

УЧРЕЖДЕНИЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



ПРЕПРИНТ Е.П.ОРЛОВ

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАЙОРАНЫ С ТОЧКИ
ЗРЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА
СОБЫТИЙ С КОСОУГОЛЬНЫМИ
СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ**

Москва 2011

А Н Н О Т А Ц И Я

Решения релятивистского уравнения Дирака для свободной частицы в представлении Майораны рассмотрены с точки зрения понятия евклидова пространства событий с косоугольными системами координат, в котором чистое спиновое состояние описывается вектором, направленным по биссектрисе одного из четырёх углов между осью времени и пространственной осью, вдоль которой происходит движение частицы. Векторы всех четырёх углов в случае покоящихся частиц, принимаются за базисные векторы стандартного представления. Показано, что каждая плоскость евклидова пространства событий, в которой лежат базисные векторы стандартного представления, в представлении Майораны расслаивается на две комплексные плоскости, а компоненты волновой функции задаются проекциями вектора, соответствующего движущейся частице (античастицы), на действительные и мнимые оси этих плоскостей.

E.P.Orlov

MAJORANA'S REPRESENTATION FROM THE VIEWPOINT OF THE EUCLIDIAN SPACE OF EVENTS WITH NON-ORTHOGONAL REFERENCE SYSTEMS

A B S T R A C T

The solutions of relative Dirac equation for a free moving particle in the Majorana's representation have been considered from the viewpoint of Euclidian space of events with non-orthogonal reference systems, where the spin state is described by the vector directed along the bisectrix of one from the four angles between the time line and space coordinate line along which the particle moves. In the case of particles at rest the vectors of all the four angles are taken as the basic vectors of the standard representation. It is shown that in the Majorana's representation every plane of the Euclidian space of events containing basic vectors of standard representation splits in two complex planes and the components of the wave function are determined by the projections of the vector corresponding to the moving particle (antiparticle) on the real and imaginary coordinate axis of these planes.

Представление релятивистского уравнения Дирака и его решений, о котором пойдёт речь, предложено Этторе Майораной более 70 лет тому назад [1], но до сих пор интерес к идеям Майораны, связанным с этим представлением не ослабевает. Данная работа также посвящена представлению Майораны, которое анализируется с точки зрения понятия о евклидовом пространстве событий с косоугольными системами координат. Однако прежде чем обсуждать с указанной точки зрения решения релятивистского уравнения Дирака для свободной частицы в представлении Майораны имеет смысл обсудить эти решения, записанные в так называемом обычном [2] или стандартном [3] представлении.

В работе [4] решения, записанные в стандартном представлении, были проанализированы с точки зрения упомянутого выше понятия о евклидовом пространстве событий с косоугольными системами координат, которое было сформировано в работах [5 – 7] на основе рассмотрения пространственно временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора. Как подчёркивалось в работах [4 – 7] такой резонатор с возбуждёнными в нем модами, образованными волнами, распространяющимися под углами друг к другу, можно рассматривать как наглядную модель пространства с дополнительным компактным четвертым измерением, заполненного волновыми полями движущихся друг относительно друга частиц, см., например, [8 – 12].

В [4 – 7] отмечалось также, что достоинством рассмотрения физических процессов в таком компактизованном евклидовом пространстве является, во-первых, то, что нет необходимости в основу рассмотрения класть такие постулаты как постоянство скорости света или псевдоевклидовость пространственно временного многообразия Минковского. Достаточно предположить, что пространство внутри резонатора однородно и изотропно, и отсутствует дисперсия скорости распространяющихся в нём волн. При этом псевдоевклидовость пространства времени и постулат о постоянстве скорости света являются следствием этих предположений и резонансного условия для мод резонатора.

Во-вторых, вращение координатных осей системы отсчёта происходит на действительные, а не на мнимые углы, как это имеет место при рассмотрении физических процессов в пространстве времени Минковского. Это позволяет иллюстрировать физические процессы привычными геометрическими образами, лишёнными той иррациональности, которая присуща геометрическим образам пространства времени Минковского. При этом вывод кинематических эффектов специальной теории относительности и различные представления решений реля-

тивистского уравнения Дирака становятся наглядными и понятными не только математически, но и физически, так как базируется на законах распространения волн в резонаторах.

Действительно, решения уравнения Дирака, записанного в стандартном представлении, в этом пространстве событий в случае, когда импульс \mathbf{p} направлен вдоль положительного направления оси z выглядят следующим образом [4]: положительные решения –

$$\psi_{p,1/2} = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ 0 \\ \sin(\beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \psi_{p,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\beta/2) \\ 0 \\ -\sin(\beta/2) \end{pmatrix} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (1)$$

отрицательные решения –

$$\psi_{-p,1/2} = e^{i\pi/2} \begin{pmatrix} \sin(\beta/2) \\ 0 \\ \cos(\beta/2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)}, \quad \psi_{-p,-1/2} = e^{-i\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\beta/2) \\ 0 \\ \cos(\beta/2) \end{pmatrix} e^{i(kl-k_z z)}, \quad (2)$$

Соответственно, положительные и отрицательные дираковски-сопряжённые решения имеют вид:

$$\bar{\psi}_{p,1/2} = \left(\cos \frac{\beta}{2}, \quad 0, \quad -\sin \frac{\beta}{2}, \quad 0 \right) e^{i(kl-k_z z)}, \quad (3)$$

$$\bar{\psi}_{p,-1/2} = \left(0, \quad \cos \frac{\beta}{2}, \quad 0, \quad \sin \frac{\beta}{2} \right) e^{i(kl-k_z z)},$$

$$\bar{\psi}_{-p,1/2} = e^{i\pi/2} \left(-\sin \frac{\beta}{2}, \quad 0, \quad \cos \frac{\beta}{2}, \quad 0 \right) e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (4)$$

$$\bar{\psi}_{-p,-1/2} = e^{-i\pi/2} \left(0, \quad \sin \frac{\beta}{2}, \quad 0, \quad \cos \frac{\beta}{2} \right) e^{-i(kl-k_z z)}.$$

Величины, фигурирующие в этих формулах, требуют пояснения. Начнём с того, что размеры зеркал резонатора предполагаются настолько большими по сравнению с расстоянием L между ними, что это позволяет допустить непрерывность поперечных индексов мод и возможность распространения волн, образующих моды, под любыми углами к оси резонатора. Моды с отличающимися поперечными индексами при фиксированном продольном индексе ассоциируются с одинакового рода частицами, движущимися друг относительно друга.

Мода, прямая и обратная волны которой распространяются перпендикулярно плоскостям зеркал резонатора (волновые векторы параллельны оси резонатора), ассоциируется с покоящейся относительно наблюдателя частицей и связанной с ней системой координат. Такую моду будем называть покоящейся. Мода, прямая и обратная волны которой распространяются под углами β и $\pi - \beta$, соответственно, ассоциируется с движущейся относительно наблюдателя частицей. С ней связывается движущаяся система координат, а саму моду будем называть движущейся. Величина скорости v движущейся моды относительно покоящейся связана с углом β соотношением $v/c = \sin \beta$ [5, 6].

Важно то, что при рассмотрении пространственно временных отношений между модами такого резонатора, как уже отмечено во введении, нет необходимости постулировать псевдоевклидовость пространства и времени. Достаточно допустить некоторое пропускание зеркал резонатора и воспользоваться обычным в теории резонаторов приёмом, отображающим пространство между зеркалами резонатора на всю плоскость, заданную волновыми векторами волн этих мод. Тогда с помощью времён жизни мод можно ввести представление о временных координатах систем отсчёта, связанных как с покоящейся, так и с движущейся модой, и показать, что пространственно-временные отношения между модами резонатора подчиняются преобразованиям Лоренца, а геометрия пространства-времени, если можно так выразиться, с точки зрения мод - псевдоевклидова. С точки зрения внешнего наблюдателя геометрия пространства событий является евклидовой, но пространственно-временное описание событий необходимо проводить в косоугольных системах координат x, y, z, l и x', y', z', l' , где $l = ct, l' = ct'$, изображённых на рис.1,а.

Ввиду того, что движение происходит вдоль оси z $x' \equiv x, y' \equiv y$ и поэтому на рис.1 кроме временных координат l и l' из совокупности пространственных координат показаны только координаты z и z' . В силу резонансного условия величина

$$k = k_0 / \cos \beta = k_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \quad (5)$$

В отрицательных решениях (2) и (4) наряду с заменой знака перед $k = |\mathbf{k}| = k_l$ надо поменять и знак перед проекцией вектора \mathbf{k} на пространственные оси, или что то же самое знак перед проекцией импульса на ось z при обычной записи решений (см., например, [3, С.107]). Это означает, что движению моды в положительном направлении оси z в случае отрицательных решений бу-

дет отвечать вектор \mathbf{k}_- , являющийся зеркальным отражением вектора \mathbf{k} относительно оси z .

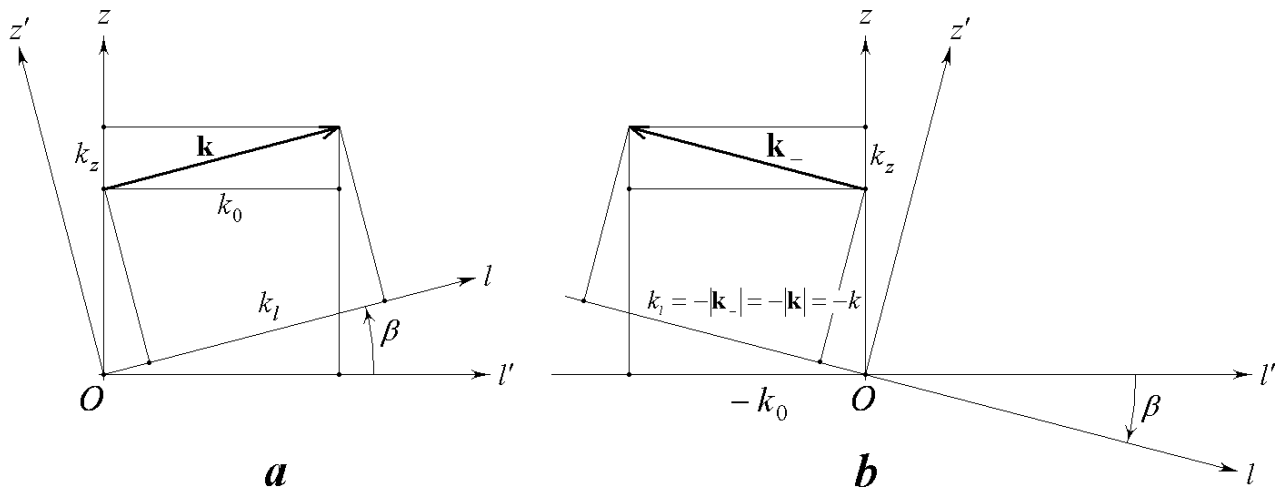


Рис.1. Косоугольные системы координат евклидова пространства событий в случае частицы, описываемой положительными (a) и отрицательными решениями (b). Оси z, l связаны с неподвижным наблюдателем, а z', l' – с движущейся в положительном направлении оси z частицей.

