

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Физический
ИНСТИТУТ



имени

П.Н. Лебедева

Российской академии наук

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

А. В. ДИК, С. Б. ДАБАГОВ

7

**ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ
В ИОННОМ КАНАЛЕ**

Москва 2012

Функция распределения электронов в ионном канале

Дик А.В., Дабагов С.Б.

Аннотация

Рассмотрена задача об эволюции функции распределения невзаимодействующих между собой электронов в бесконечном ионном канале. Рассмотрены случаи бесконечного электронного пучка (электронный ток) и промоделирован процесс затягивания электронов в канал.

Введение

В настоящее время исследования на стыке различных научных дисциплин, индустриальные и медицинские приложения требуют более интенсивных и компактных источников мощного излучения. Современные источники мощного излучения, такие как синхротроны, накопительные кольца и лазеры на свободных электронах (ЛСЭ), требуют больших материальных затрат и громоздкие, что ограничивает их применимость. Для получения интенсивного высокоэнергетического излучения необходимо ускорять заряженные частицы до высоких энергий, что требует строительства больших машин и связано с определенными техническими сложностями [1, 2, 3]. Также очень важной характеристикой служит малый эмиттанс ускоряемых пучков и большой пиковый ток [4]. Последние изучения распространения в плазме нелинейных электромагнитных волн, представляющие большой практический интерес в связи с большим прогрессом в лазерной технике [5, 6], показали, что с помощью мощных ультракоротких лазерных импульсов, распространяющихся в плазме,

можно ускорять электроны плазмы на малых расстояниях до ультрарелятивистских энергий [7, 8], а образующаяся за лазерным импульсом электромагнитная волна, вырождаясь в полость свободную от плазменных электронов и движущаяся вместе с лазерным импульсом, может захватывать ускоренные лазерным импульсом до высоких энергий плазменные электроны, тем самым являясь источником плотного электронного пучка. Захваченные электроны образуют плотный пучок и имеют большую энергию, и могут служить источником мощного жесткого излучения [9, 10].

В работе [10] была рассмотрена задача о взаимодействии мощного ультракороткого лазерного импульса с плазмой. Основываясь на результатах численного моделирования, авторы построили модель сильно нелинейного режима взаимодействия мощного лазерного импульса с плазмой. В процессе такого взаимодействия электроны плазмы вытесняются из области локализации поля лазерного импульса. В результате за лазерным импульсом, движущимся в направлении оси Oz , образуется почти сферическая полость - "пузырь", свободная от плазменных электронов, представляющая собой большой положительный заряд, и движущаяся со скоростью лазерного импульса. "Пузырь" захватывает электроны плазмы, ускоряя их, однако захвачены могут быть только очень быстрые релятивистские электроны. Внутри "пузыря" потенциалы электромагнитного поля (с точностью до постоянных интегрирования \mathbf{A}_0, φ_0) имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\sim (x^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2) \mathbf{e}_z \\ \varphi &\sim (x^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2)\end{aligned}$$

Если пренебречь ускорением электронов в пузыре, пренебрегая отличием скорости электронов от скорости ионной полости, то пузырь становится бесконечным цилиндрическим ионным каналом. Следуя [9], будем рассматривать поведение пучка захваченных электронов в бесконечном цилиндрическом ионном канале [10, 11] с потенциалами поля:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\approx 0, \\ \varphi &= -\pi n_0 e (x^2 + y^2),\end{aligned}\tag{1}$$

где постоянные интегрирования \mathbf{A}_0, φ_0 положены равными нулю $\mathbf{A}_0 = \varphi_0 = 0$ т. к. они не влияют на уравнения движения. Так как захватываются только очень быстрые электроны, то далее всюду положено $\gamma \approx \gamma_z = E_z/mc^2 = 10^3$, т. е. Лоренц-фактор определяется продольной энергией, концентрация ионов $n_0 = 10^{19} \text{см}^{-3}$

