

ПОДОБИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УЗКОПО-
ЛОСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ
СПЕКТРАМИ.
ЧАСТЬ II. НЕКОМПАКТНЫЕ ДИАХРОМНЫЕ СПЕКТРЫ.

Е.П.Орлов, И.М.Сизова

Учреждение Российской академии Наук
Физический институт им.П.Н.Лебедева,
Россия, 117924 Москва, Ленинский просп., 53

Препринт ФИАН

В печать и выпуск в свет

Зам. руководителя ОКРФ ФИАН

А.Н.Стародуб

Москва 2011

АННОТАЦИЯ

С целью поиска подобия статистических характеристик стационарных узкополосных гауссовских случайных процессов со спектрами различной формы исследованы процессы, спектры которых некомпактны, что является развитием более ранних исследований процессов с компактными (монохромными) спектрами. Из множества случайных процессов с некомпактными спектрами выделены процессы, представимые в виде совокупности двух монохромных процессов. Эти процессы и их спектры названы диахромными. Показано, что одноимённые статистические характеристики диахромных процессов, нормированные с помощью их времён корреляции, практически равны друг другу в пространстве переменных с размерностью на три дополнительных измерения большей, чем в случае монохромных процессов. Найдены безразмерные параметры спектров, играющие роль таких дополнительных измерений. Получены формулы, которые с помощью этих параметров выражают универсальные функции, аппроксимирующие нормированные статистические характеристики диахромных процессов, через найденные ранее универсальные функции монохромных процессов. Обсуждается аналогичное разложение и возможность подобия статистических характеристик и в случаях случайных процессов с произвольными некомпактными спектрами.

THE SIMILARITY OF THE STATISTICAL PROPERTIES OF THE NARROW-BAND RANDOM PROCESSES WITH ARBITRARY SPECTRA. PART II. THE NONCOMPACT DIACHROMIC SPECTRA

A B S T R A C T

To reveal the similarity of the statistical properties of the steady-state narrow-band Gaussian random processes with the spectra of different forms, the processes with noncompact spectra are investigated. That is the development of the earlier investigations of the processes with the compact (monochromic) spectra. The processes that can be represented as a set of two monochromic processes are picked out from the variety of the random processes with noncompact spectra. Those processes and their spectra are named the diachromic processes and the diachromic spectra. It is shown that the corresponding statistical properties of diachromic spectra normalized by their correlation times are practically equal to each other in the space of variables with dimensionality three additional points higher than in the case of monochromic processes. The dimensionless spectral parameters, which play the role of such additional spatial dimensions, have been found. With the help of those parameters the universal functions that approximate normalized statistical properties of diachromic processes through the earlier found universal functions of monochromic processes are obtained. The analogous expansion and a possibility of similarity of statistical properties in the case of random processes with arbitrary noncompact spectra are discussed.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Введение	4
2. Некомпактные спектры	6
2.1. Общие замечания и постановка задачи	6
2.2. Основные выражения	10
2.3. Спектры, состоящие из двух симметричных частей	17
2.4. Обобщенные формулы для нормированных статистических характеристик случайных процессов со спектрами, состоящими из двух компактных частей	28
2.5. Критерии диахромности некомпактных спектров и анализ параметров обобщенных формул	33
2.6. Сравнение точных нормированных статистических характеристик, отвечающих асимметричным двугорбым спектрам с симметричными горбами, с обобщенными функциями для диахромных спектров	51
2.7. Сравнение точных нормированных статистических характеристик, отвечающих асимметричным двугорбым спектрам с асимметричными горбами, с обобщенными функциями для диахромных спектров	60
3. Обсуждение полученных результатов и выводы	79
4. Математические вопросы	84
5. Дальнейшее развитие теории	96
Литература	104

1. Введение

Данный препринт представляет собой вторую часть работы, в которой развиты идеи, заложенные в предыдущих работах авторов [1-5]. Они касаются свойства приближенного подобия статистических характеристик стационарных узкополосных гауссовских случайных процессов с различными спектрами, обнаруживаемого после преобразования этих процессов в корреляторе, квадратичном детекторе и «идеальном» интеграторе.

В первой части этой работы (см. [6]) было введено понятие компактного спектра случайного процесса и показано, что одноименные статистические характеристики случайных процессов с такими спектрами различной формы подобны друг другу не только в случае симметричных спектров, но и в случае компактных спектров, не обладающих симметрией относительно несущей частоты. Коэффициентом подобия выступает отношение специальным образом рассчитанных времен корреляции рассматриваемых случайных процессов.

Это означает, что нормированные с помощью этих времен корреляции статистические характеристики случайных процессов с компактными спектрами любой формы можно с хорошей точностью описывать универсальными безразмерными функциями, различные варианты аналитических представлений которых для наиболее простых по форме компактных спектров одnogорбого вида были получены еще в [5]. Случайные процессы с компактными спектрами и сами эти спектры мы предложили называть монохромными ввиду того, что, несмотря на порой довольно сложную форму спектра, по описываемым статистическим характеристикам случайные процессы невозможно представить в виде совокупности процессов с различными несущими частотами, локализованных в соответствующих частях спектра.

Указанную первую часть работы [6] будем обозначать как ч. I. Настоящая часть работы, ч. II, является продолжением ч. I. Для более краткого ее изложения будем пользоваться формулами, таблицами и рисунками ч. I и при ссылке на них перед номером, фигурирующим в ч. I, добавлять римскую цифру I с точкой. Например, ссылка на формулу (25) из ч. I выглядит как (I.25). Ссылки на формулы и рисунки ч. II даются обычным порядком.

В ч. II исследуются статистические характеристики случайных процессов с некомпактными спектрами. Как и в ч. I, рассчитываются три статистические характеристики, нормированные с помощью времени корреляции процесса, - модуль коэффициента корреляции огибающей случайного процесса $|\gamma_0(\xi)|$ (I.13), нормированная на время корреляции низкочастотная составляющая спектра флуктуаций квадратичного детектирования $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (I.14) и нормированная на удвоенный квадрат средней интенсивности корреляционная функция скользящего среднего мгновенной интенсивности процесса $\Phi(\xi, \eta)$ (I.15-16). Безразмерная переменная ξ в $|\gamma_0(\xi)|$ и $\Phi(\xi, \eta)$, как и в ч. I, представляет собой нормированную на время корреляции временную задержку. Безразмерная переменная μ в $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ - нормированную на величину, обратную вре-

мени корреляции, частоту спектра квадратичного детектирования. А безразмерная η в $\Phi(\xi, \eta)$ - нормированное на время корреляции время скользящего усреднения интенсивности случайного процесса.

Сравнение друг с другом одноименных характеристик, отвечающих разным формам некомпактного спектра, позволило среди случайных процессов с такими спектрами выделить класс процессов и соответствующий ему класс спектров, названных нами диахромными. Диахромные процессы могут быть представлены в виде совокупности двух процессов на различных несущих частотах; и эти два процесса в спектре отражены наличием двух частей спектра. Для статистических характеристик диахромных процессов также имеет место свойство подобия. К таким процессам относятся, в частности, большинство процессов с некомпактными двугорбыми спектрами, но не только они, но и многие спектры более общего вида, разбиваемые на две части (двухкомпонентные спектры). Результаты, полученные ранее в [4-5] для двугорбых симметричных спектров, обобщаются теперь на случаи несимметричных двугорбых спектров и произвольных двухкомпонентных спектров.

