

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Физический
ИНСТИТУТ
имени
П.Н.Лебедева



Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

15

С.Б. ДАБАГОВ, А.В. ДИК, Е.Н. ФРОЛОВ

**КАНАЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОНА
В ПОЛЕ СТОЯЧЕЙ ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНЫ**

Москва 2012

Каналирование свободного электрона в поле стоячей лазерной волны

Дабагов С.Б, Дик А.В., Фролов Е.Н..

Аннотация

Рассмотрена задача о движении нерелятивистского электрона в поле стоячей электромагнитной волны лазерного излучения и ускоряющем поле. Определено условие образования связанных состояний для части пучка электронов, захваченных в режим каналирования стоячей лазерной волной. Построена и визуализирована модель эволюции электронного пучка в пренебрежении взаимодействием электронов между собой.

Введение

Получение ультракоротких электронных пучков в настоящее время представляет большой интерес в связи с их применением в различных областях науки и техники [1, 2, 3, 4]. Для получения электронных пучков с оптимальными характеристиками используется явление фотоэффекта, т. к. именно оно в настоящее время позволяет получать короткие пучки с высоким пиковым током, малым энергетическим разбросом и эмиттансом. Однако при генерации электронных пучков возникают трудности связанные с длительностью и интенсивностью лазерного импульса. Необходимо так подобрать интенсивность лазера, чтобы катод практически не разрушался при длительном облучении, с другой стороны число выбитых электронов пропорционально времени, за которое происходит процесс фотоэффекта. При этом следует заметить, что продолжительность процесса плохо сказывается на размере пучка. В качестве примера рассмотрим эксперимент “СОМВ”, проводимый в Национальной Лаборатории

Фраскати (LNF), в котором пытаются получить ультракороткие электронные пучки непосредственно в процессе формирования электронного пучка. Роль модулирующей структуры играет область пространства, в которой образуется стоячая электромагнитная волна, являющаяся результатом наложения падающей и отражённой от плоскости катода волн лазерного излучения. Обычно при решении задачи ускорения электронов, вырывающихся с поверхности фотокатода при облучении лазером, большее внимание уделяется формированию облака электронов малого пространственного и углового размера (малый эмиттанс) и его дальнейшему ускорению. Наиболее актуальным на данный момент является проблема "пространственного заряда" (необходимость учета эволюции пространственного заряда пучка), чему и уделяется последнее время большое внимание исследователей. Остается при этом мало изученным поведение электронного облака в скрещенном поле, сформированном падающей и отраженной лазерными волнами и ускоряющим электрическим полем (геометрия системы показана качественно на рис. 1). Обычно влияние ускоряющего

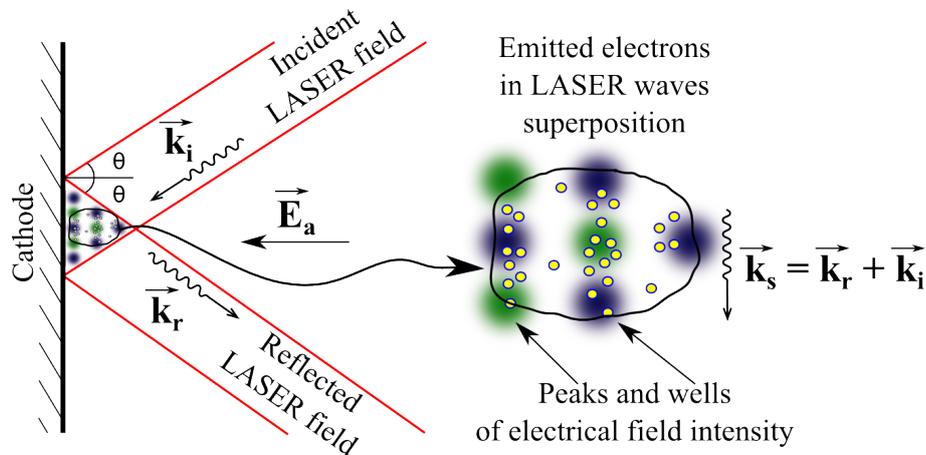


Рис. 1. Качественный вид исследуемой системы. Здесь \mathbf{k}_i — волновой вектор падающей волны лазерного излучения, \mathbf{k}_r — волновой вектор волны лазерного излучения, отраженной от катода, \mathbf{k}_s — волновой вектор электромагнитного излучения, являющегося результатом сложения падающей и отраженной волн, \mathbf{E}_a — постоянное ускоряющее электрическое поле, θ — угол падения лазерного излучения на плоскость катода.