Таким образом, для отрицательных решений, соответствующих движению моды резонатора (частицы) в положительном направлении оси z надо использовать системы координат, изображённые на рис.1,b. В этих системах координат оси z' и l повернуты на угол 2β по часовой стрелке, по отношению к аналогичным осям на рис.1,a. Поскольку отрицательные решения отвечают античастицам, то рис.1,b является наглядной иллюстрацией замечания Фейнмана о том, что «...Каждая частица в Природе обладает амплитудой движения вспять во времени, и, следовательно, имеет античастицу.» [13].

Отметим, что введённые таким образом косоугольные системы координат существенным образом отличаются от часто используемых в литературе косоугольных систем координат [13 – 18] тем, что временная и пространственные оси не только системы координат, связанной с движущимся наблюдателем, но и системы координат, связанной с неподвижным наблюдателем, расположены под углом друг к другу.

В используемых в [4 – 7] и в данной работе косоугольных системах координат ковариантная временная компонента волнового вектора прямой волны, образующей совместно с обратной волной движущуюся моду, «с точки зрения» покоящейся моды для положительных решений $k_l = |\mathbf{k}| = k$, а для отрицательных

$k_l = -|\mathbf{k}_-| = -|\mathbf{k}| = -k$. Пространственная ковариантная компонента k_z в обоих случаях имеет один и тот же знак и определяется формулой:

$$k_z = k_0 \operatorname{tg} \beta. \quad (6)$$

Заметим, что волновое число k волн движущейся моды, как видно из рис.1, выражается через k_0 и k_z как

$$k = \sqrt{k_z^2 + k_0^2}, \quad (7)$$

что в силу хорошо известных соотношений $k_z = p_z / \hbar$, $k_0 = 2\pi / \Lambda = m_0 c / \hbar$, где Λ - комптоновская длина волны частицы, m_0 - её масса, эквивалентно соотношению $\varepsilon = c \sqrt{p_z^2 + m_0^2 c^2}$, связывающему релятивистскую энергию частицы ε с её импульсом p_z . При этом $k = \varepsilon / \hbar c$ – абсолютное значение волнового вектора в системе координат, связанной с покоящейся модой. Величина k_0 численно равна так называемому комптоновскому волновому числу. С учётом соотношения (6) видно, что формулы (5) и (7) эквивалентны друг другу.

Как мы видим из рис.1 в евклидовом пространстве событий переход от неподвижной системы координат к движущейся вдоль оси z системе для положительных решений соответствует повороту оси l в плоскости осей l и z на угол β , такой, что $\sin \beta = v / c$, а для отрицательных – повороту на угол β в противоположном направлении.

Из выражений (1) – (4) видно, что при переходе от неподвижной системы координат к движущейся биспинор Дирака в евклидовом пространстве событий преобразуется по закону, аналогичному для 3-мерных спиноров, то есть при повороте на угол β преобразование спиноров определяется величиной $\beta/2$ [2, 3, 19].

Обратим теперь внимание на то, что биссектрисы четырёх углов между осями l и z (или l' и z'), при повороте оси l на угол β против часовой стрелки поворачиваются также против часовой стрелки на угол $\beta/2$, рис.2. При повороте оси l на угол β по часовой стрелке биссектрисы четырёх углов между осями l и z , поворачиваются по часовой стрелке на угол $\beta/2$.

Известно [20], что точкам пространства времени Минковского, лежащим на световом конусе, можно сопоставить спиноры – векторы в двумерном комплексном пространстве. Поскольку точки евклидова пространства событий, лежащие на биссектрисах упомянутых углов, удовлетворяют соотношению

$l^2 - z^2 = l'^2 - z'^2 = 0$, то есть соответствуют точкам пространства-времени Минковского, лежащим на световом конусе, то, следовательно, векторы \mathbf{s} , направленные по биссектрисам углов между осями l и z (l' и z'), можно сопоставить спинорам, и, следовательно, спину частицы. Как будет понятно из дальнейшего, векторы \mathbf{s} верхней полуплоскости отвечают состояниям со спином, направленным в положительном направлении оси z , а векторы \mathbf{s} нижней полуплоскости – состояниям со спином, направленным в отрицательном направлении оси z . Векторы правой полуплоскости отвечают положительным решениям, а векторы левой полуплоскости – отрицательным решениям. Эти векторы евклидова пространства событий названы в [4] спиновыми векторами.

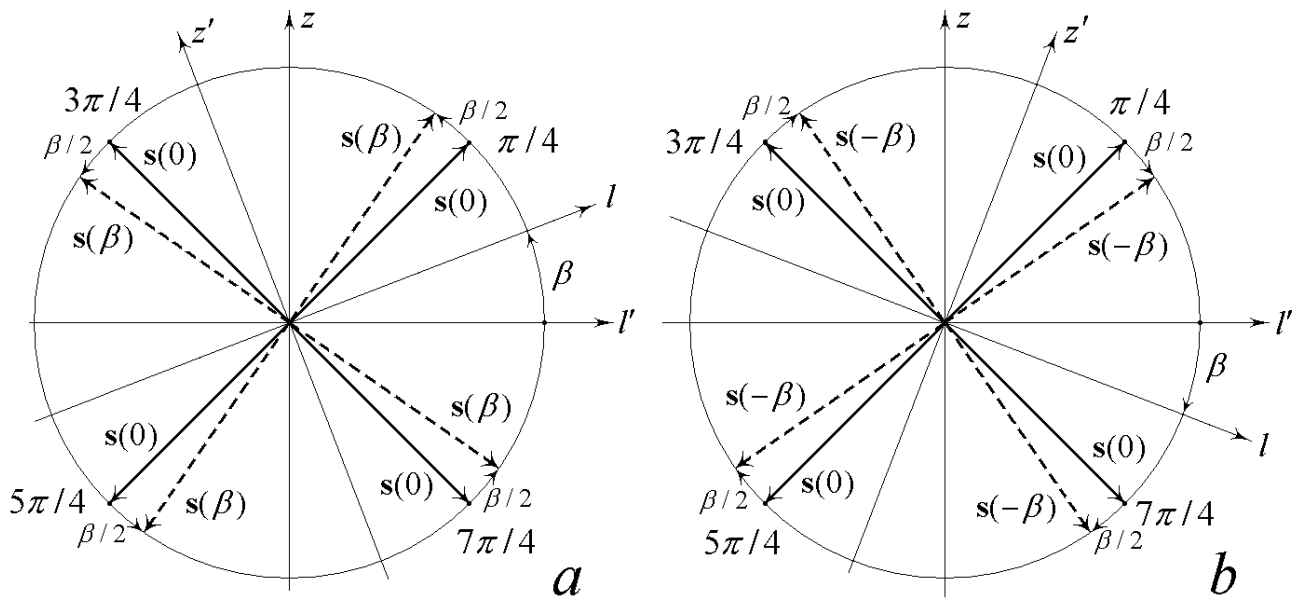


Рис.2. Иллюстрация поворота векторов \mathbf{s} , направленных из начала координат по биссектрисам углов между осями l , z на угол $\beta/2$ при вращении оси l против часовой стрелки на угол β (a) и по часовой стрелке на угол β (b).

В [5 – 7] показано, что в евклидовом пространстве событий сечение фазовой поверхности световой волны плоскостью осей l и z изображается окружностью, радиус которой при $\beta = 0$ и $z = 0$ равен l , то есть ct .

При переходе к движущейся системе координат, то есть при повороте этих осей, точки, куда дошёл свет с заданной фазой, лежат на этой же окружности (это и составляет принцип постоянства скорости света) и можно произвести нормировку спиновых векторов, одинаковую для всех систем координат.

Отметим, что не обязательно говорить о световой волне. Вспомним принцип Гюйгенса-Френеля. Согласно этому принципу [21] каждая точка пространства, которой достигла в данный момент распространяющаяся волна, становится источником элементарных сферических волн. Для частиц с отличной от нуля массой покоя каждая такая элементарная сферическая волна в сечении плоскостью l, z также представляет собой круг. Точки круга, лежащие на биссектрисах углов между осями l, z (или l', z') также удовлетворяют уравнению $l^2 - z^2 = l'^2 - z'^2 = 0$. Поэтому предыдущие рассуждения можно распространить и на волны, описывающие частицы с отличной от нуля массой покоя, точнее на волны, исходящие из каждой точки волнового фронта.

Рассмотрим, прежде всего, спиновые векторы в случае $\beta = 0$ и нормируем их на величину, равную радиусу окружности. Их модули тогда будут равны единице. Нормированные спиновые векторы первого и второго квадрантов плоскости l, z , рис.2, примем за базисные векторы, по которым будем раскладывать спиновые векторы, лежащие в верхней полуплоскости. Чтобы не нарушать соответствия общепринятым в литературе обозначениям, обозначим их как ϵ_1, ϵ_3 , рис.3,*a*. Нормированные же спиновые векторы четвертого и третьего квадрантов плоскости l, z примем за базисные векторы, по которым будем раскладывать спиновые векторы, лежащие в нижней полуплоскости, рис.3,*b*. Обозначим их как ϵ_2, ϵ_4 . При этом спиновые векторы, лежащие в нижней полуплоскости мы должны представлять изображёнными на другом листе. Таким образом, плоскость l, z , в которой лежат волновые векторы волн, образующих движущуюся и неподвижную моду резонатора и спиновые векторы, является двулистной. Только в этом случае системы векторов верхней и нижней полуплоскостей являются линейно независимыми. Физически это означает линейную независимость спиновых состояний частицы с противоположными направлениями спинов.