В силу свойства подобия нормированные статистические характеристики диахромных случайных процессов также могут быть описаны универсальными безразмерными функциями. Но в отличие от универсальных функций компактных спектров, не зависящих ни от каких параметров, и в отличие от функций процессов с симметричными двугорбыми спектрами, в которые наряду с переменными ξ , μ , η входит только один параметр – нормированное частотное расстояние между горбами, в универсальные функции, отвечающие статистическим характеристикам процессов с произвольными диахромными спектрами, входят три независимых безразмерных параметра. Один из них – нормированное на время корреляции частотное расстояние между двумя упомянутыми частями спектра, отвечающими двум процессам с различными несущими частотами (аналог параметра симметричных двугорбых спектров), два других связаны с геометрическими соотношениями между этими частями спектра

Мы обсудим критерии, по которым следует относить спектры к категориям монохромный, диахромный и т.д., означающие, соответственно, какой группой универсальных функций приближенно описываются нормированные статистические характеристики, соответствующие процессам с такими спектрами.

Для диахромных спектров мы также обсудим проблему неоднозначности выбора указанных трех параметров и получим аналитические представления универсальных функций, аппроксимирующих статистические характеристики этих процессов.

Важно, что универсальные функции статистических характеристик диахромных случайных процессов выражены нами через соответствующие универсальные функции монохромных процессов. Это позволяет в самом общем виде поставить задачу разложения статистических характеристик случайных процессов с некомпактными спектрами сложной формы по статистическим характеристикам процессов с компактными спектрами простой формы.

2. Некомпактные спектры

2.1. Общие замечания и постановка задачи

Прежде чем приступить к рассмотрению подобия статистических характеристик случайных процессов с некомпактными диахромными спектрами, уточним задачу.

Пусть $\Omega = \omega - \omega_0$ - частотный сдвиг относительно несущей частоты ω_0 спектра. Как и ч.1, будем обозначать приведенную спектральную плотность (приведенный спектр) случайного процесса $S(\Omega)$. Приведенный спектр $S(\Omega)$ - положительно определенная интегрируемая с квадратом функция, связанная с исходным (неприведенным) спектром $f(\Omega)$ нормировкой $S(\Omega) = 2f(\Omega) / \int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega)d\Omega$, вытекающей из введения

$S(\Omega)$ формулами (1.2-3). Как отмечалось в ч.1, при такой нормировке в случае четности функции $S(\Omega)$ она совпадет с определением $S(\Omega)$ в работе [5]. Указанная нормировка $S(\Omega)$ идентична условию $\int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)d\Omega = 2$ (1.5).

мировка $S(\Omega)$ идентична условию $\int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)d\Omega = 2$ (1.5).

В ч.1 [6] из множества стационарных узкополосных гауссовых случайных процессов со спектрами произвольной формы были выделены процессы, статистические характеристики которых с хорошей точностью подобны одноименным характеристикам процессов с симметричными одnogорбыми спектрами простой формы, изученным в наших предыдущих работах [1-5]. Спектры таких процессов мы назвали компактными (а также монохромными, чтобы в настоящей работе продолжить ряд классификации спектров по полихромности). Различие форм компактных спектров практически не отражается на нормированных статистических характеристиках $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(\xi, \eta)$ (1.13-16) случайных процессов с такими спектрами, что позволяет описывать эти характеристики с помощью универсальных безразмерных функций. Компактный спектр, несмотря на то, что визуально может иметь довольно сложную форму, представляет собой по сути одиночное образование. Это объясняет использованное нами для него в [1-5] название «одnogорбый» спектр. Оно оправдано еще и тем, что аналитические представления (1.28,37-38) универсальных функций, описывающих статистические характеристики случайных процессов с компактными спектрами, были сначала получены как раз для спектров одnogорбой формы простого вида. Примеры таких спектров – гауссоида или равнобедренный треугольник.

Здесь важно подчеркнуть, что не всякий одnogорбый спектр даже простой формы компактен. Например, лоренцев спектр или спектр, описываемый одной половиной лоренцевой функции, некомпактны. И наоборот, компактными могут быть и одnogорбые спектры. Примеры и тех и других приведены в ч.1 и в данной части работы. Чтобы не возникало путаницы, будем далее для компактного (монохромного) спектра применяя название одnogорбый добавлять монохромный, т.е. одnogорбый монохромный спектр. Поскольку форма компактного спектра почти не влияет на нормирован-

ные статистические характеристики монохромного случайного процесса, для описания взаимодействия такого процесса с физическими приборами достаточно знать только одну характеристику процесса – время его корреляции (автокорреляции) τ_c – см. (1.10)., с помощью которого и преобразуются размерные статистические характеристики в безразмерные.

Компактность спектра определяется с помощью критериев на два параметра протяженности ($s_{0,5}$ и $s_{0,9}$ – см. (1.40,45)) его безразмерной нормированной на τ_c формы $S(\chi) = S(\Omega = \chi/\tau_c)/\tau_c$ - $s_{0,5} \leq \pi/2$ (1.39) и $s_{0,9} \leq \pi$ (1.45). Отношение τ_c различных компактных спектров является коэффициентом подобия одноименных характеристик соответствующих монохромных процессов.

Если спектр случайного процесса не удовлетворяет критериям компактности, то его нормированные статистические характеристики зависят от формы спектра. Однако и в этом случае могут быть выделены классы спектров, для которых выполняются свойства подобия.

Так, в [5] было показано, что для многих случайных процессов с симметричными двугорбыми спектрами при равенстве их безразмерных параметров s_1 , имеющих смысл нормированных на τ_c^{-1} частотных расстояний между горбами, одноименные статистические характеристики тоже подобны друг другу. А значит, функции, описывающие нормированные одноименные статистические характеристики случайных процессов с такими спектрами, будучи не равными друг другу в пространстве независимых переменных, используемых для монохромных процессов, становятся с хорошей точностью равными в пространстве переменных с дополнительным измерением s_1 . И поэтому тоже могут быть представлены универсальными функциями, зависящими кроме упомянутых во введении аргументов ξ, μ, η еще и от s_1 .

Если спектр в целом и каждый из его горбов симметричны, то s_1 – нормированное расстояние между максимумами горбов. Если же горбы не симметричны, то s_1 не совпадает с расстоянием между максимумами горбов и рассчитывается по определенной методике, предложенной в [5]. Некомпактный спектр соответствует значениям $s_1 > \pi/2$. Для симметричного спектра $s_1 = s_{0,5}$, поэтому условие $s_1 > \pi/2$ совпадает с одним из условий некомпактности спектра (противоположным критерию компактности $s_{0,5} \leq \pi/2$ (1.39)). Поскольку универсальные функции, описывающие статистические характеристики случайных процессов с двугорбыми симметричными спектрами, различаются лишь по переменной s_1 , эту переменную будем рассматривать как параметр, определяющий форму универсальных функций.

Если же некомпактный двугорбый спектр не симметричен, и горбы его несимметричны и разновелики, то при поиске подобия статистических характеристик случайных процессов с такими спектрами уже не удастся ограничиться только одним параметром. Одноименные статистические характеристики этих случайных процессов в

пространстве переменных ξ , μ , η , дополненным только одним независимым параметром, не подобны.