поля намного превосходит другие поля, и тонкости динамики пучка на началь-

ном этапе не представляют большого интереса. Хотя, очевидно, что при определенных условиях возможно “связывание” некоторых электронов суммарным лазерным полем; возможно каналирование электронов в потенциальной яме стоячей лазерной волны. Действительно, суммарное лазерное поле характеризуется стоячей волной, которая ответственна за формирование потенциальной ямы. Последняя, в свою очередь, затягивает часть электронов; связанное движение таких электронов аналогично каналированию частиц в кристаллах. И в том, и другом случаях мы имеем дело с преимущественным распространением частиц в строго ориентированном поле. В этой работе приводится упрощенный анализ такого процесса, и впервые показана возможность разделения первоначального пучка на ускоренную и “замороженную” части. Замороженные электроны, в свою очередь, каналируют в поперечном к ускоряющему полю направлении.

Электрон в стоячей электромагнитной волне и ускоряющем поле

Рассмотрим одиночный нерелятивистский электрон в поле двух плоских электромагнитных волн: падающей $\mathbf{E}_i = E_0(\cos \theta, 0, -\sin \theta) \sin(\omega_0 t + k(z \cos \theta + x \sin \theta))$, отраженной $\mathbf{E}_r = E_0(-\cos \theta, 0, -\sin \theta) \sin(\omega_0 t - k(z \cos \theta - x \sin \theta))$ ¹, и в постоянном ускоряющем поле $\mathbf{E}_a = (0, 0, -E)$. Уравнения движения в проекциях на оси координат примут вид:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = eE \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, z) & f_2(x, z) \\ f_3(x, z) & f_4(x, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

¹В реальном эксперименте при расчете интенсивности волн необходимо учитывать коэффициент отражения волн от поверхности

где

$$\begin{aligned}
f_1 &= -2eE_0 \cos \theta \sin(kz \cos \theta) \sin(kx \sin \theta), \\
f_2 &= 2eE_0 \cos \theta \sin(kz \cos \theta) \cos(kx \sin \theta), \\
f_3 &= -2eE_0 \sin \theta \cos(kz \cos \theta) \sin(kx \sin \theta), \\
f_4 &= -2eE_0 \sin \theta \cos(kz \cos \theta) \cos(kx \sin \theta).
\end{aligned} \tag{2}$$

Согласно [5] траектория электрона $x_i = X_i + \xi_i$ будет представлять собой плавную кривую X_i , вдоль которой будут совершаться быстрые осцилляции ξ_i . Отвлекаясь от малых осцилляций (порядок $\xi_i \sim eE_0/m\omega_0^2$), рассмотрим плавное движение электрона и введем эффективную потенциальную энергию взаимодействия электрона с суммарным полем:

$$U_{eff} = -eEz + \frac{1}{4m\omega_0^2} \sum_{i=0}^4 f_i^2(x, z) = -eEz + \frac{(eE_0)^2}{2m\omega_0^2} (1 - \cos(2\theta) \cos(2kz \cos \theta))$$

Как видно, эффективная энергия зависит пространственно только от координаты z . Сделав переобозначения $\alpha = eE_0^2 \cos(2\theta)k \cos \theta / (m\omega_0^2 E)$ и $\phi = 2kz \cos \theta$ для этого выражения и, отбрасывая постоянное слагаемое, т. к. оно не влияет на движение электрона, рассмотрим функцию:

$$f(\phi) = \frac{U_{eff} 2k \cos \theta}{eE} = -\phi - \alpha \cos \phi \tag{3}$$

Нужно отметить, что $\alpha \sim A_0/A_{ac}$ характеризует отношение работы лазерного поля при перемещении заряда на величину малого отклонения ξ к работе постоянного ускоряющего поля при перемещении заряда на расстояние порядка длины волны лазерного излучения. Функция $f(\phi)$ представляет собой безразмерную эффективную потенциальную энергию электрона в суммарном поле. Как видно из выражения для эффективной энергии, при $\alpha \geq 1 (A_0 \geq A_{ac})$ возможно образование связанных состояний. Случай $\alpha \ll 1$ был рассмотрен в работе [6], где было показано, что пучок становится модулированным, но никаких связанных состояний не образуется.

