения взаимного базиса можем ось  $x$  временно убрать из рассмотрения. Тогда взаимный базис будет определяться так, как это делается в трёхмерном пространстве с осями  $y, z, l$ :

$$\mathbf{e}^z = \frac{\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_l}{[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_y \mathbf{e}_l]}, \quad \mathbf{e}^y = \frac{\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_z}{[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_y \mathbf{e}_l]}, \quad \mathbf{e}^l = \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y}{[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_y \mathbf{e}_l]},$$

где  $[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_y \mathbf{e}_l] \equiv \mathbf{e}_z(\mathbf{e}_y \mathbf{e}_l)$  - смешанное (векторно-скалярное) произведение. Аналогично определяется взаимный базис  $\mathbf{e}^{z'}, \mathbf{e}^{y'}, \mathbf{e}^{l'}$ .

Полученные таким образом взаимные базисы изображены на рис.1,*b*. Параллельные проекции события  $E$  на координатные оси, определяемые взаимными базисами, измеренные в единицах масштаба, соответствующих этим осям, представляют собой ковариантные координаты события. Из рис.1,*b* видно, что ковариантные координаты события  $E$  в штрихованной системе координат выражаются через ковариантные координаты в не штрихованной системе координат по формулам

$$\underline{l}' = \frac{\underline{l} - \underline{z} \sin \Theta}{\cos \Theta} = \gamma(\underline{l} - \beta \underline{z}), \quad \underline{x}' = \underline{x}, \quad \underline{y}' = \underline{y}, \quad \underline{z}' = \frac{\underline{z} - \underline{l} \sin \Theta}{\cos \Theta} = \gamma(\underline{z} - \beta \underline{l}). \quad (3)$$

Обратное преобразование

$$\underline{l} = \frac{\underline{l}' + \underline{z}' \sin \Theta}{\cos \Theta} = \gamma(\underline{l}' + \beta \underline{z}'), \quad \underline{x} = \underline{x}', \quad \underline{y} = \underline{y}', \quad \underline{z} = \frac{\underline{z}' + \underline{l}' \sin \Theta}{\cos \Theta} = \gamma(\underline{z}' + \beta \underline{l}'). \quad (4)$$

Из формул (1 – 4) мы видим, что в евклидовом пространстве событий ковариантные координаты преобразуются так, как контравариантные координаты, определённые в псевдоевклидовом пространстве Минковского. То есть если ковариантные координаты, определённые в евклидовом пространстве, преобразуются по формулам прямого преобразования Лоренца, то в псевдоевклидовом пространстве по формулам прямого преобразования Лоренца будут преобразовываться контравариантные координаты. Пусть прямым преобразованием Лоренца будет переход от не штрихованных координат к штрихованным. Тогда в псевдоевклидовом пространстве

$$\bar{l}'_{ps} = \frac{\bar{l}_{ps} - \bar{z}_{ps} \sin \Theta}{\cos \Theta}, \quad \bar{z}'_{ps} = \frac{\bar{z}_{ps} - \bar{l}_{ps} \sin \Theta}{\cos \Theta},$$

$$l'_{-ps} = \frac{l_{-ps} + z_{ps} \sin \Theta}{\cos \Theta}, \quad z'_{ps} = \frac{z'_{ps} - l'_{-ps} \sin \Theta}{\cos \Theta}.$$

А так как  $\bar{x}_{ps} = -x_{ps}$ ,  $\bar{y}_{ps} = -y_{ps}$ ,  $\bar{z}_{ps} = -z_{ps}$  и  $\bar{l}_{ps} = l_{-ps}$ , то координаты события евклидова пространства событий и координаты события пространства событий Минковского соотносятся друг с другом как

$$\bar{x}_{ps} = -x_{ps} = x, \quad \bar{y}_{ps} = -y_{ps} = y, \quad \bar{z}_{ps} = -z_{ps} = z, \quad \bar{l}_{ps} = l_{-ps} = l. \quad (5)$$

В дальнейшем будет удобнее определять ковариантные координаты как ортогональные проекции на первоначальные оси [44, 45], см. рис.1,с. Обозначим базисные векторы, определяющие оси координат, на которые даются ортогональные проекции события  $E$  как  $\hat{e}^l$ ,  $\hat{e}^x$ ,  $\hat{e}^y$ ,  $\hat{e}^z$  и  $\hat{e}^{l'}$ ,  $\hat{e}^{x'}$ ,  $\hat{e}^{y'}$ ,  $\hat{e}^{z'}$ . Они совпадают с первоначальными базисными векторами:  $\hat{e}^l = e_l$ ,  $\hat{e}^x = e_x$ ,  $\hat{e}^y = e_y$ ,  $\hat{e}^z = e_z$ ,  $\hat{e}^{l'} = e_{l'}$ ,  $\hat{e}^{x'} = e_{x'}$ ,  $\hat{e}^{y'} = e_{y'}$ ,  $\hat{e}^{z'} = e_{z'}$ . Определяемые в этом случае ковариантные координаты события численно равны ковариантным координатам, определяемым как параллельные проекции на оси, направленные по векторам взаимного базиса. Это видно непосредственно из выражений для контравариантных и ковариантных метрических тензоров, которые определяют связь контравариантных и ковариантных координат. В системе отсчёта, связанной с неподвижной модой компоненты метрического тензора  $g_{ll} = 1$ ,  $g_{zl} = \sin \beta$ ,  $g_{xx} = 1$ ,  $g_{yy} = 1$ ,  $g_{zz} = 1$  [41]. Остальные компоненты равны нулю. Поэтому достаточно рассматривать только четыре компоненты  $g_{ll} = 1$ ,  $g_{zl} = \sin \Theta$ ,  $g_{zz} = 1$ , что эквивалентно двухрядным матрицам

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \Theta \\ \sin \Theta & 1 \end{pmatrix}, \quad (i = l, z; k = l, z). \quad (6)$$

Кроме того, поскольку координаты  $x$  и  $y$  при преобразованиях остаются неизменными, в дальнейшем изложении они будут опускаться. Итак,

$$l = \bar{z} \sin \Theta + \bar{l},$$

$$z = \bar{z} + \bar{l} \sin \Theta.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\bar{l} = \frac{l - z \sin \Theta}{\cos^2 \Theta}, \quad \bar{z} = \frac{z - l \sin \Theta}{\cos^2 \Theta}.$$

Следовательно, компоненты контравариантного метрического тензора  $g^{ll} = \frac{1}{\cos^2 \Theta}$ ,  $g^{zl} = -\frac{\sin \Theta}{\cos^2 \Theta}$ ,  $g^{zz} = \frac{1}{\cos^2 \Theta}$ , или в матричной форме

$$g^{ik} = \frac{1}{\cos^2 \Theta} \begin{pmatrix} 1 & -\sin \Theta \\ -\sin \Theta & 1 \end{pmatrix}, \quad (i = l, z; k = l, z). \quad (7)$$

Видно, что компоненты метрического тензора  $g^{ik}$  по абсолютной величине в  $1/\cos^2 \Theta$  раз больше, чем компоненты метрического тензора  $g_{ik}$ . Поэтому масштаб осей ковариантных координат, определяемых как параллельные проекции на взаимные оси, в  $1/\cos \Theta$  раз больше, чем масштаб осей контравариантных координат события. При этом, поскольку  $g_{ll} = 1$ ,  $g_{zz} = 1$  ковариантные координаты, определяемые как ортогональные проекции на первоначальные оси, численно совпадают с ковариантными координатами, определяемыми как параллельные проекции на взаимные оси. Это хорошо видно и из рисунков.

Аналогичные выводы справедливы и для системы отсчёта, связанной с движущейся модой. Метрический тензор имеет компоненты  $g_{l'l'} = 1$ ,  $g_{z'z'} = -\sin \Theta$ ,  $g_{z'l'} = 1$ . В матричной форме

$$g_{i'k'} = \begin{pmatrix} 1 & -\sin \Theta \\ -\sin \Theta & 1 \end{pmatrix}, \quad (i' = l', z'; k' = l', z'). \quad (8)$$

При этом  $\underline{l}' = -\bar{z}' \sin \Theta + \bar{l}'$ ,  $\underline{z}' = \bar{z}' - \bar{l}' \sin \Theta$ . Контравариантный метрический тензор имеет следующие компоненты:

$$g^{l'l'} = \frac{1}{\cos^2 \Theta}, \quad g^{z'l'} = \frac{\sin \Theta}{\cos^2 \Theta}, \quad g^{z'z'} = \frac{1}{\cos^2 \Theta}. \quad \text{Или в матричной форме}$$

$$g^{i'k'} = \frac{1}{\cos^2 \Theta} \begin{pmatrix} 1 & \sin \Theta \\ \sin \Theta & 1 \end{pmatrix}, \quad (i' = l', z'; k' = l', z'). \quad (9)$$

Как будет понятно из дальнейшего удобно перейти к безразмерным координатам, умножив значения координат на постоянный множитель  $w$  с размерностью  $m^{-1}$ :  $\lambda = wl = wct$ ,  $\zeta = wz$ ,  $\lambda' = wl' = wct'$ ,  $\zeta' = wz'$ . В результате безразмерные ковариантные и контравариантные координаты события в системах отсчёта движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, будут изображаться так, как показано на рис.2.