Возникает вопрос, можно ли найти параметры, характеризующие некомпактные двугорбые несимметричные спектры, и, если да, то сколько их необходимо, чтобы в пространстве переменных ξ , μ , η , дополненных этими параметрами, реализовалось приближенное подобие одноименных статистических характеристик случайных процессов с такими спектрами? Оказалось, что можно и что таких параметров три. Один из них - аналог s_1 , два других, λ и κ , - отношение площади под частью кривой спектра $S(\Omega)$, описывающей один из горбов спектра, к площади под всей кривой $S(\Omega)$, и отношение площади под частью кривой $S^2(\Omega)$, описывающей один из горбов спектра, к площади под всей кривой $S^2(\Omega)$. Случаи симметричных двугорбых спектров, рассмотренных в [5], соответствуют значениям $\lambda = \kappa = 1/2$.

Те некомпактные несимметричные двугорбые спектры и более широкий класс произвольных двухкомпонентных спектров, для которых подобие одноименных статистических характеристик случайных процессов с такими спектрами возможно в пространстве переменных ξ , μ , η , дополненных параметрами s_1 , λ и κ , названы нами диахромными. Диахромные спектры – это такие некомпактные спектры, которые удастся представить в виде совокупности двух компактных спектров при выполнении определенных дополнительных критериев, подробно обсуждаемых в разделе 2.5.

Диахромные спектры составляют часть множества всех некомпактных спектров и выделяются из них по критериям, а не по внешнему виду. Поэтому диахромными могут быть и спектры, не похожие на двугорбые, а двугорбые спектры могут не относиться к диахромным, хотя, как правило, диахромные спектры имеют двугорбый вид. Поэтому далее будем различать двугорбые спектры (т.е. имеющие соответствующий вид) и диахромные двугорбые спектры, которыми будем называть все спектры, представляющие собой совокупность двух компактных частей, разнесенных на расстояние, соизмеримое или большее ширин этих частей, и отвечающие критериям диахромности. Эти спектры, независимо от вида, проявляют себя при взаимодействии с физическими приборами как состоящие из двух частей на разных несущих частотах.

Если некомпактный спектр нельзя разбить на две компактные части, то, возможно, его можно разбить в поисках подобия статистических характеристик на три или более частей, т.е. продолжить классификацию спектров по полихромности. Схема классификации спектров на монохромные и диахромные с возможным дальнейшим обобщением приведена и обсуждается в конце работы в разделе 5 (см. рис.35).

Таким образом, задача, которой посвящена данная часть работы, разбивается на несколько задач: нахождение критериев диахромности некомпактных спектров; определение необходимого количества параметров диахромных спектров, в пространстве которых вместе с переменными ξ , μ , η проявляется подобие одноименных статистических характеристик случайных процессов с такими спектрами; нахождение универсальных функций для безразмерных статистических характеристик..

Параметры s_1 , λ и κ , фигурирующие в универсальных функциях диахромных спектров, могут быть рассчитаны для любого спектра, и компактного, и некомпактного. Достаточно взять спектр, мысленно разбить его на две части (представить как двухкомпонентную структуру) и рассчитать соответствующие этому разбиению параметры. Суть подобия статистических характеристик случайных процессов с компактными спектрами заключается в том, что реальные нормированные статистические характеристики таких спектров от этих параметров практически не зависят. В случае же диахромных спектров - в том, что именно этими параметрами и определяются основные черты характеристик.

Универсальные функции в случае диахромных спектров практически при всех допустимых значениях параметров s_1 , λ и κ и количественно и качественно отличаются от универсальных функций (1.28,37-38), отвечающих компактным спектрам. И эти отличия существенно больше отличий точных нормированных характеристик процессов с конкретными диахромными спектрами от их универсальных функций.

Типичной иллюстрацией сказанного служит, например, рис.19 (слева) в работе [5]. На нем сравниваются функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ для некоторых двугорбых симметричных спектров с симметричными и асимметричными горбами. Получилось хорошее совпадение поведения $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ для разных спектров вблизи нуля аргумента (уменьшение значений $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ происходит в два раза быстрее, чем у $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ в случае компактных спектров), наблюдается появление у $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ дополнительного (по сравнению со случаями компактных спектров) максимума и хорошее совпадение положений этих максимумов и их размеров по обеим осям. Различия же $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ для конкретных спектров проявились в форме дополнительного максимума, зависящей не только от степени асимметрии горбов, но и от направления их перекосов – внутрь спектра или наружу.

Возможно, трех параметров s_1 , λ и κ диахромных спектров недостаточно, и для достижения более точного подобия статистических характеристик требуется учесть большее число параметров спектра, например, степени симметрии горбов ρ (1.21) или параметры, характеризующие направления перекосов горбов. Но для нас в данной работе был важен баланс точности подобия и трудностей, возникающих при расчете параметров конкретных спектров и получении универсальных функций для статистических характеристик в аналитическом виде. Немаловажен также факт, что s_1 , λ и κ зависят от того, как спектр разбит на две части. Функции, претендующие на роль универсальных, лишь тогда могут считаться таковыми, когда они инвариантны относительно такого разбиения с точностью не меньшей, чем вариации нормированных статистических характеристик, отвечающих различным формам диахромных спектров. Выбор s_1 , λ и κ , сделанный в данной работе и проверенный численными и аналитическими расчетами во многих примерах, отвечает указанным требованиям.

Поиск аналитических представлений универсальных функций осуществим с помощью несимметричных двугорбых спектров простого вида. Поскольку значения параметров s_1, λ и k не обусловлены симметрией, асимметрией и вообще видом горбов, проведем этот поиск с помощью спектров, горбы которых описываются симметричными функциями. А затем сравним полученные результаты с численными расчетами для спектров с асимметричными горбами и спектров произвольного вида, удовлетворяющих критериям диахромности, и убедимся, что полученные аналитические представления действительно можно квалифицировать как универсальные.

2.2. Основные выражения

Как и в ч.1, мы ищем общие закономерности изменений статистических характеристик случайного процесса при изменении контура его спектральной плотности.

Исследуемые с этой целью характеристики – это модуль коэффициент корреляции огибающей узкополосного случайного процесса, $|\gamma_0(\tau)|$ ($|\gamma_0(0)|=1$); приведенная низкочастотная часть спектральной плотности флуктуации интенсивности случайного процесса, $\Gamma_0(\omega)$, и приведенная корреляционная функция флуктуаций скользящего среднего мгновенной интенсивности процесса, $\Phi(\tau, \tau_e)$ ($\Phi(0,0)=1/2$). Все эти характеристики зависят от аргументов, имеющих размерности времени или частоты. Первая – коэффициент корреляции огибающей, то есть корреляционная функция, нормированная на дисперсию, и третья – приведенная к удвоенному квадрату средней интенсивности корреляционная функция флуктуаций скользящего среднего, – безразмерны. а вторая – приведенный, то есть нормированный на дисперсию флуктуаций интенсивности, спектр, сам имеет размерность времени (напомним, что

$$\int_0^{\infty} \Gamma_0(\omega) d\omega = 1/4 \text{ - см. [2]}.$$

Нормированные статистические характеристики, $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(\xi, \eta)$ (см. (I.13-16)), получаются в результате нормировки аргументов перечисленных характеристик и их самих, если они обладают размерностью, на величины, определяемые характерным временем корреляции случайного процесса τ_c , вычисляемого через приведенный спектр процесса $S(\Omega)$ по формуле $\tau_c = (\pi/4) \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\Omega) d\Omega$ [1-6].

