ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
Физический
институт
имени
П.Н.Лебедева
Российской академии наук
ФИАН

ПРЕПРИНТ

5

В.П. СИЛИН

КОНТУРЫ ЛАНДАУ В ТЕОРИИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Москва 2012

Контуры Ландау в теории плазменных волн.

В.П.Силин

Аннотация: Обсуждается понимание теории Ландау бесстолкновительного затухания плазменных волн. При этом приводятся аргументы в пользу того, что в такой задаче под контуром Ландау следует понимать один из двух таких контуров, использовавшихся автором такой теории, однако не тот, для которого такое название широко используется. Для второго контура Ландау находится место в квазистационарной теории ионно-звуковой турбулентности.

В 1946 году в работе [1] Ландау теоретически предсказал бесстолкновительное затухание плазменных волн, которое им не было связано с эффектом Вавилова – Черенкова, а поэтому первоначально воспринималось как нечто почти мистическое. В то же время это предсказание хоть и не сразу было воспринято определенной частью молодежи как научный результат углубляющий бесстолкновительное кинетическое описание плазмы, предложенное Власовым [2]. В частности работа [1], посвященная начальной линейной задаче о релаксации слабого возмущения электронного распределения (ниже задаче Коши), указала вскоре ставший общепринятым путь математического подхода к теории волн не только в плазме с распределением Максвелла по скоростям частиц, как это было в работах [1,2]. Буквально сразу это было подхвачено в школе Власова в работе Гольдмана[3], где был рассмотрен случай плазмы с распределением электронов по закону Ферми. Хоть и запоздало, но именно этот общепринятый подход породил возможность критического анализа работы [1], который публикуется в настоящем сообщении. В нашем изложении мы постараемся рассмотреть понятие «контур Ландау», используемое при написании комплексной диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы и нахождении частоты и декремента затухания плазменных волн. При этом в работе [1] используются в практике вычислений два контура, один из которых стал общепринятым (см. рис.1) и связывается с именем Ландау, а второй (см. рис.2) в известной мере не популярен. На наш взгляд положение должно быть исправлено, контур рис.2 следовало бы именовать контуром Ландау, во всяком случае при численном решении дисперсионного уравнения, упомянутой выше задачи Коши.

Несколько ниже мы для иллюстративности нашего изложения используем частный, но поучительный случай электронной плазмы с модельным распределением электронов по скоростям

$$f\left(\vec{\mathrm{v}}\right) = \frac{N_e w}{\pi^2\left(\vec{\mathrm{v}}^2 + w^2\right)^2} \qquad (1)$$

Здесь N_e - плотность числа электронов, w - характерная для распределения (1) скорость электронов. Однако перед этим напомним некоторые существенные положения работы [1], а также необходимые положения теории функций комплексного переменного.

Итак, бесстолкновительное затухание Ландау обнаруживается в работе [1] в ходе решения начальной задачи о релаксации малого линейного возмущения распределения электронов. На современном языке в ходе решения такой задачи (ср., например, [4,5]) возникает при учете лишь возмущений продольного электрического поля комплексная продольная диэлектрическая проницаемость электронной плазмы

$$\varepsilon_l\left(\omega,\vec{k}\right) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2}\int \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{\omega - \vec{k}\vec{\mathrm{v}}}\vec{k}\,\frac{\partial f\left(\vec{\mathrm{v}}\right)}{\partial \vec{\mathrm{v}}} \qquad (2)$$

как функция комплексной переменной ω, определенная формулой (2) в верхней полуплоскости ω, когда $\operatorname{Im}\omega = \Delta > 0$. В формуле (2) e и m - заряд и масса электрона, $\vec{k}$ - волновой вектор возникающих в задаче релаксации начального возмущения волн продольного электрического поля. При этом - f электронное распределение невозмущенного равновесного состояния, зависящего как (1) от модуля электронной скорости $|\vec{\mathrm{v}}|$. В формуле (2) Ландау проводил интегрирование по компонентам скорости, перпендикулярным направлению волнового вектора $\vec{k}$, которые обозначим как v_x и v_y. Тогда, используя обозначение

$$f_0(V)=\iint d\mathrm{v}_x d\mathrm{v}_y f(\vec{\mathrm{v}}) \qquad ,(3)$$

где $V=\mathrm{v}_z$ и ось z направлена вдоль волнового вектора , можем переписать (2) в виде

$$\varepsilon_l(\omega,k)= \\ =1-\frac{4\pi e^2}{mk^2}\int_{-\infty}^{\infty}dV\frac{1}{V-(\omega/k)}\frac{df_0}{dV},\ \operatorname{Im}\omega=\Delta>0 \qquad (4)$$

