

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

**Физический
ИНСТИТУТ**



*имени
П.Н. Лебедева*

Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

13

В.С. ШПАКОВ, С.Б. ДАБАГОВ

**О РАСХОДИМОСТИ ПУЧКА
В ДИФРАКЦИОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ**

Москва 2013

О расходимости пучка в дифракционном излучении

Шпаков В., Дабагов С.Б.

17 октября 2013 г.

Аннотация

Современные достижения физики ускорителей позволяют нам работать со все более возрастающими энергиями пучков частиц. Однако, увеличение энергии пучков приводит к необходимости решения дополнительных задач. В частности, появляется необходимость в создании новых методов для диагностики пучков. Одним из многообещающих решений является диагностика пучка с помощью Дифракционного Излучения (ДИ).

Методы диагностики пучков на основе ДИ позволяют определять поперечные параметры пучка, включая его расходимость. Влияние расходимости пучка на конечную картину углового распределения ДИ было изучено в настоящей работе. ДИ может использоваться не только для диагностики в поперечном направлении, но и для диагностики в продольном направлении. По аналогии с методами измерения продольных размеров пучков на основе Переходного Излучения, длина пучка может быть восстановлена из зависимости интенсивности ДИ от длины волны излучения. Влияние расходимости пучка на его форм-фактор также исследовано в данной работе.

1 Дифракционное излучение от пучка заряженных частиц

Особенностью ДИ является тот факт, что излучение появляется без непосредственного контакта частицы с препятствием, в отличие от, например, переходного излучения. А в силу малой энергии излучения (много меньшей чем энергия частицы), ДИ является прекрасным кандидатом на роль инструмента для не возмущающей диагностики.

Дифракционное излучение (ДИ) от одной частицы, проходящей через щель, рассматривалось в ряде работ [1, 2]. Однако, в реальности при работе с ДИ имеет место совокупное излучение от пучка частиц, которое может быть как когерентным, так и некогерентным. Влияние размеров пучка было исследовано в предыдущих работах как теоретически так и экспериментально [7, 8, 9]. Данная работа посвящена теоретическому исследованию влияния расходимости пучка на суммарную интенсивность ДИ.

Для начала рассмотрим влияние расходимости пучка на качественном уровне. Так как в данной работе мы рассматриваем некогерентный пучок, очевидно, что полная интенсивность излучения, создаваемая пучком заряженных частиц, должна составлять некоторую сумму интенсивностей излучения от каждой частицы. Предполагая, что параметры всех частиц одинаковы за исключением угла падения, мы можем записать:

$$I_{tot} = \sum I_{part}(\Delta\Theta),$$

где $\Delta\Theta$ есть угол падения частицы на щель. Все что осталось сделать это понять каким образом этот угол будет определяться в выражении для ДИ от одной частицы. В выражениях для ДИ, полученных ранее [1, 2], чаще всего все углы, используемые в формулах, отсчитываются от направления движения частицы. Однако, раз мы имеем разные углы падения частиц на щель мы, соответственно, имеем и разные направления скорости частицы. Разумеется, при нахождении суммарной интенсивности ДИ от пучка излучение от каждой отдельной частицы должно рассчитываться в одном и том же направлении. Следовательно, угол падения должен войти в выражение для ДИ от одной частицы таким образом, чтобы угол излучения отсчитывался для всех частиц от одного и того же направления (проще всего - от нормали к плоскости щели или от направления движения всего пучка). Вторым моментом, который также необходимо принять во внимание это собственно изменение угла падения частицы на щель, так как записанные ранее формулы были получены для нормального падения.

Для получения непосредственно выражений для расчета интенсивности проще всего обратиться к методу псевдо-фотонов. Согласно методу псевдофотонов мы можем рассматривать взаимодействие между полем частицы и средой (далее, щелью) как рассеяние плоской электромагнитной волны,

применяя принцип Гюйгенса для расчета результирующего излучения. В соответствии с принципом Гюйгенса, каждая точка, до которой дошла волна, сама становится источником излучения вторичных сферических волн. Амплитуда таких волн определяется полем частицы в этой точке, а конечное излучение может быть рассчитано как суперпозиция всех вторичных волн.

Рассмотрим щель и частицу, падающую на нее под некоторым углом (Рис. 1). Фазовый сдвиг между излучением от верхней и нижней полуплос-

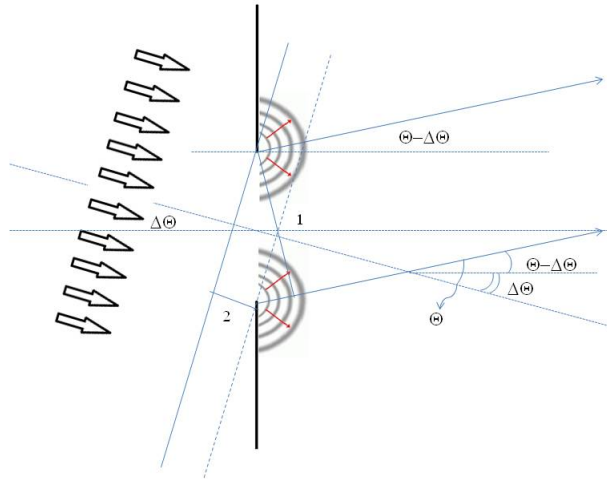


Рис. 1: Фазовая разница, возникающая для ДИ от верхней и нижней полуплоскостей в случае падения частицы под углом $\Delta\Theta$.