Функция с размерностью времени, $\Gamma_0(\omega)$, и аргументы функций $|\gamma_0(\tau)|$ и $\Phi(\tau, \tau_e)$ нормируются на величину, пропорциональную τ_c : $\Gamma_0(\omega)$ - на $2\pi\tau_c$ (чтобы $\tilde{\Gamma}_0(0)=1$), $\xi = \tau/\tau_c$, $\eta = \tau_e/\tau_c$; а аргумент $\Gamma_0(\omega)$ - на τ_c^{-1} , т.е. $\mu = \omega\tau_c$. Эти нормировки можно изобразить в виде: $\gamma_0(\xi) = \gamma_0(\tau = \xi\tau_c)$, $\tilde{\Gamma}_0(\chi) = \Gamma_0(\omega = \mu/\tau_c)/2\pi\tau_c$, $\Phi(\xi, \eta) = \Phi(\tau = \xi\tau_c, \tau_e = \eta\tau_c)$.

Нормированный спектр $S(\chi)$, получаемый из приведенного $S(\Omega)$ по такому же правилу $S(\chi) = S(\Omega = \chi/\tau_c)/\tau_c$ (см. (I.11)), будем далее называть собственно-нормированным спектром, поскольку $S(\Omega)$ и его аргумент нормируется с помощью величины, вычисляемой через него же. В [5-6] было показано, что рассматриваемые нормированные характеристики выражаются через собственно-нормированный спектр $S(\chi)$. В частности, $\gamma_0(\xi)$ является Фурье-образом от $S(\chi)$, а $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ - сверткой $S(\chi)$.

Собственно-нормированный спектр $S(\chi)$ помимо положительной определенности и равенства (I.17) $\int_{-\infty}^{\infty} S(\chi) d\chi = 2$ (вытекающего из (I.5) для $S(\Omega)$), удовлетворяет еще условию (I.18) $\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\chi) d\chi = \frac{4}{\pi}$ [5-6]. Заметим здесь, что любую интегрируемую с квадратом функцию $f(x)$ (не обязательно положительно определенную, лишь бы интегралы от нее и от ее квадрата не равнялись нулю) можно привести к собственно-нормированному виду, объединив процедуры нормировки функции на величину интеграла от нее с последующей нормировкой на $\tau_c = \pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx / \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right)^2$

по обеим осям (это τ_c - эквивалент определения (I.10) для $S(\Omega)$). Т.е. для $f(x)$ процедура (I.11)) приведения функции к собственно-нормированному виду задается преобразованием $f(\chi) = 2 f(x = \chi/\tau_c) / \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx / \tau_c$. Повторение такой процедуры нормировки к собственно-нормируемой функции уже не изменит ее вида, т.е. собственно-нормированная форма функции определена для функции однозначно. Легко показать, что нормировки (I.17-18) интегралов от функции и от ее квадрата не только необходимое следствие собственно-нормированности функции, но и достаточное условие этого.

Будем исследовать зависимость $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ от $S(\chi)$ ($\Phi(\xi, \eta)$ выражается через $\Phi(0, \eta)$ согласно (I.15)). Т.к. $S(\chi)$ и $\gamma_0(\xi)$ - Фурье-трансформанты друг друга, то при необходимости $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(\xi, \eta)$ можно также выразить и через $\gamma_0(\xi)$ (см. (I.14-16)).

Разобьем собственно-нормированный спектр $S(\chi)$ на две части, также являющиеся положительно определенными функциями

$$S(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi), \quad (1)$$

которые, хотя и предполагаются разнесенными по частоте, но могут, вообще говоря, перекрываться. С учетом нормировки (I.17) для $S(\chi)$ введем обозначения

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\chi) d\chi = 2\lambda; \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\chi) d\chi = 2(1-\lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2)$$

Разбиению (1) соответствует разложение приведенного спектра $S(\Omega)$ на два приведенных спектра $S_{1,2}(\Omega)$ - $S(\Omega) = \lambda S_1(\Omega) + (1-\lambda)S_2(\Omega)$, где $S_1(\chi) = \lambda S_1(\Omega = \chi/\tau_c)/\tau_c$ и $S_2(\chi) = (1-\lambda)S_2(\Omega = \chi/\tau_c)/\tau_c$. Безразмерный числа λ и $1-\lambda$ в (2), представляющие собой относительные «веса» каждого интеграла от $S_{1,2}(\chi)$ в интеграле от $S(\chi)$, выступают как весовые коэффициентами приведенных спектров $S_1(\Omega)$ и $S_2(\Omega)$ в $S(\Omega)$. Аналогично τ_c случайного процесса со спектром $S(\Omega)$ можно ввести времена корреляции процессов со спектрами $S_{1,2}(\Omega)$, а именно, $\tau_{c1,2} = (\pi/4) \int_{-\infty}^{\infty} S_{1,2}^2(\Omega) d\Omega$. При этом τ_{c1} и τ_{c2} связаны друг с другом соотношением

$$\tau_c = \lambda^2 \tau_{c1} + (1-\lambda)^2 \tau_{c2} + \frac{\pi}{2} \lambda(1-\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega) S_2(\Omega) d\Omega.$$

Когда спектры не перекрываются, то $\tau_c = \lambda^2 \tau_{c1} + (1-\lambda)^2 \tau_{c2}$.

Части $S_{1,2}(\chi)$ в (1) не являются собственно-нормированными спектрами, т.к. получены нормировкой $S_{1,2}(\Omega)$ и Ω на τ_c , а не на $\tau_{c1,2}$. Поэтому к ним не применимы критерии компактности. Для ответа в дальнейшем на вопрос о компактности спектров $S_1(\chi)$ и $S_2(\chi)$ их необходимо выразить через собственно-нормированные спектры, т.е. спектры, полученные нормировкой приведенных спектров $S_1(\Omega)$ и $S_2(\Omega)$ на τ_{c1} и τ_{c2} , соответственно. Обозначим эти собственно-нормированные спектры как $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$, где $\chi_{1,2} = \Omega \tau_{c1,2}$ - их собственно-нормированные аргументы.

$$\text{Из условия (1.18) для } S(\chi) \text{ следует } \int_{-\infty}^{\infty} S_1^2(\chi) d\chi + \int_{-\infty}^{\infty} S_2^2(\chi) d\chi + 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\chi) S_2(\chi) d\chi = \frac{4}{\pi};$$

поэтому, если $S_{1,2}(\chi)$ не перекрываются, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\chi) S_2(\chi) d\chi = 0, \quad (3)$$

то, аналогично (2), можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1^2(\chi) d\chi = \kappa \frac{4}{\pi}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_2^2(\chi) d\chi = (1-\kappa) \frac{4}{\pi}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1 \quad (4)$$

В противном случае перекрытия спектров вместо κ в (4) введем обозначения

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1^2(\chi) d\chi = \tilde{\kappa} \frac{4}{\pi}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_2^2(\chi) d\chi = \tilde{\tilde{\kappa}} \frac{4}{\pi}. \quad (5)$$

Величины $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\tilde{\kappa}}$ взаимосвязаны условием $\tilde{\kappa} + \tilde{\tilde{\kappa}} + \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\chi) S_2(\chi) d\chi = 1$; откуда $\tilde{\kappa} + \tilde{\tilde{\kappa}} < 1$. При выполнении (3) κ характеризует «вес» интеграла от $S_1^2(\chi)$ в интеграле от $S^2(\chi)$.