Движение электрона в бесконечном ионном канале

Рассмотрим движение релятивистского электрона в электромагнитном поле в декартовой прямоугольной системе координат, где потенциалы поля имеют вид (1), гамильтониан электрона, как известно, записывается в виде [12]:

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2} - e\varphi$$

При разделении импульса на продольный и поперечный к оси Oz , $\mathbf{p} = \mathbf{p}_\perp + p_z \mathbf{e}_z$, гамильтониан переписется:

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + p_z^2} - e\varphi$$

Предположим, что $p_z \gg |\mathbf{p}_\perp|$, удерживая члены первого порядка малости, запишем гамильтониан после упрощений:

$$H \approx c\sqrt{m^2c^2 + p_z^2} + \frac{cp_\perp^2}{2\sqrt{m^2c^2 + p_z^2}} - e\varphi$$

Определяя продольную энергию как $E_z = c\sqrt{m^2c^2 + p_z^2}$, получим:

$$H = E_z + \frac{c^2 p_\perp^2}{2E_z} - e\varphi, \quad (2)$$

тогда уравнения движения дают

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_\perp} = e\nabla_\perp \varphi \quad (3)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{c^2 p_z}{E_z} \left(1 - \frac{c^2 p_\perp^2}{2E_z^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = const$$

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_\perp} = \frac{c^2 \mathbf{p}_\perp}{E_z} \quad (5)$$

Так как проекция импульса на Oz постоянна, то и продольная энергия не меняется во времени. Тогда в поперечном к оси Oz направлении уравнение движения можно записать в виде (уравнение поперечного движения):

$$\frac{E_z}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{r}_\perp}{dt^2} = e \nabla_\perp \varphi$$

Записывая в явном виде скалярный потенциал поля, получим, уравнение поперечного движения:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\perp + \omega_0^2 \mathbf{r}_\perp = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{2\pi e^2 n_0 c^2}{E_z},$$

где ω_0 - собственная частота поперечных гармонических колебаний. Решение

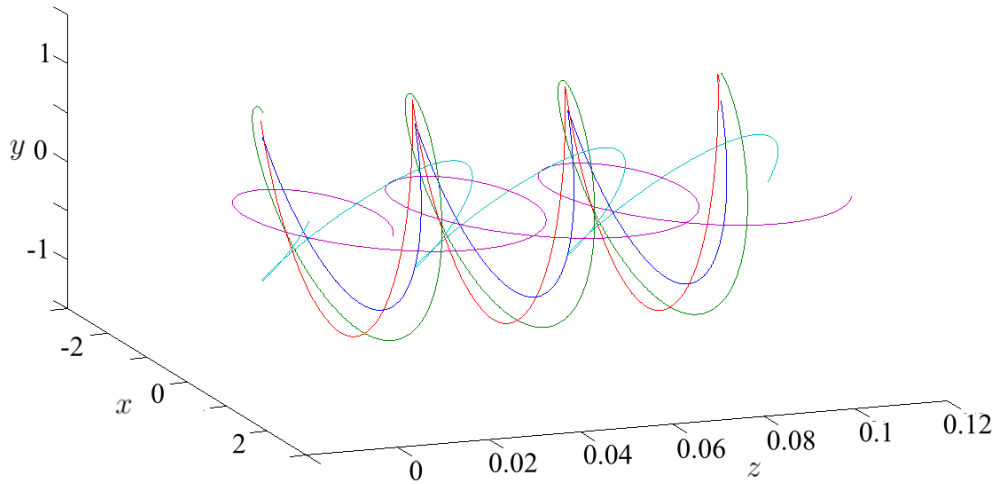


Рис. 1. Траектория электрона в плазменном канале при различных начальных условиях. Координаты приведены в сантиметрах; поперечные координаты нормированы на 10^{-3} см.