Рассмотрим теперь проекции спиновых векторов, повернутых на углы $\pm \beta/2$ относительно биссектрис углов квадрантов плоскости l, z , на оси, определяемые этими базисными векторами. Назовём их базисными осями и обозначим, соответственно, как s_1, s_2, s_3, s_4 , рис.3.

Если повернутые спиновые векторы опять же нормировать на величину радиуса окружности, то, как показано в [4] биспинорам $\psi_{-p,1/2}, \psi_{p,1/2}, \psi_{-p,-1/2}, \psi_{p,-1/2}$ можно поставить в соответствие спиновые векторы второго, третьего,

пятого и восьмого октантов круга, рис.4. Биспинорам же $\bar{\psi}_{-p,1/2}$, $\bar{\psi}_{p,1/2}$, $\bar{\psi}_{-p,-1/2}$, $\bar{\psi}_{p,-1/2}$, полученным в результате дираковского сопряжения, можно поставить в соответствие спиновые векторы первого, четвёртого, шестого и седьмого октантов круга, рис.5.

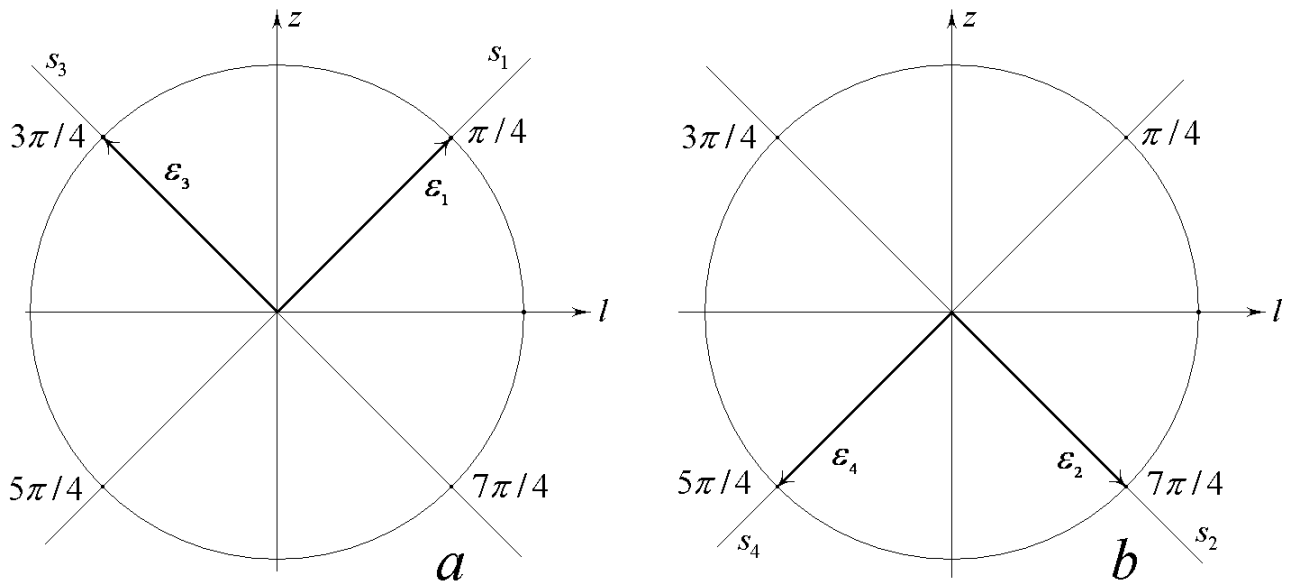


Рис.3. Базисные векторы стандартного представления пространства спиновых векторов верхней полуплоскости (a) и нижней полуплоскости (b).

Действительно, как уже говорилось, решения (1) – (4) записаны в, так называемом, стандартном представлении [3, С.102], которое в общем виде записывается обычно как

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$, то есть $\psi_1 = \varphi_1$, $\psi_2 = \varphi_2$, $\psi_3 = \chi_1$, $\psi_4 = \chi_2$. В данной работе обозначения φ и χ использоваться не будут, и приведены они для напоминания о том, что компоненты $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ вычислены в стандартном представлении.

Из сравнения величин, фигурирующих в круглых скобках формул (1 – 4), с проекциями спиновых векторов на базисные оси на рис.4 и рис.5, мы видим, что эти величины численно равны указанным проекциям спиновых векторов.

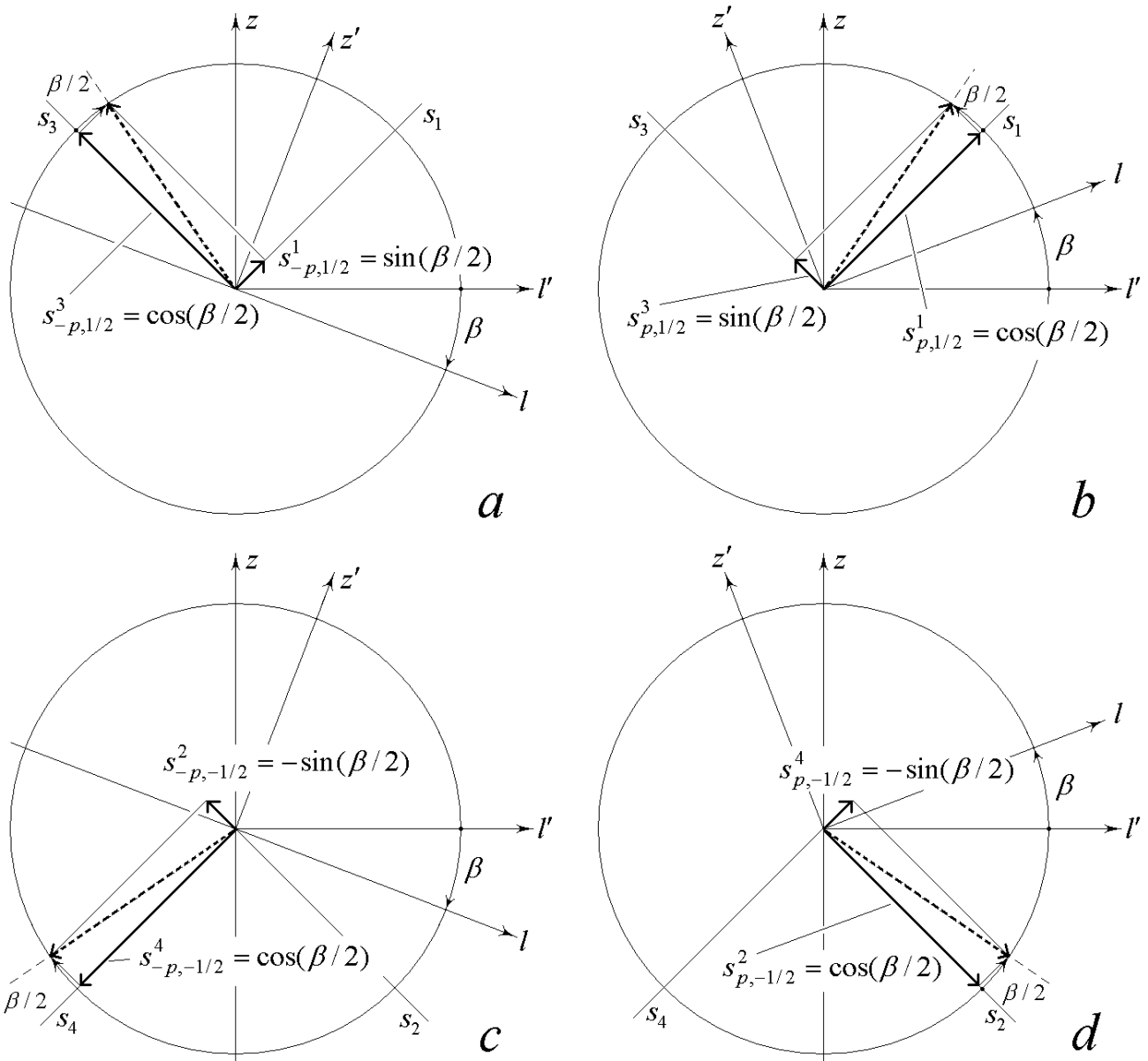


Рис.4. Изображение проекций $s_{p,\sigma}^1$, $s_{p,\sigma}^2$, $s_{p,\sigma}^3$ и $s_{p,\sigma}^4$ спиновых векторов биспиноров $\Psi_{-p,1/2}$ (a), $\Psi_{p,1/2}$ (b), $\Psi_{-p,-1/2}$ (c), $\Psi_{p,-1/2}$ (d) в стандартном представлении. Жирной пунктирной линией изображён спиновой вектор движущейся в положительном направлении оси z моды с определённым знаком частоты и направлением спина вдоль оси z . Жирными сплошными линиями изображены проекции этого спинового вектора на базисные оси неподвижной системы координат.

