ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Физический
институт
имени
П.Н.Лебедева
Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

8

Е.П. ОРЛОВ

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ РЕЗОНАНСНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ МОД 4-МЕРНОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

Москва 2013

Е.П.Орлов

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ РЕЗОНАНСНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ МОД 4-МЕРНОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что уравнения релятивистской механики можно вывести на основе представления о пространстве с дополнительным «сплюснутым» четвертым измерением и на основе резонансного условия для мод 4-мерного плоскопараллельного резонатора, представляющего собой простейшую модель такого пространства. Дана наглядная геометрическая интерпретация уравнений релятивистской механики.

E.P.Orlov

DERIVATION OF EQUATIONS FOR RELATIVISTIC MECHANICS ON THE BASIS OF RESONANCE CONDITION FOR MODES OF FOUR-DIMENSIONAL CAVITY WITH PLANE-PARALLEL MIRRORS

A B S T R A C T

A possibility has been shown to derive the equations for relativistic mechanics on the basis of a concept of a space with adding a “flattened” fourth dimension and the resonance condition for the modes of four-dimensional cavity with plane parallel mirrors. The cavity represents the simplest model of such a space. Demonstrable geometric interpretation of the equations for relativistic mechanics is given.

Введение

Уравнения релятивистской механики, впервые полученные Пуанкаре [1], выводятся на основании гипотезы о псевдоевклидовости пространства-времени. Этот вывод широко известен, см., например, [2], и нет необходимости на нём останавливаться.

В данной работе предлагается другой подход, основанный на предположении о дополнительном сильно «сплюснутом» пространственном измерении. Идея о дополнительном пространственном измерении была выдвинута в работах Калуцы [3] и Клейна [4] и обсуждалась во многих работах, см., например, [5 - 7]. В настоящее время идея дополнительных пространственных измерений интенсивно обсуждается в связи с разработкой теории струн [8] и космологии мира на бране [10].

Простейшей моделью 4-мерного мира с сильно «сплюснутым» одним из четырёх измерений может служить 4-мерный плоскопараллельный резонатор с однородной, изотропной средой, не обладающей дисперсией скорости распространяющихся в ней волн. Зеркала резонатора предполагаются обладающими тем свойством, что коэффициент отражения от них прямой и обратной волн, образующих моду с некоторым продольным индексом, не зависит от поперечных индексов моды. Подчеркнём, что когда говорится о коэффициенте отражения не равном единице, то речь идёт не о потерях излучения, а о трансформации моды с заданным продольным индексом в моды с другими продольными индексами. При этом, как сказано выше, предполагается, что коэффициент трансформации не зависит от поперечных индексов моды.

При неограниченности резонатора множество поперечных индексов является множеством мощности континуума и может быть охарактеризовано углом между волновыми векторами прямой или обратной волн, образующих моду, и осью резонатора, то есть линией перпендикулярной зеркалам.

В работах [10, 11] было показано, что свойства пространственно-временного многообразия Минковского могут быть выведены из законов распространения волн в таком резонаторе. Мода, волны которой распространяются перпендикулярно зеркалам резонатора, то есть вдоль его оси, рассматривается как покоящаяся. Если волны, образующие моду, распространяются под углом к оси резонатора, то, такая мода рассматривается как движущаяся со скоростью $V = c\sin\beta$, где β - угол между волновым вектором прямой волны и осью резонатора, c - скорость распространения волн в резонаторе.

С помощью отображения прямых и обратных волн мод резонатора на всё пространство справа и слева от резонатора эти волны можно заменить одной эквивалентной волной, распространяющейся либо в сторону положительного направления оси координат связанной с дополнительным измерением, либо в сторону противоположного направления. В данной работе рассматривается эквивалентная волна, распространяющаяся в сторону положительного направления указанной оси, что отвечает положительным решениям релятивистских волновых уравнений (Клейна, Фока, Гордона, Дирака и т.д.) [12].