костей появляется за счет двух факторов. Первая разница в фазе определяется разной длиной пути. Она определяется размерами щели и углом, под которым мы наблюдаем излучение, который должен быть отложен не от направления скорости частицы (то есть Θ), а от нормального направления к щели (то есть $\Theta - \Delta\Theta$). Таким образом, мы можем записать первую разность фаз как:

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\Theta - \Delta\Theta) = k_y a,$$

здесь a - размер щели, λ - длина волны излучения. Вторая часть разности фаз появляется за счет задержки между моментами излучения от верхней и нижней полуплоскостей. Мы предполагаем, что момент излучения совпадает с моментом, когда поле частицы прибывает в точку излучения. Для релятивистской частицы мы можем рассматривать поле только в плоскости, перпендикулярной вектору скорости частицы. Тогда разность фаз появляется за счет того, что частице необходимо пройти расстояние "2" (Рис. 1) перед тем как поле "достигает" второй полуплоскости. Тогда ($\beta \sim 1$) получаем,

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\Delta\Theta)$$

Теперь попробуем включить эти фазовые смещения в выражения для ДИ. Рассмотрим выражение для одной из поляризаций ДИ для нормально падающей частицы Рис.(1) [1, 2]:

$$E_y^i(h_x, h_y) = \frac{-ie}{(2\pi)^2 V} \int \int \frac{\varkappa_x, \varkappa_y e^{i(\varkappa_x h_x + \varkappa_y h_y)}}{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \alpha^2} d\varkappa_x d\varkappa_y \quad (1)$$

Рдесь h_x и h_y задают координаты на поверхности щели (Рис. 2) [1], $\varkappa = \frac{\omega}{V}$,

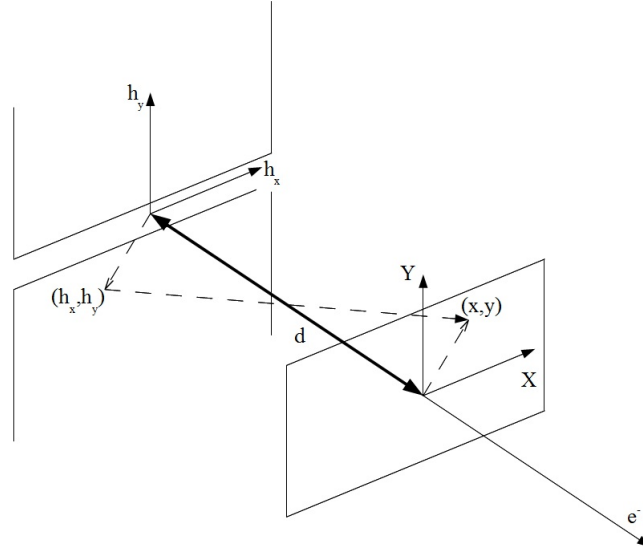


Рис. 2: Дифракционное излучение от щели.

$\alpha = \frac{k}{\beta\gamma}$. Это выражение было получено из (2) при условии, что частица падает на щель перпендикулярно плоскости щели и $z = 0$. Для расчета поля частицы, падающей под некоторым углом такое предположение неверно, так как плоскость поля частицы (которое, по нашему предположению перпендикулярно вектору скорости частицы) более не параллельна плоскости щели.

$$\vec{E}_\perp = \frac{-i}{(2\pi)^3 V} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\varkappa} \vec{\varkappa}_\rho e^{i(\vec{\varkappa} \vec{r} - \omega t)} d\varkappa_x d\varkappa_y d\omega \quad (2)$$

Таким образом, мы можем записать новое выражение, учитывающее разное положение излучателей по z (более подробно использованные выкладки представлены в работах [1, 2]):

$$E_y^i(h_x, h_y) = \frac{-ie}{(2\pi)^3 V} e^{i(\frac{\omega}{V} z)} \int \frac{\varkappa_x, \varkappa_y e^{i(\varkappa_x h_x + \varkappa_y h_y)}}{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \alpha^2} d\varkappa_x d\varkappa_y \quad (3)$$

Как можно видеть, разница между выражениями (1) и (3) заключается в наличии экспоненты $e^{i(\frac{\omega}{V} z)}$, и для нормально падающей частицы (3) переходит обратно в (1). Тогда, запишем выражение для ДИ:

$$E_y^{DR}(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int E_y^i(h_x, h_y) e^{-i(k_x h_x + k_y h_y)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} h_y \sin \Delta\Theta} dh_x dh_y \quad (4)$$

В этом выражении разность фаз Φ_2 выражена через экспоненту $e^{i\frac{2\pi}{\lambda} h_y \sin \Delta\Theta}$. Разность фаз, определяемая Φ_1 , заключена в $e^{-i(k_y h_y)}$ и, как было указано выше, она возникает из необходимости отсчитывать угол излучения от одного направления для разных частиц. Таким образом, предполагая что углы достаточно малы, мы можем записать:

$$e^{-i(k_y h_y)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} y \sin \Delta\Theta} \sim e^{-ih_y \frac{2\pi}{\lambda} (\Theta - 2\Delta\Theta)}$$

Проводя вычисления аналогично проведенным в [1, 2] мы можем получить искомые выражения. Отметим, что полагая угол падения $\Delta\Theta = 0$, мы получим выражения для нормально падающей частицы. Возвращаясь к вопросу о вычислении ДИ от пучка частиц, мы можем получить выражение для расчета интенсивности для некогерентного пучка. Таким образом, зная зависимость интенсивности ДИ одной частицы от угла падения и заменяя сумму интегрированием по углам падения, запишем:

$$I_{tot} = \int_{\sigma_y}^{\sigma_y} F(h_{y0}) \left(\int_{\sigma'_y}^{\sigma'_y} G(\Delta\Theta) |E_y^{DR}(h_{y0}, \Theta - 2\Delta\Theta)|^2 d\Delta\Theta \right) dh_{y0} \quad (5)$$

здесь пределы интегрирования σ_y и σ'_y определены размером и расходимостью пучка, соответственно, а функции $F(h_{y0})$ и $G(\Delta\Theta)$ задают, соответственно, распределение пучка по поперечным размерам пучка и его расходимости. Отметим, что в этом выражении мы учли поперечные размеры пучка [3].