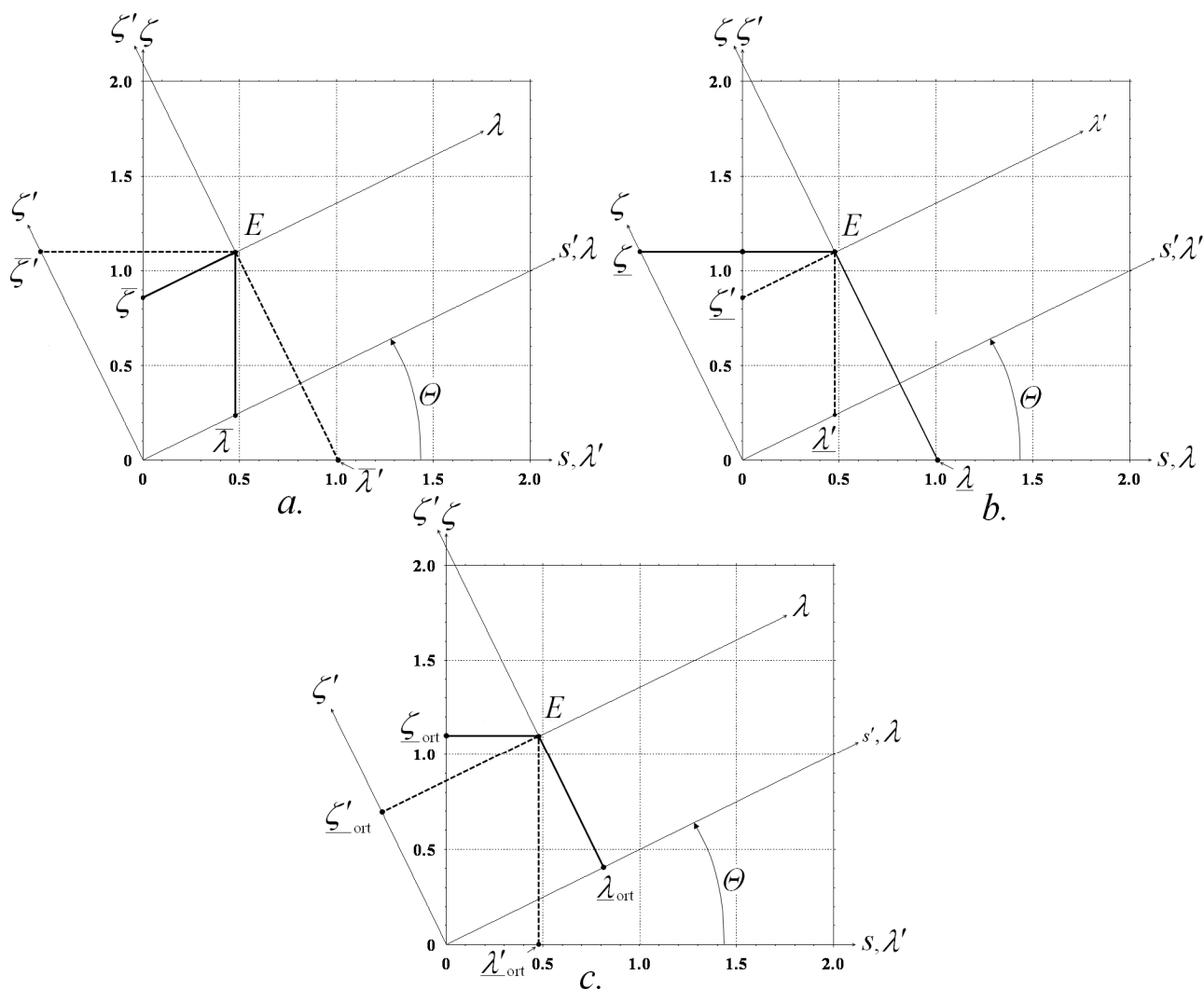


Рис.2. Изображение безразмерных контравариантных и ковариантных координат события  $E$  в евклидовом пространстве событий с косоугольными системами координат

## 2. Контравариантные и ковариантные координаты события в случае, когда одна из систем отсчёта подвергается ускорению

Пусть в неограниченном плоскопараллельном резонаторе возбуждены две покоящиеся моды с различными и отличными от нуля продольными индексами. И пусть в некоторый момент времени возникает фактор, приводящий к неоднородному по поперечным координатам воздействию на фазы прямой и обратной волн одной из мод, например, при отражении от зеркала резонатора изменение фазы отражённой волны будет зависеть от этих координат. Тогда фазовые поверхности эквивалентных волн этой моды будут искривляться. Отметим, что при этом скорость распространения волн в направлении волнового вектора бу-

дет оставаться прежней. Можно показать, что такая модель воздействия на моду эквивалентна воздействию электрического поля на заряженную частицу.

Далее из двух эквивалентных волн мы будем рассматривать только ту, которая распространяется в положительном направлении оси соответствующей дополнительному измерению, что отвечает положительным решениям уравнений квантовой электродинамики [42].

Распространение эквивалентной волны моды будем описывать в приближении геометрической оптики. Условия, когда это приближение справедливо, хорошо известны [43]. Тогда уравнения фазовых поверхностей можно вывести, используя уравнения траекторий лучей, которые как будет показано ниже можно получить из уравнений релятивистской механики.

Для вывода уравнений траекторий лучей уравнения релятивистской механики понадобятся нам не в обычной форме, отвечающей псевдоевклидову пространству событий, а в форме, отвечающей евклидову пространству событий, представление о котором возникает из модели пространства как 4-мерного плоско параллельного резонатора. В работе [46] было показано, как вывести уравнения релятивистской механики на основе резонансного условия для мод такого резонатора. Эти уравнения в форме, отвечающей евклидову пространству событий, имеют вид

$$\frac{d\mathbf{k}}{dl} = K_0 \frac{d}{dl} \frac{\hat{\mathbf{e}}^x \sin B_x + \hat{\mathbf{e}}^y \sin B_y + \hat{\mathbf{e}}^z \sin B_z}{\cos \Theta} = \mathbf{F}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{K}$  – 4-мерный комптоновский волновой вектор,  $\mathbf{k}$  – проекция  $\mathbf{K}$  на 3-мерное пространство (см. рис.3), связанная с обычным 3-мерным импульсом частицы соотношением  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ ,  $K_0 = \pi q/L$  - проекция  $\mathbf{K}$  на ось дополнительного измерения, связанная с массой покоя частицы соотношением  $m_0 = \hbar K_0/c$ ,  $q$  - продольный индекс моды,  $L$  - расстояние между зеркалами,  $B_x, B_y, B_z$  - углы между  $\mathbf{K}$  и перпендикулярами, опущенными из его вершины на соответствующие оси,  $\Theta$  - угол между  $\mathbf{K}$  и осью дополнительного измерения.

Как показано в [46] углы  $B_x, B_y, B_z$  связаны с компонентами скорости частицы  $v_x, v_y, v_z$  соотношениями  $\sin B_x = \frac{v_x}{c}$ ,  $\sin B_y = \frac{v_y}{c}$ ,  $\sin B_z = \frac{v_z}{c}$ . В 4-мерном пространстве они представляют собой направляющие косинусы вектора  $\mathbf{K}$ , так как  $\sin B_i = \cos(\pi/2 - B_i) = \cos A_i$ , где  $A_i$  - соответственно углы между

вектором  $\mathbf{K}$  и осями  $x, y, z$ . При этом  $\cos \Theta = \sqrt{1 - \sin^2 B_x - \sin^2 B_y - \sin^2 B_z} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , где  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ .

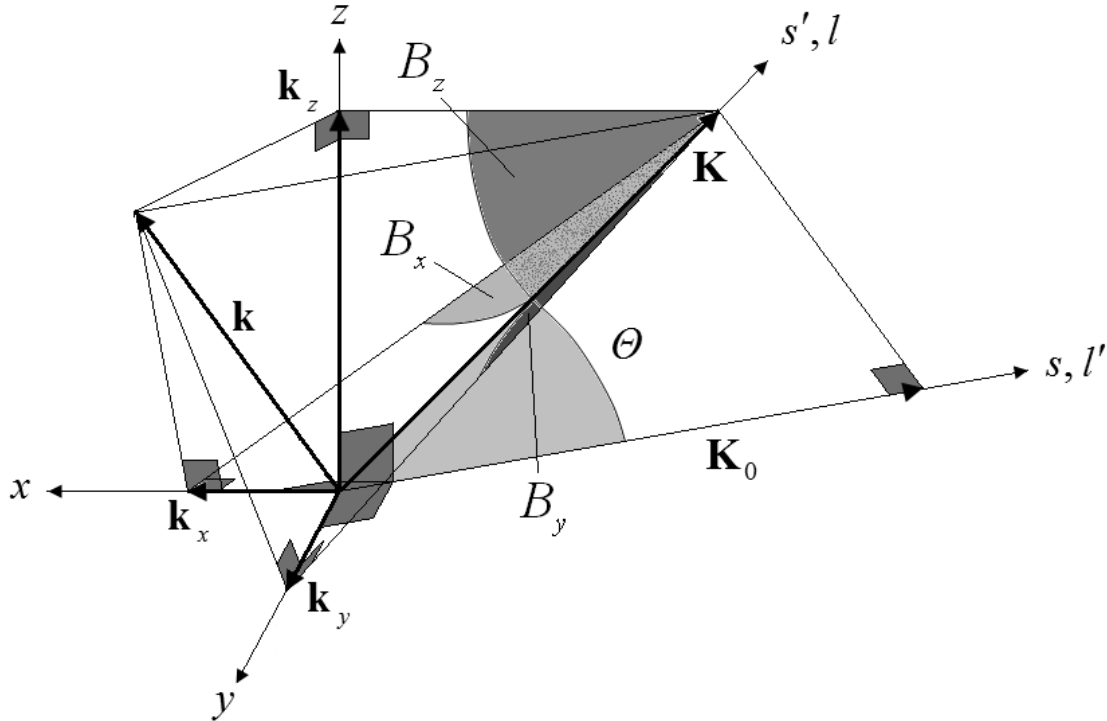


Рис.3. Изображение волнового вектора положительной эквивалентной волны ускоряемой моды в 4-мерном евклидовом пространстве событий и его проекций на трёхмерное пространство

Что касается величины  $\mathbf{F}$ , то она представляет собой силу, действующую на частицу. Размерность  $\mathbf{F}$  в системе СИ  $\text{м}^{-2}$ . Действительно, так как  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$  и  $l = ct$ , то  $\mathbf{F} = \mathbf{f}/\hbar c$ , где  $\mathbf{f}$  сила, выраженная в Н.