получившегося уравнения в общем случае имеет вид $\mathbf{r}_\perp(t) = \mathbf{r}_\perp(0) \cos(\omega_0 t) +$

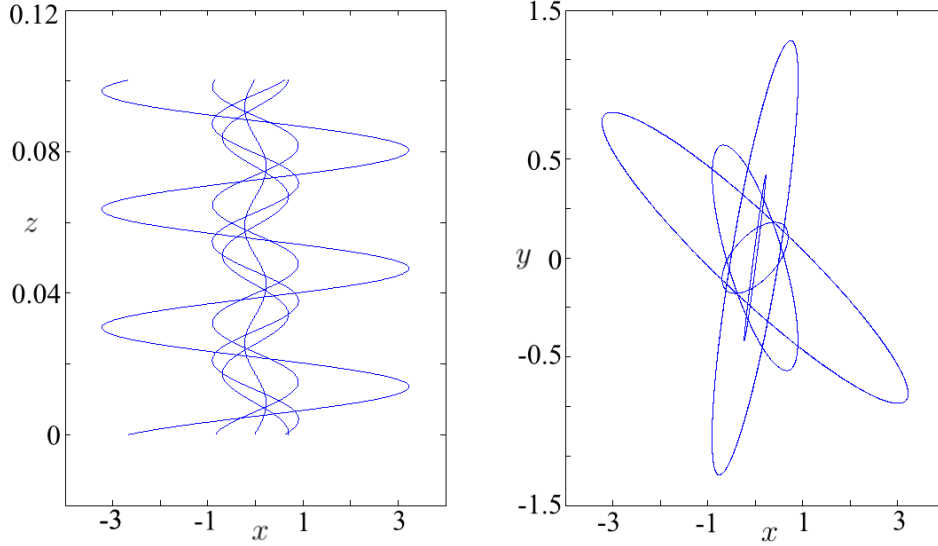


Рис. 2. Траектория электрона в ионном канале при различных начальных условиях. Координаты как и на Рис.1. Как видно, траектория электрона практически не отличается от эллиптической спирали; это связано с тем фактом, что поперечная скорость электрона много меньше скорости света $\omega_0^2 r_{\perp}^2(t)/c^2 \ll 1$.

$+\mathbf{v}_0/\omega_0 \sin(\omega_0 t)$. Уравнение для проекции скорости на ось Oz запишется в виде:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{c^2 p_{z0}}{E_z} \left(1 - \frac{(\mathbf{r}_{\perp}(0)\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \mathbf{v}_0 \cos(\omega_0 t))^2}{2c^2} \right),$$

$$z(t) = z_0 + \frac{c^2 p_{z0}}{E_z} \left(1 - \frac{r_{\perp}^2(0)\omega_0^2 + v_0^2}{4c^2} \right) t + \frac{p_{z0}}{4E_z} (r_{\perp}^2(0)\omega_0^2 - v_0^2) \sin(2\omega_0 t) - \frac{p_{z0}}{4E_z} (\mathbf{r}_{\perp}(0), \mathbf{v}_0) \cos(2\omega_0 t)$$

Условие нерелятивистского движения в поперечном к оси Oz направлении $p_z \gg |\mathbf{p}_{\perp}|$ справедливо, если начальная поперечная к оси Oz скорость электрона много меньше скорости света $v_0 \ll c$ и начальное расстояние $r_{\perp}(0)$ от оси Oz до электрона $r_{\perp}(0) \ll c/\omega_0 \sim 10^{-2}$ см.