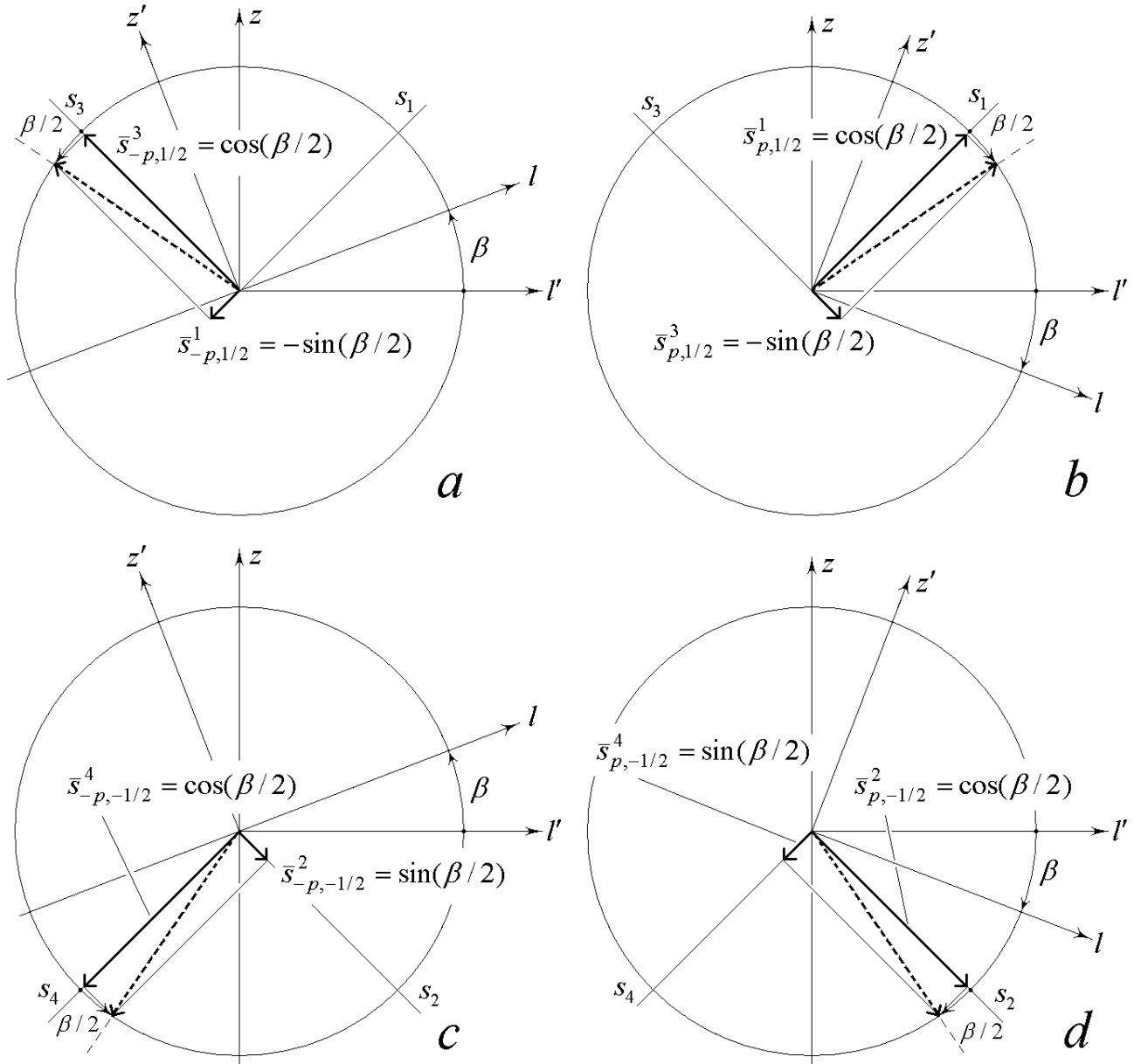


Рис.5. Изображение проекций $\bar{s}_{p,\sigma}^1$, $\bar{s}_{p,\sigma}^2$, $\bar{s}_{p,\sigma}^3$ и $\bar{s}_{p,\sigma}^4$ спиновых векторов дираковски-сопряжённых биспиноров $\bar{\psi}_{-p,1/2}$ (a), $\bar{\psi}_{p,1/2}$ (b), $\bar{\psi}_{-p,-1/2}$ (c), $\bar{\psi}_{p,-1/2}$ (d) в стандартном представлении. Так же как и на рис.4 жирной пунктирной линией изображён спиновой вектор дираковски-сопряжённого биспинора движущейся в положительном направлении оси z моды с определённым знаком частоты и направлением спина вдоль оси z . Жирными сплошными линиями изображены проекции этого спинового вектора на базисные оси неподвижной системы координат.

Обозначим спиновые векторы в соответствии с обозначениями биспиноров и дираковски-сопряжённых биспиноров, а именно: $\bar{\mathbf{s}}_{p,1/2}$, $\mathbf{s}_{p,1/2}$, $\mathbf{s}_{-p,1/2}$, $\bar{\mathbf{s}}_{-p,1/2}$, $\mathbf{s}_{-p,-1/2}$, $\bar{\mathbf{s}}_{-p,-1/2}$, $\bar{\mathbf{s}}_{p,-1/2}$, $\mathbf{s}_{p,-1/2}$. На рис.6 показано взаимное положение спиновых векторов в плоскости осей l и z . Спиновые векторы, описывающие

частицы со спином, направленным вдоль положительного направления оси z , лежат в верхней полуплоскости, а спиновые векторы, описывающие частицы со спином, направленным против положительного направления оси z , лежат в нижней полуплоскости.

Спиновые векторы, образующие положительные решения уравнения Дирака, лежат в правой полуплоскости, а спиновые векторы, образующие отрицательные решения уравнения Дирака, лежат в левой полуплоскости.

Спиновые векторы и соответствующие им спиновые векторы дираковски-сопряжённых биспиноров лежат в одной четверти, но по разные стороны от базисных векторов $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$. В случае положительных решений, то есть в правой полуплоскости, спиновые векторы повернуты против часовой стрелки относительно базисных векторов, а спиновые векторы дираковски-сопряжённых биспиноров повернуты по часовой стрелке.

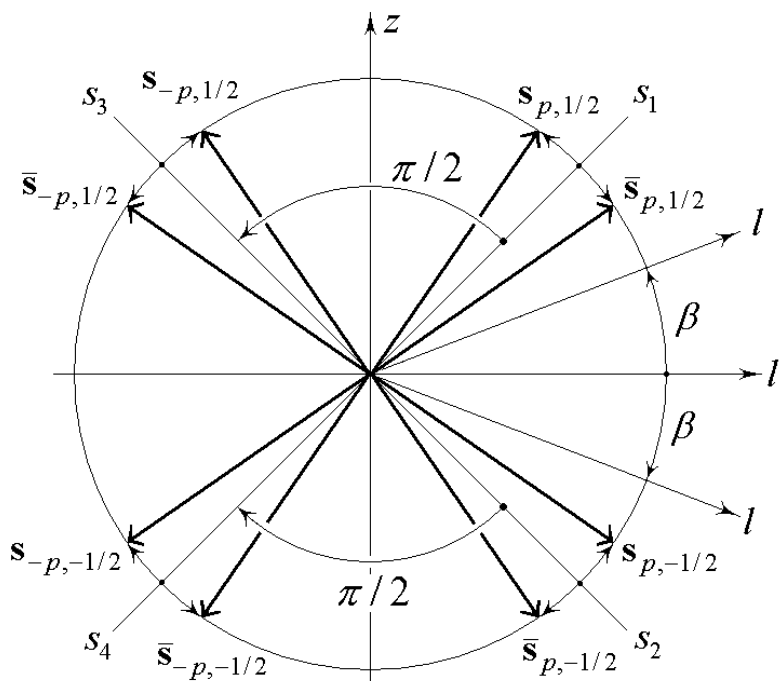


Рис.6. Взаимное положение спиновых векторов $\mathbf{s}_{p,1/2}, \mathbf{s}_{p,-1/2}, \mathbf{s}_{-p,1/2}, \mathbf{s}_{-p,-1/2}, \bar{\mathbf{s}}_{p,1/2}, \bar{\mathbf{s}}_{p,-1/2}, \bar{\mathbf{s}}_{-p,1/2}, \bar{\mathbf{s}}_{-p,-1/2}$ в плоскости осей l и z , отвечающих биспинорам Дирака и дираковски-сопряжённым биспинорам.

В случае отрицательных решений, то есть в левой полуплоскости спиновые векторы повернуты по часовой стрелке относительно базисных векторов, а

спиновые векторы дираковски-сопряжённых биспиноров повернуты против часовой стрелки.

Спиновые векторы в левой полуплоскости являются зеркальным отражением спиновых векторов в правой полуплоскости. Однако, переход из правой полуплоскости в левую сопровождается сдвигом фазы биспиноров, причём при переходе из первой четверти во вторую сдвиг фазы равен $\pi/2$ и описывается множителем $e^{i\pi/2} = i$ (вращение против часовой стрелки). При переходе из четвертой четверти в третью сдвиг фазы $-\pi/2$. Он описывается множителем $e^{-i\pi/2} = -i$ (вращение по часовой стрелке).

С использованием понятия спинового вектора формулы (1) – (4) запишутся в виде:

положительные решения –

$$\Psi_{p,1/2} = \mathbf{s}_{p,1/2} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \Psi_{p,-1/2} = \mathbf{s}_{p,-1/2} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad (9)$$

отрицательные решения –

$$\Psi_{-p,1/2} = \mathbf{s}_{-p,1/2} e^{i\pi/2+i(kl-k_z z)}, \quad \Psi_{-p,-1/2} = \mathbf{s}_{-p,-1/2} e^{-i\pi/2+i(kl-k_z z)}, \quad (10)$$

Соответственно, положительные и отрицательные дираковски-сопряжённые решения запишутся в виде:

$$\bar{\Psi}_{p,1/2} = \bar{\mathbf{s}}_{p,1/2} e^{i(kl-k_z z)}, \quad \bar{\Psi}_{p,-1/2} = \bar{\mathbf{s}}_{p,-1/2} e^{i(kl-k_z z)}, \quad (11)$$

$$\bar{\Psi}_{-p,1/2} = \bar{\mathbf{s}}_{-p,1/2} e^{i\pi/2-i(kl-k_z z)}, \quad \bar{\Psi}_{-p,-1/2} = \bar{\mathbf{s}}_{-p,-1/2} e^{-i\pi/2-i(kl-k_z z)} \quad (12)$$

Теперь, когда смысл величин, фигурирующих в формулах (1 – 4) стандартного представления решений уравнения Дирака разъяснён мы можем рассмотреть представление Майораны, задавшись вопросом, как это представление может быть интерпретировано в рамках представления о евклидовом пространстве событий с косоугольными системами координат.

Представление Майораны характеризуется, как известно [1 - 3], тем, что уравнение Дирака, записанное в этом представлении, не содержит мнимых коэффициентов. Что касается операции зарядового сопряжения, то, если для биспиноров она сводится к их комплексному сопряжению, для дираковски-сопряжённых биспиноров она сводится к их комплексному сопряжению с изменением знака. И наоборот, если для биспиноров она сводится к их комплексному сопряжению с изменением знака, то для дираковски-сопряжённых биспиноров она сводится только к их комплексному сопряжению.

В евклидовом пространстве событий, как было показано в [4], спиновой вектор, полученный в результате зарядового сопряжения волновой функции со спиновым вектором, расположенным в некоторой четверти круга, является зеркальным отражением этого спинового вектора относительно линии биссектрис соседних четвертей круга.