С помощью такого отображения волн в [10, 11] введено понятие евклидова пространства событий. Его спецификой является то, что системы координат в нём являются косоугольными. Пространственные координаты системы отсчёта, связанной с неподвижной модой определяются как проекции точки рассматриваемого пространства на фазовую поверхность эквивалентной волны покоящейся моды. Аналогично определяются пространственные координаты системы отсчёта связанной с движущейся модой. В случае, когда пространство внутри резонатора однородно и изотропно пространственные оси покоящейся или движущейся системы отсчёта, отвечающие этим координатам, для не взаимодействующих друг с другом мод представляют собой прямые линии ортогональные друг другу.

Косоугольность возникает тогда, когда к пространственным осям добавляется временная ось. Дело в том, что разные поперечные моды с одинаковым продольным индексом в силу указанного выше свойства зеркал резонатора уменьшают свою амплитуду в одно и то же число раз при одинаковом числе отражений образующих их волн от зеркал резонатора. При этом эквивалентные волны отвечающие модам с различными поперечными индексами проходят пути разной длины до точки рассматриваемого пространства, где их ослабление достигает заданной величины. Это позволяет ввести временные координаты этой точки через соответствующие длины путей, которые прошли волны. При этом время жизни движущейся моды оказывается больше, чем время жизни покоящейся моды в соответствии с известной формулой теории относительности [13].

В случае, когда пространство внутри резонатора однородно, изотропно и нет дисперсии скоростей волн, для невзаимодействующих друг с другом мод оси, отвечающие этим координатам, представляют собой прямые линии перпендикулярные плоским фазовым поверхностям эквивалентных волн. Для каждой пары мод эти оси лежат в плоскости волновых векторов волн этих мод. Важно отметить то, что временная ось системы отсчёта связанной с неподвижной модой ортогональна фазовой поверхности эквивалентной волны движущейся моды, а временная ось системы отсчёта связанной с движущейся модой перпендикулярна фазовой поверхности эквивалентной волны неподвижной моды. Вследствие этого системы координат связанные как с неподвижной, так и с движущейся модой оказываются косоугольными [11].

В [10, 11] частица определённой массы покоя ассоциируются с модой резонатора с фиксированным продольным индексом. Движущаяся частица ассоциируется с модой того же продольного индекса, но с отличными от нуля поперечными индексами.

При описанном выше подходе для формирования понятий и выводов теории относительности нет необходимости использовать второй постулат А.Эйнштейна, либо принимать гипотезу о псевдоевклидовости пространства-времени. В предположении однородности и изотропности пространства внутри резонатора и отсутствии дисперсии скорости, распространяющихся в нём волн, а также независимости коэффициента трансформации моды от её поперечных индексов этот постулат и гипотеза о псевдоевклидовости являются следствием резонансного условия для волн, образующих моды резонатора.

2. Вывод уравнений

Рассмотрим геометрический образ 4-мерного евклидова пространства событий, рис.1. Ось s соответствует дополнительному четвёртому измерению. Она же совпадает с осью резонатора. Длину резонатора, то есть расстояние между его зеркалами обозначим буквой L. Пространственные оси 3-мерного пространства обозначим как обычно x, y, z.

В силу правил начертательной геометрии многомерных пространств [14] проекция точки 4-мерного пространства на трёхмерное пространство представляет собой точку 3 мерного пространства с некоторым радиус вектором $\mathbf{r}$, рис.1,*а*. Тогда проекция 4-мерного вектора $\mathbf{R}$ на ось s изобразится вектором $\mathbf{R}_0$. Ось времени системы отсчёта связанной с неподвижной модой, которую обозначим, как $l = ct$ будет направлена вдоль вектора $\mathbf{R}$, а временная ось системы отсчёта связанной с движущейся модой и обозначаемая как $l' = ct'$ будет направлена вдоль вектора $\mathbf{R}_0$, то есть вдоль s.