Бесконечный пучок электронов в бесконечном ионном канале

Рассмотрим задачу об эволюции функции распределения невзаимодействующих между собой электронов в бесконечном ионном канале. Запишем уравнение, описывающее эволюцию функции распределения электронов в обобщенном фазовом пространстве в пренебрежении интегралом столкновений [13]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

В силу вышесказанного, функция распределения не должна зависеть от координаты z , учтем это и запишем уравнение для функции $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$, подставляя явные выражения для производных по времени от обобщенных координат и импульсов из (3) и (5):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e\nabla_{\perp}\varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_{\perp}} + \frac{c^2 \mathbf{p}_{\perp}}{E_z} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} = 0$$

Записывая скалярный потенциал и делая переобозначение $\omega_0 = 2\pi e^2 n_0 c^2 / E_z$, кинетическое уравнение примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \omega_0^2 \frac{E_z}{c^2} \mathbf{r}_{\perp} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_{\perp}} + \frac{c^2}{E_z} \mathbf{p}_{\perp} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} = 0,$$

которое с учетом скалярного произведения векторов и операторов дает:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \omega_0^2 \frac{E_z}{c^2} x_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{c^2}{E_z} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

где x_i, p_i - координаты радиус вектора и импульса соответственно, по повторяющемуся индексу идет суммирование. Решением этого уравнения будет любая функция вида:

$$f = f \left(x_i \cos(\omega_0 t) - p_i \frac{c^2}{E_z \omega_0} \sin(\omega_0 t), p_i \cos(\omega_0 t) + x_i \frac{\omega_0 E_z}{c^2} \sin(\omega_0 t) \right)$$

Будем считать, что при $t = 0$ электроны в канале имели линейную плотность N_1 вдоль оси Oz и были холодными (т. е. имели одинаковые импульсы) и

имели следующее распределение в сечении в фазовом пространстве (радиус пучка $1/a = 10^{-3}$ см.[10]):

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}_\perp, t = 0) = \frac{N_1 a^2}{\pi} e^{-a^2 r_\perp^2} \delta(p_x) \delta(p_y) \delta(p_z - p_{z0})$$

Тогда в произвольный момент времени пространственная функция распределения в поперечном сечении определяется как:

$$n(\mathbf{r}_\perp, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}_\perp, t) d^3 p = 2N_1 \frac{a^2}{\pi \cos^2(\omega_0 t)} e^{-a^2 r_\perp^2 / \cos^2(\omega_0 t)}$$

С учетом теплового разброса по поперечным импульсам в виде распределения Максвелла, функция распределения при $t = 0$ будет иметь вид:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}_\perp, t = 0) = \frac{N_1 a^2 b^2}{\pi^2} e^{-a^2 r_\perp^2 - b^2 p_\perp^2} \delta(p_z - p_{z0})$$

где коэффициент $b^2 = c^2 / (2TE_z)$. Тогда функция распределения в любой момент времени:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}_\perp, t) = \frac{N_1 a^2 b^2}{\pi^2} e^{-a^2 \xi_i \xi_i - b^2 \zeta_i \zeta_i} \delta(p_z - p_{z0}),$$

где

$$\xi_i = x_i \cos(\omega_0 t) - p_i \frac{c^2}{E_z \omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad \zeta_i = p_i \cos(\omega_0 t) + x_i \frac{\omega_0 E_z}{c^2} \sin(\omega_0 t),$$

проинтегрировав которое по импульсам, определим распределение электронов в поперечном сечении в произвольный момент времени:

$$n(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{N_1 a^2 b^2}{\pi \alpha^2(t)} e^{-(a^2 b^2 / \alpha^2(t)) r_\perp^2}$$

$$\alpha^2(t) = a^2 \left(\frac{c^2}{E_z \omega_0} \right)^2 \sin^2(\omega_0 t) + b^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

Как видно из полученного выражения, функция распределения электронов в поперечном сечении бесконечного пучка, в момент времени t имеет вид распределения Гаусса, как и при $t = 0$, а вот ширина на полувысоте меняется с течением времени по гармоническому закону. Интересно отметить, что при

температуре равной $T = E_z/(2)(ac/\omega_0)^2 \approx 10^{-2}E_z$ пространственное распределение электронов не будет зависеть от времени, множители стоящие перед квадратом синуса и косинуса становятся равными. Таким образом, влияние начального разброса по поперечным импульсам (энергиям) играет важную роль.