Проиллюстрируем это в случае биспинора $\psi_{p,1/2}$, описывающего движение частицы вдоль положительного направления оси z со спином, направленным в ту же сторону. Для этого биспинора спиновой вектор $\mathbf{s}_{p,1/2}$ лежит в первой четверти круга, а спиновой вектор $\mathbf{s}_{-p,-1/2}$ зарядово-сопряжённого биспинора $\hat{C}\psi_{p,1/2}(t, z) = \psi_{-p,-1/2}(t, z)$ лежит в третьей четверти круга, рис.7.

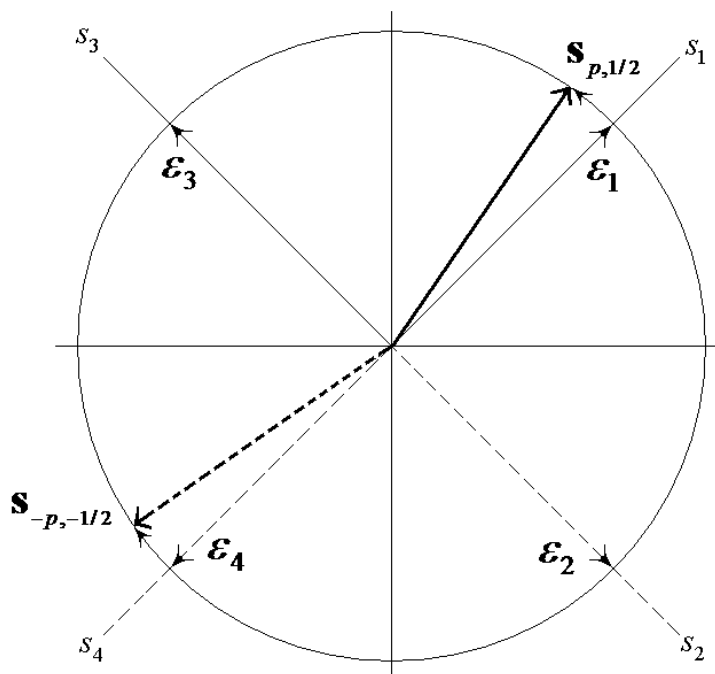


Рис.7. Иллюстрация преобразования спинового вектора, образующего биспинор $\psi_{p,1/2}$, в спиновой вектор, образующий биспинор $\psi_{-p,-1/2} = \hat{C}\psi_{p,1/2}$, при зарядовом сопряжении.

Для того чтобы такое зеркальное отражение спинового вектора описывало комплексное сопряжение биспинора (или комплексное сопряжение с изменением знака), необходимо, как мы увидим далее, действительные оси s_1, s_2, s_3, s_4 , заменить комплексными плоскостями. Рассмотрим обычно используемую в литературе матрицу преобразования $U = \frac{\beta + \alpha_y}{\sqrt{2}}$, где β и α_y матрицы стандартно-

го представления: $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. В подробной

записи
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначая волновые функции и спиновые векторы, полученные с помощью матрицы U , штрихом $\psi' = U\psi$, $\mathbf{s}' = U\mathbf{s}$ имеем

$$\psi'_{p,1/2} = \mathbf{s}'_{p,1/2} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \psi'_{-p,1/2} = i\mathbf{s}'_{-p,1/2} e^{i(kl-k_z z)} \quad (13)$$

$$\psi'_{-p,-1/2} = -i\mathbf{s}'_{-p,-1/2} e^{i(kl-k_z z)}, \quad \psi'_{p,-1/2} = \mathbf{s}'_{p,-1/2} e^{-i(kl-k_z z)} \quad (14)$$

где

$$\mathbf{s}'_{p,1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ i \sin(\beta/2) \\ -\sin(\beta/2) \\ i \cos(\beta/2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}'_{-p,1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(\beta/2) \\ i \cos(\beta/2) \\ -\cos(\beta/2) \\ i \sin(\beta/2) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{s}'_{-p,-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \cos(\beta/2) \\ -\sin(\beta/2) \\ i \sin(\beta/2) \\ -\cos(\beta/2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}'_{p,-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \sin(\beta/2) \\ \cos(\beta/2) \\ -i \cos(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Из полученных выражений следует, что, если действительные оси s_1, s_2, s_3, s_4 , заменить соответственно комплексными плоскостями (s'_1, is'_2) , (s'_2, is'_1) , (s'_3, is'_4) , (s'_4, is'_3) с оортами $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4$, направленными так, как показано на рис.8, то проекции спиновых векторов рассмотренных биспиноров будут численно равны величинам, фигурирующим в круглых скобках формул (15 - 16), деленным на $\sqrt{2}$. При этом надо иметь в виду, что на рис.8 изображены не сами спиновые векторы, а их проекции на соответствующие плоскости. Длина этих проекций в $\sqrt{2}$ раз меньше длины спиновых векторов.

Поскольку $\hat{C}\psi'_{p,1/2} = \psi'_{-p,-1/2}$ и $\hat{C}\psi'_{p,-1/2} = \psi'_{-p,1/2}$, то сравнивая (13) с (14) с учётом (15) и (16) видим, что $\hat{C}\psi' = -(\psi')^*$, то есть операция зарядового сопряжения биспиноров в этом представлении представляет собой их комплексное сопряжение с изменением знака.

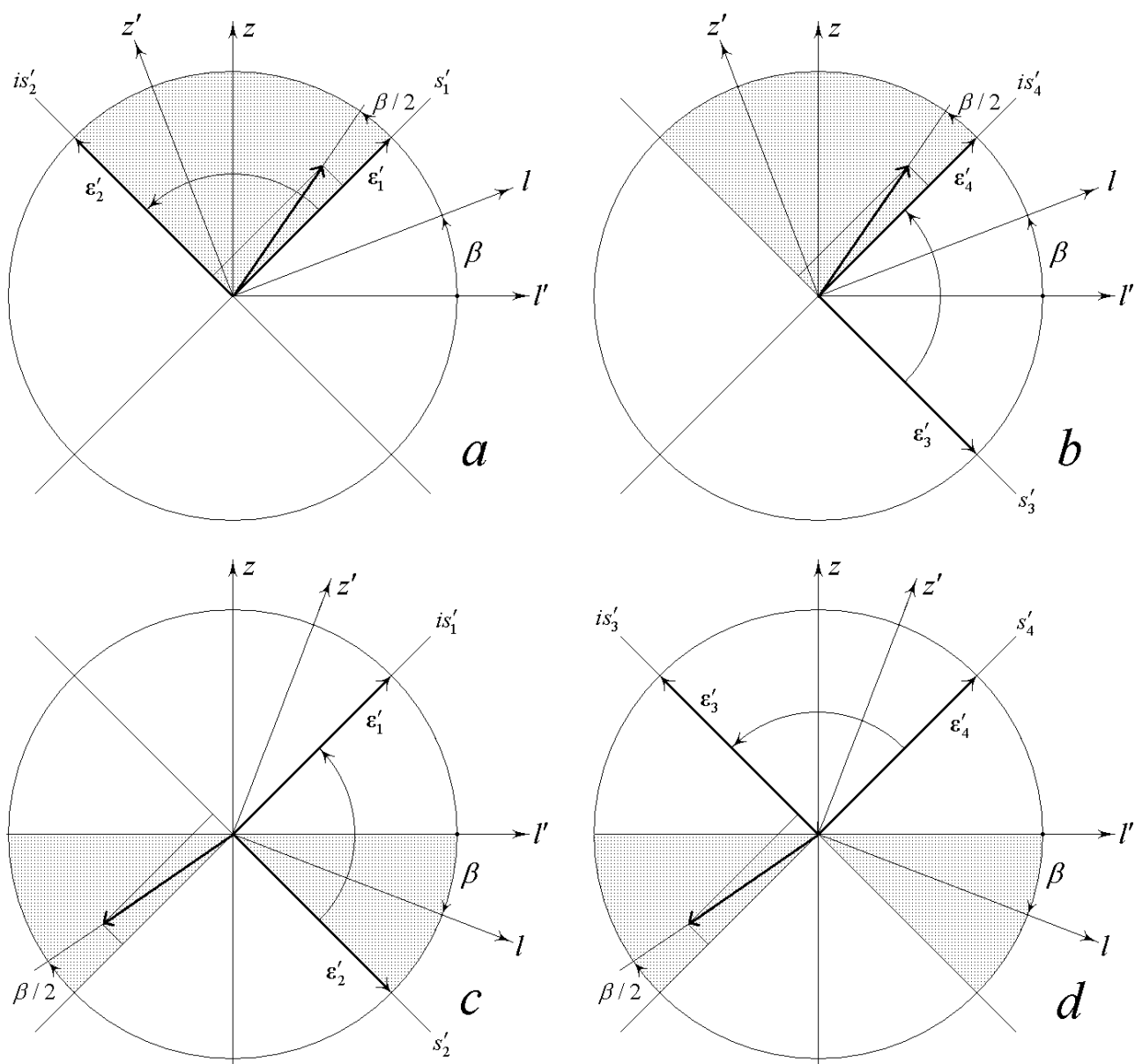


Рис.8. Базис представления, описываемого матрицей U , для биспиноров, отвечающих положительному направлению спина, спиновые векторы которых лежат в заштрихованной части верхней полуплоскости (a, b) и биспиноров, отвечающих отрицательному направлению спина, спиновые векторы которых лежат в заштрихованных частях нижней полуплоскости (c, d). На верхних рисунках в качестве примера показаны проекции спинового вектора $\mathbf{S}_{p,1/2}$ на плоскости (s'_1, is'_2) (a) и (s'_3, is'_4) (b), а на нижних - проекции спинового вектора $\mathbf{S}_{-p,-1/2}$ на плоскости (s'_2, is'_1) (c) и (s'_4, is'_3) (d).