Рассмотрим проекцию на ось Oz уравнения, описывающего плавную траекторию частицы:

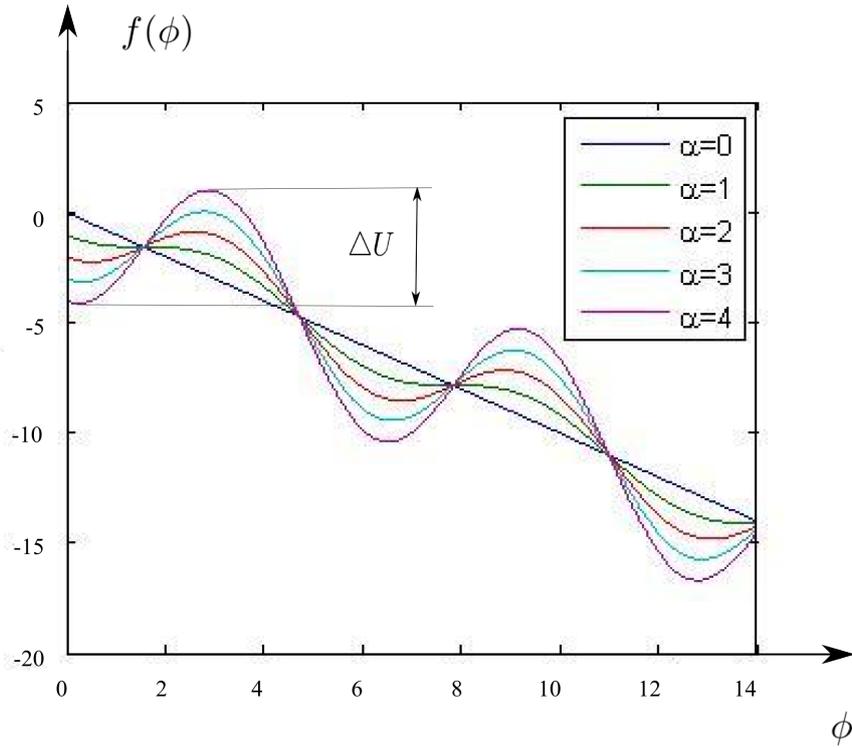


Рис. 2. Зависимость безразмерной потенциальной энергии $f(\phi)$ от безразмерной координаты ϕ при различных значениях параметра α . Для значений $\theta = \pi/6$, $\omega_0 = 7 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ напряженности электромагнитных полей связаны с α соотношением $E = 3,6 \cdot 10^{-14} E_0^2 / \alpha$ (напряженности имеют размерность В/м, $\alpha \neq 0$). Для напряженности $E_0 = 10^8 \div 10^{11} \text{ В/м}$ и $\alpha = 4$ глубина каждой потенциальной ямы $\Delta U \approx 10^{-4} \div 10^2 \text{ эВ}$.

$$m\ddot{Z}(t) = eE - eE\alpha \sin(2kZ \cos \theta) \quad (4)$$

Перепишем уравнение движения, заменяя координату $Z(t)$ на $\phi(t) = 2kZ(t) \cos \theta$, и вводим переобозначение $a = eE2k \cos \theta / m$, $b = \alpha eE2k \cos \theta / m$; тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{\phi}(t) = a - b \sin \phi \quad (5)$$

Таким образом, в новых обозначениях условие образования связанных состояний $\alpha > 1$ принимает вид $b > a$. Как видно из графика, изображенного на рис. 3.а, при выполнении условия $b > a$ график представляет собой кривую, сфор-