Необходимо отметить, что в работе [3] также рассматривалось влияние расходимости пучка на суммарную интенсивность ДИ от непараллельного пучка. Полученный в той работе результат несколько отличается от результата, полученного в данной работе. Разница касается лишь расходимости в одном из направлений (в плоскости перпендикулярной щели):

$$I_{tot} = \int_{\sigma_y}^{\sigma_y} dh_{y0} F(h_{y0}) \left(\int_{\sigma'_x, \sigma'_y}^{\sigma'_x, \sigma'_y} G(\Delta\Theta_x, \Delta\Theta_y) |E_y^{DR}(h_{x0}, h_{y0}, \Theta_y - 2\Delta\Theta_y, \Theta_x - \Delta\Theta_x)|^2 d\Delta\Theta_y d\Delta\Theta_x \right) \quad (6)$$

Полная интенсивность с учетом размеров и расходимости пучка может быть записана как (6). Разница с работой [3] заключается только в коэффициенте 2 при угле расходимости в плоскости перпендикулярной щели.

Однако, в данной работе рассматривается только одна из компонент вектора \vec{E} - в направлении "у" на Рис. 2. Также нужно отметить, что разница в результатах, полученных с помощью нового выражения, заключается только в численных значениях расходимости, в то время как форма самого углового распределения, полученного с помощью нового выражения, не отличается от такового из работы [3].

2 Влияние расходимости пучка на форм-фактор пучка для ДИ

В первой части данной работы рассмотрено влияние расходимости пучка на конечную картину ДИ для полностью некогерентного пучка. В этом случае угловое распределение ДИ может быть использовано для диагностики пучка в поперечном направлении. Однако, ДИ также может быть использовано и для диагностики в продольном направлении. Для этого необходимо иметь информацию о зависимости форм-фактора пучка от длины волны излучения. Влияние продольных и поперечных размеров пучка на форм-фактор, и соответственно, методы их измерения были исследованы в ряде работ [4, 5]. В настоящей работе мы попробуем определить как влияет расходимость пучка на его форм-фактор и в каких ситуациях это влияние может быть значимым.

Как известно, интенсивность излучения пучка частиц (в общем случае любого излучения: ДИ, Переходного излучения, т.п. ...) зависит от степени когерентности пучка [6]:

$$I = I_0(N + N(N - 1)F) \quad (7)$$

где N - количество частиц в пучке, I_0 - интенсивность излучения от одной частицы, а F - интересующий нас форм-фактор пучка. Степень когерентности пучка выражается через его форм-фактор, который, в свою очередь, зависит от параметров самого пучка и длины волны излучения. Зная зависимость $I(\lambda)$, мы можем восстановить параметры пучка. Данный метод достаточно широко используется в настоящее время.

Полный форм-фактор пучка может быть представлен как:

$$F_{tot} = \left| \int_V S(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \right|^2, \quad (8)$$

где $S(\vec{r})$ - распределение частиц в пучке и \vec{k} - волновой вектор излучения. Интегрирование проводится по всему объему, занимаемому пучком. Как было показано в [2] мы можем разделить поперечные и продольные размеры пучка и представить форм-фактор в виде:

$$F_{tot} = \left| \int_V dx dy dz S_L(z) S_T(x, y) e^{-\frac{2\pi y \sqrt{1+\gamma^2 \beta^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \psi}}{\gamma \beta \lambda}} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (x \sin \Theta \sin \psi + \frac{z}{\beta})} \right|^2 = F_L F_T, \quad (9)$$

где $S_L(z)$ и $S_T(x, y)$ - распределения частиц в продольном и поперечном направлениях, соответственно, γ и β - релятивистский коэффициент и скорость частицы, соответственно. Координаты x, y и z представлены на Рис. 3, и углы Θ и ψ определяют направление излучения.

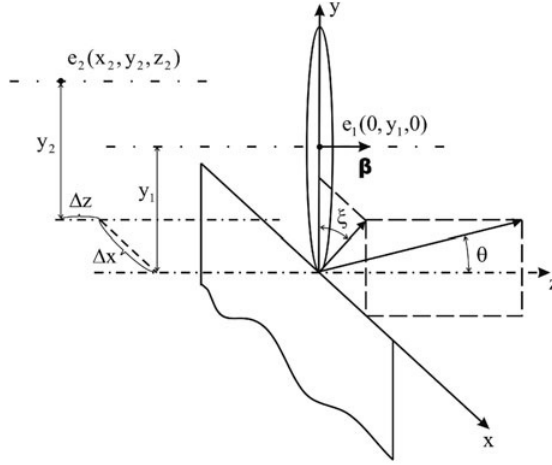


Рис. 3: ДИ от двух частиц [2].

Предположим, что распределение частиц во всех плоскостях соответствует нормальному распределению. Тогда, мы можем рассчитать F_L и F_T следующим образом:

$$F_L = e^{-\frac{4\pi^2}{\lambda^2 \beta^2} \sigma_z^2}, \quad (10)$$

$$F_T = e^{\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \left(\sigma_y^2 \frac{1}{\gamma^2 \beta^2} + \sigma_y^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \psi - \sigma_x^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \psi \right)} \quad (11)$$

где $\sigma_{x,y,z}$ - среднее отклонение частиц от центра пучка. Предполагая, что мы рассматриваем пучки с высокой энергией, мы можем положить углы Θ и $\psi \sim \gamma^{-1}$. Пренебрегая членами порядка γ^{-3} и выше, мы можем записать F_{tot} в виде:

$$F_{tot} = e^{\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \left(\frac{\sigma_y^2}{\gamma^2 \beta^2} - \frac{2}{\beta^2} \sigma_z^2 \right)} \quad (12)$$

Как можно видеть из представленного выражения, влияние поперечного размера пучка на его форм-фактор практически всегда пренебрежимо мало, и фактически $F_{tot} = F_L$. Исключения могут составлять пучки с параметрами $\sigma_y \sim \gamma \sigma_z$. Таким образом, для пучка с энергией ~ 1 GeV поперечный

размер пучка электронов должен быть больше продольного в 2000 раз, и при увеличении энергии это соотношение будет только увеличиваться.

