ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
Физический институт имени П.Н.Лебедева
Российской академии наук
ФИАН

ПРЕПРИНТ

21

Р. А. ЧЕРНЫЙ

# АНАЛИЗ НЕОДНОРОДНОЙ КМЦ И ОСОБЕННОСТИ НАХОЖДЕНИЯ ЕЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Москва 2012

**Аннотация**

С использованием конечных марковских цепей рассчитаны основные временные характеристики.

**Abstract**

With use of final markovsky chains the main temporary characteristics are calculated.

# Анализ неоднородной КМЦ и особенности нахождения временных характеристик.

Черный Р.А.

Пущинская радиоастрономическая обсерватория АКЦ ФИАН

Важной временной характеристикой конечных марковских цепей (КМЦ) [1] является среднее время и дисперсия времени перехода процесса из одного состояния в другое. Данные характеристики находятся по так называемой фундаментальной матрице (ФМ) $N_{[n-r,n-r]}$, получаемой из матрицы $Q_{[n-r,n-r]}$, которая в свою очередь формируется из МПВ, где $n$ – количество состояний процесса, $r$ - количество поглощающих состояний цепи. При этом ФМ равна:

$$N_{[n-r,n-r]} = (I - Q)^{-1}, \qquad (1)$$

где $I$ - единичная матрица размером $(n-r)\times(n-r)$.

Математическое ожидание (МО) числа шагов $M[t]$, затрачиваемое процессом для перехода из $l$ -го состояния в поглощающее, равно сумме элементов последней строки матрицы (1). Переход к реальному времени осуществляется умножением среднего числа шагов на длительность шага:

$$M[t] = M[t]\tau_{ø} \; . \qquad (2)$$

Дисперсия числа шагов находится по так называемой дисперсионной матрице (ДМ), получаемой по выражению:

$$N_{D[n\text{-}r,n\text{-}r]}=N_{[n\text{-}r,n\text{-}r]}\,(2N_{dg[n\text{-}r,n\text{-}r]} - I) - N_{Sq[n\text{-}r,n\text{-}r]}, \qquad (3)$$

где $N_{dg[n\text{-}r,n\text{-}r]}$ - матрица, полученная из ФМ путем замены всех элементов нулями, кроме элементов главной диагонали; $N_{Sq[n\text{-}r,n\text{-}r]}$ – матрица, полученная из ФМ путем возведения каждого ее элемента в квадрат.

Дисперсия числа шагов $D[t]$, затрачиваемых процессом для перехода из *l-го* состояния в поглощающее, равна сумме элементов *l–й* строки матрицы (3). Переход к реальному времени осуществляется по формуле:

$$D[t] = D[t] \cdot \tau_{ø}^{2} \; . \qquad (4)$$

Выражения (2, 4) и есть временные характеристики (ВХ) процесса [2].

Известно, что существуют такие КМЦ, в которых матрица переходных вероятностей (МПВ) формируется на каждом шаге протекания процесса, причем структура МПВ остается прежней, а изменяются лишь переходные вероятности (ПВ), по определенной зависимости, выявленной исследователем [3]. Известно, что существует несколько подходов к нахождению ВХ процесса, а именно: численный подход, аналитический (через ФМ и ДМ и (или) с помощью формулы Фробениуса).

Найдем среднее время и дисперсию времени перехода процесса из одного состояния в другое для процесса, МПВ которого неоднородна, в аналитическом виде, через ФМ и ДМ.

Пусть МПВ описывающий рассматриваемый процесс имеет вид:

$$P_{[K+1,K+1]} = \begin{Vmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0K} \\ 0 & p_{11} & \cdots & p_{1K} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{KK} \end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Преобразуем («вывернем») матрицу (5) следующим образом:

$$P'_{[K+1,K+1]} = \begin{Vmatrix} p_{K,K} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{1,K} & \ldots & p_{1,1} & 0 \\ p_{0,K} & \ldots & p_{0,1} & p_{0,0} \end{Vmatrix}. \qquad (6)$$

Удалим из матрицы $P'_{[K+1,K+1]}$ строки и столбцы, на пересечении которых есть «*1*», получим матрицу $Q_{[K,K]}$. Вычтем из единичной матрицы $I_{[K,K]}$ матрицу $Q_{[K,K]}$, получим матрицу $A_{[K,K]}$. Матрица $A_{[K,K]}$ имеет вид:

$$A_{[K,K]} = \begin{Vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1-p_{2,2} & 0 & 0 \\ \ldots & -p_{1,2} & 1-p_{1,1} & 0 \\ \ldots & -p_{0,2} & -p_{1,1} & 1-p_{0,0} \end{Vmatrix}. \qquad (7)$$

Найдем ФМ $N_{[K,K]}$ (это есть матрица обратная к $A_{[K,K]}$), которая имеет следующий вид:

$$N_{[K,K]} = \begin{Vmatrix} b_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{K-1,0} & b_{K-1,1} & \dots & b_{K-1,K-1} \end{Vmatrix}, \qquad (8)$$

где $K$ – есть $n$.