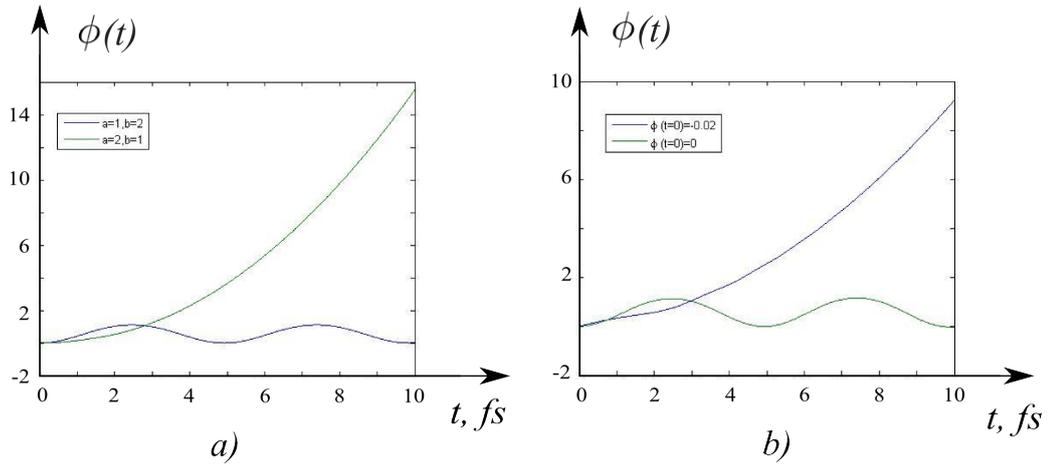


Рис. 3. Зависимость безразмерной координаты $\phi(t)$ от времени t а) при различных константах a и b и одинаковых начальных условиях. Видно, что для синей кривой условие захвата выполняется и частица совершает вдоль оси Oz финитное движение, а для зеленой кривой условие захвата не выполняется и частица улетает на бесконечность, б) при $a = 1$, $b = 2$ и различных начальных условиях. Здесь условие захвата выполняется, однако в зависимости от начального положения частицы она либо ускоряется (синяя кривая) либо совершает финитное движение.

мированную несколькими потенциальными ямами, ответственными за связанное движение электронов. На рис. 3.б изображены зависимости безразмерной продольной координаты от времени при различных начальных условиях (различные начальные координаты). Из графиков видно, что если частица в начальный момент времени попала на “гребень” потенциальной энергии (все начальные скорости равны нулю), то частица будет ускоряться. Если же в начальный момент времени частица находилась в “яме”, то она оказывается в связанном состоянии и совершает колебания около постоянного положения равновесия.

В силу использованного метода скорость электрона будет складываться из скорости, описывающей плавное движение, и скорости, отвечающей за быстрые осцилляции: $v_i = V_i + \dot{\xi}_i$. Начальная скорость, описывающая плавную траекторию, в зависимости от истинной скорости может оказаться достаточно высокой для образования связанных состояний. Если начальная скорость

плавного движения будет положительной и такой, что $E_k = mV^2/2 > \alpha eE$, то даже при выполнении условия захвата связанные состояния не могут образовываться. Для нахождения начальных скоростей, при которых образование таких состояний возможно, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_0 = C_2 + \frac{2eE_0}{m\omega_0^2} \cos\theta \sin(kZ_0 \cos\theta) \cos(kC_2 \sin\theta), \\ z_0 = Z_0 - \frac{2eE_0}{m\omega_0^2} \sin\theta \cos(kZ_0 \sin\theta) \cos(kC_2 \sin\theta), \end{cases} \quad (6)$$

где, x_0, z_0 - произвольные начальные координаты. Определяя константы, начальное значение проекции скорости на ось Oz можно записать в виде:

$$v_{z0} = -\frac{2eE_0}{m\omega_0} \sin\theta \cos(kZ_0 \cos\theta) \cos(kC_2 \sin\theta) \quad (7)$$

Численное моделирование системы

Система трансцендентных алгебраических уравнений (6) для неизвестных Z_0, C_2 может быть решена численно для каждого набора x_0, z_0 . Таким образом, определяется искомая v_{z0} . Система уравнений решалась итерационным методом Ньютона, сводящим задачу к нахождению решения системы линейных уравнений x^{k+1} :

$$\sum_{i=1}^m (x_j^{k+1} - x_j^k) \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} + f_i(x^k) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (8)$$

где $f_i(x) = 0$ — система m исходных нелинейных уравнений от m неизвестных, x^k — k -е приближение решения этой системы.

Решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом позволяет получить полный набор начальных условий всех частиц.

Нами был использован метод Ньютона ввиду простоты его реализации и скорости сходимости. Его квадратичная сходимость [7] даёт задаваемую точность решения за малое число шагов.

В результате решения этим методом системы (6) найдены Z_0 и C_2 , которые, как оказалось, пренебрежительно мало отличаются от соответствующих им начальных координат x_0 и z_0 электронов моделируемого ансамбля.

Более того, разница значений $v_{z0}(x_0^i, z_0^i)$ и $v_{z0}(C_2^i, Z_0^i)$ составляет тысячную долю от $v_{z0}(C_2^i, Z_0^i)$, где x_0^i и z_0^i соответствуют i -м значениям C_2^i и Z_0^i .

В таком случае можем для нахождения искомой проекции начальной скорости на ось Oz , при которой возможно образование “вмороженных” состояний, напрямую использовать начальные координаты частиц. Данные v_{z0} предполагается использовать позже в компьютерном эксперименте.