Для того чтобы учесть в форм-факторе расходимость пучка, рассмотрим плоскость "z-y" на рисунке 3. Для нормально проходящих через щель частиц фазовая разность между ДИ определяется только расстоянием между частицами в пучке (Рис. 4а). Однако, если одна из частиц проходит через щель под некоторым углом, появляется дополнительная разность фаз (Рис. 4б). Как и в предыдущей части данной работы, мы предполагаем, что ДИ появляется в момент, когда поле частицы достигает точки излучения, а не в момент, когда частица проходит через щель. Строго говоря, такая частица (с отличным от нормального углом падения) может иметь другой прицельный параметр. Однако, прицельный параметр определяется поперечными размерами пучка, но, как было показано выше, они играют незначительную роль в формировании форм-фактора. Таким образом, выражение для продольного форм-фактора принимает вид

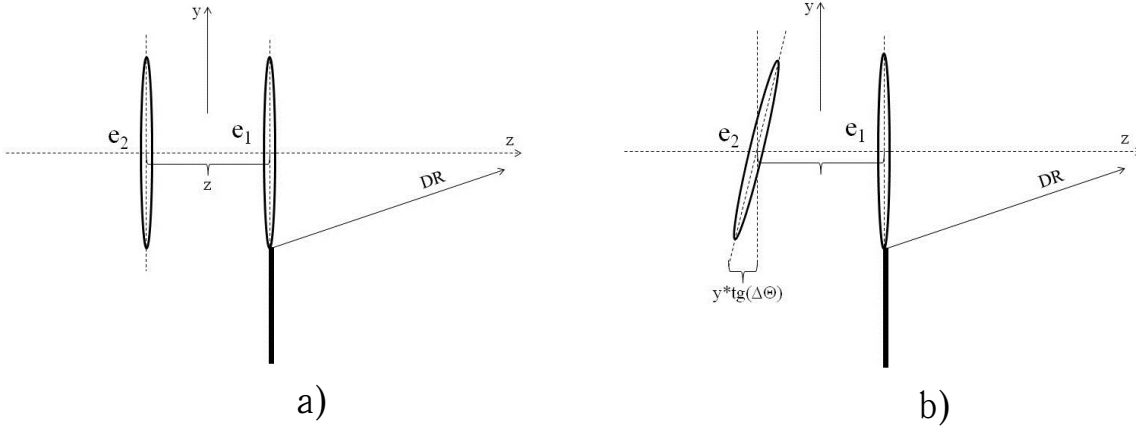


Рис. 4: Частицы с различными углами падения.

$$F_L = \int \int dz d(\Delta\Theta) S_l(z) S_{div}(\Delta\Theta) e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \left(\frac{z}{\beta} + y \tan(\Delta\Theta) \right)} \quad (13)$$

Здесь S_{div} - угловое распределение частиц в пучке, а "y" прицельный параметр пучка. При расчете мы также положим, что S_{div} нормальное распределение, а $\Delta\Theta$ будем считать достаточно маленьким, $\tan(\Delta\Theta) \sim \Delta\Theta$. Тогда

$$F_L = e^{-\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \left(\frac{\sigma_z^2}{\beta^2} + y^2 \sigma_{div}^2 \right)} \quad (14)$$

Для случая релятивистских частиц ($\beta \sim 1$) расходимость пучка может играть существенную роль в формировании форм-фактора пучка при условии $\sigma_z \sim y \sigma_{div}$. Для примера, рассмотрим излучение ДИ для пучка проходящего в 20 мм от препятствия. В таком случае при $\sigma_{div} \sim 100 \mu rad$ расходимость может играть значимую роль при длине пучка $\sim 10 \mu m$ ($\sim 10^{-14}$ сек).

3 Заключение

В данной работе рассмотрена роль расходимости пучка в формировании ДИ. В первой части рассмотрено влияние расходимости пучка на конечную картину углового распределения для полностью не когерентного пучка. Полученные выражения позволяют рассчитывать суммарную интенсивность ДИ, что важно для диагностики пучка в поперечном направлении с помощью ДИ.

Во второй части данной работы рассмотрена роль расходимости пучка для ДИ в случае когерентного пучка. Показано каким образом расходимость пучка может влиять на формирование форм-фактора, а также случаи когда это влияние может быть значимым.

Список литературы

- [1] M.L. Ter-Mikaelian, High-energy electromagnetic processes in condensed media, Wiley Interscience, New York (1972).
- [2] A.P. Potylitsyn, M.I. Ryazanov, M.N. Strikhanov, A.A. Tishchenko, Diffraction radiation from relativistic particles. STMP 239 (Springer, Berlin Heidelberg 2010).
- [3] N. Potylitsina-Kube, X. Artru, Nucl. Instr. Meth in Phys. Res. **B 201** (2003) 172-183.
- [4] A.P. Potylitsyn, Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res. **B 227** (2005) 191-197.
- [5] L. G. Sukhikh, G. Kube, A. P. Potylitsyn, and V. Schlott, Proceedings of DIPAC2011, Hamburg, Germany
- [6] John S. Nodvick and David S. Saxon, Phys. Rev. **96** (1954) 180-184.
- [7] P. Karataev, S. Araki, R. Hamatsu, H. Hayano, T. Muto, G. Naumenko, A. Potylitsyn, N. Terunuma, J. Urakawa, Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res. **B 227** (2005) 158–169.
- [8] V. Shpakov, S.B. Dabagov, M. Castellano A. Cianchi, K. Honkavaara, G. Kube, E. Chiadroni, Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res. **B 309** (2013) 194–197.
- [9] A. Cianchi, M. Castellano, L. Catani, E. Chiadroni, K. Honkavaara, G. Kube, Phys. Rev. **14** (2011) 102803.