Источник релятивистских электронов в бесконечном ионном канале

Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени в канале не было электронов, а в плоскости $z = 0$ имеется источник электронов, действующий в течение времени τ . Тогда уравнение непрерывности в фазовом пространстве запишется следующим образом:

$$\frac{df}{dt} = \frac{N_0 a^2 b^2}{\pi^2 \tau} e^{-a^2 r_{\perp}^2 - b^2 p_{\perp}^2} \delta(z) \delta(p_z - p_{z0}) (H(t) - H(t - \tau)) \quad (6)$$

где $H(t)$ - функция Хэвисайда, N_0 - полное число электронов захваченных каналом. В уравнении Гамильтона для производной \dot{z} оставим только первое слагаемое в силу $|\mathbf{p}_{\perp}| \ll p_z$:

$$\frac{dz}{dt} \approx \frac{c^2 p_z}{E_z}$$

Тогда решение уравнения запишется в виде:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{N_0 a^2 b^2 E_z}{\pi^2 \tau c^2 p_z} e^{-a^2 \psi_1^2 - b^2 \psi_2^2} \times \\ \times \delta(p_z - p_{z0}) \left(H(z) - H\left(z - \frac{c^2 p_z}{E_z} t\right) \right), 0 \leq t \leq \tau,$$

где

$$\psi_1^2 = x_i x_i \cos^2 \phi + p_i p_i \left(\frac{c^2}{E_z \omega_0} \right)^2 \sin^2 \phi - p_i x_i \frac{c^2}{E_z \omega_0} \sin 2\phi, \\ \psi_2^2 = p_i p_i \cos^2 \phi + x_i x_i \left(\frac{E_z \omega_0}{c^2} \right)^2 \sin^2 \phi + p_i x_i \frac{E_z \omega_0}{c^2} \sin 2\phi,$$

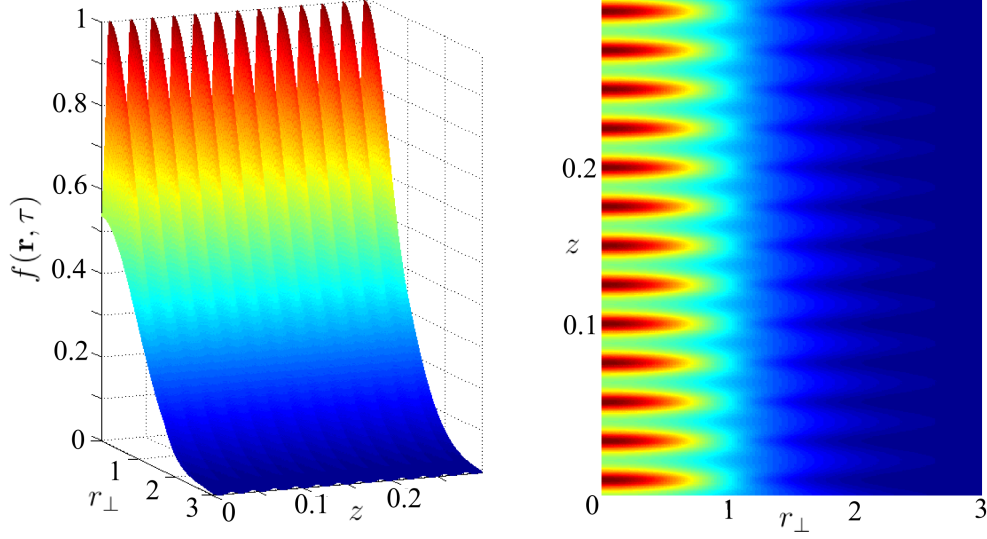


Рис. 3. Функция распределения электронов в пространстве в момент времени $\tau = 10$ пкс с неподвижным источником электронов и температурой $T = E_z(\omega_0/ac)^2 \sim 10^{-3}E_z$. Здесь функция распределения нормирована на $N_0a^2E_z/(\pi\tau c^2p_{z0})$, модуль поперечного радиуса вектора r_\perp нормирован на $a = 10^{-3}$ см, координаты имеют размерность сантиметров.