Созданная численная модель системы предполагает нахождение траекторий всех частиц системы в полях описанной выше конфигурации.

В каждый момент времени частица характеризуется вектором скорости \mathbf{v} и радиус-вектором \mathbf{r} . Импульс такой частицы определяется соотношением $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$.

Для моделирования динамики заряженных частиц для каждой из них численно решается уравнение движения:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right) \quad (9)$$

Ввиду того, что скорости частиц много меньше c , взаимодействие с магнитным полем можно не учитывать.

Взяв достаточно малый шаг по времени, для каждого i -го состояния частицы в момент t_i можно найти \mathbf{v}_{i+1} и \mathbf{r}_{i+1} , характеризующие её состояние через время $\tau = t_{i+1} - t_i$.

В данном случае для решения дифференциального уравнения первого порядка для \mathbf{p} использован алгоритм немодифицированного метода Эйлера.

Вектор скорости \mathbf{v}_i в каждый i -ый момент времени определён соответствующим вектором импульса \mathbf{p}_i :

$$\mathbf{v}_i = \frac{c\mathbf{p}_i}{\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_i)}} \quad (10)$$

Радиус-вектор каждой частицы в момент времени t_{i+1} определяется из предположения, что её скорость за промежуток τ не успевает значительно измениться: $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \tau\mathbf{v}_i$

Для соответствия описанным выше условиям наблюдения “связанных” состояний в модели определяются не только начальные скорости частиц в зависимости от начальных координат, но и значение ускоряющего поля (для условия $\alpha > 1$).

Результаты моделирования подтвердили наличие связанных состояний электронов в полях описанной конфигурации. Максимальные скорости, достигаемые частицами за время в 100 пкс на 3 порядка меньше скорости света, что оправдывает пренебрежение составляющей силы Лоренца, обусловленной взаимодействием с магнитным полем волны.

Так как сила Лоренца в описываемой системе не имеет y -составляющей и взаимодействие между частицами при расчёте не учитывалось, можно решать двумерную задачу в плоскости xOz . Тогда можно задать начальные координаты по оси ординат произвольно, а скорости v_{y0} положить равными нулю.

В качестве начальных условий моделирования были взяты параметры ансамбля электронов, скорости всех частиц которого положены равными нулю, а координаты равномерно распределены в пространстве, как показано на рис. 4. Частицы, которые покинули начальное положение и которые остались в пре-

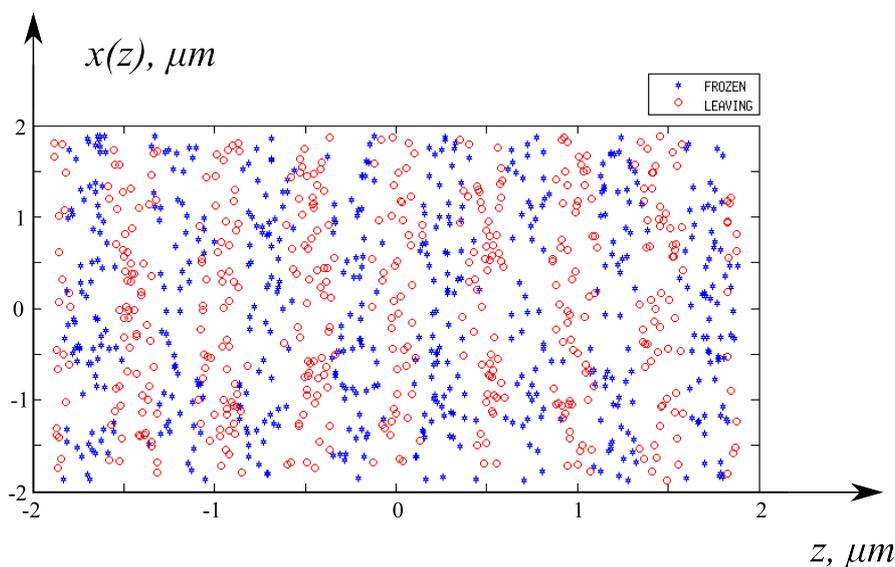


Рис. 4. Координаты “вмороженных” электронов (“FROZEN”) и несвязанных (“LEAVING”) $x(z)$ в момент времени $t = 0$.

делах одного пространственного полупериода функции потенциальной энер-

гии отмечены разными маркерами. Финальное распределение “вмороженных” электронов, показанное в плоскости yOz , представлено на рис. 5.