Здесь $k=\left|\vec{k}\right|>0$. Формула (4) записана в таком виде, чтобы было очевидно, что определение комплексной продольной диэлектрической проницаемости прочитывается как представление функции комплексной переменной (ω/k)заданной интегралом типа Коши в верхней полуплоскости (ω/k). Поскольку далее используется положение старой математики, то напомним старый результат об аналитическом продолжении такого представления на границу области, отвечающую контуру интегрирования интеграла типа Коши, связанный с именем Сохоцкого [6]. Для нашего случая интеграла по действительной оси можно непосредственно воспользоваться нужной нам формулой "Сохоцкого для бесконечной прямой" ([7] , стр. 54) :

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau \qquad (5)$$

Здесь $\Phi^+(t)$ - предел функции

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau \qquad (6)$$

при стремлении z на верхней полуплоскости к t, находящейся на действительной оси. При этом в формуле (5) интеграл по действительной оси понимается в смысле главного значения Коши. Формулу (5) можно переписать в следующем виде [4,5]

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\left[\frac{P}{\tau-t}+i\pi\delta(t-\tau)\right] \quad (7)$$

Последняя формула особенно полезна, поскольку она может быть записана в виде

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \ , \qquad (8)$$

где контур интегрирования изображен в плоскости комплексного переменного τ на рис. 1

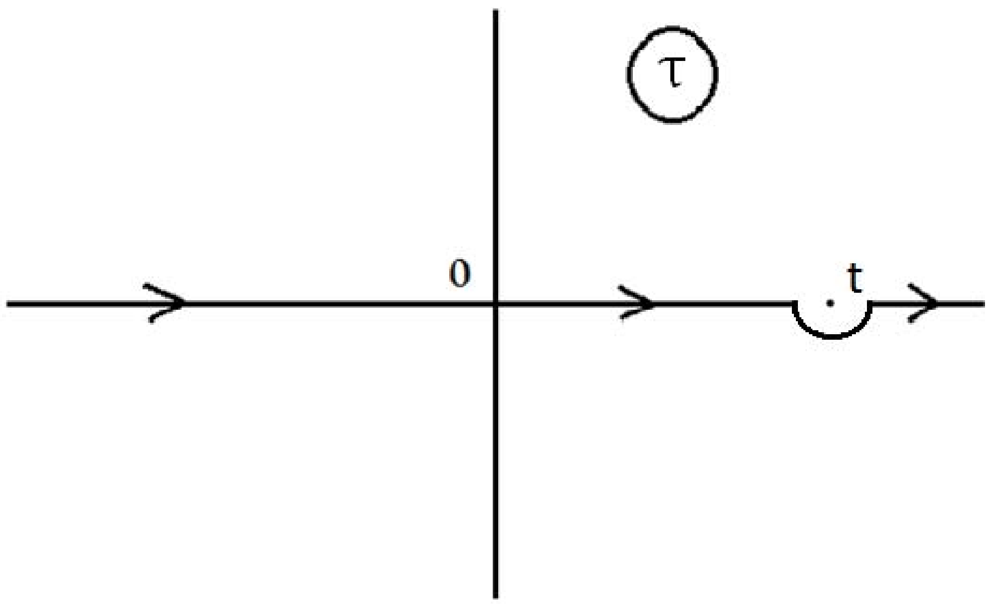

Рис.1. Контур интегрирования интеграла типа Коши, являющегося аналитическим продолжением на действительную ось функции (6), заданной в верхней полуплоскости комплексной переменной z интегралом типа Коши по действительной оси, при стремлении аргумента z на верхней полуплоскости к точке t, находящейся на действительной оси.

Относительно истории формул Сохоцкого укажем, что согласно Мусхелишвили[8] «долгое время спустя» формулы Сохоцкого были найдены Племелем [9]. По этой причине в отличие от книги [7] в книге [8] используется название формулы Сохоцкого-Племеля.