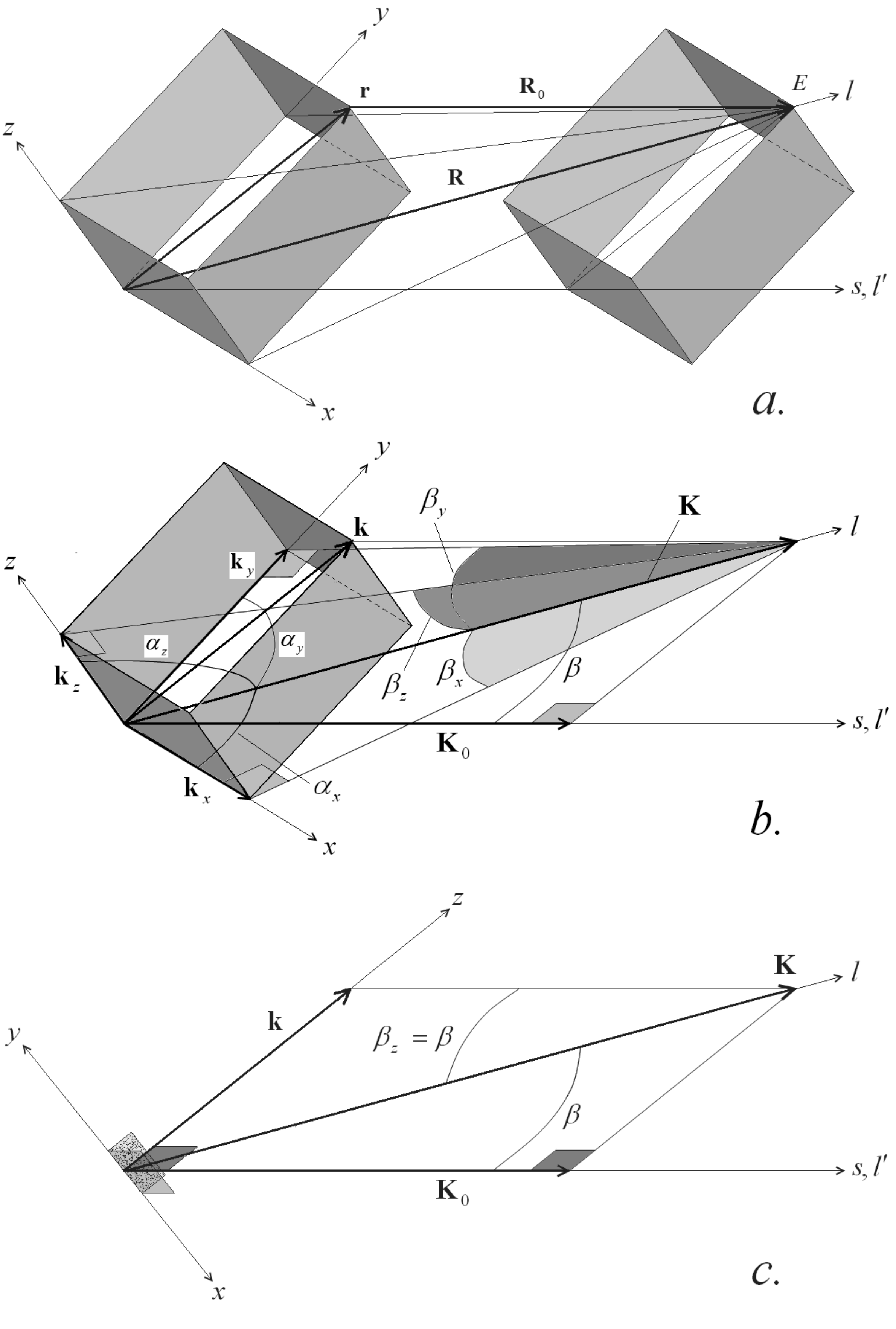
y
z
x
r
$\mathbf{R}_0$
$\mathbf{R}$
E
l
s, l′
a.
k
$\mathbf{k}_y$
$\mathbf{k}_z$
$\mathbf{k}_x$
α_z
α_y
α_x
β_y
β_z
β_x
β
K
$\mathbf{K}_0$
b.
$\beta_z = \beta$
c.