Отметим, что любой спектр можно разбить на части многими способами, и удовлетворяющими, и не удовлетворяющими (3). При этом будут различны не только $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\tilde{\kappa}}$ в (5) или κ в (4), но и числа λ в (2). Условимся в дальнейшем при выполнении (3) использовать обозначения κ и λ , а при невыполнении (3) – $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$ и $\tilde{\lambda}$. Эти числа – геометрические характеристики спектра $S(\chi)$ - в дальнейшем будут выступать параметрами искоемых универсальных функций для $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(\xi, \eta)$, именно теми, добавление которых в качестве дополнительных измерений к пространству переменных ξ , μ , η позволит расширить класс спектров, для которых в этом пространстве проявляются свойства подобия статистических характеристик случайных процессов с такими спектрами. Поэтому, говоря о κ и λ или о $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$ и $\tilde{\lambda}$, будем называть их также весовыми параметрами или просто параметрами $S(\chi)$.

Легко показать, что эти параметры связаны с временами корреляции $\tau_{c1,2}$ и τ_c формулами: $\tau_{c1}/\tau_c = \kappa/\lambda^2$, $\tau_{c2}/\tau_c = (1-\kappa)/(1-\lambda)^2$ (или $\tau_{c1}/\tau_c = \tilde{\kappa}/\tilde{\lambda}^2$, $\tau_{c2}/\tau_c = \tilde{\tilde{\kappa}}/(1-\tilde{\lambda})^2$). Тогда разбиение (1), выраженное через собственно-нормированные спектры $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$, приобретет вид

$$S(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi) = (\tilde{\kappa}/\tilde{\lambda}) S_1^n(\chi \tilde{\kappa}/\tilde{\lambda}^2) + (\tilde{\tilde{\kappa}}/(1-\tilde{\lambda})) S_2^n(\chi \tilde{\tilde{\kappa}}/(1-\tilde{\lambda})^2) \quad (1^*)$$

(или с заменой $\tilde{\kappa}$ на κ , $\tilde{\tilde{\kappa}}$ на $1-\kappa$ и $\tilde{\lambda}$ на λ , если выполнено (3)). Выражение (1*) можно переписать также в виде

$$S(\chi) = \tilde{\lambda}(\tau_{c1}/\tau_c) S_1^n(\chi \tau_{c1}/\tau_c) + (1-\tilde{\lambda})(\tau_{c2}/\tau_c) S_2^n(\chi \tau_{c2}/\tau_c) \quad (1^{**})$$

(или с λ вместо $\tilde{\lambda}$).

Из (1*) и (1**) видно, что в искомые универсальные функции нормированных статистических характеристик параметр κ (или $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$) всегда будут входить в комбинациях κ/λ^2 , $(1-\kappa)/(1-\lambda)^2$ или $\tilde{\kappa}/\tilde{\lambda}^2$, $\tilde{\tilde{\kappa}}/(1-\tilde{\lambda})^2$, эквивалентных отношениям τ_{c1}/τ_c и τ_{c2}/τ_c . Однако при расчетах оперировать геометрическими параметрами спектра удобнее, чем физическими характеристиками отношения времен корреляции. Если выполнено (3), то $\tau_{c1,2}/\tau_c$ не независимы и связаны отношением $\lambda^2 \tau_{c1}/\tau_c + (1-\lambda)^2 \tau_{c2}/\tau_c = 1$. Если

же (3) не выполнено, то хотя $\tau_{c1,2}/\tau_c$ и $\tilde{\kappa}, \tilde{\tilde{\kappa}}$ взаимозаменяемы, поскольку обе пары не независимы, но теряется преимущество со случаем выполнения (3). Тем не менее, равенство (1**) важно для понимания физического смысла коэффициентов в аргументах функций в (1*) и понадобится нам в дальнейшем.

Начнем с рассмотрения модуля коэффициента корреляции $|\gamma_0(\xi)|$ (I.13) огибающей случайного процесса с произвольным спектром вида (1), не требуя пока выполнения (3) и используя параметры $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\kappa}, \tilde{\tilde{\kappa}}$ из (5). Если (3) выполнено, то в соответствии с (4) $\tilde{\kappa} = \kappa, \tilde{\tilde{\kappa}} = 1 - \kappa$. Пусть между точками, отвечающими несущим частотам («центрам») спектров $S_1(\chi)$ и $S_2(\chi)$, расстояние s . Оно выбрано пока произвольно, поскольку за центры спектров $S_{1,2}(\chi)$ берем любые точки внутри или вне их. Координату центра $S_1(\chi)$ примем за ноль, а центра $S_2(\chi)$ - за s .

Преобразуем выражение (I.13) для $\gamma_0(\xi)$ с учетом разбиения (1) спектра

$$\gamma_0(\xi) = r_1(\xi) + iv_1(\xi) + \exp(-is\xi)[r_2(\xi) + iv_2(\xi)],$$

где

$$r_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\chi) \cos(\chi\xi) d\chi; \quad v_1 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\chi) \sin(\chi\xi) d\chi;$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\chi) \cos((\chi - s)\xi) d\chi; \quad v_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\chi) \sin((\chi - s)\xi) d\chi$$

Откуда, с учетом (1*), имеем

$$\begin{aligned} |\gamma_0(\xi)|^2 &= \left\{ \begin{aligned} &[r_1^2(\xi) + v_1^2(\xi)] + [r_2^2(\xi) + v_2^2(\xi)] + \\ &+ 2[r_1(\xi)r_2(\xi) + v_1(\xi)v_2(\xi)]\cos(s\xi) + 2[r_1(\xi)v_2(\xi) - v_1(\xi)r_2(\xi)]\sin(s\xi) \end{aligned} \right\} = \\ &= \tilde{\lambda}^2 \left| \gamma_{01} \left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}} \xi \right) \right|^2 + (1 - \tilde{\lambda})^2 \left| \gamma_{02} \left(\frac{(1 - \tilde{\lambda})^2}{\tilde{\tilde{\kappa}}} \xi \right) \right|^2 + 2\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda}) \tilde{\gamma}_{01} \left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}\rho_1} \xi \right) \tilde{\gamma}_{02} \left(\frac{(1 - \tilde{\lambda})^2}{\tilde{\tilde{\kappa}}\rho_2} \xi \right) \cos(s\xi) + \Sigma(\xi) \end{aligned} \quad , (6)$$

где $\gamma_{0i}(\xi)$ - функции (I.13), подсчитанные для спектров $S_{1,2}(\Omega)$, коэффициенты в аргументах которых обусловлены соотношением (1*). Функции $\tilde{\gamma}_{0i}(\xi)$ в (6) - это (I.13), подсчитанные для симметричных частей $S_{1,2}(\Omega)$ (см.(I.19)); в их аргументах присутствуют параметры симметрии спектров ρ_i (I.21). Согласно ч.I, если $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ компактны, то $|\gamma_{0i}(\xi)|$ и $\tilde{\gamma}_{0i}(\xi)$ можно с хорошей точностью аппроксимировать универсальными функциями $U_\gamma(\xi)$ (I.28). В этом случае (6) без последнего слагаемого зависит лишь от $s, \tilde{\kappa}, \tilde{\tilde{\kappa}}, \tilde{\lambda}$ и ρ_i .