$$\phi = \omega_0 \left(\frac{zE_z}{c^2p_z} - 2t \right)$$

Найдем функцию распределения электронов в пространстве, проинтегрировав по импульсам:

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{N_0a^2b^2E_z}{\pi\tau c^2p_{z0}\alpha^2} e^{-a^2b^2r_\perp^2/\alpha^2} \left(H(z) - H\left(z - \frac{c^2p_{z0}t}{E_z}\right) \right), \quad (7)$$

$$\alpha^2(t) = b^2 \cos^2 \phi + a^2 \left(\frac{c^2}{E_z\omega_0} \right)^2 \sin^2 \phi$$

Как видно из графика 3, продольный размер пучка становится порядка сантиметра, что совсем не соответствует действительности (размер пучка $\Delta l_z \sim 10^{-3}$ см [10]). Чтобы объяснить это отличие, необходимо учесть, что источник движется в направлении оси Oz со скоростью $v_0 \sim c$, что соответствует замене в (6) дельта функции $\delta(z)$ на $\delta(z - v_0t)$. В этом случае функция распределения примет вид:

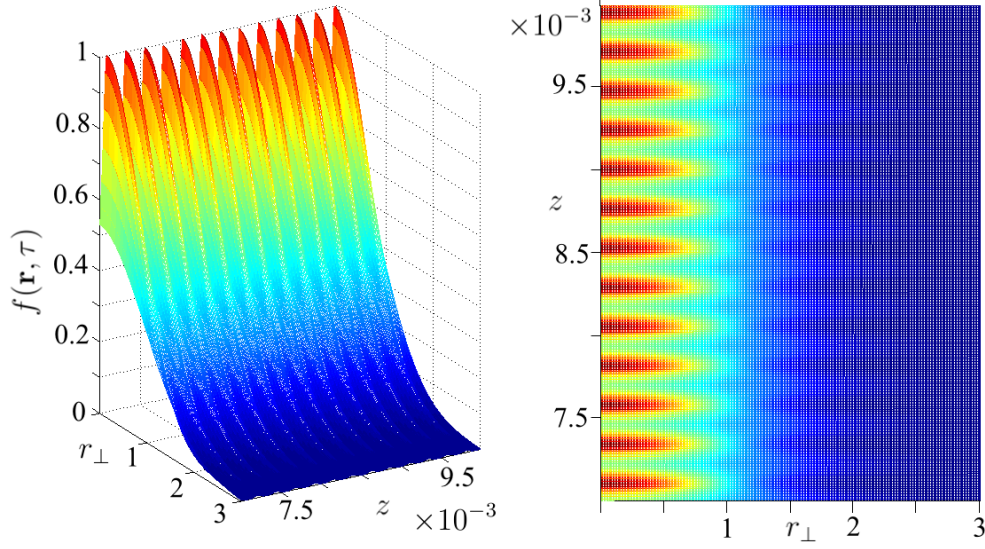


Рис. 4. Функция распределения электронов в пространстве в момент времени $\tau = 10$ пкс., источник электронов движется со скоростью $v_0 = 0,99c$ в направлении оси Oz . Здесь функция распределения нормирована на $N_0 a^2 E_z / (\pi \tau (c^2 p_{z0} - v_0 E_z))$, модуль поперечного радиуса вектора r_\perp нормирован на $a = 10^{-3}$ см, координаты имеют размерность сантиметров и с температурой $T = E_z (\omega_0 / ac)^2 \sim 10^{-3} E_z$. Как видно из графиков 3,4, отличие движущегося источника от неподвижного заключается в уменьшении продольного размера пучка $\Delta l_z = (c^2 p_z / E_z - v_0) \tau$ и соответственно уменьшении периода функции распределения.