Рис.1.

Аналогичным образом изображается 4-мерный волновой вектор $\mathbf{K}$ эквивалентной волны моды и его проекция $\mathbf{k}$ на трёхмерное пространство, а также его проекция $\mathbf{K}_0$ на ось s, рис.1,*b*. Маленькие ромбики означают, что отмеченные ими углы является прямыми.

Будем рассматривать моды с различными поперечными индексами, но с фиксированным продольным индексом. Ввиду того, что поперечные размеры резонатора неограниченны поперечные индексы моды принимают непрерывный ряд значений, которые можно связать с направляющими косинусами углов между линией, вдоль которой направлен волновой вектор эквивалентной волны, отвечающей данной моде, и осями координат 4-мерного евклидова пространства событий, см. рис.1,*b*. Трёхмерная составляющая волнового вектора

$$\mathbf{k} = K\left(\mathbf{e}_x \cos\alpha_x + \mathbf{e}_y \cos\alpha_y + \mathbf{e}_z \cos\alpha_z\right), \tag{1}$$

где $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ – направляющие косинусы вектора $\mathbf{k}$, $K = |\mathbf{K}|$. Вместе с $\cos\beta$ они образуют направляющие косинусы 4-мерного вектора $\mathbf{K}$ в евклидовом 4-мерном пространстве событий, причём, как обычно [15],

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z + \cos^2\beta = 1. \tag{2}$$

На рис1,*c* пространственные оси системы отсчёта связанной с неподвижной модой повёрнуты так, чтобы ось z была направлена вдоль вектора $\mathbf{k}$, а оси x и y были перпендикулярны оси s. При этом $\cos\alpha_x = \cos\alpha_y = 0$ и $\cos^2\alpha_z = \sin^2\beta$. В этом случае многие задачи кинематики теории относительности и квантовой электродинамики наглядно интерпретируются на двумерной евклидовой плоскости с косоугольными системами координат, связанными с покоящейся и движущейся модами [16 - 19]. Но в данной работе мы не будем прибегать к этому упрощению.

В дальнейшем нам понадобятся синусы углов между линией, вдоль которой направлены волновые вектора прямой и обратной волн, образующих данную продольную моду, и перпендикулярами, опущенными из точки на этой линии на пространственные оси координат: $\sin\beta_x$, $\sin\beta_y$, $\sin\beta_z$, рис.1,*b*. Так как $\sin\beta_x = \cos\alpha_x$, $\sin\beta_y = \cos\alpha_y$, $\sin\beta_z = \cos\alpha_z$, то $\sin^2\beta_x + \sin^2\beta_y + \sin^2\beta_z + \cos^2\beta = 1$ и $\sin^2\beta_x + \sin^2\beta_y + \sin^2\beta_z = \sin^2\beta$. Модуль $|\mathbf{K}| = K = \sqrt{\mathbf{k}^2 + K_0^2}$, а $\sin\beta_x = \dfrac{k_x}{K}$, $\sin\beta_y = \dfrac{k_y}{K}$, $\sin\beta_z = \dfrac{k_z}{K}$.

Условие резонанса по продольному индексу моды q имеет вид: $2LK_0 = 2\pi q$, где $q = 0, 1, 2, \dots$ Отсюда $K_0 = \pi q / L$ - волновое число моды с нулевым поперечным индексом. Для того чтобы для различных поперечных мод условие резонанса по продольному индексу оставалось бы таким же, как и для моды с нулевым поперечным индексом необходимо, чтобы выполнялось условие

$$K \cos\beta = K_0 , \tag{3}$$

где K - волновое число эквивалентной волны моды с поперечными индексами, характеризуемыми углами β_x, β_y, β_z, так как $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta_x - \sin^2\beta_y - \sin^2\beta_z}$.