Что касается дираковски-сопряжённых биспиноров, то, как будет показано ниже, в рассматриваемом представлении операция зарядового сопряжения представляет собой их комплексное сопряжение. Известно, что если биспиноры пре-

образуются как $\psi' = U\psi$, то дираковски-сопряжённые биспиноры преобразуются как $\bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1}$. Учитывая, что $U^{-1} = U$, получаем

$$\bar{\psi}'_{p,1/2} = \bar{\mathbf{s}}'_{p,1/2} e^{i(kl-k_z z)}, \quad \bar{\psi}'_{-p,1/2} = i\bar{\mathbf{s}}'_{-p,1/2} e^{-i(kl-k_z z)} \quad (17)$$

$$\bar{\psi}'_{-p,-1/2} = -i\bar{\mathbf{s}}'_{-p,-1/2} e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \bar{\psi}'_{p,-1/2} = \bar{\mathbf{s}}'_{p,-1/2} e^{i(kl-k_z z)} \quad (18)$$

где

$$\bar{\mathbf{s}}'_{p,1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\beta}{2}, \quad i \sin \frac{\beta}{2}, \quad \sin \frac{\beta}{2}, \quad -i \cos \frac{\beta}{2} \right), \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{s}}'_{-p,1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin \frac{\beta}{2}, \quad -i \cos \frac{\beta}{2}, \quad -\cos \frac{\beta}{2}, \quad i \sin \frac{\beta}{2} \right), \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{s}}'_{-p,-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i \cos \frac{\beta}{2}, \quad \sin \frac{\beta}{2}, \quad i \sin \frac{\beta}{2}, \quad -\cos \frac{\beta}{2} \right), \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{s}}'_{p,-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i \sin \frac{\beta}{2}, \quad \cos \frac{\beta}{2}, \quad i \cos \frac{\beta}{2}, \quad -\sin \frac{\beta}{2} \right). \quad (22)$$

Из этих выражений следует, что, если опять же действительные оси s_1, s_2, s_3, s_4 , заменить соответственно комплексными плоскостями $(\bar{s}'_1, i\bar{s}'_2)$, $(\bar{s}'_2, i\bar{s}'_1)$, $(\bar{s}'_3, i\bar{s}'_4)$, $(\bar{s}'_4, i\bar{s}'_3)$ с ортами $\bar{\mathbf{e}}'_1, \bar{\mathbf{e}}'_2, \bar{\mathbf{e}}'_3, \bar{\mathbf{e}}'_4$, направленными так, как показано на рис.9, то проекции спиновых векторов рассмотренных дираковски-сопряжённых биспиноров будут численно равны величинам, фигурирующим в круглых скобках формул (17 - 20), деленным на $\sqrt{2}$. Опять же надо иметь в виду, что на рис.9 также как и на рис.8 изображены не сами спиновые векторы, а их проекции на соответствующие плоскости.

Поскольку $\hat{C}\bar{\psi}'_{p,\sigma} = \bar{\psi}'_{-p,-\sigma}$, то сравнивая (17) с (18) и (19) с (20) видим, что $\hat{C}\bar{\psi}' = (\bar{\psi}')^*$, то есть операция зарядового сопряжения дираковски-сопряжённых биспиноров в этом представлении представляет собой их комплексное сопряжение без изменения знака.

Рассмотрим теперь преобразование биспиноров, задаваемое матрицей $V = \frac{\beta - \alpha_y}{\sqrt{2}} = U^*$. Представление Майораны, соответствующее этому преобразованию будем называть сопряжённым к ранее рассмотренному. Биспиноры, полученные с помощью матрицы V будем обозначать двумя штрихами $\psi'' = V\psi$

$$\psi''_{p,1/2} = (\mathbf{s}'_{p,1/2})^* e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \psi''_{-p,1/2} = i(\mathbf{s}'_{-p,1/2})^* e^{i(kl-k_z z)}, \quad (23)$$

$$\psi''_{-p,-1/2} = -i(\mathbf{s}'_{-p,-1/2})^* e^{i(kl-k_z z)}, \quad \psi''_{p,-1/2} = (\mathbf{s}'_{p,-1/2})^* e^{-i(kl-k_z z)}. \quad (24)$$

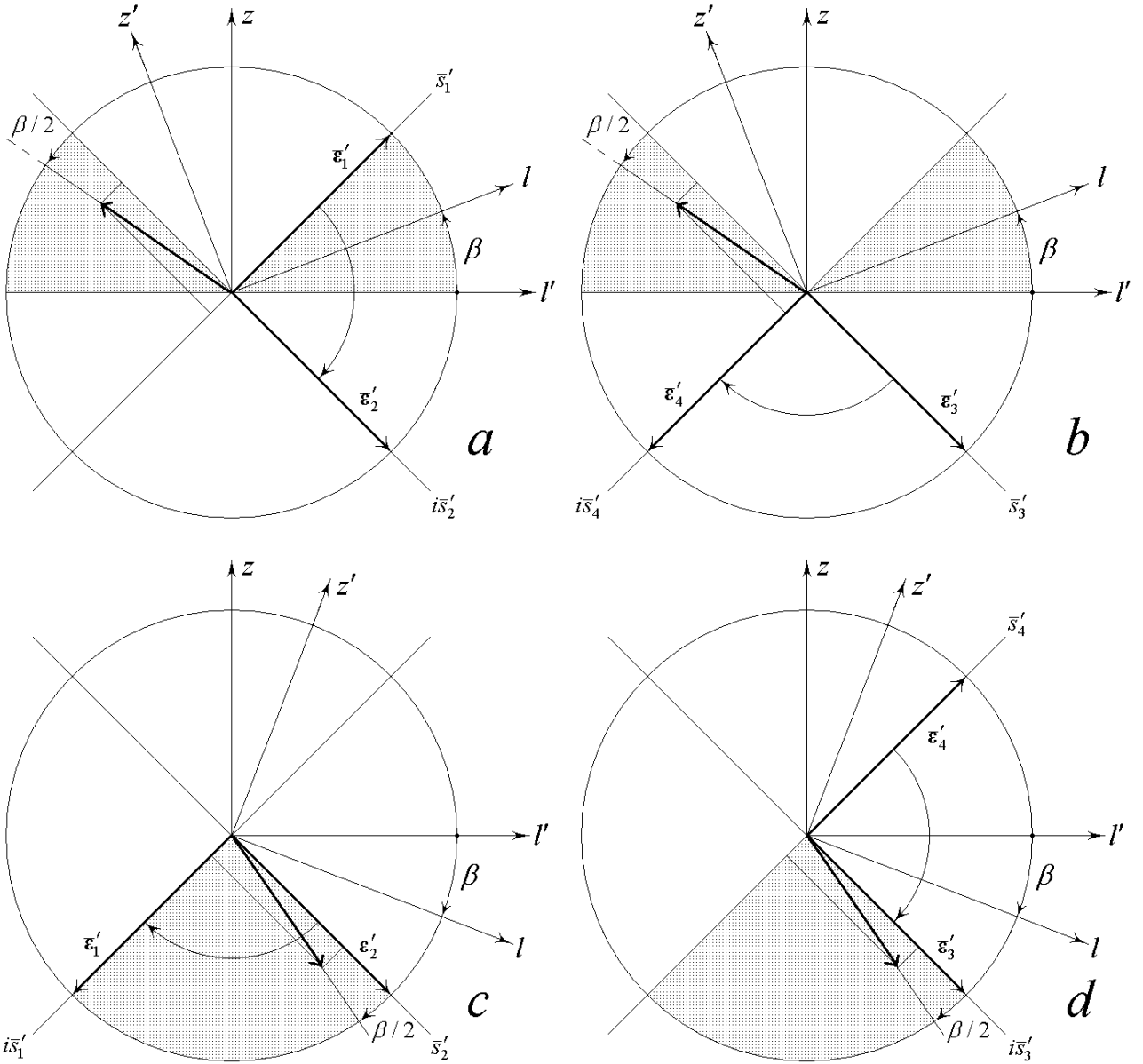


Рис.9. Базис представления, описываемого матрицей U , для дираковски-сопряжённых биспиноров, отвечающих положительному направлению спина, спиновые векторы которых лежат в заштрихованной части верхней полуплоскости (a, b) и дираковски-сопряжённых биспиноров, отвечающих отрицательному направлению спина, спиновые векторы которых лежат в заштрихованных частях нижней полуплоскости (c, d). На верхних рисунках показаны проекции спинового вектора $\bar{\mathbf{s}}_{-p,1/2}$ на плоскости $(\bar{s}'_1, i\bar{s}'_2)$ (a) и $(\bar{s}'_3, i\bar{s}'_4)$ (b), а на нижних - проекции спинового вектора $\bar{\mathbf{s}}_{p,-1/2}$ на плоскости $(\bar{s}'_2, i\bar{s}'_1)$ (c) и $(\bar{s}'_4, i\bar{s}'_3)$ (d).

Сравнивая выражения (23) и (24) и учитывая (15), (16), из которых следует, что $-i(\mathbf{s}'_{-p,-1/2})^* = \mathbf{s}'_{p,1/2}$, $i(\mathbf{s}'_{-p,1/2})^* = \mathbf{s}'_{p,-1/2}$, видим, что $\hat{C}\psi'' = (\psi'')^*$, то есть

операция зарядового сопряжения биспиноров в сопряжённом представлении Майораны сводится к их комплексному сопряжению.

Из выражений (23), (24) и (15), (16) следует, что, если теперь действительные оси s_1, s_2, s_3, s_4 , заменить соответственно комплексными плоскостями (s_1'', is_2'') , (s_2'', is_1'') , (s_3'', is_4'') , (s_4'', is_3'') с ортами $\epsilon_1'', \epsilon_2'', \epsilon_3'', \epsilon_4''$, направленными так, как показано на рис.10, то проекции спиновых векторов рассмотренных дираковски-сопряжённых биспиноров будут численно равны величинам, фигурирующим в круглых скобках комплексно сопряжённых формул (15, 16), деленным на $\sqrt{2}$. Для большей компактности на рис 10,*a* совмещены плоскости (s_1'', is_2'') и (s_3'', is_4'') , а на рис.10,*b* – плоскости (s_2'', is_1'') , (s_4'', is_3'') . Нельзя, однако, забывать, что это разные комплексные плоскости. Символически это отображено плавным переходом друг в друга ортов, принадлежащих одной и той же плоскости.