Подписано в печать 11.10.2013 г.
Формат 60x84/16. Заказ №55. Тираж 140 экз. П.л 0,75.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640

О расходимости пучка в дифракционном излучении

Шпаков В., Дабагов С.Б.

17 октября 2013 г.

Аннотация

Современные достижения физики ускорителей позволяют нам работать со все более возрастающими энергиями пучков частиц. Однако, увеличение энергии пучков приводит к необходимости решения дополнительных задач. В частности, появляется необходимость в создании новых методов для диагностики пучков. Одним из многообещающих решений является диагностика пучка с помощью Дифракционного Излучения (ДИ).

Методы диагностики пучков на основе ДИ позволяют определять поперечные параметры пучка, включая его расходимость. Влияние расходимости пучка на конечную картину углового распределения ДИ было изучено в настоящей работе. ДИ может использоваться не только для диагностики в поперечном направлении, но и для диагностики в продольном направлении. По аналогии с методами измерения продольных размеров пучков на основе Переходного Излучения, длина пучка может быть восстановлена из зависимости интенсивности ДИ от длины волны излучения. Влияние расходимости пучка на его форм-фактор также исследовано в данной работе.

1 Дифракционное излучение от пучка заряженных частиц

Особенностью ДИ является тот факт, что излучение появляется без непосредственного контакта частицы с препятствием, в отличии от, например, переходного излучения. А в силу малой энергии излучения (много меньшей чем энергия частицы), ДИ является прекрасным кандидатом на роль инструмента для не возмущающей диагностики.

Дифракционное излучение (ДИ) от одной частицы, проходящей через щель, рассматривалось в ряде работ [1, 2]. Однако, в реальности при работе с ДИ имеет место совокупное излучение от пучка частиц, которое может быть как когерентным, так и некогерентным. Влияние размеров пучка было исследовано в предыдущих работах как теоретически так и экспериментально [7, 8, 9]. Данная работа посвящена теоретическому исследованию влияния расходимости пучка на суммарную интенсивность ДИ.

Для начала рассмотрим влияние расходимости пучка на качественном уровне. Так как в данной работе мы рассматриваем некогерентный пучок, очевидно, что полная интенсивность излучения, создаваемая пучком заряженных частиц, должна составлять некоторую сумму интенсивностей излучения от каждой частицы. Предполагая, что параметры всех частиц одинаковы за исключением угла падения, мы можем записать:

$$I_{tot} = \sum I_{part}(\Delta\Theta),$$

где $\Delta\Theta$ есть угол падения частицы на щель. Все что осталось сделать это понять каким образом этот угол будет определяться в выражении для ДИ от одной частицы. В выражениях для ДИ, полученных ранее [1, 2], чаще всего все углы, используемые в формулах, отсчитываются от направления движения частицы. Однако, раз мы имеем разные углы падения частиц на щель мы, соответственно, имеем и разные направления скорости частицы. Разумеется, при нахождении суммарной интенсивности ДИ от пучка излучение от каждой отдельной частицы должно рассчитываться в одном и том же направлении. Следовательно, угол падения должен войти в выражение для ДИ от одной частицы таким образом, чтобы угол излучения отсчитывался для всех частиц от одного и того же направления (проще всего - от нормали к плоскости щели или от направления движения всего пучка). Вторым моментом, который также необходимо принять во внимание это собственно изменение угла падения частицы на щель, так как записанные ранее формулы были получены для нормального падения.

Для получения непосредственно выражений для расчета интенсивности проще всего обратиться к методу псевдо-фотонов. Согласно методу псевдофотонов мы можем рассматривать взаимодействие между полем частицы и средой (далее, щелью) как рассеяние плоской электромагнитной волны,

применяя принцип Гюйгенса для расчета результирующего излучения. В соответствии с принципом Гюйгенса, каждая точка, до которой дошла волна, сама становится источником излучения вторичных сферических волн. Амплитуда таких волн определяется полем частицы в этой точке, а конечное излучение может быть рассчитано как суперпозиция всех вторичных волн.

Рассмотрим щель и частицу, падающую на нее под некоторым углом (Рис. 1). Фазовый сдвиг между излучением от верхней и нижней полуплос-

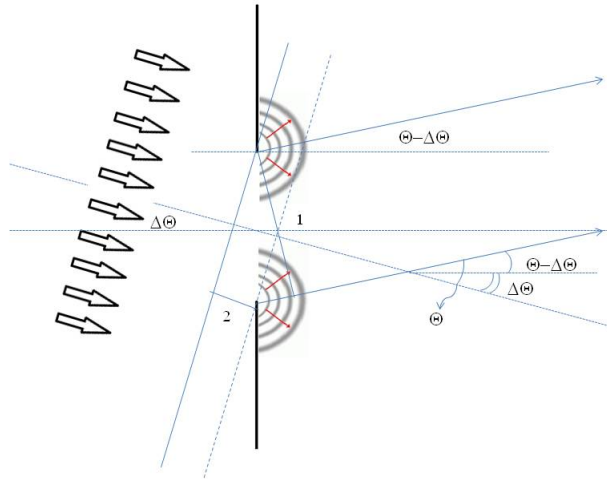


Рис. 1: Фазовая разница, возникающая для ДИ от верхней и нижней полуплоскостей в случае падения частицы под углом $\Delta\Theta$.