Пусть до момента времени $t = 0$ ($l = ct = 0$) существовала мода с нулевым поперечным индексом, то есть $\beta = 0$. И пусть с момента времени $t = 0$ во всех точках пространства внутри резонатора волновой фронт как прямой, так и обратной волн начал искривляться. Это означает, что поперечные индексы моды становятся отличными от нуля. Другими словами это означает ускорение моды (частицы). Чтобы существование моды с заданным продольным индексом не нарушилось, то есть, чтобы не было распада частицы на другие частицы, должно по-прежнему выполняться условие резонанса (3). Этого требования оказывается достаточно, чтобы вывести уравнения релятивистской механики, не конкретизируя причины, приводящие к искривлению волнового фронта (ускорению моды (частицы)).

Найдём производную $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{k}}{dl}$. Так как $\mathbf{k} = \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z k_z$, $K = \frac{K_0}{\cos\beta}$, а $\sin\beta_x = \frac{k_x}{K}$, $\sin\beta_y = \frac{k_y}{K}$, $\sin\beta_z = \frac{k_z}{K}$, то

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dl}\left(K \frac{\mathbf{k}}{K}\right) = K_0 \frac{d}{dl} \frac{\mathbf{e}_x \sin\beta_x + \mathbf{e}_y \sin\beta_y + \mathbf{e}_z \sin\beta_z}{\cos\beta} . \tag{4}$$

Покажем, что $\sin\beta_x = \frac{v_x}{c}$, $\sin\beta_y = \frac{v_y}{c}$, $\sin\beta_z = \frac{v_z}{c}$. Имеем

$$\omega / c = K = \sqrt{\mathbf{k}^2 + K_0^2} . \tag{5}$$

Групповые скорости вдоль осей координат x, y, z соответственно $v_x = \dfrac{d\omega}{dk_x}$, $v_y = \dfrac{d\omega}{dk_y}$, $v_z = \dfrac{d\omega}{dk_z}$. Используя формулу (5), получаем

$$\frac{v_x}{c} = \frac{1}{c}\frac{d\omega}{dk_x} = \frac{dK}{dk_x} = \frac{k_x}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + K_0^2}} = \frac{k_x}{K} = \sin\beta_x . \qquad (6)$$

Аналогичные выражения получаются и для скоростей вдоль других осей. Заметим, что скорость распространения результирующей волны в направлении оси дополнительного измерения $\dfrac{v_s}{c} = \dfrac{dK}{dK_0} = \dfrac{K_0}{K} = \cos\beta$, причём

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \qquad (7)$$

Введём обозначение $\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{e}_x \sin\beta_x + \mathbf{e}_y \sin\beta_y + \mathbf{e}_z \sin\beta_z = \dfrac{\mathbf{v}}{c}$, $\upsilon = \dfrac{|\mathbf{v}|}{c} = \dfrac{v}{c}$. Тогда

$$\mathbf{F} = K_0 \frac{d}{dl}\frac{\boldsymbol{\upsilon}}{\cos\beta} = K_0 \frac{d}{dl}\frac{\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2}} . \qquad (8)$$

Так как $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$, $K_0 = m_0 c/\hbar$, $dl = cdt$, то полученное уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_0 \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \qquad (9)$$

а это и есть уравнения релятивистской механики Пуанкаре [1, 2]. Сравнивая две записи уравнений, получаем, что $\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{f}}{c\hbar}$. Размерность $\mathbf{F}$ есть м$^{-2}$.

Аналогичным образом можем получить ещё одно уравнение, которое, как известно [2], является следствием первых трёх уравнений (8) или (9), а именно, имеем

$$\frac{dK}{dl} = \frac{d}{dl}\sqrt{\mathbf{k}^2 + K_0^2} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + K_0^2}}\mathbf{k}\frac{d\mathbf{k}}{dl} = \frac{\mathbf{k}}{K}\frac{d\mathbf{k}}{dl} .$$

Так как $\dfrac{d\mathbf{k}}{dl} = \mathbf{F}$, а $\dfrac{\mathbf{k}}{K} = \boldsymbol{\upsilon} = \dfrac{\mathbf{v}}{c}$, то $\dfrac{dK}{dl} = \boldsymbol{\upsilon}\mathbf{F}$.