Для получения бесстолкновительного декремента затухания Ландау недостаточно аналитического продолжения Сохоцкого на действительную ось того интеграла типа Коши, который определяет формулу (4). Действительно частота и декремент затухания плазменных волн как функции волнового вектора согласно Ландау определяются дисперсионным уравнением :

$$\varepsilon_l\left(\omega,k\right)=0 \qquad (9)$$

Так как найденный Ландау декремент $\gamma>0$, и $\mathrm{Im}\,\omega=-\gamma<0$, то необходимо иметь аналитическое продолжение (4) не только на действительную ось, как это интересовало Сохоцкого, но и в нижнюю полуплоскость комплексной переменной τ. Это было сделано Ландау в работе [1]. Для того, чтобы пояснить естественность идеи аналитического продолжения Ландау, отметим, что аналитическое продолжение по Сохоцкому интеграла типа Коши (6) на действительную ось согласно (8) в терминологии, используемой в [4], отвечает уводу пути интегрирования с действительной оси в формуле (6) на контур рис. 1. При этом полюс $\tau=t$, а в формуле (4) черенковский полюс $V=\omega/k$, обходится снизу. Аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость с помощью увода контура интегрирования интеграла типа Коши (5) в нижнюю полуплоскость комплексной переменной τ проводится без пересечения особых точек функции $\varphi\left(\tau\right)$, что подчеркнуто в [4]. В работе [1] для аналитического продолжения в нижнюю полуплоскость использован контур вида рис. 2.

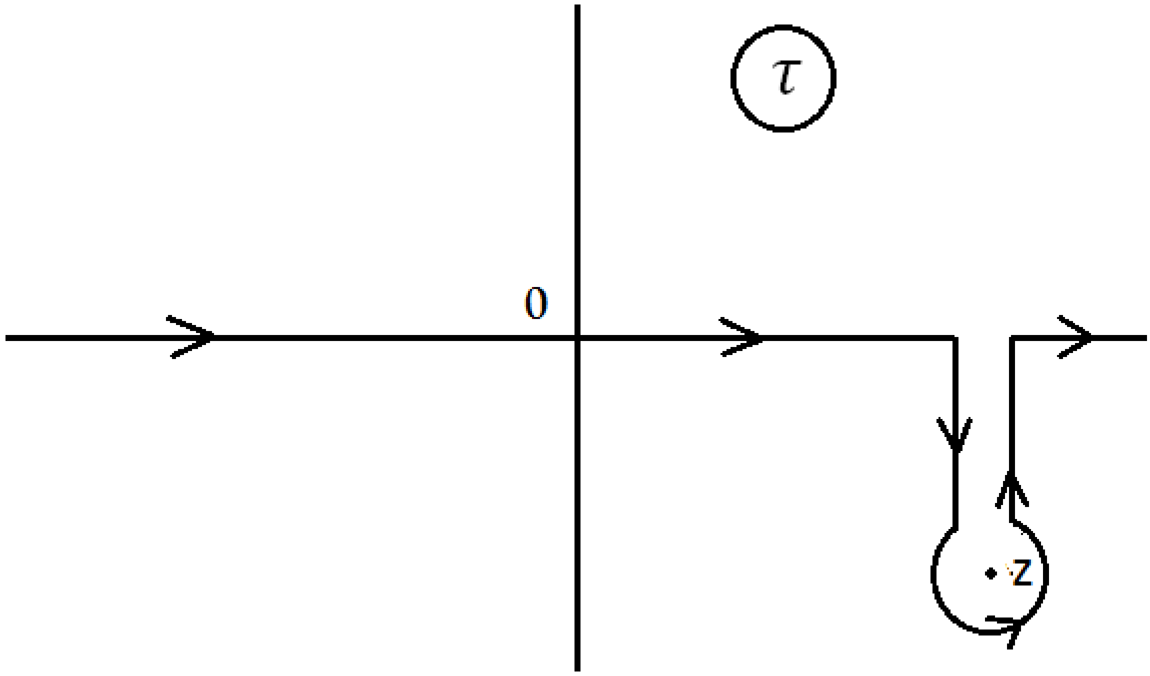

Рис.2. Контур интегрирования интеграла типа Коши, являющегося аналитическим продолжением в нижнюю полуплоскость z функции (6) , заданной в верхней полуплоскости комплексной переменной z интегралом типа Коши по действительной оси.