костей появляется за счет двух факторов. Первая разница в фазе определяется разной длиной пути. Она определяется размерами щели и углом, под которым мы наблюдаем излучение, который должен быть отложен не от направления скорости частицы (то есть Θ), а от нормального направления к щели (то есть $\Theta - \Delta\Theta$). Таким образом, мы можем записать первую разность фаз как:

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\Theta - \Delta\Theta) = k_y a,$$

здесь a - размер щели, λ - длина волны излучения. Вторая часть разности фаз появляется за счет задержки между моментами излучения от верхней и нижней полуплоскостей. Мы предполагаем, что момент излучения совпадает с моментом, когда поле частицы прибывает в точку излучения. Для релятивистской частицы мы можем рассматривать поле только в плоскости, перпендикулярной вектору скорости частицы. Тогда разность фаз появляется за счет того, что частице необходимо пройти расстояние "2" (Рис. 1) перед тем как поле "достигает" второй полуплоскости. Тогда ($\beta \sim 1$) получаем,

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\Delta\Theta)$$

Теперь попробуем включить эти фазовые смещения в выражения для ДИ. Рассмотрим выражение для одной из поляризаций ДИ для нормально падающей частицы Рис.(1) [1, 2]:

$$E_y^i(h_x, h_y) = \frac{-ie}{(2\pi)^2 V} \int \int \frac{\varkappa_x, \varkappa_y e^{i(\varkappa_x h_x + \varkappa_y h_y)}}{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \alpha^2} d\varkappa_x d\varkappa_y \quad (1)$$

Рдесь h_x и h_y задают координаты на поверхности щели (Рис. 2) [1], $\varkappa = \frac{\omega}{V}$,

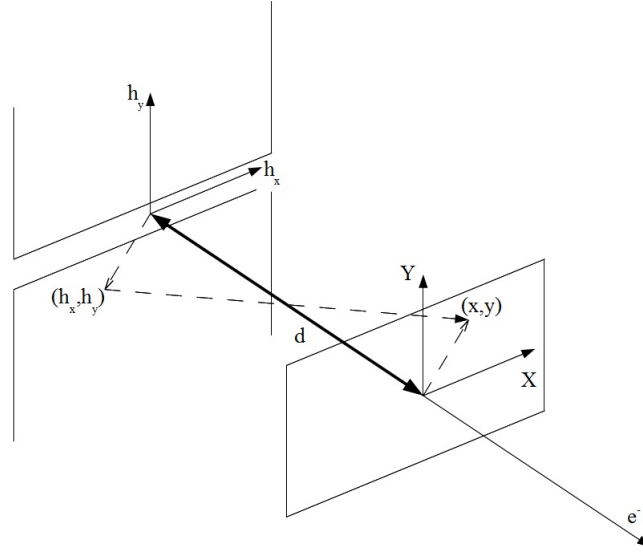


Рис. 2: Дифракционное излучение от щели.

$\alpha = \frac{k}{\beta\gamma}$. Это выражение было получено из (2) при условии, что частица падает на щель перпендикулярно плоскости щели и $z = 0$. Для расчета поля частицы, падающей под некоторым углом такое предположение неверно, так как плоскость поля частицы (которое, по нашему предположению перпендикулярно вектору скорости частицы) более не параллельна плоскости щели.

$$\vec{E}_\perp = \frac{-i}{(2\pi)^3 V} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\varkappa} \vec{\varkappa}_\rho e^{i(\vec{\varkappa} \vec{r} - \omega t)} d\varkappa_x d\varkappa_y d\omega \quad (2)$$

Таким образом, мы можем записать новое выражение, учитывающее разное положение излучателей по z (более подробно использованные выкладки представлены в работах [1, 2]):

$$E_y^i(h_x, h_y) = \frac{-ie}{(2\pi)^3 V} e^{i(\frac{\omega}{V} z)} \int \frac{\varkappa_x, \varkappa_y e^{i(\varkappa_x h_x + \varkappa_y h_y)}}{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \alpha^2} d\varkappa_x d\varkappa_y \quad (3)$$

Как можно видеть, разница между выражениями (1) и (3) заключается в наличии экспоненты $e^{i(\frac{\omega}{V} z)}$, и для нормально падающей частицы (3) переходит обратно в (1). Тогда, запишем выражение для ДИ:

$$E_y^{DR}(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int E_y^i(h_x, h_y) e^{-i(k_x h_x + k_y h_y)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} h_y \sin \Delta\Theta} dh_x dh_y \quad (4)$$

В этом выражении разность фаз Φ_2 выражена через экспоненту $e^{i\frac{2\pi}{\lambda} h_y \sin \Delta\Theta}$. Разность фаз, определяемая Φ_1 , заключена в $e^{-i(k_y h_y)}$ и, как было указано выше, она возникает из необходимости отсчитывать угол излучения от одного направления для разных частиц. Таким образом, предполагая что углы достаточно малы, мы можем записать:

$$e^{-i(k_y h_y)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} y \sin \Delta\Theta} \sim e^{-ih_y \frac{2\pi}{\lambda} (\Theta - 2\Delta\Theta)}$$

Проводя вычисления аналогично проведенным в [1, 2] мы можем получить искомые выражения. Отметим, что полагая угол падения $\Delta\Theta = 0$, мы получим выражения для нормально падающей частицы. Возвращаясь к вопросу о вычислении ДИ от пучка частиц, мы можем получить выражение для расчета интенсивности для некогерентного пучка. Таким образом, зная зависимость интенсивности ДИ одной частицы от угла падения и заменяя сумму интегрированием по углам падения, запишем:

$$I_{tot} = \int_{\sigma_y}^{\sigma_y} F(h_{y0}) \left(\int_{\sigma'_y}^{\sigma'_y} G(\Delta\Theta) |E_y^{DR}(h_{y0}, \Theta - 2\Delta\Theta)|^2 d\Delta\Theta \right) dh_{y0} \quad (5)$$

здесь пределы интегрирования σ_y и σ'_y определены размером и расходимостью пучка, соответственно, а функции $F(h_{y0})$ и $G(\Delta\Theta)$ задают, соответственно, распределение пучка по поперечным размерам пучка и его расходимости. Отметим, что в этом выражении мы учли поперечные размеры пучка [3].