С учётом приведённых соотношений уравнение (10) принимает свой обычный вид [5, 43]

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_0 \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mathbf{f}. \quad (11)$$

Направим ось  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{k}$ . В этом случае  $B_x$  и  $B_y$  обращаются в нули, а  $B_z$  становится равным углу  $\Theta$ . При этом уравнение (10) принимает вид

$$\frac{dk}{dl} = K_0 \frac{d}{dl} \text{tg} \Theta = F(z, l). \quad (12)$$

Отношение  $w = F / K_0$  связано с ускорением частицы  $a = f / m_0$  соотношением  $w = a / c^2 = f / m_0 c^2$  и в системе СИ имеет размерность  $\text{м}^{-1}$ .

Интегрируя (12), получаем

$$\text{tg } \Theta - \text{tg } \Theta(0) = \int_0^l w dl = \frac{1}{K_0} \int_0^l F(z, l) dl = \lambda, \quad (13)$$

где  $\text{tg } \Theta(0)$  - значение при  $l = 0$ , связанное с начальной скоростью моды  $v(0)$  со-

отношением  $\text{tg } \Theta(0) = \frac{\sin \Theta(0)}{\cos \Theta(0)} = \frac{v(0)/c}{\sqrt{1 - v^2(0)/c^2}} = \gamma_0 \beta_0$  (при постоянном ускоре-

нии  $\lambda = wl$ ). Обозначим  $\text{tg } \Theta(0) = \Lambda$ .

Из (13) находим, что

$$\sin \Theta = \frac{v}{c} = \pm \frac{\lambda + \Lambda}{\sqrt{1 + (\lambda + \Lambda)^2}}. \quad (14)$$

Написанное соотношение позволяет получить зависимость  $\zeta(\lambda)$ . Действи-

тельно, в точках, принадлежащих лучу,  $\frac{v}{c} = \sin \Theta = \frac{dz}{dl} = \frac{d\zeta}{d\lambda}$ , где  $d\zeta = w dz$  и

$\zeta = \int_0^z w dz = \frac{1}{K_0} \int_0^z F(z, l) dz$ . В результате получаем уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = \pm \frac{\lambda + \Lambda}{\sqrt{1 + (\lambda + \Lambda)^2}}. \quad (15)$$

Знак перед правой частью выбирается в зависимости от направления скорости моды (частицы, тела) вдоль оси  $z$ . Знаку «+» соответствует скорость, направленная в сторону положительного направления оси  $z$ , а знаку «-» – в сторону отрицательного направления. Решение уравнения (15) хорошо известно [5, 43]. Для случая, когда начальная скорость и ускорение направлены в положительном направлении оси  $z$  ( $\zeta$ ) при начальном условии  $\zeta(0) = \bar{\zeta}$  оно имеет вид:

$$\zeta(\lambda) = \sqrt{1 + (\lambda + \Lambda)^2} - \sqrt{1 + \Lambda^2} + \bar{\zeta}. \quad (16)$$

Однако траектории лучей описываются не зависимостью  $\zeta$  от  $\lambda$ , а зависимостью  $\zeta$  от  $\lambda'$ , то есть от собственного времени ускоряемой частицы, ось которого как говорилось выше совпадает с осью дополнительного измерения  $s$ . Чтобы получить зависимость  $\zeta$  от  $\lambda'$  найдём зависимость  $\lambda$  от  $\lambda'$ . Для этого

обратимся к рис.3. Из рис.3 видно, что приращение  $l$  в направлении вектора  $\mathbf{K}$  (то есть вдоль луча) и приращение  $l'$  связаны друг с другом соотношением вида

$$dl' = dl \cos \Theta = dl \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (17)$$

Так как  $d\lambda = w dl$ ,  $d\lambda' = w dl'$ , то и  $d\lambda' = d\lambda \cos \Theta = d\lambda \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

С учётом (14) это соотношение в безразмерных переменных записывается в виде

$$d\lambda' = \frac{d\lambda}{\sqrt{1 + (\lambda + \Lambda)^2}}. \quad (18)$$

Интегрируя его при условии таком, что значению  $\lambda = 0$  отвечает значение  $\lambda'$  тоже равное нулю, получаем

$$\lambda' = \operatorname{arsh}(\lambda + \Lambda) - \operatorname{arsh} \Lambda = \ln \frac{\lambda + \Lambda + \sqrt{1 + (\lambda + \Lambda)^2}}{\Lambda + \sqrt{1 + \Lambda^2}}. \quad (19)$$

Обратная зависимость имеет вид

$$\lambda = \operatorname{sh}(\lambda' + \Lambda') - \Lambda, \quad (20)$$

где  $\Lambda' = \operatorname{arsh} \Lambda$ . Подставляя её в формулу (16) с учётом того, что  $\Lambda = \operatorname{sh} \Lambda'$  получаем формулу, описывающую траектории лучей:

$$\zeta(\lambda') = \operatorname{ch}(\lambda' + \Lambda') - \operatorname{ch} \Lambda' + \bar{\zeta}.$$

Графики зависимости  $\zeta(\lambda')$  в случае  $\Lambda = \frac{v(0)/c}{\sqrt{1 - v^2(0)/c^2}} = 0$  при различных

начальных значениях  $\zeta = \bar{\zeta}$ , отличающихся на  $1/2$ , показаны на рис.4. Мы видим лучи, начинающиеся на оси ординат и искривляющиеся по мере распространения эквивалентной волны так, что выпуклость направлена вниз и вправо.

Убедимся, что ускорение в произвольный момент времени в ускоряемой системе отсчёта равно  $a(t')$ . Интуитивно ясно, что оно должно быть связано с кривизной кривой в момент времени, отвечающий  $\lambda'_{\text{ort}}$ . Поэтому найдём сначала кривизну координатной линии  $\lambda$ . Как известно кривизна плоской кривой вычисляется по формуле [47]

$$k_{pc} = \frac{d^2 \underline{\zeta}_{\text{ort}} / d \lambda'_{\text{ort}}{}^2}{\left(1 + \left(d \underline{\zeta}_{\text{ort}} / d \lambda'_{\text{ort}}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Так как при  $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = 0$   $d \underline{\zeta}_{\text{ort}} / d \lambda'_{\text{ort}} = \operatorname{sh}(\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda')$ , то



$$k_{pc} = \frac{1}{\text{ch}^2(\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda')} = \cos^2 \Theta.$$

С другой стороны  $k_{pc} = \frac{d^2 \underline{\zeta}'_{\text{ort}} / d \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2}{\left(1 + \left(d \underline{\zeta}'_{\text{ort}} / d \underline{\lambda}'_{\text{ort}}\right)^2\right)^{3/2}}$ . Но  $d \underline{\lambda}'_{\text{ort}} = d \underline{\lambda}_{\text{ort}} \cos \Theta$  и

$$k_{pc} = \frac{d^2 \underline{\zeta}'_{\text{ort}} / d \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2}{\left(1 + \left(d \underline{\zeta}'_{\text{ort}} / d \underline{\lambda}'_{\text{ort}}\right)^2 \cos^2 \Theta\right)^{3/2}} \cos^2 \Theta. \quad \text{Так как} \quad \frac{d \underline{\zeta}'_{\text{ort}}}{d \underline{\lambda}'_{\text{ort}}} = 0, \quad \text{то}$$

$$k_{pc} = \frac{d^2 \underline{\zeta}'_{\text{ort}}}{d \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2} \cos^2 \Theta. \quad \text{В результате видим, что} \quad \frac{d^2 \underline{\zeta}'_{\text{ort}}}{d \underline{\lambda}'_{\text{ort}}{}^2} = 1. \quad \text{Переходя к обычным}$$

обозначениям, получаем, что  $\frac{d^2 z'}{dt'^2} = a(t')$ .

Найдём теперь уравнения фазовых поверхностей эквивалентной волны ускоряемой моды, точнее, тех кривых, которые образованы пересечением фазовых поверхностей с плоскостью рисунка. Фазовые поверхности, как известно [43], должны быть ортогональны лучам. Найдём уравнение ортогональных кривых. Будем обозначать их как  $\zeta_{\perp}$ . Так как производная

$$\frac{d \zeta}{d \lambda'} = \text{sh}(\lambda' + \Lambda'),$$

то уравнение ортогональных кривых имеет вид

$$\frac{d \zeta_{\perp}}{d \lambda'} = - \frac{1}{\frac{d \zeta}{d \lambda'}} = - \frac{1}{\text{sh}(\lambda' + \Lambda')}. \quad (21)$$

Интегрируя это уравнение, получаем выражение, описывающее ортогональные кривые, то есть выражения для кривых образованных пересечением фазовых поверхностей с плоскостью рисунка:

$$\zeta_{\perp}(\lambda') = - \ln \text{th} \frac{\lambda' + \Lambda'}{2} + C = - \ln \frac{\text{ch}(\lambda' + \Lambda') - 1}{\text{sh}(\lambda' + \Lambda')} + C, \quad (22)$$

где  $C$  – константа.

Графики зависимости  $\zeta_{\perp}(\lambda')$  в случае  $\Lambda = \Lambda' = 0$  при различных начальных значениях  $C$ , отличающихся на  $1/2$ , показаны на рис.4.