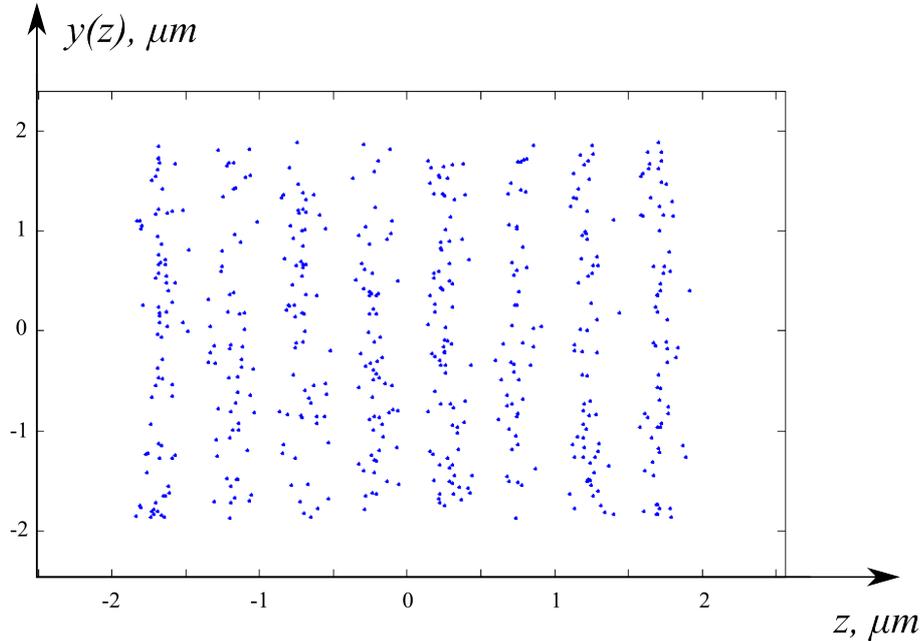


Рис. 5. Координаты “вмороженных” электронов $y(z)$ в момент времени $t = 1$ пкс.

Можно с уверенностью говорить, что их продольная координата изменялась не более, чем в рамках одного пространственного периода стоячей волны, что можно соотнести с колебанием частицы в “яме” потенциала. График распределения всех частиц ансамбля в момент $t = 1$ пкс в плоскости yOz изображен на рис. 6.

Отчётливо видно, что доля частиц несмотря на ускоряющее поле, приложенное по оси Oz , не движется равноускоренно под его воздействием, так как они попали в “ямы” эффективной потенциальной энергии, и так как никакие силы в y -направлении на заряженные частицы в описываемой системе не действуют. Этот результат полностью согласуется с выдвинутым предположением о возможности возникновения связанных состояний электронов в полях описанной конфигурации. Вместе с тем необходимо отметить, что значительная часть “вмороженных” электронов двигалась ускоренно в направлении Ox , что иллюстрируется распределением частиц в плоскости xOz в момент времени $t = 1$ пкс, показанном на рис. 7.

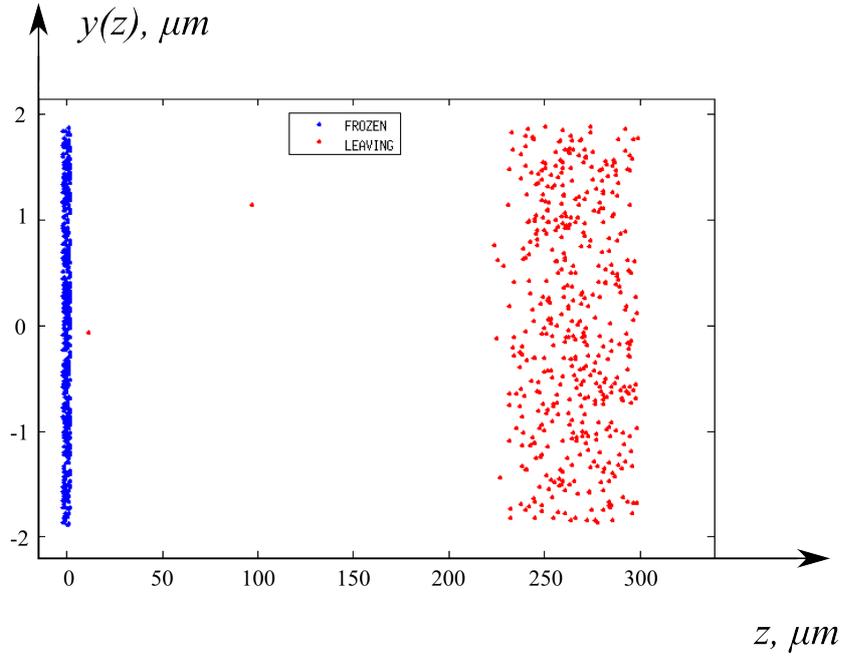


Рис. 6. Координаты “вмороженных” (“FROZEN”) и несвязанных (“LEAVING”) электронов $y(z)$ в момент времени $t = 1$ пкс.