Функция $\Sigma(\xi) = 2v_1(\xi)v_2(\xi)\cos(s\xi) + 2[r_1(\xi)v_2(\xi) - v_1(\xi)r_2(\xi)]\sin(s\xi)$ в (6) представляет собой добавку, которую в общем виде учесть трудно. Как было показано в ч.1, даже для компактных $S_{1,2}(\chi)$ нет хорошего приближения для $v_{1,2}(\xi)$ с помощью универсальных функций $U_\gamma(\xi)$. Кроме того, добавка $\Sigma(\xi)$ зависит от вида $S_{1,2}(\chi)$, выбора системы отсчета и s .

Если $S_{1,2}(\chi)$ симметричны и точки 0 и s на оси χ помещены в их центры симметрии, то точно выполнены равенства $\Sigma(\xi) = 0$ и $\rho_i = 1$. В случае же несимметричных $S_{1,2}(\chi)$, как было показано в ч.1, можно выбрать центры $S_{1,2}(\chi)$ так, что ρ_i будут равны своим максимальным значениям для заданных конфигураций $S_{1,2}(\chi)$, которые близки единицам [6]. Далее мы покажем, что при выборе центров $S_{1,2}(\chi)$ по правилу расчета частотного расстояния между горбами (33) ρ_i равны или близки своим максимальным значениям, а, значит, единицам. Поэтому положим в (6) $\rho_i = 1$, хотя в принципе несложно учесть и точные значения ρ_i .

Далее, несмотря на то, что направления перекосов $S_{1,2}(\chi)$ (т.е. замена одного или обоих горбов на зеркально-симметричные - см. рис.19 в [5] и рис.34 ниже) вносит в $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ погрешности не меньшие, чем отличие ρ_i от единиц, сделаем предположение, что при выборе центров $S_{1,2}(\chi)$ по тому же правилу (33) членом $\Sigma(\xi)$ в (6) можно пренебречь. Т.к. $\Sigma(0) = 0$, такое приближение удовлетворяет граничным условиям. Сделанное предположение будет в дальнейшем в многочисленных примерах подтверждено численными расчетами.

В итоге из (6) получается приближенное выражение для $|\gamma_0(\xi)|$; которое, если $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ компактны, зависит лишь от $s, \tilde{\kappa}, \tilde{\tilde{\kappa}}$ и $\tilde{\lambda}$:

$$|\gamma_0(\xi)|^2 \cong \tilde{\lambda}^2 \left| \gamma_{01} \left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}} \xi \right) \right|^2 + (1 - \tilde{\lambda})^2 \left| \gamma_{02} \left(\frac{(1 - \tilde{\lambda})^2}{\tilde{\tilde{\kappa}}} \xi \right) \right|^2 + 2\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda}) \gamma_{01} \left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}} \xi \right) \gamma_{02} \left(\frac{(1 - \tilde{\lambda})^2}{\tilde{\tilde{\kappa}}} \xi \right) \cos(s\xi) \cong \quad (7)$$

$$\cong \tilde{\lambda}^2 U_\gamma^2 \left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}} \xi \right) + (1 - \tilde{\lambda})^2 U_\gamma^2 \left(\frac{(1 - \tilde{\lambda})^2}{\tilde{\tilde{\kappa}}} \xi \right) + 2\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda}) U_\gamma \left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}} \xi \right) U_\gamma \left(\frac{(1 - \tilde{\lambda})^2}{\tilde{\tilde{\kappa}}} \xi \right) \cos(s\xi)$$

Таким образом, будучи выраженным через универсальные функции компактного спектра, (7) представляет собой приближенное универсальное выражение для $|\gamma_0(\xi)|$ двухкомпонентного спектра, состоящего из двух компактных частей. Мы покажем, что выражение (7) хорошо описывает $|\gamma_0(\xi)|$ для всех процессов и спектров, которые мы назвали диахромными. Если в (7) интерференционный член (зависящий от s) играет заметную роль, то спектр диахромный, если нет, то спектр фактически мо-

нохромный. Вывод (7) пока предполагал лишь одно ограничение на спектр (1), а именно $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ должны быть компактны. В дальнейшем мы покажем, какие еще ограничения надо наложить на параметры $S_{1,2}(\chi)$ (условия диахромности), чтобы статистические характеристики случайного процесса со спектром $S(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi)$ описывались (7) и двумя другими, полученными далее, универсальными функциями.

Для спектра, состоящего из двух симметричных (возможно, различных по величине и форме) $S_{1,2}(\chi)$, вне зависимости от выполнения (3) и компактности $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$, первое равенство в (7) точное, если s - расстояние между центрами симметрии $S_{1,2}(\chi)$; при этом $\tilde{\gamma}_{0i} \equiv \gamma_{0i}$. Если к тому же оба $S_{1,2}(\chi)$ одинаковы, то (7) перейдет тоже в точное равенство

$$|\gamma_0(\xi)|^2 = \gamma_{01}^2 \left(\frac{\xi}{4\tilde{\kappa}} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{s\xi}{2} \right) \cong U_\gamma^2 \left(\frac{\xi}{4\tilde{\kappa}} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{s\xi}{2} \right), \quad (8)$$

совпадающее с тремя соответствующими точными выражениями в табл.1.4 в [5] для спектров из двух симметричных одинаковых прямоугольников, гауссоид и экспонент. В (8) $\tilde{\kappa}$, согласно (5), удовлетворяет уравнению $2\tilde{\kappa}(1 + \tilde{\Gamma}_{01}(4\tilde{\kappa}s)) = 1$, обеспечивающему $\tilde{\Gamma}_0(0) = 1$ в приведенном ниже уравнении (9), где $\tilde{\Gamma}_{01}(\mu)$ - функция (1.14) в случае одинаковых $S_{1,2}(\chi)$.

Вычислить с помощью (7) в общем виде функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (1.14) и $\Phi(0, \eta)$ (1.16) для двухкомпонентного $S(\chi)$ не удастся из-за третьего слагаемого. А хотелось бы получить для них выражения, которые в дальнейшем позволили бы, как $|\gamma_0(\xi)|$ в (7), приближенно выразить $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ двухкомпонентного спектра через соответствующие универсальные функции процессов с компактными спектрами.

Эту задачу можно решить, рассчитав $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ для 4-х простых спектров с симметричными $S_{1,2}(\chi)$ и обобщив результаты. Предварительно вспомним вид $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ в [5] для симметричных одинаковых $S_{1,2}(\chi)$ - прямоугольников, гауссоид и экспонент, и перепишем результаты [5] в более удобном для дальнейшего анализа виде, используя (5).