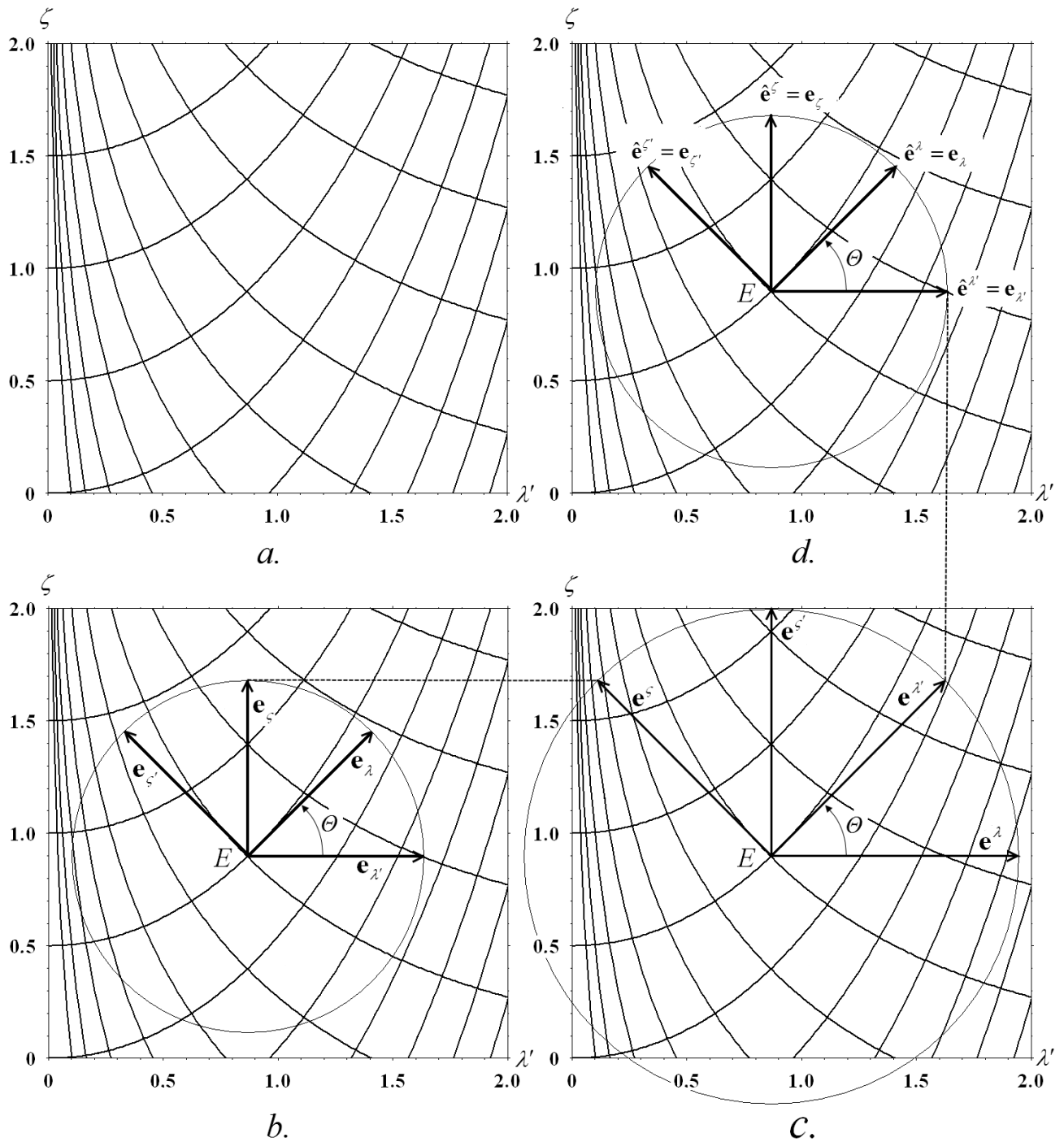


Рис.4. Лучи и линии равной фазы эквивалентной положительной волны ускоряемой моды *a*) и базисные векторы для определения контравариантных координат *b*), для определения ковариантных координат *c*) и для определения ортогональных ковариантных координат *d*).

Сравнивая со случаем инерциальных систем отсчёта, мы приходим к выводу, что отсчёт времени в неподвижной системе отсчёта надо производить по

траекториям лучей, относящимся к эквивалентной волне ускоряемой моды, а отсчёт расстояний надо производить по фазовым поверхностям волны неподвижной моды. И наоборот, отсчёт времени в ускоряемой системе отсчёта надо производить по траекториям лучей, относящимся к эквивалентной волне неподвижной моды, а отсчёт расстояний надо производить по фазовым поверхностям эквивалентной волны ускоряемой моды.

Таким образом, лучи, и линии равной фазы (эквифазные кривые линии) эквивалентных волн покоящейся и ускоряемой моды представляют собой координатные линии. На рис.5 изображены координатные сетки, отвечающие неподвижной системе отсчёта *a)* и ускоряемой системе отсчёта *b)*.

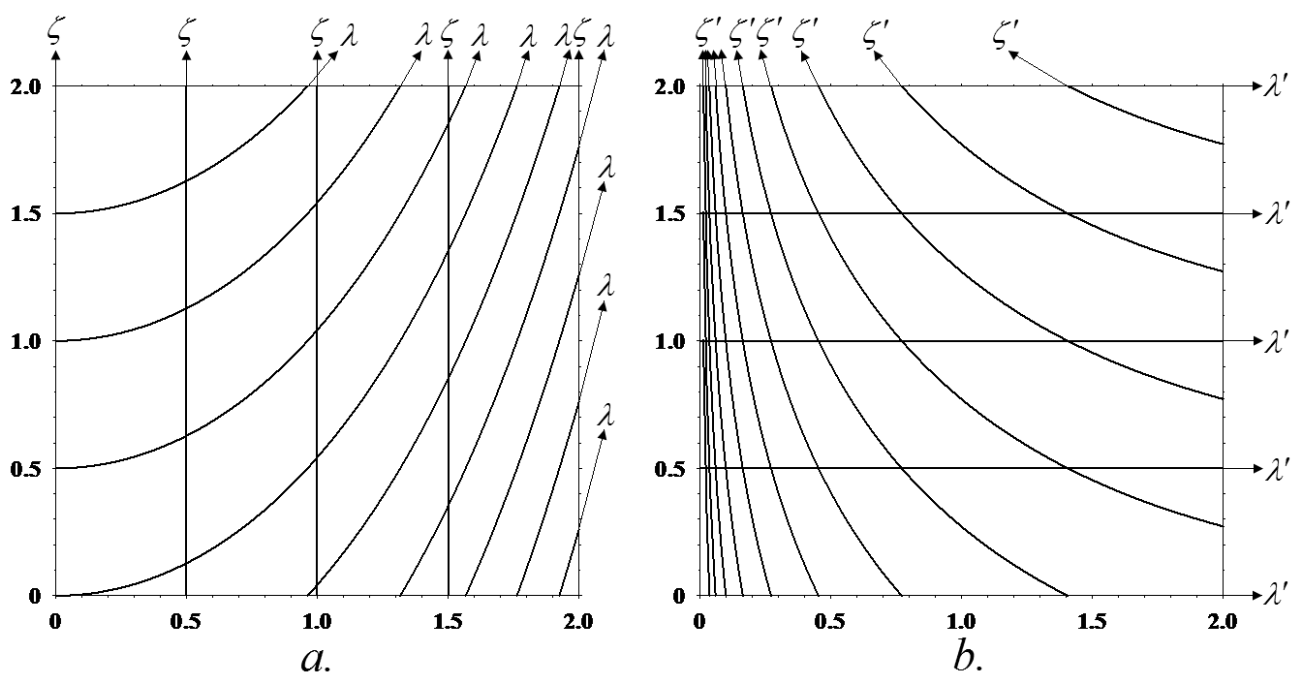


Рис.5. Координатная сетка системы отсчёта жёстко связанной с неподвижной модой *a)* и координатная сетка системы отсчёта жёстко связанной с ускоряемой модой *b)*. Буквами  $\lambda$  и  $\zeta'$  обозначены соответственно лучи и линии равной фазы эквивалентной волны ускоряемой моды, буквами  $\lambda'$  и  $\zeta$  – лучи и линии равной фазы эквивалентной волны неподвижной моды.

Ясно, что данное пространство событий является римановым пространством, а не псевдоримановым. Но оно, как и евклидово пространство событий, происходящих в инерциальных системах отсчёта, даёт возможность наглядно описывать релятивистскую связь событий, происходящих в неинерциальных системах отсчёта. В каждой точке этого пространства можно построить локальный

косоугольный базис рис.4а для определения контравариантных координат, которые, так же как и в случае инерциальных систем отсчёта определяются как параллельные проекции на соответствующие оси. Для системы отсчёта жёстко связанной с неподвижной модой это базисные векторы  $\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\zeta$ , а для системы отсчёта жестко связанной с ускоряемой модой –  $\mathbf{e}_{\lambda'}, \mathbf{e}_{\zeta'}$ . Угол между векторами  $\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\zeta$  равен  $\frac{\pi}{2} - \Theta$ , а между векторами  $\mathbf{e}_{\lambda'}, \mathbf{e}_{\zeta'}$  он равен  $\frac{\pi}{2} + \Theta$ .

Для определения ковариантных координат строятся взаимные базисы  $\mathbf{e}^\lambda, \mathbf{e}^\zeta, \mathbf{e}^{\lambda'}, \mathbf{e}^{\zeta'}$ , рис.4б. В этом базисе ковариантные координаты определяются тоже как параллельные проекции на соответствующие оси. Однако ковариантные координаты можно определить и как ортогональные проекции на первоначальные оси. При этом базисные векторы, в которых ковариантные координаты определяются указанным способом, рис.4с, совпадают с первоначальными базисными векторами, то есть  $\hat{\mathbf{e}}^\lambda = \mathbf{e}_\lambda, \hat{\mathbf{e}}^\zeta = \mathbf{e}_\zeta, \hat{\mathbf{e}}^{\lambda'} = \mathbf{e}_{\lambda'}, \hat{\mathbf{e}}^{\zeta'} = \mathbf{e}_{\zeta'}$ .

Проводя сравнение с рис.1 и рис.2 мы приходим к выводу, что ковариантные и контравариантные координаты события  $E$  в случае ускоренного движения частицы, описываемого с помощью криволинейных косоугольных координат в римановом пространстве событий, надо отсчитывать так, как показано на рис.6. В самом деле, если справа от прямой  $\lambda' = 0$  распрямить лучи, то вернёмся к рис.2, где  $\text{tg } \Theta = \text{tg } \Theta(0) = \frac{v(0)/c}{\sqrt{1 - v^2(0)/c^2}}$ .

При этом отсчёт времени в неподвижной системе отсчёта надо производить по траектории луча, проходящего через начало координат, а отсчитывать расстояния в ускоряемой системе отсчёта в моменты времени соответствующие значениям  $\lambda = \lambda_{\text{ort}}$  надо по соответствующим фазовым поверхностям, точнее по линиям их пересечения с плоскостью рисунка.