Такое поведение электронов с нулевыми начальными проекциями скоростей на ось Ox в поле скрещенных лазерных волн возможно при условии, что, колеблясь вдоль оси Oz в потенциальной яме, электрон постоянно попадает в участки бегущей против оси Ox волны, x -составляющая напряжённости электрического поля которых направлена против Ox .

Это говорит о том, что в поле скрещенных лазерных волн возможно не только удержание, но и ускорение заряженных частиц.

Остается интересным вопрос, как на характер движения электронов повлияет их взаимодействие между собой. Так как электроны нерелятивистские, то можно пренебречь магнитным полем, созданным электронами. Тогда поле, создаваемое всеми электронами в точке \mathbf{r}_i нахождения i -го электрона в момент времени t , будет равно:

$$\varphi_i = - \sum_{j \neq i}^N \frac{e}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (11)$$

Представляя движение электрона в виде плавной кривой \mathbf{R}_i и малых быстрых осцилляций $\delta \mathbf{r}_i$, перепишем потенциал в виде (как и ранее, полагая $|\delta \mathbf{r}| \ll |\mathbf{r}|$):

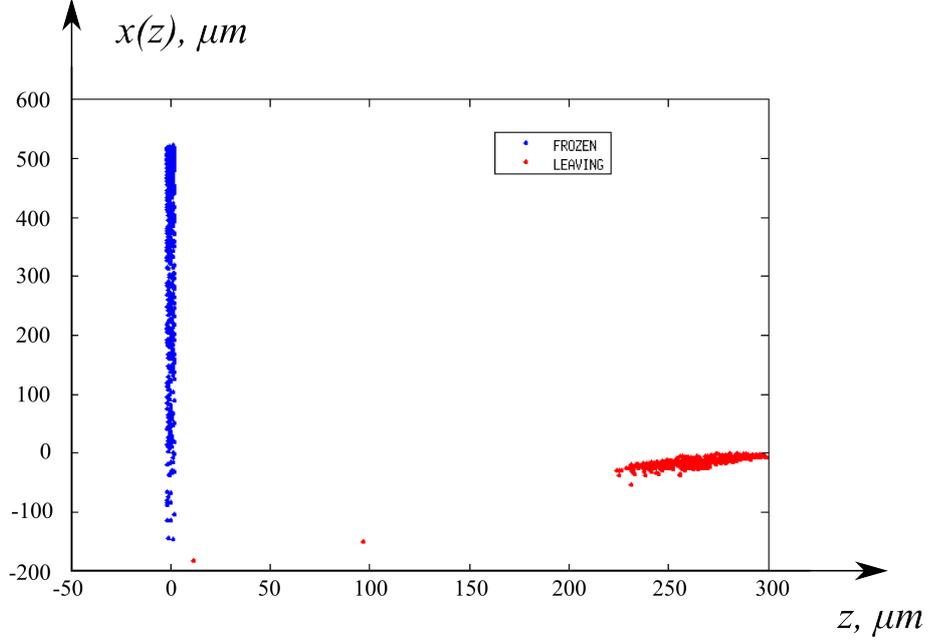


Рис. 7. Координаты “вмороженных” (“FROZEN”) и несвязанных (“LEAVING”) электронов $x(z)$ в момент времени $t = 1$ пкс.

$$\varphi_i \approx - \sum_{j \neq i}^N \frac{e}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|} - \sum_{j \neq i}^N \frac{e (\delta \mathbf{r}_j - \delta \mathbf{r}_i) (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i)}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|^3} = \bar{\varphi}_i + \delta \varphi_i \quad (12)$$

где $\bar{\varphi}_i$ — плавно меняющаяся со временем функция, $\delta \varphi_i$ — малая ($|\delta \varphi_i| \ll |\bar{\varphi}_i|$) быстро осциллирующая функция. Тогда условие образования связанных состояний примет вид:

$$\alpha(t) = \frac{eE_0^2 \cos(2\theta) k \cos \theta}{m\omega_0^2} \left(E + \frac{\partial \bar{\varphi}(t)}{\partial z} \right)^{-1} > 1 \quad (13)$$

Как видно из приведенного выражения, коэффициент α будет зависеть, вообще говоря, от координат и времени: $\alpha \equiv \alpha(z, t)$. Однако, не зная явного вида функции $\bar{\varphi}(z, t)$, можно сделать определенные выводы относительно условия захвата.