Для функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ из второго равенства в (1.14) при симметричных и одинаковых $S_{1,2}(\chi)$ любой формы, вне зависимости от выполнения (3), получается точное выражение

$$\tilde{\Gamma}_0(\mu) = 2\tilde{\kappa} \left[\tilde{\Gamma}_{01}(4\tilde{\kappa}\mu) + \frac{\tilde{\Gamma}_{01}(4\tilde{\kappa}|\mu+s|) + \tilde{\Gamma}_{01}(4\tilde{\kappa}|\mu-s|)}{2} \right], \quad (9)$$

совпадающее, при учете уравнение $2\tilde{\kappa}(1 + \tilde{\Gamma}_{01}(4\tilde{\kappa}s)) = 1$ для $\tilde{\kappa}$, с результатами [5] для двух симметричных одинаковых прямоугольников, гауссоид и экспонент,

Для функции $\Phi(0, \eta)$ (I.16) - дисперсии скользящего среднего мгновенной интенсивности случайного процесса, в [5] получилось аналитическое выражение через соответствующие функции каждого из $S_{1,2}(\chi)$ лишь для спектра, состоящего из двух прямоугольников (с возможным их пересечением при малых s , т.е. нарушением (3))

$$\Phi_{2r}(0, \eta) = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \Phi_r\left(0, \frac{\eta}{4\tilde{\kappa}}\right) - \left(\frac{4\tilde{\kappa}s}{\pi}\right)^2 \Phi_r\left(0, \frac{s\eta}{\pi}\right) + \\ & \frac{\left(1 + \frac{4\tilde{\kappa}s}{\pi}\right)^2 \Phi_r\left(0, \left(1 + \frac{4\tilde{\kappa}s}{\pi}\right) \frac{\eta}{4\tilde{\kappa}}\right) + \left(1 - \frac{4\tilde{\kappa}s}{\pi}\right)^2 \Phi_r\left(0, \left(1 - \frac{4\tilde{\kappa}s}{\pi}\right) \frac{\eta}{4\tilde{\kappa}}\right)}{2} \end{aligned} \right], \quad (10)$$

где из (5) $\tilde{\kappa} = \pi(1 - \sqrt{1 - 2s/\pi})/4s$ при $s \leq \pi/2$ и $\tilde{\kappa} = 1/2$ при $s > \pi/2$, а $\Phi_r(0, \eta)$ - нормированная функция (I.16) для прямоугольного спектра (см.(I.38)).

2.3. Спектры, состоящие из двух симметричных частей

Рассмотрим статистические характеристики случайных процессов с собственно-нормированными спектрами, состоящими из двух неодинаковых симметричных частей $S_{1,2}(\chi)$ - прямоугольных, равнобедренно-треугольных, экспоненциальных и гауссоидных, выразив эти спектры через введенные в предыдущем разделе параметры. Тогда и статистические характеристики будут зависеть, кроме своих аргументов, только от этих же параметров. Постараемся, где это возможно, выразить рассматриваемые характеристики через характеристики процессов с соответствующими одиночными спектрами. Аналитические выражения для статистических характеристик процессов со спектрами в виде одиночных прямоугольников, треугольников, экспонент и гауссоид приведены в [5] (табл.1-3) и снабжены такими же индексами, как и рассматриваемые ниже спектры, но без доек (что совпадает с обозначениями в [5]).

1) $S_{2r}(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi)$ - собственно-нормированный спектр из двух различных прямоугольников; см. рис.1.

Здесь s - расстояние между серединами прямоугольников по шкале нормированных частот χ . Считаем $s \geq (l_1 + l_2)/2$; тогда $S_{1,2}(\chi)$ не пересекаются и удовлетворяют (3). Для $S_{1,2}(\chi)$ можно использовать две пары альтернативных независимых параметров - либо λ и κ (2,4), либо $h = h_2/h_1$ - отношение высот прямоугольников, и $l = l_2/l_1$ - отношение их ширин. Из (I.17-18) вытекает связь этих пар параметров

$$h = \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda}; \quad l = \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{\kappa}{1-\kappa} \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{1}{1+lh^2}; \quad \lambda = \frac{1}{1+lh}$$

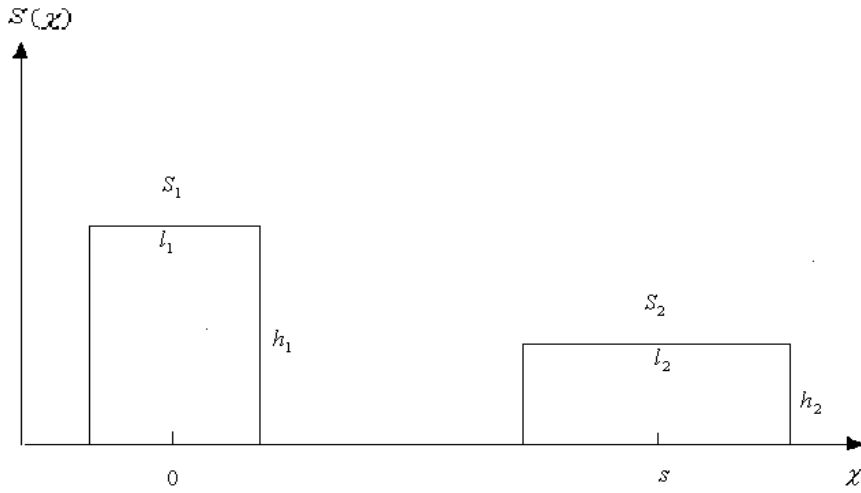


Рис.1. Спектр $S_{2r}(\chi)$, состоящий из двух различных прямоугольных спектров.

Высоты h_i и ширины l_i прямоугольников, учитывая нормировку спектра, тоже могут быть выражены через любую пару параметров:

$$h_1 = \frac{2\kappa}{\pi\lambda} = \frac{2(1+hl)}{\pi(1+h^2l)}; \quad h_2 = \frac{2(1-\kappa)}{\pi(1-\lambda)} = \frac{2(1+hl)h}{\pi(1+h^2l)}; \quad l_1 = \frac{\pi\lambda^2}{\kappa} = \frac{\pi(1+h^2l)}{(1+hl)^2}; \quad l_2 = \frac{\pi(1-\lambda)^2}{1-\kappa} = \frac{\pi(1+h^2l)l}{(1+hl)^2}.$$

Через λ и κ $\frac{l_1+l_2}{2} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{(\lambda-\kappa)^2}{\kappa(1-\kappa)} \right) \geq \frac{\pi}{2}$, и условие (3) для $S_{1,2}(\chi)$ примет вид

$$s \geq \frac{\pi}{2} \left(\frac{\lambda^2}{\kappa} + \frac{(1-\lambda)^2}{(1-\kappa)} \right) \geq \frac{\pi}{2}. \quad (11)$$