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{N_0 a^2 b^2 E_z}{\pi^2 \tau (c^2 p_z - v_0 E_z)} e^{-a^2 \psi_1^2 - b^2 \psi_2^2} \times \\ \times \delta(p_z - p_{z0}) \left(H(z - v_0 t) - H\left(z - \frac{c^2 p_z}{E_z} t\right) \right), 0 \leq t \leq \tau,$$

величины ψ_1, ψ_2 имеют такой же вид, что и без учета движения источника, но с другим аргументом у тригонометрических функций:

$$\phi_1 = \frac{\omega_0 E_z}{c^2 p_{z0} - v_0 E_z} \left(z - \left(2 \frac{c^2 p_{z0}}{E_z} - v_0 \right) t \right)$$

проинтегрировав по импульсам получим функцию распределения электронов

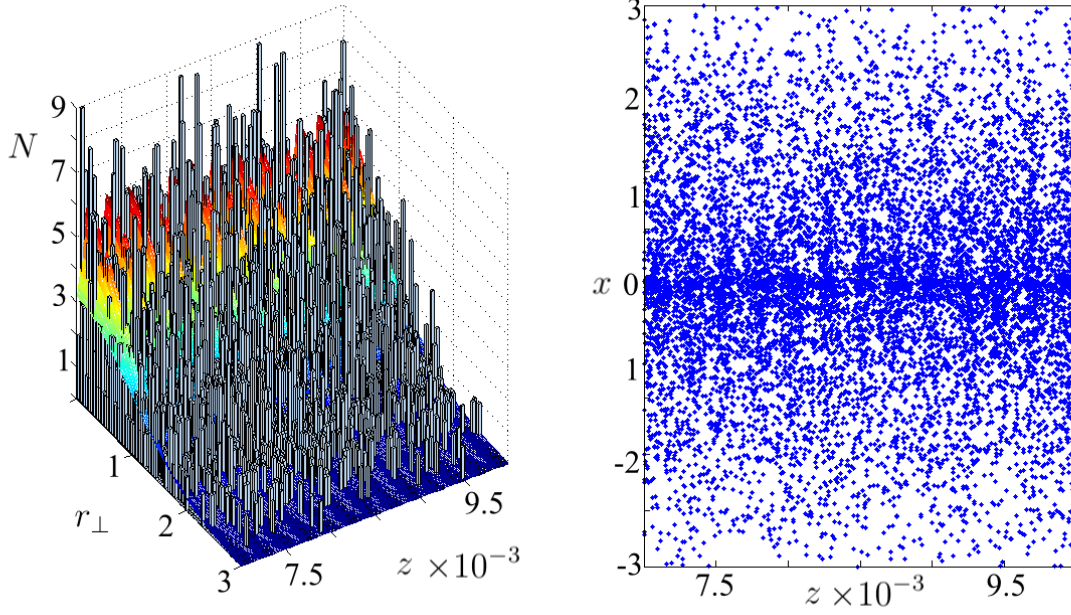


Рис. 5. На левом графике изображено распределение $N_0 = 10^3$ электронов с движущимся источником $v_0 = 0.99c$ в пространстве в момент времени $\tau = 10$ пкс с температурой $T = E_z(\omega_0/ac)^2 \sim 10^{-3}E_z$ в соответствии с формулой (8) и гистограмма промоделированных координат частиц методом исключения, на правом рисунке показано распределение частиц в этот же момент времени в плоскости xOz , поперечные координаты как и ранее нормированы на 10^{-3} см.

в пространстве:

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{N_0 a^2 b^2 E_z}{\pi \tau (c^2 p_{z0} - v_0 E_z) \alpha^2} e^{-a^2 b^2 r_{\perp}^2 / \alpha^2} \left(H(z - v_0 t) - H\left(z - \frac{c^2 p_{z0}}{E_z} t\right) \right), \quad (8)$$

$$\alpha^2(t) = b^2 \cos^2 \phi_1 + a^2 \left(\frac{c^2}{E_z \omega_0} \right)^2 \sin^2 \phi_1$$

Отличие функции распределения электронов в случае движущегося источника заключается в уменьшении продольного размера пучка и уменьшении периода функции распределения.