Пусть в любой момент времени выполняются условие $E > \bar{\varphi}'_z$ (сила взаимодействия между электронами меньше силы, действующей на электрон со стороны постоянного поля), условие захвата в пренебрежении взаимодействием между электронами $\alpha > 1$ (напряженности поля лазера E_0 и постоянного ускоряющего поля E связаны с α как и ранее), и пусть пучок симметричен

в любой момент времени относительно какой-либо плоскости $z = z_0(t)$. Тогда функция $\bar{\varphi}'_z$ будет иметь разные знаки в точках слева и справа от $z_0(t)$, следовательно, в любой момент времени, по крайней мере для половины электронов, условие захвата будет выполняться.

Заключение

Рассмотрена задача о движении электрона в поле двух электромагнитных волн и ускоряющем поле, и получено условие образования связанных состояний электрона в такой конфигурации полей. Проведено численное моделирование и визуализация динамики электронного пучка без учета взаимодействия электронов между собой. Показано, что при выполнении условия $\alpha \geq 1$ образуются связанные состояния электронов: электронный пучок разбивается на ускоряющийся пучок и пучки “вмороженных” электронов. Расстояние между двумя максимумами “вмороженных” пучков соответствует расстоянию между нижними точками соседних минимумов в эффективной потенциальной энергии $\Delta z = 1/(2k \cos \theta)$, если пренебречь взаимодействием электронов между собой и с поверхностью катода.

В общем виде определено условие образования связанных состояний с учетом взаимодействия электронов между собой, из простых соображений показано, что при выполнении условия $E > \bar{\varphi}'_z$ (сила взаимодействия электронов меньше силы действующей на электрон со стороны постоянного ускоряющего поля), условия захвата (без учета взаимодействия) $\alpha > 1$ и при наличии плоскости симметрии, образование связанных состояний возможно. Представленная работа возникла из задачи о выбивании и формировании пучка из электронов из фотокатода под действием лазера. Глубина каждой потенциальной ямы зависит от напряженности поля лазера как:

$$\Delta U = \frac{e^2 E_0^2 \cos(2\theta)}{2m\omega_0^2 \alpha} \left[2 \left(\arcsin(\alpha^{-1}) + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) - \pi \right], \alpha \geq 1$$

Следовательно, при увеличении напряженности поля лазера на порядок, глубина ямы увеличивается на два порядка при постоянных θ, ω_0, α . Из результатов решения задачи можно сделать одно важное замечание о возможности

фокусировки и модуляции электронного пучка, транспортируемого в поле лазерной волны, распространяющейся в капилляре. В отличие от рассмотренной модели в капилляре возможно формирование кольцевых стоячих волн, что равносильно формированию аксиальных концентрических каналов, потенциальных ям, способных захватывать часть пучка электронов. Распространение лазера в капилляре и взаимодействие пучка электронов с суммарной электромагнитной волной в капилляре будут рассмотрены в отдельной работе.

Список литературы

- [1] Г. А. Месяц, М. И. Яландин “Пикосекундная электроника больших мощностей”; УФН, Т. 175, 2005
- [2] В. Л. Кузнецов “Лазеры на свободных электронах”; УФН, Т. 129, 1979
- [3] M. Ferrario, D. Alesini et al. “Direct Measurement of the Double Emittance Minimum in the Beam Dynamics of the Sparc High-Brightness Photoinjector”; Phys. Rev. Lett., 2007
- [4] T. Shintake “Proceedings of the 22nd Particle Accelerator Conference”; Albuquerque 2007, NM (IEEE, New York, 2007)
- [5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц “Механика”; Наука, 1988
- [6] Podlesnaya A. S., Dik A. V., Dabagov S. B., Ferrario M. "Spectral distribution of SPARC photoinjector electrons"; Nuovo Cimento C, V 034, 2011
- [7] А.А. Самарский, А.В. Гулин - “Численные методы”; Наука, 1989

Подписано в печать 04.06.2012 г.
Формат 60x84/16. Заказ №42. Тираж 140 экз. П.л 1.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640