Подчеркнем, что в [1] рассматривалось максвелловское распределение электронов по скоростям, для которого функция f_0 , входящая в подинтегральное выражение (4) имеет существенную особенность в бесконечно удаленной точке комплексного переменного V. Это на рис.2 отвечает переменной τ . Поэтому в контуре рис. 2 (как и в контуре рис.1) увод контура от действительной оси проводился лишь в конечной области.

Обратимся теперь к поучающему нас примеру модельного электронного распределения (1) (см, задачу IV.2 в [5]), когда

$$f_0(V) = \frac{N_e w}{\pi\left(V^2 + w^2\right)}, \quad \text{и} \quad \frac{df_0(V)}{dV} = \frac{N_e V}{\pi}\frac{d}{dw}\frac{1}{V^2 + w^2} \qquad (10)$$

Тогда можно записать

$$\varepsilon_l(\omega,k)=1-\frac{\omega_{Le}^2}{\pi k^2}\times$$

$$\times\frac{d}{dw}\int_{-\infty}^{\infty}dV\frac{V}{\left[V-(\omega/k)\right](V+iw)(V-iw)} \qquad (11)$$

Уводя при $\operatorname{Im}\omega>0$ контур интегрирования по действительной оси в (11) бесконечно далеко в нижнюю полуплоскость комплексной переменной V, где такой контур дает нулевой вклад, получаем, что вклад в (11) возникает лишь от вычета из-за полюса в точке $V=-iw$. В результате это дает (см. задачу IV.2 в книге [5]

$$\varepsilon_l(\omega,k)=1-\frac{\omega_{Le}^2}{(\omega+ikw)^2} \qquad (12)$$

Из формулы (12), полученной при $\operatorname{Im}\omega>0$, сразу следует, что в верхней полуплоскости комплексной переменной ω функция (12) не имеет особенностей. Также очевидно, что выражение (12) представляет собой аналитическое продолжение $\varepsilon_l(\omega,k)$ на действительную ось и в нижнюю полуплоскость ω. Однако для достижения нашей цели разберемся в роли контуров рисунков 1 и 2.

Легко понять, что в применении к интегралу Коши формулы (11) контуры рисунков 1 и 2 при замене в них τ на V и в первом случае t, а во втором случае z на (ω/k) соответственно дают также результат (12), ибо допускают возможность увода их контуров бесконечно вниз комплексной полуплоскости с единственным вкладом вычета $V=-iw$.

После того как мы определились с комплексной диэлектрической проницаемостью, переходим к этапу очевидного получения спектра продольных волн, проявляющихся в начальной задаче при электронном распределении (1). Ответ возникает из уравнения (9) при подстановке в него (12). Именно

$$\omega=\pm\omega_{Le}-ikw \qquad (13)$$

То-есть в этом случае возникает точный в модели (1) ответ отсутствия дисперсии продольных волн и элементарный точный закон линейной зависимости бесстолкновительного декремента затухания волн от модуля волнового вектора $\gamma = kw$.

Вышеизложенное позволяет ответить на вопрос, какое вычисление продольной диэлектрической восприимчивости можно считать достаточным для получения ответа (13) о бесстолкновительном декременте затухания плазменных волн, проявляющихся в решении задачи Коши, не только в прозрачном примере нашего рассмотрения, но и в более сложном, когда возможно, например, лишь приближенное вычисление с использованием численных методов . Представляется, что ответ на этот вопрос является простым и сводится к ответу на вопрос: каким контуром интегрирования достаточно пользоваться. А именно таким контуром является контур рисунка 2 (или эквивалентные ему). Действительно исходный контур формулы (4), предложенный для $\operatorname{Im}\omega > 0$, не отвечает области, в которой по определению можно найти декремент. Далее, контур рис. 1, который зачастую связывают с именем Ландау, как это известно из XIX века, отвечает чисто действительным значениям ω аргумента функции $\varepsilon_l(\omega, k)$, среди которых нельзя найти какого-либо декремента затухания. Поэтому представляется нелогичным его связывать с именем Ландау при решении того, что обозначено как задача Коши, хотя последнее за время после публикации статьи [1] стало правилом. Да, и в самой статье [1] предложено для малых декрементов затухания использовать интеграл типа Коши с контуром интегрирования рис. 1. Как же в этом случае оказывалось возможным получить декремент затухания ? Ответ на этот вопрос оказывается прост. При решении уравнения (9) в случае приближенных вычислений использовался результат вычислений с помощью интеграла Коши с контуром рис. 1, но при этом игнорировался тот факт, что такие вычисления возможны в случае такого контура лишь при $\operatorname{Im}\omega = 0$. Считалось, что $\operatorname{Im}\omega \neq 0$, а далее все просто ведет к несуществующему решению при использовании контура рис. 1 с конечным, хоть и малым декрементом . Среди подобных работ, которые можно назвать "работами с полувычетом" не только работа [1], и основной текст книги [5], но и нет им числа. Следовательно, обоснованным является путь вычисления бесстолкновительного декремента затухания плазменных волн, использующий контур Ландау рис.2, когда интеграл типа Коши в формулах (4) и (11) сводится к вкладу интеграла вдоль действительной оси и вкладу от (полного) вычета от черенковского полюса $V = \omega / k$ в нижней полуплоскости комплексной переменной V. Такой путь отыскания декремента затухания представляется актуальным при использовании численных методов. Однако при этом в каждом конкретном случае возникает вопрос о вычислении согласно рис.2 интеграла по действительной оси.