На первый взгляд может показаться, что  $\zeta_\perp(\lambda')$  не может принадлежать фазовой поверхности, то есть поверхности постоянной фазы из-за различия в длинах путей по различным траекториям лучей ввиду того, что скорость волны в резонаторе остаётся неизменной. Однако если вспомнить, что искривление лучей происходит из-за того, что комплексные коэффициенты трансформации при падении волн на зеркала резонатора зависят от пространственных координат, то всё становится на свои места.

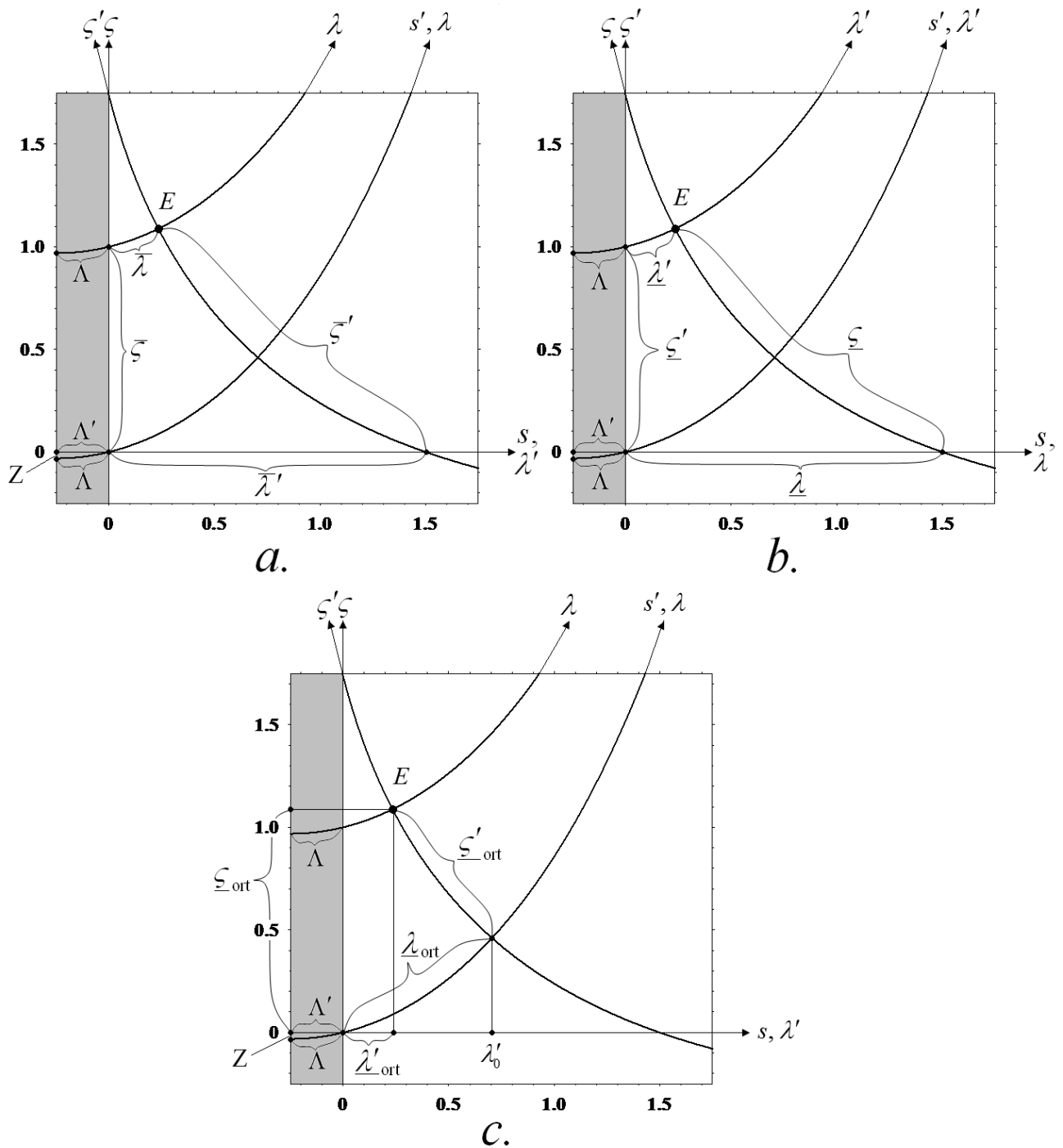


Рис.6. Иллюстрация к определению типа координат события – контравариантных координат *a)*, ковариантных координат *b)* и ортогональных ковариантных координат *c)*. Область определения временных координат  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda' \geq 0$ , пространственных -  $-\infty < \zeta < \infty$ ,  $-\infty < \zeta' < \infty$ . Закрашенная область иллюстрирует геометрический смысл величин  $\Lambda$ ,  $\Lambda'$  и  $Z = \sqrt{1 + \Lambda^2} - 1 = \text{ch } \Lambda' - 1$ .

Обратим внимание на то, что различным точкам фазовой поверхности отвечают различные значения контравариантной временной координаты  $\bar{\lambda}$ . Это связано с тем, что число отражений лучей, идущих в разные точки, разное и уменьшение амплитуды волны от начального положения фазовой поверхности до конечного её положения за счёт потерь из-за трансформации данной моды в моды с другими продольными индексами в разных точках тоже разное.

Но всем точкам фазовой поверхности отвечает одно и тоже значение ковариантной временной координаты  $\underline{\lambda}$ . Поэтому именно ковариантную временную координату естественно связать с временем, измеряемым в неподвижной системе отсчёта. Обратим также внимание на то, что при сильных потерях амплитуда эквивалентной волны может стать неоднородной и возникает вопрос, при каких потерях эта неоднородность нарушит условия применимости геометро-оптического приближения (вопрос этот требует отдельного рассмотрения).

Для нахождения расстояний в ускоряемой системе отсчёта в момент времени отвечающий значению  $\underline{\lambda}_{\text{ort}}$  найдём длину отрезка линии пересечения соответствующей фазовой поверхности с плоскостью рисунка между двумя произвольными её точками. Длина кривой, как известно, определяется следующим

образом:  $\zeta'_{12} = \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta_{\perp}}{d\lambda'}\right)^2} d\lambda'$ , где  $\frac{d\zeta_{\perp}}{d\lambda'} = -\frac{1}{\text{sh}(\lambda' + \Lambda')}$ . Тогда

$$\zeta'_{12} = \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \sqrt{1 + \frac{1}{\text{sh}^2(\lambda' + \Lambda')}} d\lambda' = \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \text{cth}(\lambda' + \Lambda') d\lambda' = \ln \frac{\text{sh}(\lambda'_2 + \Lambda')}{\text{sh}(\lambda'_1 + \Lambda')} = \ln \frac{\lambda_2 + \Lambda}{\lambda_1 + \Lambda},$$

где  $\lambda_1 = \text{sh}(\lambda'_1 + \Lambda') - \Lambda$ ,  $\lambda_2 = \text{sh}(\lambda'_2 + \Lambda') - \Lambda$  ( $\lambda_2 \geq \lambda_1$ ). Из рис.6 видно, что контравариантная координата

$$\bar{\zeta}' = \ln \frac{\text{sh}(\bar{\lambda}' + \Lambda')}{\text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')} = \ln \frac{\text{sh}(\bar{\lambda}' + \Lambda')}{\bar{\lambda} + \Lambda} = \ln \frac{\text{tg } \Theta}{\text{tg } \Theta_0}, \quad (23)$$

а ковариантная

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln \frac{\lambda_{\text{ort}} + \Lambda}{\bar{\lambda} + \Lambda} = \ln \frac{\text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda')}{\text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')} = \ln \frac{\text{tg } \Theta_0}{\text{tg } \Theta}. \quad (24)$$

В этих формулах использованы очевидные соотношения, вытекающие из формулы (13), а также из геометрического смысла производной

$$\bar{\lambda} + \Lambda = \text{sh}(\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda') = \text{tg } \Theta, \quad (25)$$

$$\lambda_{\text{ort}} + \Lambda = \text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') = \text{tg } \Theta_0, \quad (26)$$

$$\text{sh}(\bar{\lambda}' + \Lambda') = \text{tg } \bar{\Theta}, \quad (27)$$

где  $\Theta = \Theta(\underline{\lambda}'_{\text{ort}})$ ,  $\Theta_0 = \Theta(\lambda'_0)$  и  $\bar{\Theta} = \Theta(\bar{\lambda}')$  соответственно углы, определяющие наклоны касательных к лучам в точках с координатами  $(\bar{\lambda} = \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') - \Lambda, \bar{\zeta})$ ,  $(\underline{\lambda}_{\text{ort}} = \text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') - \Lambda, \underline{\zeta}_{\text{ort}} = \text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') - \text{ch } \Lambda')$ , и  $(\bar{\lambda}', \bar{\zeta}' = 0)$  лежащих на одной и той же фазовой поверхности.

### 3. Преобразования координат

Найдём теперь формулы для преобразований координат. Сначала найдём преобразование от штрихованных координат к не штрихованным, то есть от координат ускоряемой системы отсчёта к покоящейся.