Необходимо отметить, что в работе [3] также рассматривалось влияние расходимости пучка на суммарную интенсивность ДИ от непараллельного пучка. Полученный в той работе результат несколько отличается от результата, полученного в данной работе. Разница касается лишь расходимости в одном из направлений (в плоскости перпендикулярной щели):

$$I_{tot} = \int_{\sigma_y}^{\sigma_y} dh_{y0} F(h_{y0}) \left(\int_{\sigma'_x, \sigma'_y}^{\sigma'_x, \sigma'_y} G(\Delta\Theta_x, \Delta\Theta_y) |E_y^{DR}(h_{x0}, h_{y0}, \Theta_y - 2\Delta\Theta_y, \Theta_x - \Delta\Theta_x)|^2 d\Delta\Theta_y d\Delta\Theta_x \right) \quad (6)$$

Полная интенсивность с учетом размеров и расходимости пучка может быть записана как (6). Разница с работой [3] заключается только в коэффициенте 2 при угле расходимости в плоскости перпендикулярной щели.

Однако, в данной работе рассматривается только одна из компонент вектора \vec{E} - в направлении "у" на Рис. 2. Также нужно отметить, что разница в результатах, полученных с помощью нового выражения, заключается только в численных значениях расходимости, в то время как форма самого углового распределения, полученного с помощью нового выражения, не отличается от такового из работы [3].

2 Влияние расходимости пучка на форм-фактор пучка для ДИ

В первой части данной работы рассмотрено влияние расходимости пучка на конечную картину ДИ для полностью некогерентного пучка. В этом случае угловое распределение ДИ может быть использовано для диагностики пучка в поперечном направлении. Однако, ДИ также может быть использовано и для диагностики в продольном направлении. Для этого необходимо иметь информацию о зависимости форм-фактора пучка от длины волны излучения. Влияние продольных и поперечных размеров пучка на форм-фактор, и соответственно, методы их измерения были исследованы в ряде работ [4, 5]. В настоящей работе мы попробуем определить как влияет расходимость пучка на его форм-фактор и в каких ситуациях это влияние может быть значимым.

Как известно, интенсивность излучения пучка частиц (в общем случае любого излучения: ДИ, Переходного излучения, т.п. ...) зависит от степени когерентности пучка [6]:

$$I = I_0(N + N(N - 1)F) \quad (7)$$

где N - количество частиц в пучке, I_0 - интенсивность излучения от одной частицы, а F - интересующий нас форм-фактор пучка. Степень когерентности пучка выражается через его форм-фактор, который, в свою очередь, зависит от параметров самого пучка и длины волны излучения. Зная зависимость $I(\lambda)$, мы можем восстановить параметры пучка. Данный метод достаточно широко используется в настоящее время.

Полный форм-фактор пучка может быть представлен как:

$$F_{tot} = \left| \int_V S(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \right|^2, \quad (8)$$

где $S(\vec{r})$ - распределение частиц в пучке и \vec{k} - волновой вектор излучения. Интегрирование проводится по всему объему, занимаемому пучком. Как было показано в [2] мы можем разделить поперечные и продольные размеры пучка и представить форм-фактор в виде:

$$F_{tot} = \left| \int_V dx dy dz S_L(z) S_T(x, y) e^{-\frac{2\pi y \sqrt{1+\gamma^2 \beta^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \psi}}{\gamma \beta \lambda}} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (x \sin \Theta \sin \psi + \frac{z}{\beta})} \right|^2 = F_L F_T, \quad (9)$$

где $S_L(z)$ и $S_T(x, y)$ - распределения частиц в продольном и поперечном направлениях, соответственно, γ и β - релятивистский коэффициент и скорость частицы, соответственно. Координаты x, y и z представлены на Рис. 3, и углы Θ и ψ определяют направление излучения.

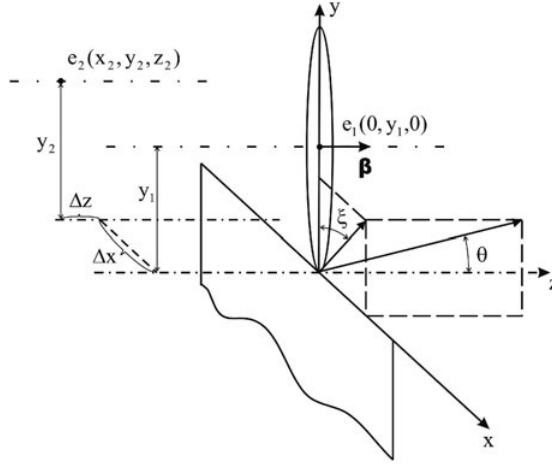


Рис. 3: ДИ от двух частиц [2].

Предположим, что распределение частиц во всех плоскостях соответствует нормальному распределению. Тогда, мы можем рассчитать F_L и F_T следующим образом:

$$F_L = e^{-\frac{4\pi^2}{\lambda^2 \beta^2} \sigma_z^2}, \quad (10)$$

$$F_T = e^{\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \left(\sigma_y^2 \frac{1}{\gamma^2 \beta^2} + \sigma_y^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \psi - \sigma_x^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \psi \right)} \quad (11)$$

где $\sigma_{x,y,z}$ - среднее отклонение частиц от центра пучка. Предполагая, что мы рассматриваем пучки с высокой энергией, мы можем положить углы Θ и $\psi \sim \gamma^{-1}$. Пренебрегая членами порядка γ^{-3} и выше, мы можем записать F_{tot} в виде:

$$F_{tot} = e^{\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \left(\frac{\sigma_y^2}{\gamma^2 \beta^2} - \frac{2}{\beta^2} \sigma_z^2 \right)} \quad (12)$$

Как можно видеть из представленного выражения, влияние поперечного размера пучка на его форм-фактор практически всегда пренебрежимо мало, и фактически $F_{tot} = F_L$. Исключения могут составлять пучки с параметрами $\sigma_y \sim \gamma \sigma_z$. Таким образом, для пучка с энергией ~ 1 GeV поперечный

размер пучка электронов должен быть больше продольного в 2000 раз, и при увеличении энергии это соотношение будет только увеличиваться.