Выводы :

Таким образом, достаточный путь, в том числе и численного вычисления бесстолкновительного декремента затухания указан в [1] на пути использования там контура рис. 2, когда в [1] вычислялся декремент больший частоты. В этой связи думается, что стоило бы именовать контуром Ландау контур рис. 2 (и эквивалентные ему аналоги). Однако при этом возникает вопрос о вычислении согласно рис.2 интеграла по действительной оси, что может быть не всегда просто в аналитической форме (в отличие от задачи IV,2 в[5]), но не в рамках использования численных методов.

С другой стороны следует отметить, что имеются такие задачи в теории плазмы, решение которых основывается на использовании контура Ландау рис.1, отвечающего задаче Сохоцкого. Среди них теория квазистационарной турбулентности плазмы. Так, например, работы [10-14], посвященные квазистационарной теории ионно-звуковой турбулентности (ИЗТ), основываются на уравнении равенства нулю декремента (или,что то же самое в этом случае, инкремента) ионно-звуковой неустойчивости. Это отвечает, в свете вышеизложенного, приближению чисто действительных частот нелинейно взаимодействующих волн. Именно последнее отвечает необходимости использования в теории ИЗТ контура рис.1. Нечто подобное, повидимому, предчувствовал Ландау, когда говорил, что его работа [1] относится к теории устойчивой плазмы.

В заключение выражаю признательность В.Ю.Попову и С.А.Урюпину, беседы с которыми пробудили мои воспоминания прежних лет. За изготовление рисунков приношу свою благодарность Т.В.Силиной.

Литература

1. Ландау Л.Д., ЖЭТФ, 1946, т.16, с.25.
2. Власов А.А., ЖЭТФ, 1938, т.8, с.291.
3. Гольдман И.И., ЖЭТФ, 1947, т.17, с.681.
4. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П., Физическая кинетика, Наука, М. 1979.
5. Силин В.П., Введение в кинетическую теорию газов, Наука, М. 1971.
6. Сохоцкий Ю.В., Об определенных интегралах и функциях употребляемых при разложении в ряды, С.-Петербург, 1873 г.
7. Гахов Ф.Д., Краевые задачи, ГИФМЛ, М. 1963
8. Н.И.Мусхелишвили, Некоторые основные задачи теории упругости, Наука, М. 1966.
9. Plemelj J., Ein Ergaenzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischen Fuktionen, Randwerte betreffend, Monath. Math. Phys, XIX Jahrgang, 1908, s.205-210.
10. Быченков В.Ю., В.П.Силин, ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 1886.
11. Силин В.П., Урюпин С.А., ЖЭТФ, 1992, т.102, с.78.
12. Силин В.П., Силин П.В., Краткие сообщения по физике ФИАН, 2011, №.1,с.3.
13. Силин В.П., Физика Плазмы, 2011, т. 37, с. 489.
14. Silin V.P., Ukr. J. Phys. 2012. Vol. 57, No. 3, p.322.

Подписано в печать 24.04.2012 г.
Формат 60x84/16. Заказ №28. Тираж 140 экз. П.л 1.
Отпечатано в РИИС ФИАН с оригинал-макета заказчика
119991 Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 499 783 3640