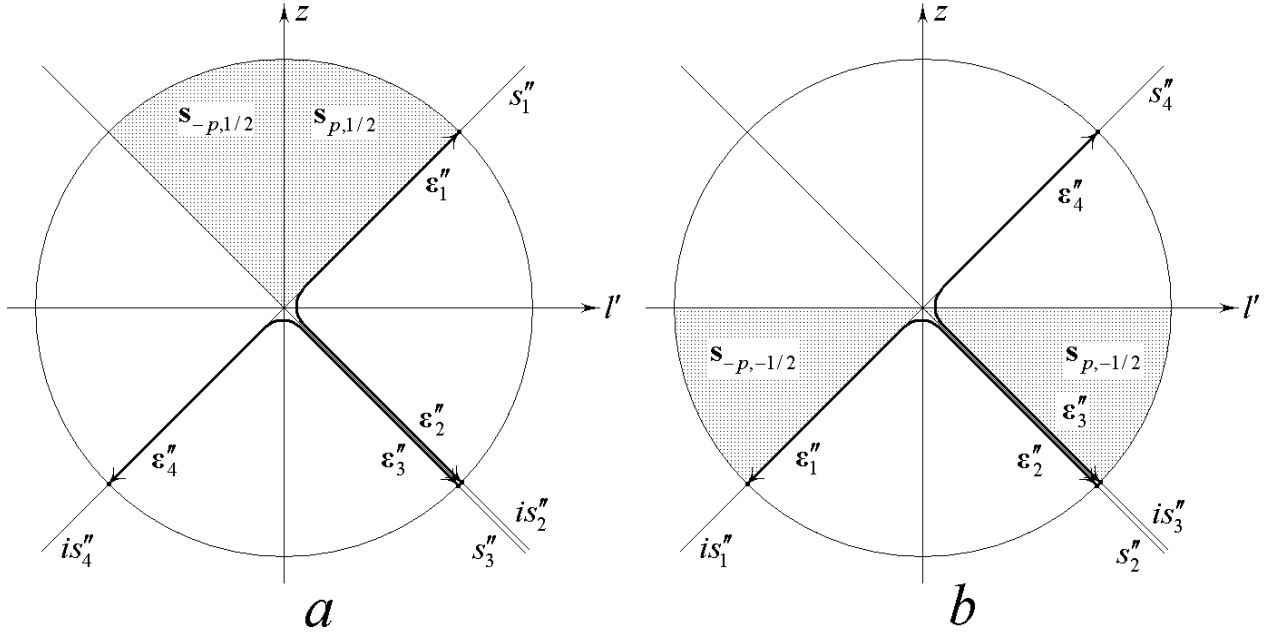


Рис.10. Базис представления, описываемого матрицей V , для биспиноров с положительным направлением спина, спиновые векторы которых лежат в заштрихованной части верхней полуплоскости (*a*) и биспиноров с отрицательным направлением спина, спиновые векторы которых лежат в заштрихованных частях нижней полуплоскости (*b*).

Аналогично, дираковски-сопряжённые биспиноры полученные с помощью матрицы V будем обозначать двумя штрихами $\bar{\psi}'' = \bar{\psi}V^{-1}$. Они имеют вид

$$\bar{\psi}''_{p,1/2} = (\bar{s}'_{p,1/2})^* e^{i(kl-k_z z)}, \quad \bar{\psi}''_{-p,1/2} = i(\bar{s}'_{-p,1/2})^* e^{-i(kl-k_z z)} \quad (25)$$

$$\bar{\psi}''_{-p,-1/2} = -i(\bar{s}'_{-p,-1/2})^* e^{-i(kl-k_z z)}, \quad \bar{\psi}''_{p,-1/2} = (\bar{s}'_{p,-1/2})^* e^{i(kl-k_z z)} \quad (26)$$

Сравнивая выражения (25) и (26) и учитывая (19) – (22), из которых следует, что $-i(\bar{s}'_{-p,-1/2})^* = -\bar{s}'_{p,1/2}$, $i(\bar{s}'_{-p,1/2})^* = -\bar{s}'_{p,-1/2}$, видим, что $\hat{C}\bar{\psi}'' = -(\bar{\psi}'')^*$, то есть операция зарядового сопряжения дираковски-сопряжённых биспиноров в сопряжённом представлении Майораны сводится к их комплексному сопряжению с изменением знака.

Из выражений (25), (26) и (19) – (22) следует, что, если теперь действительные оси s_1, s_2, s_3, s_4 , заменить соответственно комплексными плоскостями $(\bar{s}_1'', i\bar{s}_2'')$, $(\bar{s}_2'', i\bar{s}_1'')$, $(\bar{s}_3'', i\bar{s}_4'')$, $(\bar{s}_4'', i\bar{s}_3'')$ с ортами $\bar{\epsilon}_1'', \bar{\epsilon}_2'', \bar{\epsilon}_3'', \bar{\epsilon}_4''$, направленными так, как показано на рис.11, то проекции спиновых векторов рассмотренных дираковски-сопряжённых биспиноров будут численно равны величинам, фигурирующим в круглых скобках комплексно сопряжённых формул (19) – (22), деленным на $\sqrt{2}$. Аналогично тому, как это сделано на рис.10 на рис 11,*a* совмещены плоскости $(\bar{s}_1'', i\bar{s}_2'')$ и $(\bar{s}_3'', i\bar{s}_4'')$, а на рис.11,*b* – плоскости $(\bar{s}_2'', i\bar{s}_1'')$ и $(\bar{s}_4'', i\bar{s}_3'')$.

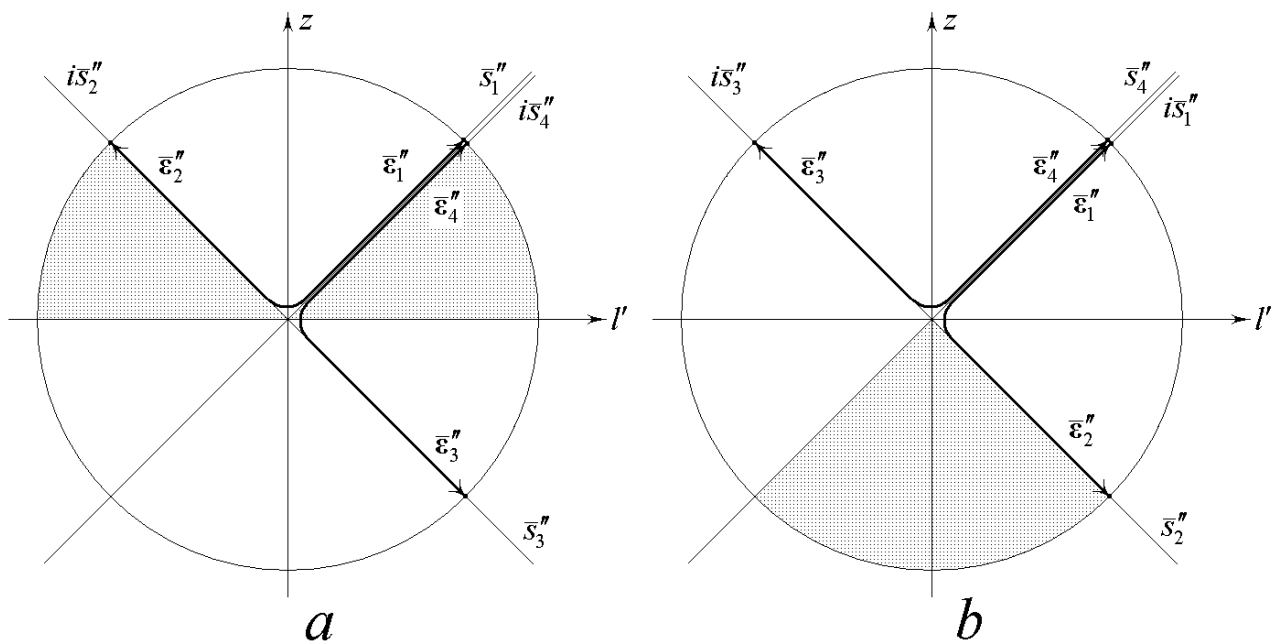


Рис.11. Базис представления, описываемого матрицей V , для дираковски-сопряжённых биспиноров с положительным направлением спина, спиновые векторы которых лежат в заштрихованных частях верхней полуплоскости (a) и дираковски-сопряжённых биспиноров с отрицательным направлением спина, спиновые векторы которых лежат в заштрихованной части нижней полуплоскости (b).

Из рис.10, видно, что при замене действительных осей s_1, s_2, s_3, s_4 комплексными плоскостями $(s_1'', i s_2'')$, $(s_2'', i s_1'')$, $(s_3'', i s_4'')$, $(s_4'', i s_3'')$ орты $\epsilon_1'', \epsilon_2'', \epsilon_3'', \epsilon_4''$

совпадают с соответствующими ортами $\bar{\epsilon}'_1, \bar{\epsilon}'_2, \bar{\epsilon}'_3, \bar{\epsilon}'_4$ на рис.9, а из рис.11, видно, что при замене действительных осей s_1, s_2, s_3, s_4 комплексными плоскостями $(\bar{s}''_1, i\bar{s}''_2), (\bar{s}''_2, i\bar{s}''_1), (\bar{s}''_3, i\bar{s}''_4), (\bar{s}''_4, i\bar{s}''_3)$ орты $\bar{\epsilon}''_1, \bar{\epsilon}''_2, \bar{\epsilon}''_3, \bar{\epsilon}''_4$ совпадают с соответствующими ортами $\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3, \epsilon'_4$ на рис.8. Это позволяет сделать рисунки, с помощью которых можно строить формулы для биспиноров, ещё более компактными.

Переобозначим комплексные плоскости следующим образом. В тех случаях, когда зарядовое сопряжение сводится только к комплексному сопряжению биспиноров или дираковски-сопряжённых биспиноров, обозначим плоскости как $(s_1^{(+)}, is_2^{(+)})$, $(s_2^{(+)}, is_1^{(+)})$, $(s_3^{(+)}, is_4^{(+)})$, $(s_4^{(+)}, is_3^{(+)})$. В тех же случаях, когда при зарядовом сопряжении происходит ещё и изменение знака, обозначим плоскости как $(s_1^{(-)}, is_2^{(-)})$, $(s_2^{(-)}, is_1^{(-)})$, $(s_3^{(-)}, is_4^{(-)})$, $(s_4^{(-)}, is_3^{(-)})$. Объединяя рис.10,*a* с рис.9,*a* и рис.9,*b*, затем рис.10,*b* с рис.9,*c* и рис.9,*d*, получим рис.12,*a* и рис.12,*b*. Объединяя далее рис.11,*a* с рис.8,*a* и рис.8,*b*, а также рис.11,*b* с рис.8,*c* и рис.8,*d*, получим соответственно рис.12,*c* и 12,*d*.