Заключение

В данной работе рассмотрена задача об эволюции функции распределения невзаимодействующих между собой электронов в бесконечном ионном канале. Рассмотрены случаи бесконечного электронного пучка и рассмотрен процесс появления электронов в канале. Проведен анализ движения одиночного электрона в ионном канале, рассмотрены случаи различных начальных условий. Показано, что в общем случае траектория электрона практически не отличается от эллиптической спирали. Найдена функция распределения электронов в фазовом пространстве в зависимости от времени и проанализировано влияние теплового разброса электронов в начальный момент времени. Показано, что в приближении нерелятивистского движения электронов в поперечном к оси Oz направлении тепловым разбросом электронов по поперечным импульсам пренебрегать нельзя, т. к. средняя кинетическая энергия поперечного движения пропорциональна температуре $\bar{E}_\perp \sim T$, а уже при температуре T порядка $T \sim 10^{-2}E_z$ влияние разброса по поперечным импульсам становится существенным. Также рассмотрен процесс генерации электронного пучка в случае неподвижного источника электронов и в случае движущегося со скоростью $v_0 \sim c$ ионной полости. Показано, что в случае движущегося источника электронов частота максимумов у функции распределения в пространстве увеличивается, а размер пучка уменьшается. Приведенное рассмотрение справедливо при пренебрежении отличия скорости электронов от скорости пузыря. Остается интересный вопрос, связанный с влиянием магнитного поля и конечности ионной полости, а также влияние взаимодействия электронов между собой. Эти вопросы требуют дополнительного исследования.

Дик А. В. выражает огромную благодарность за финансовую поддержку LNF (Нац. Лаб. Фраскати) и лично Д-р Карло Гуаральдо.

Список литературы

- [1] А. А. Соколов, И. М. Тернов "Релятивистский электрон"; Наука, 1974

- [2] Zhirong Huang, Kwang-Je Kim "Review of x-ray free-electron laser theory"; Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams, 10, 2007, P. 034801
- [3] Luis R. Elias, Gerald Ramian, James Hu et al. "Observation of Single-Mode Operation in a Free-Electron Laser"; Phys. Rev. Lett. 57, 1986, P. 424
- [4] J. Buon "Beam phase space and emittans"; International report CERN-94-01
- [5] Mourou G. Barty C., Perry M. "Physics Today"; 1998, V. 51, № 1, P. 22
- [6] Mangles S. P. D., Walton B. R., Tzoufras M. et al. "Phys. Rev. Lett."; 2005, V. 94, P. 245001
- [7] Tajima T., Dawson J. "Ibid"; 1979, V. 43, P. 267
- [8] Буланов С. В., Кирсанов В. И., Сахаров А. С. "Физика Плазмы"; 1990, Т. 16, № 6, С. 543
- [9] Андреев Н. Е., Горбунов Л. М., Кирсанов В. И. и др. "ЖЭТФ"; 1992, Т. 93, С. 571
- [10] А. Пухов, С. Киселев, И.Ю. Костюков "Сильно нелинейный режим взаимодействия лазерного импульса с плазмой: генерация электромагнитного излучения и ультрарелятивистских электронов"; Прикладная физика, № 6, 2006, С. 35
- [11] Esarey E., Catravas P., Leemans W. P. "Betatron Radiation from Electron Beams in Plasma Focusing Channels"; AIP Conf. Proc. 569, 2001, P. 473
- [12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц "Теория поля"; Наука, 1988
- [13] Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. "Методы статистической физики"; Наука, 1977

Подписано в печать 25.04.2012 г.
Формат 60x84/16. Заказ №30. Тираж 140 экз. П.л 1.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640