Для нахождения формулы преобразования  $\underline{\zeta}_{\text{ort}} = f_{\zeta}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$  поступим следующим образом. Выразим постоянную  $C$  в формуле (22) для кривой, проходящей через точку  $E$  на рис.5, через  $\underline{\lambda}'_{\text{ort}}$  и  $\underline{\zeta}_{\text{ort}}$ , приняв во внимание, что при  $\lambda' = \underline{\lambda}'_{\text{ort}}$  значение  $\zeta_{\perp} = \underline{\zeta}_{\text{ort}}$ . Получаем

$$C = \underline{\zeta}_{\text{ort}} + \ln \text{th} \frac{\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda'}{2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (22), получаем уравнение кривой, проходящей через точку  $E$ :

$$\zeta_{\perp}(\lambda') = \underline{\zeta}_{\text{ort}} - \ln \text{th} \frac{\lambda' + \Lambda'}{2} + \ln \text{th} \frac{\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda'}{2}. \quad (28)$$

Так как рассматриваемая кривая проходит также через точку с координатами  $(\lambda'_0, \zeta = \text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') - \text{ch } \Lambda')$ , через которую проходит также кривая  $\zeta = \text{ch}(\lambda' + \Lambda') - \text{ch}(\Lambda')$ , то, приравнявая в этой точке  $\zeta$  и  $\zeta_{\perp}$ , получаем зависимость

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \text{ch}(\lambda'_0 + \Lambda') - \text{ch } \Lambda' + \ln \text{th} \frac{\lambda'_0 + \Lambda'}{2} - \ln \text{th} \frac{\lambda'_{\text{ort}} + \Lambda'}{2}. \quad (29)$$

Преобразуем это выражение. По формуле (26) имеем  $\text{sh}(\lambda'_0 + \Lambda') = \underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda$ .

Далее, из формулы (24) находим, что  $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda = e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} (\bar{\lambda} + \Lambda)$ . Но в соответствии с формулой (25)  $\bar{\lambda} + \Lambda = \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')$ . Поэтому  $\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda = e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')$ .

В результате приходим к формулам:

$$\underline{\lambda}_{\text{ort}} = e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') - \Lambda. \quad (30)$$

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2} - \sqrt{1 + \Lambda^2} + \ln \frac{\sqrt{1 + (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}\right)^2 (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda)^2} - 1} - \underline{\zeta}'_{\text{ort}}. \quad (31)$$

Подставляя (30) в (31), получаем преобразования от штрихованных ковариантных координат к не штрихованным ковариантным координатам

$$\begin{aligned} & \underline{\zeta}_{\text{ort}} + \left(\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1\right) = \\ & = \sqrt{1 + \left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)^2} - 1 + \ln \frac{\sqrt{1 + \left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)^2} - 1}{\text{ch}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') - 1} - \underline{\zeta}'_{\text{ort}}, \end{aligned}$$

и после преобразования представим зависимость  $\underline{\zeta}_{\text{ort}} = f_{\zeta}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$  в виде

$$\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \ln \frac{E\left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda')\right)}{\text{th}\left(\frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda'}{2}\right)} - Z, \quad (32)$$

где

$$Z = \sqrt{1 + \Lambda^2} - 1, \quad (33)$$

$$E(\xi) = e^{\sqrt{1 + \xi^2} - 1} \frac{\sqrt{1 + \xi^2} - 1}{\xi}. \quad (34)$$

Представление о характере зависимостей  $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$  и  $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$  в случае нулевой начальной скорости даёт рис.7. Уравнение линии пересечения поверхности  $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$  с плоскостью  $\underline{\zeta}_{\text{ort}} = 0$ , как это видно из (32), находится из условия

$E\left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh} \underline{\lambda}'_{\text{ort}}\right) = \text{th} \frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}}{2}$ . Учитывая, что  $e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \text{sh} \underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \text{sh} \lambda'_0$  это

условие можно преобразовать к виду  $e^{\text{ch} \lambda'_0 - 1} \text{th} \frac{\lambda'_0}{2} = \text{th} \frac{\underline{\lambda}'_{\text{ort}}}{2}$ , откуда получаем

уравнение указанной линии пересечения в параметрическом виде

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = 2 \text{arth}\left(e^{\text{ch} \lambda'_0 - 1} \text{th} \frac{\lambda'_0}{2}\right) \text{ и } \underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln \frac{\text{sh} \lambda'_0}{\text{sh}\left(2 \text{arth}\left(e^{\text{ch} \lambda'_0 - 1} \text{th} \frac{\lambda'_0}{2}\right)\right)}.$$



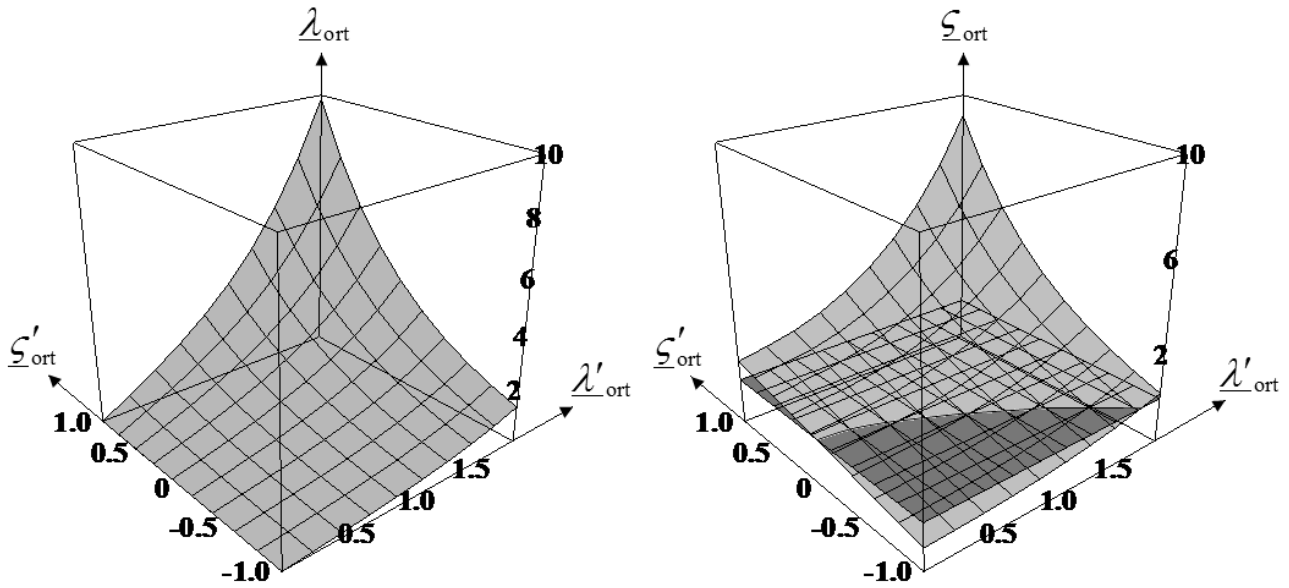


Рис.7. Зависимости  $\underline{\lambda}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$  (слева) и  $\underline{\zeta}_{\text{ort}}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}}, \underline{\zeta}'_{\text{ort}})$  (справа) в случае нулевой начальной скорости

Найдём теперь преобразование координат неподвижной системы отсчёта к координатам ускоряемой системы. Выражение (31) является уравнением относительно  $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}$ . Переписав его в виде

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}\right)^2 + \left(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda\right)^2} = \\ & = e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}}} \left(\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1\right) e^{\sqrt{1 + \left(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda\right)^2} - 1} \left(\sqrt{1 + \left(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda\right)^2} - 1\right) + e^{\underline{\zeta}'_{\text{ort}}} \end{aligned}$$

и, возводя обе части во вторую степень, получаем

$$\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = \ln \left[ \frac{\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda}{2} \frac{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2}{E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}} \right]. \quad (35)$$

Подставляя (35) в выражение  $\text{sh}(\underline{\lambda}'_{\text{ort}} + \Lambda') = (\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}'_{\text{ort}}}$ , вытекающее из (24), получаем вторую формулу искомого преобразования

$$\underline{\lambda}'_{\text{ort}} = \text{arsh} \frac{2E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 - \left(E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}\right)^2} - \Lambda' = \ln \frac{1 + E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}}{1 - E(\underline{\lambda}_{\text{ort}} + \Lambda) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}} - Z}} - \Lambda'. \quad (36)$$

Представление о характере зависимостей  $\lambda'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$  и  $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$  в случае нулевой начальной скорости даёт рис.8.

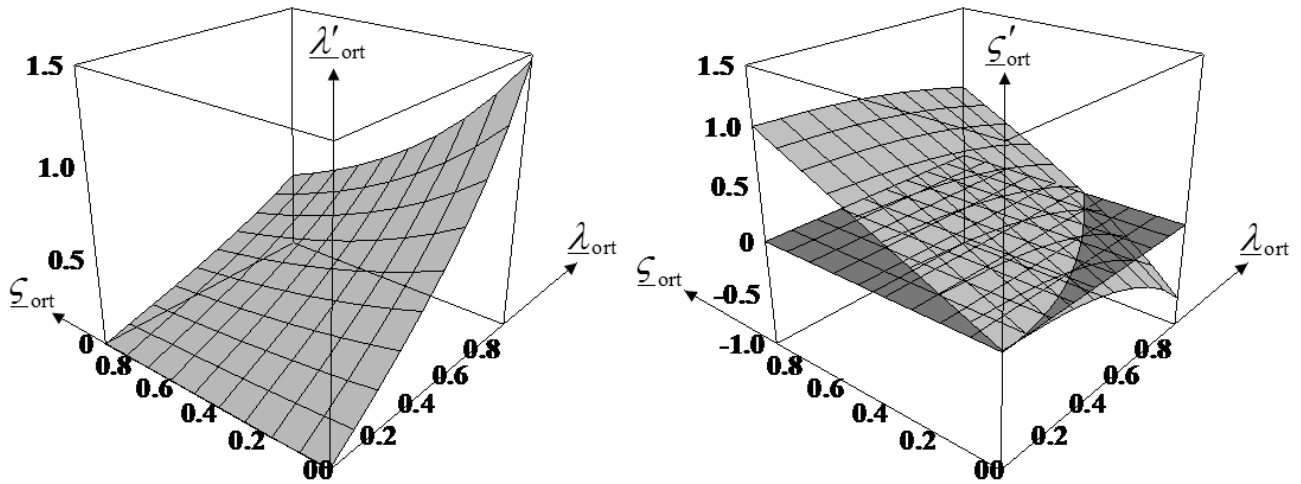


Рис.8. Зависимости  $\lambda'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$  (слева) и  $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$  (справа) в случае нулевой начальной скорости

Уравнение линии пересечения поверхности  $\underline{\zeta}'_{\text{ort}}(\lambda_{\text{ort}}, \underline{\zeta}_{\text{ort}})$  с плоскостью  $\underline{\zeta}'_{\text{ort}} = 0$ , как это видно из (35) находится из условия  $\frac{\lambda_{\text{ort}}}{2} \frac{1 - (E(\lambda_{\text{ort}}) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}}})^2}{E(\lambda_{\text{ort}}) e^{-\underline{\zeta}_{\text{ort}}}} = 1$ .