Рис.12 позволяет строить формулы для решения уравнения Дирака во всех описанных выше случаях представления Майораны.

Пусть, например, мы хотим построить в представлении Майораны биспинор, являющийся отрицательным решением и описывающий состояние с отрицательным направлением спина и при зарядовом сопряжении испытывающим комплексное сопряжение без изменения знака. В этом случае мы должны выбрать пятый октант круга, рис.12,*b*, и рассмотреть проекции спинового вектора на комплексные плоскости $(s_2^{(+)}, is_1^{(+)})$ и $(s_4^{(+)}, is_3^{(+)})$. Эти проекции суть $s_1^+ = \cos(\beta/2)$, $s_2^+ = -\sin(\beta/2)$, $s_3^+ = -\sin(\beta/2)$, $s_4^+ = -\cos(\beta/2)$. Если вспомнить, что волновая часть отрицательного решения описывается множителем $\exp i((kl - k_z z) - \pi/2)$, то получаем биспинор

$$\psi''_{-p, -1/2} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \cos(\beta/2) \\ -\sin(\beta/2) \\ -i \sin(\beta/2) \\ -\cos(\beta/2) \end{pmatrix} e^{i(kl - k_z z)},$$

что совпадает с формулой (24).

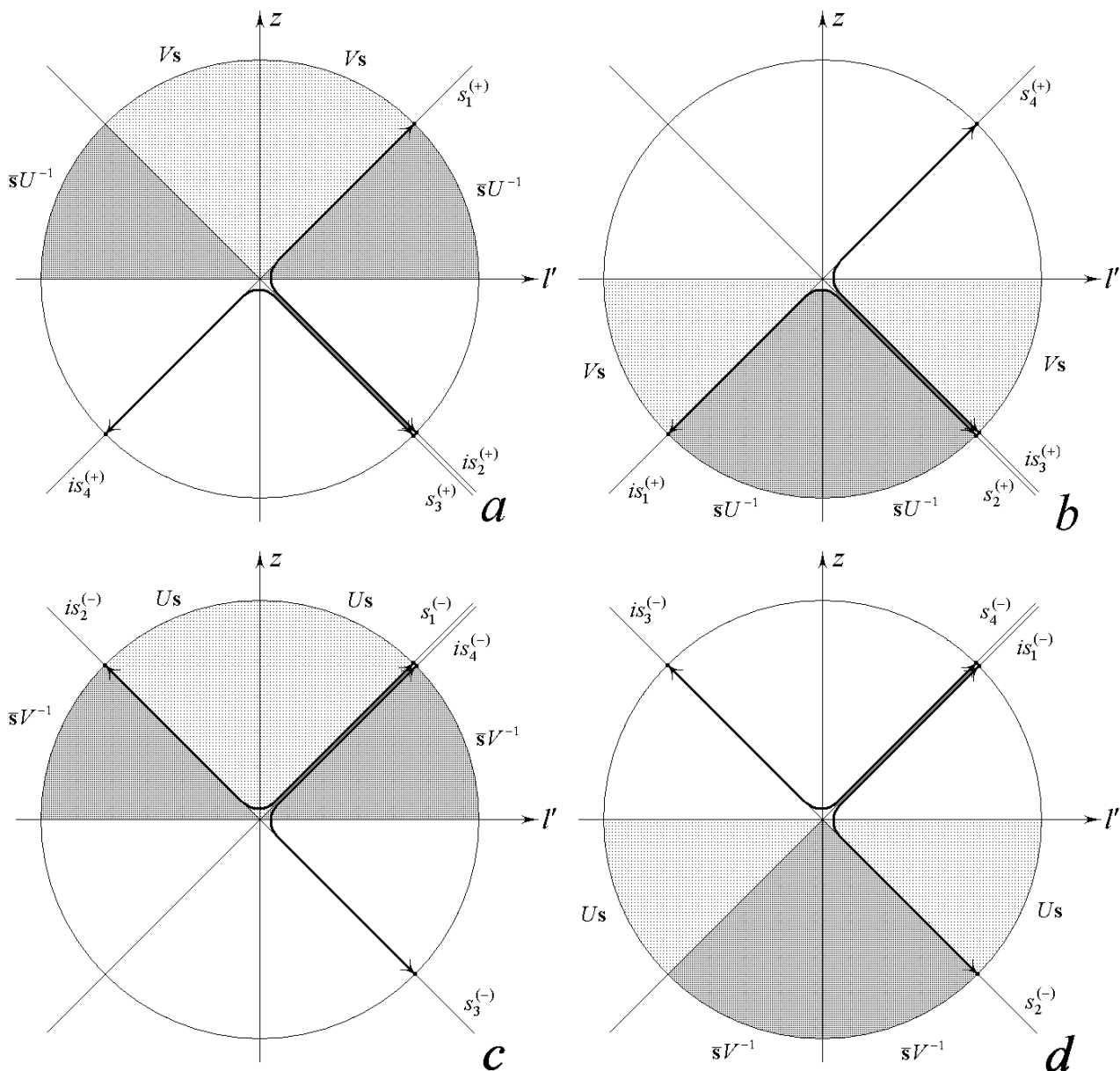


Рис.12. Ориентация базисных осей в случаях, когда зарядовое сопряжение представляет собой комплексное сопряжение (a, b) и комплексное сопряжение с изменением знака (c, d) биспиноров и дираковски сопряжённых биспиноров, описывающих состояния с положительным направлением спина (a, c) и с отрицательным направлением спина (b, d).

Итак, мы видим, что использование понятия евклидова пространства событий, в котором системы координат, связанные с покоящимся и движущимся наблюдателем являются косоугольными, позволяет дать простую и наглядную геометрическую интерпретацию решениям релятивистского уравнения Дирака для свободной частицы, записанным не только в стандартном и спинорном

представлениях и представлении Фолди-Вутхайзена, но и решениям, записанным в представлении Майораны.

В отличие от стандартного представления, а также спинорного представления и представления Фолди-Вутхайзена, в которых базисные оси, на которые проецируются спиновые векторы, являются действительными [4, 22], в представлении Майораны оси стандартного представления трансформируются в комплексные плоскости по закону, определяемому матрицей преобразования к представлению Майораны. Проекции спинорного вектора на действительные и мнимые оси этих плоскостей, вычисление которых не составляет труда, позволяет легко записывать решения уравнения Дирака в представлении Майораны для различных спиновых состояний частиц и античастиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Majorana E.** *Teoria simmetrica dell' electrone e del positrone.* II Nuovo Cimento. 1937, V.14, P.171-184 (Майорана Э. *Симметричная теория электрона и позитрона.* Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2003, Т.34, Выход.1, С.242 – 256.).
2. **Давыдов А.С.** *Квантовая механика.* М.: Физматгиз, 1963 г. С. 293.
3. **Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** *Квантовая электродинамика (Серия: «Теоретическая физика», том IV).* М.: Физматлит. 2001. С.103, 123.
4. **Орлов Е.П.** О решениях уравнения Дирака для свободной частицы в косоугольных системах координат евклидова пространства событий. *Препринт ФИАН № 1.* Москва, 2011. 31 с.
5. **Орлов Е.П.** Пространственно-временные отношения между модами резонатора с параллельными плоскими зеркалами. *Препринт ФИАН № 16.* Москва, 2004. 17 с.
6. **Орлов Е.П.** Описание пространственно-временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора с помощью косоугольных систем координат. *Препринт ФИАН № 16.* Москва, 2009. 32 с.
7. **Манкевич С.К., Орлов Е.П.** Теория относительности и метод лазерной локализации. *Препринт ФИАН № 7.* Москва, 2010. 43 с.
8. **Kaluza Th.** Zum Unitatsproblem der Physik. *Sitzungsberichte d. Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.).* 1921, S.966-972.

9. **Klein O.** Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie (Quantum Theory and fivedimensional General Relativity). *Zs. f. Phys.* 1926. V. 37. P.895-906.
10. **Соколов А., Иваненко Д.** *Квантовая теория поля (избранные вопросы)*. Москва, Ленинград. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1952. С.618-626.
11. **Румер Ю.Б.** *Исследования по 5-оптике*. Москва. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1956. 152 с.
12. **Бергман П.** Единые теории поля. *УФН*. Сентябрь 1980. Т. 132, № 1, С. 177-190.
13. **Фейнман Р.** *КЭД странная теория света и вещества*. Серия «Библиотечка «Квант», выпуск 66. Перевод с англ. О.Л.Тиходеевой, С.Г.Тиходеева. Под ред. чл.-корр. АН СССР Л.Б.Окуня. Москва: «Наука», 1988. С. 88.
14. **Луи де Бройль.** *Избранные научные труды. Том 1. Становление квантовой физики. Работы 1921 – 1934 годов*. Москва: «Логос», 2010. С. 265.
15. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** *Фейнмановские лекции по физике*. Вып. 2. Под ред. Гессен Л.В. Москва: "Мир", 1965. С.42.
16. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** *Фейнмановские лекции по физике*. Вып. 8. Под ред. Гессен Л.В. Москва: "Мир", 1965. С.111.
17. **Либшер Д.-Э.** *Теория относительности с циркулем и линейкой*. Под. ред. Н.В.Мицкевича. Перевод В.Е.Маркевич. Москва: «Мир», 1980. 152 с.
18. **Кадомцев Б.Б.** *Динамика и информация*. Москва: Редакция журнала «Успехи физических наук», 1999. С. 296.
19. **Дирак П.** *Собрание научных трудов. Т.1. Квантовая теория (монографии, лекции)*. М.: Физматлит, 2002. 700 с.
20. **Румер Ю.Б., Фет А.И.** *Теория групп и квантованные поля*. М.: Наука, 1977. 248 с.
21. **Ландсберг Г.С.** *Оптика Учебн. Пособие: Для вузов. – 6-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. С.138-139.*
22. **Орлов Е.П.** *Представление Фолди-Вутхайзена в евклидовом пространстве событий с косоугольными системами координат. Препринт ФИАН № 15*. Москва, 2011. 18 с.