Для того чтобы учесть в форм-факторе расходимость пучка, рассмотрим плоскость "z-y" на рисунке 3. Для нормально проходящих через щель частиц фазовая разность между ДИ определяется только расстоянием между частицами в пучке (Рис. 4а). Однако, если одна из частиц проходит через щель под некоторым углом, появляется дополнительная разность фаз (Рис. 4б). Как и в предыдущей части данной работы, мы предполагаем, что ДИ появляется в момент, когда поле частицы достигает точки излучения, а не в момент, когда частица проходит через щель. Строго говоря, такая частица (с отличным от нормального углом падения) может иметь другой прицельный параметр. Однако, прицельный параметр определяется поперечными размерами пучка, но, как было показано выше, они играют незначительную роль в формировании форм-фактора. Таким образом, выражение для продольного форм-фактора принимает вид

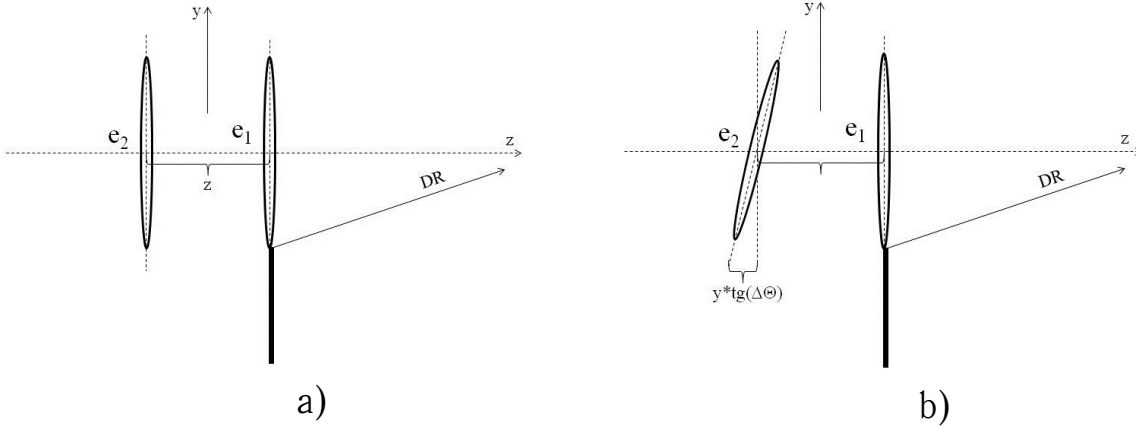


Рис. 4: Частицы с различными углами падения.

$$F_L = \int \int dz d(\Delta\Theta) S_l(z) S_{div}(\Delta\Theta) e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \left(\frac{z}{\beta} + y \tan(\Delta\Theta) \right)} \quad (13)$$

Здесь S_{div} - угловое распределение частиц в пучке, а "y" прицельный параметр пучка. При расчете мы также положим, что S_{div} нормальное распределение, а $\Delta\Theta$ будем считать достаточно маленьким, $\tan(\Delta\Theta) \sim \Delta\Theta$. Тогда

$$F_L = e^{-\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \left(\frac{\sigma_z^2}{\beta^2} + y^2 \sigma_{div}^2 \right)} \quad (14)$$

Для случая релятивистских частиц ($\beta \sim 1$) расходимость пучка может играть существенную роль в формировании форм-фактора пучка при условии $\sigma_z \sim y \sigma_{div}$. Для примера, рассмотрим излучение ДИ для пучка проходящего в 20 мм от препятствия. В таком случае при $\sigma_{div} \sim 100 \mu rad$ расходимость может играть значимую роль при длине пучка $\sim 10 \mu m$ ($\sim 10^{-14}$ сек).

3 Заключение

В данной работе рассмотрена роль расходимости пучка в формировании ДИ. В первой части рассмотрено влияние расходимости пучка на конечную картину углового распределения для полностью не когерентного пучка. Полученные выражения позволяют рассчитывать суммарную интенсивность ДИ, что важно для диагностики пучка в поперечном направлении с помощью ДИ.

Во второй части данной работы рассмотрена роль расходимости пучка для ДИ в случае когерентного пучка. Показано каким образом расходимость пучка может влиять на формирование форм-фактора, а также случаи когда это влияние может быть значимым.

Список литературы

- [1] M.L. Ter-Mikaelian, High-energy electromagnetic processes in condensed media, Wiley Interscience, New York (1972).
- [2] A.P. Potylitsyn, M.I. Ryazanov, M.N. Strikhanov, A.A. Tishchenko, Diffraction radiation from relativistic particles. STMP 239 (Springer, Berlin Heidelberg 2010).
- [3] N. Potylitsina-Kube, X. Artru, Nucl. Instr. Meth in Phys. Res. **B 201** (2003) 172-183.
- [4] A.P. Potylitsyn, Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res. **B 227** (2005) 191-197.
- [5] L. G. Sukhikh, G. Kube, A. P. Potylitsyn, and V. Schlott, Proceedings of DIPAC2011, Hamburg, Germany
- [6] John S. Nodvick and David S. Saxon, Phys. Rev. **96** (1954) 180-184.
- [7] P. Karataev, S. Araki, R. Hamatsu, H. Hayano, T. Muto, G. Naumenko, A. Potylitsyn, N. Terunuma, J. Urakawa, Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res. **B 227** (2005) 158–169.
- [8] V. Shpakov, S.B. Dabagov, M. Castellano A. Cianchi, K. Honkavaara, G. Kube, E. Chiadroni, Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res. **B 309** (2013) 194–197.
- [9] A. Cianchi, M. Castellano, L. Catani, E. Chiadroni, K. Honkavaara, G. Kube, Phys. Rev. **14** (2011) 102803.

Подписано в печать 11.10.2013 г.
Формат 60x84/16. Заказ №55. Тираж 140 экз. П.л 0,75.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640