Решая это уравнение относительно  $\underline{\zeta}_{\text{ort}}$  получаем формулу для линии пересечения:  $\underline{\zeta}_{\text{ort}} = \sqrt{1 + \lambda_{\text{ort}}^2} - 1$ .

Отметим, что поскольку  $\lambda = \int w(z, l) dl = \frac{c}{K_0} \int F(z, t) dt = \frac{1}{m_0 c} \int f(z, t) dt$ , а  $\zeta = \int w(z, l) dz = \frac{1}{K_0} \int F(z, t) dz = \frac{1}{m_0 c^2} \int f(z, t) dz$ , то полученные преобразования,

а также выражения для траекторий лучей и фазовых поверхностей носят универсальный характер и годятся равным образом, как в случае равноускоренного движения, так и в случае ускоренного движения под действием сил, которые зависят от пространственных координат и времени. Таким образом, можно говорить о законах подобия ускоренно движущихся систем отсчёта.

Представим полученные результаты в обычных обозначениях для случая равноускоренного движения. Преобразования координат события при переходе от неподвижной системы отсчёта к ускоряемой системе отсчёта (36), (35), и, соответственно, обратные преобразования (30), (32) в обычных обозначениях выглядят следующим образом

$$t' = \frac{c}{a} \left( \ln \frac{1 + E(\Lambda + at/c) e^{-(Z+az/c^2)}}{1 - E(\Lambda + at/c) e^{-(Z+az/c^2)}} - \Lambda' \right), \quad (37)$$

$$z' = \frac{c^2}{a} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \Lambda + \frac{at}{c} \right) \frac{1 - \left( E(\Lambda + at/c) e^{-(Z+az/c^2)} \right)^2}{E(\Lambda + at/c) e^{-(Z+az/c^2)}} \right), \quad (38)$$

$$t = \frac{c}{a} \left( e^{az'/c^2} \operatorname{sh} \left( \Lambda' + \frac{at'}{c} \right) - \Lambda \right), \quad (39)$$

$$z = \frac{c^2}{a} \left( \ln \frac{E \left( e^{az'/c^2} \operatorname{sh} \left( \Lambda' + \frac{at'}{c} \right) \right)}{\operatorname{th} \left( \left( \Lambda' + \frac{at'}{c} \right) / 2 \right)} - Z \right), \quad (40)$$

где, как и раньше,  $E$  раскрывается по формуле (34),  $\Lambda = \frac{v(0)/c}{\sqrt{1 - v^2(0)/c^2}} = \gamma_0 \beta_0$ ,

$$Z = \sqrt{1 + \Lambda^2} - 1 = \gamma_0 - 1, \quad \Lambda' = \operatorname{arsh} \Lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}.$$

#### 4. Обсуждение полученных результатов

Из рис.6 понятно, что если ускорение уменьшается, то фазовая поверхность эквивалентной волны ускоряемой моды становится более плоской. При этом лучи и эквифазные линии в пределе должны стать прямыми линиями с тангенсом угла наклона  $\operatorname{tg} \Theta = \gamma_0 \beta_0$ , а преобразования, полученные в настоящей работе должны превратиться в преобразования Лоренца.

Покажем, это на примере преобразований (37), (38). Для этого разложим

$$E \left( \Lambda + \frac{at}{c} \right) = \frac{\sqrt{1 + \left( \Lambda + \frac{at}{c} \right)^2} - 1}{\Lambda + \frac{at}{c}} \exp \left( \sqrt{1 + \left( \Lambda + \frac{at}{c} \right)^2} - 1 \right) \text{ по малой величине } \frac{at}{c} \text{ и}$$

удержим линейные члены разложения. Учитывая, что

$$\left. \frac{\partial E\left(\Lambda + \frac{at}{c}\right)}{\partial\left(\Lambda + \frac{at}{c}\right)} \right|_{a=0} = E(\Lambda) \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}}{\Lambda}, \quad E(\Lambda)e^{-z} = \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda},$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}}{\Lambda} \frac{at}{c}\right) \left(1 - \frac{az}{c^2}\right) \approx 1 + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}}{\Lambda} \frac{at}{c} - \frac{az}{c^2},$$

получаем

$$E\left(\Lambda + \frac{at}{c}\right) e^{-(z+az/c^2)} \approx \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda} \left(1 + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}}{\Lambda} \frac{at}{c} - \frac{az}{c^2}\right).$$

Подставляя полученное разложение в (37) и (38), и учитывая, что

$$\Lambda' = \operatorname{arsh} \Lambda = \ln\left(\Lambda + \sqrt{1+\Lambda^2}\right) = \ln \frac{1 + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda}}{1 - \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda}},$$

получаем

$$t' \approx \frac{c}{a} \ln \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda} + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda} \left(\frac{\sqrt{1+\Lambda^2}}{\Lambda} \frac{at}{c^2} - \frac{az}{c^2}\right)\right) \left(1 - \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda}\right)}{\left(1 - \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda} - \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda} \left(\frac{\sqrt{1+\Lambda^2}}{\Lambda} \frac{at}{c^2} - \frac{az}{c^2}\right)\right) \left(1 + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda}\right)},$$

$$z' = \frac{c^2}{a} \ln \left( \frac{1}{2} \left(\Lambda + \frac{at}{c}\right) \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda} \left(1 + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}}{\Lambda} \frac{at}{c} - \frac{az}{c^2}\right)\right)^2}{\frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda} \left(1 + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}}{\Lambda} \frac{at}{c} - \frac{az}{c^2}\right)} \right).$$

Далее, так как

$$\left(1 + \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda}\right)^2 = 2 \frac{\sqrt{1+\Lambda^2}-1}{\Lambda^2},$$

то

$$t' = \frac{c}{a} \ln \frac{1 + \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1}{\Lambda} \right) \left( \sqrt{1 + \Lambda^2} \frac{t}{c} - \Lambda \frac{z}{c^2} \right)}{1 - \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2} - 1}{\Lambda} \right) \left( \sqrt{1 + \Lambda^2} \frac{t}{c} - \Lambda \frac{z}{c^2} \right)} \approx \frac{c}{a} \ln \left( 1 + a \left( \sqrt{1 + \Lambda^2} \frac{t}{c} - \Lambda \frac{z}{c^2} \right) \right),$$

$$z' = \frac{c^2}{a} \ln \frac{1 - \left( \Lambda - \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2}}{\Lambda} \right) \frac{at}{c} + \left( \sqrt{1 + \Lambda^2} - 1 \right) \frac{az}{c^2}}{1 + \frac{\sqrt{1 + \Lambda^2}}{\Lambda} \frac{at}{c} - \frac{az}{c^2}} \approx \frac{c^2}{a} \ln \left( 1 - \Lambda \frac{at}{c} + \sqrt{1 + \Lambda^2} \frac{az}{c^2} \right).$$

Переходя к пределу при  $a \rightarrow 0$ , получаем преобразования Лоренца:

$$t' \approx \sqrt{1 + \Lambda^2} t - \Lambda \frac{z}{c} = \frac{1}{\cos \Theta(0)} t - \operatorname{tg} \Theta(0) \frac{z}{c} = \frac{t - \frac{v(0)}{c} \frac{z}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2(0)}{c^2}}},$$

$$z' = -\Lambda ct + \sqrt{1 + \Lambda^2} z = -\operatorname{tg} \Theta(0) ct + \frac{z}{\cos \Theta(0)} = \frac{z - v(0)t}{\sqrt{1 - v^2(0)/c^2}},$$

что совпадает с тем выводом, который был сделан выше при сравнении рис.6 с рис.2.

Полученные в настоящей работе преобразования отличаются от известных преобразований Мёллера [12], Ву-Ли [19, 20], Подосенова [6, 21], Логунова [5], обобщённых преобразований Мёллера-Ву-Ли, выведенных Ксу и Клефф [22, 23] и усовершенствованных Эрнстом [24], а также от преобразований, полученных Парди в [25]. Рамки настоящей работы не позволяют провести подробное развёрнутое сравнение полученных в ней результатов с результатами перечисленных работ. Этому посвящена последующая работа автора. Здесь же кратко остановимся на основных моментах сопоставления, не подтверждая сказанное доказательствами.

Как оказалось, все преобразования, перечисленных работ, за исключением преобразований, полученных Логуновым и Парди, являются предельными случаями преобразований настоящей работы. Так, можно показать, что преобразования и метрика Мёллера получаются из (39) и (40), когда  $az'/c^2 \ll 1$ . Метрика

Подосенова получается в другом предельном случае, когда  $z'$  произвольно, а  $t'$  такое, что  $\frac{at'}{c} \exp\left(\frac{az'}{c^2}\right) \ll 1$ .

Преобразования Ву и Ли получаются из (37) и (38) при условии, что  $\beta_0 = 0$ ,  $at/c \ll 1$  и  $az/c^2 \ll 1$ . Обобщённые преобразования Мёллера-Ву-Ли получаются из (37) и (38) при условии, что  $\frac{at}{c} \ll \frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \ll 1$ ,  $\frac{az}{c^2} \ll 1$ , а преобразования

полученные Эрнстом – при условии, что  $\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \frac{at}{c} \ll 1$  и  $1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{az}{c^2} \ll 1$ .

Расхождение с преобразованиями Логунова происходит из-за различия в определении расстояний в ускоряемой системе отсчёта. В настоящей работе эти расстояния отсчитываются по искривлённой фазовой поверхности эквивалентной волны ускоряемой моды резонатора, в то время как в работе Логунова эти расстояния с точки зрения модели, рассматриваемой в настоящей работе, отсчитываются по плоской фазовой поверхности эквивалентной волны неподвижной моды.