Учитывая, что $K = \dfrac{K_0}{\cos\beta} = \dfrac{K_0}{\sqrt{1-\upsilon^2}}$, получаем уравнение

$$K_0 \frac{d}{dl}\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2}} = \boldsymbol{\upsilon}\mathbf{F}, \tag{10}$$

или в обычных обозначениях

$$m_0 \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathbf{fv}, \tag{11}$$

то есть, то самое уравнение релятивистской механика Пуанкаре, которое является следствием первых трёх.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пуанкаре А.** *О динамике электрона*. // Принцип относительности / *Под ред. Тяпкина А.А.* – М.: Атомиздат, 1973. С.118 – 161.
2. **Логунов А.А.** Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. 272 с.
3. **Kaluza Th.** *Zum Unitatsproblem der Physik*. Sitzungsberichte d. Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.). 1921, S.966-972.
4. **Klein O.** *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie (Quantum Theory and fivedimensional General Relativity)*. Zs. f. Phys. 1926. V. 37. P.895-906.
5. **Соколов А., Иваненко Д.** *Квантовая теория поля (избранные вопросы).* Москва, Ленинград. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1952. С.618-626.
6. **Румер Ю.Б**. *Исследования по 5-оптике.* Москва. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1956. 152 с.
7. **Бергман П.** *Единые теории поля*. УФН. Сентябрь 1980. Т. 132, № 1, С. 177-190.
8. **Яу Ш, Надис С.** *Теория струн и скрытые измерения Вселенной. // Пер.с англ. А.Мороз, И.Рузмайкина, В.Семинько.* СПб.: Питер, 2012. 400 с.
9. **Рубаков В.А.** *Большие и бесконечные дополнительные измерения*. УФН, 2001, Т. 171, № 9, С. 913 – 938.
10. **Орлов Е.П.** *Пространственно-временные отношения между модами резонатора с параллельными плоскими зеркалами*. Препринт ФИАН № 16. Москва, 2004. 17 с.

11. **Орлов Е.П.** *Описание пространственно-временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора с помощью косоугольных систем координат*. Препринт ФИАН № 16. Москва, 2009. 32 с.
12. **Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** *Квантовая электродинамика (Серия: «Теоретическая физика», том IV).* М.: Физматлит. 2001. 720 с.
13. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** *Теория поля (Серия: «Теоретическая физика», том II)*. М.: Физматлит. 1988. 512 с.
14. **Куликов С.М.** *Введение в начертательную геометрию многомерных пространств.* М.: Машиностроение. 1970. 84 с.
15. **Корн Г., Корн Т.** *Справочник по математике для научных работников и инженеров. // Пер. с английского И.Г.Арамановича, А.М.Березмана, И.А.Вайнштейна, Л.З.Румшиского и Л.Я.Цлафа. Под общ. Ред. И.Г.Арамановича.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 720 с.
16. **Манкевич С.К., Орлов Е.П.** *Теория относительности и метод лазерной локации.* Препринт ФИАН № 7. Москва, 2010. 43 с.
17. **Орлов Е.П.** *О решениях уравнения Дирака для свободной частицы в косоугольных системах координат евклидова пространства событий*. Препринт ФИАН № 1. Москва, 2011. 31 с.
18. **Орлов Е.П.** *Представление Фолди-Вутхайзена в евклидовом пространстве событий с косоугольными системами координат.* Препринт ФИАН № 15. Москва, 2011. 18 с.
19. **Орлов Е.П.** *О представлении Майораны с точки зрения евклидова пространства событий с косоугольными системами координат*. Препринт ФИАН № 40. Москва, 2011. 25 с.

Подписано в печать 19.06.2013 г.
Формат 60x84/16. Заказ №39. Тираж 140 экз. П.л 3.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640