При формировании ВХ участвуют следующие МПВ: на первом шаге решения - МПВ $P^{(1)}{}_{[K+1,K+1]}$; на втором шаге решения - МПВ $P^{(2)}{}_{[K+1,K+1]}$ и т.д.; на $M$-*м* шаге решения - МПВ $P^{(M)}{}_{[K+1,K+1]}$. Очевидно, что ФМ на первом шаге есть $N^{(1)}_{[K,K]}$; ФМ на втором шаге есть $N^{(2)}_{[K,K]}$; ФМ на $M$-*м* шаге есть $N^{(M)}_{[K,K]}$. Причем структура ФМ однотипна.

Зная, что МО числа шагов $M_{[t]}$, затрачиваемое процессом для перехода из $l$ -го состояния в поглощающее, равно сумме элементов последней строки матрицы (1), а так как ФМ несколько (КМЦ неоднородна), тогда можно предположить, что МО, для неоднородной КМЦ можно найти так:

$$M'(t) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{K-1} b^{(1)}_{K-1,i} + \sum\limits_{i=0}^{K-1} b^{(2)}_{K-1,i} + \sum\limits_{i=0}^{K-1} b^{(3)}_{K-1,i} + \dots + \sum\limits_{i=0}^{K-1} b^{(M)}_{K-1,i}}{M}, \qquad (9)$$

где $M$ – количество шагов процесса; $b^{(1)}_{K-1,i}$ - элементы ФМ $N^{(1)}_{[K,K]}$; $b^{(2)}_{K-1,i}$ - элементы ФМ $N^{(2)}_{[K,K]}$ и т.д.; $b^{(M)}_{K-1,i}$ - элементы ФМ $N^{(M)}_{[K,K]}$.

Переход к реальному времени осуществляется по формуле: $M''(t) = \tau_ш \; M'(t)$,

(10)

где $\tau_ш$ длина шага переходов.

Дисперсия числа шагов, затрачиваемых процессом для перехода из *l-го* состояния в поглощающее, определяется по элементам последней строки ДМ, любой элемент которой определяется согласно (3). Тогда, элементы последней строки ДМ есть:

$$d_{K-1,j} = b_{K-1,j} \cdot (2b_{K-1,j} - 1) - \left(b_{K-1,j}\right)^2, \qquad (11)$$

где $j = \overline{0,(K-1)}$.

Таким образом, дисперсия есть: $D(t)=\sum_{j=0}^{K-1}(b_{K-1,j}\cdot\left(2b_{K-1,j}-1\right)-(b_{K-1,j})^2)$. (12)

А так как количество ФМ (для неоднородной КМЦ) есть: $N^{(i)}_{[K,K]},\ \tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}\ i=\overline{1,(K-1)}$, а следовательно и количество ДМ есть: $D^{(i)}_{[K,K]},\ где\ i=\overline{1,(K-1)}$.

Тогда, дисперсию числа шагов, затрачиваемых процессом для перехода из *l-го* состояния в поглощающее можно найти так:

$$D'(t)=\frac{\sum_{j=0}^{K-1}(b^{(1)}_{K-1,j}\cdot\left(2b^{(1)}_{K-1,j}-1\right)-(b^{(1)}_{K-1,j})^2)+\sum_{j=0}^{K-1}(b^{(2)}_{K-1,j}\cdot\left(2b^{(2)}_{K-1,j}-1\right)-(b^{(2)}_{K-1,j})^2)+....+\sum_{j=0}^{K-1}(b^{(M)}_{K-1,j}\cdot\left(2b^{(M)}_{K-1,j}-1\right)-(b^{(M)}_{K-1,j})^2)}{M}, \quad (13)$$

где $b^{(i)}_{K-1,j}$ - элементы последней строки ФМ.

СКО определяется так: $\sigma'(t)=\sqrt{D'(t)}$. Переход к реальному времени осуществляется по формуле: $D''(t)=\tau^2_{\o}\cdot D(t)$. Таким образом, определен подход к нахождению ВХ для неоднородной КМЦ в аналитическом виде.

**Список литературы**


[1] Кемени Джон. Дж., Снелл Дж. Ларк. Конечные цепи Маркова / Пер. с англ.- Наука, 1970.- 272 с.

[2] Цимбал В.А. Качество информационного обмена в сетях передачи данных. Марковский подход. Монография. – Серпухов, СВИ РВ, 2009 – 161с.

[3] Попов, М.Ю. Математическое моделирование процесса доведения сообщения в радиосети без обратной связи с повторениями и накоплением информации / В.А.Цимбал, М.Ю.Попов, М.Ю.Дробышев // Информационные технологии в проектировании и производстве / – Москва. - 2010., - С.72 - 75.

**Список аббревиатур**

АКЦ: астрокосмический центр

ФИАН: физический институт академии наук

МПС: Многопакетное сообщение

ПКМЦ: Поглощающая конечная марковская цепь

МПВ: Матрица переходных вероятностей

ФМ: Фундаментальная матрица

ВХ: Временные характеристики

МО: Математическое ожидание

ПВ: Переходные вероятности

ДМ: Дисперсионная матрица

Подписано в печать 29.10.2012 г.
Формат 60x84/16. Заказ №67. Тираж 140 экз. П.л 0,5.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640