Расхождение с преобразованиями Парди связано с тем, что Парди, опять же с точки зрения модели настоящей работы, неявно отождествляет контравариантную временную координату  $\bar{\lambda} = a\bar{t}/c$  события в системе отсчёта, связанной с неподвижной модой, и ковариантную координату  $\lambda_{\text{орт}} = at/c$  того же события в той же системе отсчёта. В настоящей работе эти координаты отличаются друг от друга, и связь между ними даётся формулой:

$$\bar{\lambda} = \frac{a\bar{t}}{c} = \frac{2\left(\sqrt{1+(at/c)^2} - 1\right)e^{\sqrt{1+(at/c)^2-1-az/c^2}}}{at/c - \left(\left(\sqrt{1+(at/c)^2} - 1\right)e^{\sqrt{1+(at/c)^2-1-az/c^2}}\right)^2}.$$

## 5. Заключение

В настоящей работе построены системы отсчёта координат как прямолинейно ускоряемого, так и неподвижного наблюдателей, и получены преобразования пространственно-временных координат события, измеряемых в этих си-

стемах. Вывод преобразований проведён на основе концепции 4-мерного пространства компактифицированного до трёх измерений, а также вытекающего из этой концепции представления о римановом пространстве событий с косоугольными пространственно-временными локальными базисами. Полученные преобразования в пределе малых ускорений переходят в преобразования Лоренца и являются более общими, чем известные до сих пор, и при определённых значениях координат переходят либо в преобразования и метрику Мёллера, либо Подосёнова, либо в преобразования Ву и Ли, а также в обобщённые преобразования Мёллера-Ву-Ли, полученные Ксу и Клефф и усовершенствованные Эрнстом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Аматуни А.Ц., Лазиев Э.М., Нагорский Г.А., Петросян М.Л., Сехпосян Э.В., Элбакян С.С.** Развитие новых методов ускорения заряженных частиц в ЕрФИ (обзор). Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1989. Т. 20. Вып. 5. С. 1246 – 1286.
2. **Панасюк В.С.** Новый тип циклических ускорителей заряженных частиц с сильным и сверхсильным магнитным полем («Троль-проект»). Препринт ФИАН № 26. Москва, 2004. 32 с.
3. **Быченков В.Ю.** Пятьдесят лет лазеру. Новый шаг – ускоритель на столе. Наука и жизнь. 2010. № 12.
4. **Гинзбург В.Л.** Об излучении и силе радиационного трения при равномерно ускоренном движении заряда. Успехи физических наук. 1969. Т. 98. Вып. 3. С. 569 – 585.
5. **Логунов А.А.** Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. 272 с.
6. **Подосёнов С. А.** Пространство, время и классические поля связанных структур. М. 2000, "Компания Спутник+".
7. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация. Т. 1. // Пер. с англ. М.М. Баско под. ред. В.Б. Брагинского и И.Д. Новикова. М.: Мир, 1977. С. 213.
8. <http://moro3ov.chat.ru/gif/doclad.pdf>
9. **Born M.** Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips. Annal. d. Phys. 1909. V. 30. No. 11. С. 1 - 56
10. **Herglotz G.** Uber den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als "starr" zu bezeichnenden Körper. Ann. Phys. (Leipzig). 1910. V. 31. P. 393 – 415.
11. **Noether F.** Zur Kinematik des starren Körpers in der Relativtheorie. Ann. Phys. (Leipzig). 1910. V. 31. С. 919 - 944

12. **Møller C.** *On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox.* Kobenhavn. 1943. (Труды Датской АН. Т. 20. № 19.) P. 1 – 24.
13. **Llosa J. and Soler D.** *References frames and rigid motions in relativity.* Class. Quant. Grav. 2004. V. 21. P. 3067 - 3094
14. **Llosa J. and Soler D.** *Fermat-holonomic congruences.* <http://arxiv:gr-qc/0003056v14> 14 Mar 2000
15. **Bel LI and Llosa J.** *Spatially affine motions in relativity.* Class. Quant. Grav. 1995. V. 12. P. 1949 – 1967.
16. **Bel LI, Martin J. and Molina A. J.** *Rigit motion in special and general relativity.* Phys. Sos. Japan. 1994. V. 63. P. 4350 – 4363.
17. **Bona C.** *Rigit-Motion conditions in special relativity.* Phys. Rev. 1983. D27. P. 1243 – 1247.
18. **Richard J. Epp, Robert B. Mann, Paul L. McGrath.** *Rigid motion revisited: rigid quasilocal frames.* <http://arxiv.org/abs/0810.0072v2> 30 Nov 2008
19. **Ta-You Wu, Lee Y.C.** *The clock paradox in the relativity theory.* Intern. J. Theoretical Phys. 1972. V. 5. Issue 5. P. 307 – 323.
20. **Ta-You Wu.** *Theoretical Physics. 1978. V. 4. Theory of Relativity.* (Lian Jing Publishing Co., Taipei. 1978) P. 172 – 175.
21. **Подосенов С.А.** *Геометрические свойства неинерциальных систем отсчёта в релятивистской механике – В кн: Дискуссионные вопросы теории относительности и гравитации. – М.: Наука, 1982, С. 95 – 103.*
22. **Hsu J.P. and Silvia M. Kleff.** *Generalized Møller-Wu-Lee Transformations for Accelerated Frames.* Chinese Journal of Physics. 1998. V. 36. No. 6. P. 768 – 777.
23. **Jong-Ping Hsu.** *General-Linear-Acceleration Transformations of Spacetime, Jerks and Limiting 4-Dimensional Symmetry.* Chinese Journal of Physics. 2002. V. 40. No. 3. P. 265 – 276.
24. **Andreas Ernst.** *On Hyperbolic Motion and Limiting Four-Dimensional Symmetry.* Chinese Journal of Physics. 2002. V. 40. No. 6. P. 583 – 589.
25. **Pardy M.** *The space-time transformations between accelerated systems.* <http://arxiv:gr-qc/03022007v1> 12 Feb 2003.
26. **Foukzon Jaykov, Podosenov S.A.** *Simple derivation of the Generalized Möller-Wu-Lee transformations. Born rigid constant accelerated motion on a curved Lorentzian manifold.* <http://arxiv.org/abs/0803.3930v3> 11 May 2009
27. **Kaluza Th.** *Zum Unitatsproblem der Physik.* Sitzungsberichte d. Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.). 1921, S.966-972.



28. **Klein O.** *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie (Quantum Theory and fivedimensional General Relativity)*. Zs. f. Phys. 1926. V. 37. P.895-906.
29. **Соколов А., Иваненко Д.** *Квантовая теория поля (избранные вопросы)*. Москва, Ленинград. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1952. С.618-626.
30. **Румер Ю.Б.** *Исследования по 5-оптике*. Москва. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1956. 152 с.
31. **Бергман П.** *Единые теории поля*. УФН. Сентябрь 1980. Т. 132, № 1, С. 177-190.
32. **Rubakov V.A. and Shaposhnikov M.E.** *Do we live inside a domain wall?* Phys. Let. B. 1983. V. 125. P. 136 - 138.
33. **Gibbons G.W. and Wiltshire.** *Spacetime as a Membrane in Higher Dimensions*. Nucl. Phys. 1987. B287. P. 717 – 742. <http://arxiv:hep-th/0109093v1> 12 Sep 2001.
34. **Matt Visser.** *An exotic class of Kaluza-Klein models*. Physics letters. 1985. B159. P. 22 – 25. <http://arxiv:hep-th/9910093v1> 12 Oct 1999.
35. **Яу Ш, Надис С.** *Теория струн и скрытые измерения Вселенной. // Пер.с англ. А.Мороз, И.Рузмайкина, В.Семиных*. СПб.: Питер, 2012. 400 с.
36. **Рубаков В.А.** *Большие и бесконечные дополнительные измерения*. УФН, 2001, Т. 171, № 9, С. 913 – 938.
37. **Пестов А.Б.** *Геометрическая теория фундаментальных взаимодействий. Основания единой физики*. Сообщения Объединённого института ядерных исследований. P2-2012-140. Дубна, 2012. 36 с.
38. **Пестов А.Б.** *Геометрическая теория фундаментальных взаимодействий. Спинстатика и спиндинамика*. Сообщения Объединённого института ядерных исследований. P2-2012-142. Дубна, 2012. 48 с.
39. **Пестов А.Б.** *Геометрическая теория фундаментальных взаимодействий. Обобщённое электромагнитное поле*. Сообщения Объединённого института ядерных исследований. P2-2012-143. Дубна, 2013. 28 с.
40. **Орлов Е.П.** *Пространственно-временные отношения между модами резонатора с параллельными плоскими зеркалами*. Препринт ФИАН № 16. Москва, 2004. 17 с.
41. **Орлов Е.П.** *Описание пространственно-временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора с помощью косоугольных систем координат*. Препринт ФИАН № 16. Москва, 2009. 32 с.
42. **Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** *Квантовая электродинамика (Серия: «Теоретическая физика», том IV)*. М.: Физматлит. 2001. 720 с.

43. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** *Теория поля (Серия: «Теоретическая физика», том II)*. М.: Физматлит. 1988. 512 с.
44. **Паули В.** *Теория относительности*. // Пер. с немецкого под ред. В.Л.Гинзбурга и В.П.Фролова. М.: Наука, 1991. С. 50.
45. **Кочин Н.Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. С. 371.
46. **Орлов Е.П.** *Вывод уравнений релятивистской механики на основе резонансного условия для мод 4-мерного плоскопараллельного резонатора*. Препринт ФИАН № 8. Москва, 2013. 11 с.
47. **Корн Г., Корн Т.** *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. // Пер. с английского И.Г.Арамановича, А.М.Березмана, И.А.Вайнштейна, Л.З.Румишского и Л.Я.Цлафа. Под общ. Ред. И.Г.Арамановича. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 720 с.

Подписано в печать 31.01.2014 г.  
Формат 60x84/16. Заказ № 6. Тираж 140 экз. П.л 2,25.  
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика  
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640