Параметры протяженности $s_{0,5}$ и $s_{0,9}$, введенные (1.40,45), для $S_{2r}(\chi)$ равны

$$s_{0,5} = \begin{cases} \frac{\pi(1-\lambda)}{2(1-\kappa)}, & 0 \leq \lambda < \frac{1}{4} \\ s + \frac{\pi(0,5-\lambda)(\kappa-\lambda)}{2\kappa(1-\kappa)}, & \frac{1}{4} \leq \lambda \leq \frac{3}{4} \\ \frac{\pi\lambda}{2\kappa}, & \frac{3}{4} < \lambda \leq 1 \end{cases}; \quad s_{0,9} = \begin{cases} 1,8 \frac{\pi(1-\lambda)}{2(1-\kappa)}, & 0 \leq \lambda < 0,05 \\ s + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\lambda(\lambda-0,1)}{\kappa} + \frac{(1-\lambda)(0,9-\lambda)}{(1-\kappa)} \right), & 0,05 \leq \lambda \leq 0,95 \\ 1,8 \frac{\pi\lambda}{2\kappa}, & 0,95 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

С учетом (11) всегда $s_{0,5} > 3\pi/8$, что близко к границе критерия (1.39) компактности спектра. В основном $s_{0,5} > \pi/2$, т.е. спектр $S_{2r}(\chi)$ не компактен по критерию (1.39). Выполнить этот критерий для $S_{2r}(\chi)$ можно (при минимальном s , когда прямоуголь-

ники состыкованы, или чуть больше), лишь в малой области λ и κ : $\kappa < \lambda < 0,5\kappa + 0,25$ при $\kappa \in [0; 0,5]$ и $0,5\kappa + 0,25 < \lambda < \kappa$ при $\kappa \in [0,5; 1]$. В значительной части этой области при этом выполнен и второй критерий компактности (1.45) для $s_{0,9}$. Таким образом, спектр $S_{2r}(\chi)$ при некоторых значениях своих параметров, в том числе и при наличии промежутка между прямоугольниками, т.е. когда он имеет двугорбый вид, может быть компактным и соответствовать монохромному процессу. Мы приведем дальше примеры таких спектров.

Для $S_{2r}(\chi)$ функции $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$, выраженные через соответствующие функции [5] для одиночного прямоугольника, равны:

$$|\gamma_0^{2r}(\xi)| = \sqrt{\frac{h_1^2 \sin^2(0,5l_1\xi) + h_2^2 \sin^2(0,5l_2\xi) + 2h_1h_2 \sin(0,5l_1\xi)\sin(0,5l_2\xi)\cos(s\xi)}{\xi^2}} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \left[\gamma_0^r\left(\frac{\lambda^2}{\kappa}\xi\right) \right]^2 + (1-\lambda)^2 \left[\gamma_0^r\left(\frac{(1-\lambda)^2}{(1-\kappa)}\xi\right) \right]^2 + 2\lambda(1-\lambda) \cdot \gamma_0^r\left(\frac{\lambda^2}{\kappa}\xi\right) \cdot \gamma_0^r\left(\frac{(1-\lambda)^2}{(1-\kappa)}\xi\right) \cos(s\xi)}$$

$$\tilde{\Gamma}_0^{2r}(\mu) = \frac{\pi}{4} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} h_1^2(l_1 - |\mu|), \quad |\mu| \leq l_1 \\ 0, \quad |\mu| > l_1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} h_2^2(l_2 - |\mu|), \quad |\mu| \leq l_2 \\ 0, \quad |\mu| > l_2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} h_1h_2 \left(\frac{l_1+l_2}{2} - |\mu-s| \right), \quad \frac{|l_1-l_2|}{2} \leq |\mu-s| \leq \frac{l_1+l_2}{2} \\ h_1h_2 \min\{l_1, l_2\}, \quad |\mu-s| < \frac{|l_1-l_2|}{2} \\ 0, \quad |\mu-s| > \frac{l_1+l_2}{2} \end{array} \right] \end{array} \right\} =$$

$$= k \cdot \tilde{\Gamma}_0^r\left(\frac{\kappa}{\lambda^2}\mu\right) + (1-k) \cdot \tilde{\Gamma}_0^r\left(\frac{(1-\kappa)}{(1-\lambda)^2}\mu\right) + 2\lambda(1-\lambda) F_{\Gamma}^{rect}\left(\frac{\kappa}{4\lambda^2}, \frac{(1-\kappa)}{4(1-\lambda)^2}, \frac{8}{\pi}|\mu-s|\right)$$

где введена функция $F_{\Gamma}^{rect}(x, y, z) = \begin{cases} 2 \min\{x, y\}, & z < |x^{-1} - y^{-1}| \\ x + y - xyz, & |x^{-1} - y^{-1}| \leq z \leq x^{-1} + y^{-1} \\ 0, & z > x^{-1} + y^{-1} \end{cases}$.

Функцию $F_{\Gamma}^{rect}\left(\frac{\kappa}{4\lambda^2}, \frac{(1-\kappa)}{4(1-\lambda)^2}, \frac{8}{\pi}|\mu-s|\right)$ можно переписать в двух видах

$$F_{\Gamma}^{rect} \left(\frac{\kappa}{4\lambda^2}, \frac{(1-\kappa)}{4(1-\lambda)^2}, \frac{8}{\pi} |\mu-s| \right) = \frac{\kappa}{4\lambda^2} \cdot \tilde{\Gamma}_0^r \left(\frac{(1-\kappa)|\mu-s|}{(1-\lambda)^2} \right) + \frac{(1-\kappa)}{4(1-\lambda)^2} \cdot \tilde{\Gamma}_0^r \left(\frac{\kappa|\mu-s|}{\lambda^2} \right) +$$

$$+ \frac{\kappa(1-\kappa)}{4\pi\lambda^2(1-\lambda)^2} \begin{cases} -2(\beta - |\mu-s|), & |\mu-s| \leq \beta \\ \frac{\pi\lambda^2}{\kappa} - |\mu-s|, & \pi \cdot \min \left\{ \frac{\lambda^2}{\kappa}, \frac{(1-\lambda)^2}{(1-\kappa)} \right\} \leq |\mu-s| \leq \alpha \\ \frac{\pi(1-\lambda)^2}{(1-\kappa)} - |\mu-s|, & \alpha \leq |\mu-s| \leq \pi \cdot \max \left\{ \frac{\lambda^2}{\kappa}, \frac{(1-\lambda)^2}{(1-\kappa)} \right\} \end{cases}$$

ИЛИ

$$F_{\Gamma}^{rect} \left(\frac{\kappa}{4\lambda^2}, \frac{(1-\kappa)}{4(1-\lambda)^2}, \frac{8}{\pi} |\mu-s| \right) = \begin{cases} \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\kappa}{\lambda^2}, \frac{(1-\kappa)}{(1-\lambda)^2} \right\}, & |\mu-s| < \beta \\ \frac{\kappa(1-\kappa)}{2\pi\lambda^2(1-\lambda)^2} \alpha \cdot \tilde{\Gamma}_0^r \left(\frac{\pi|\mu-s|}{\alpha} \right), & |\mu-s| \geq \beta \end{cases},$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\pi}{2} \left(\frac{(1-\lambda)^2}{1-\kappa} + \frac{\lambda^2}{\kappa} \right) = \frac{l_1 + l_2}{2}; \quad \beta = \frac{\pi}{2} \left| \frac{(1-\lambda)^2}{1-\kappa} - \frac{\lambda^2}{\kappa} \right| = \frac{|l_1 - l_2|}{2}.$$

$$\Phi_{2r}(0, \eta) = \frac{\left\{ h_1^2 F_r \left(\frac{l_1}{2} \eta \right) + h_2^2 F_r \left(\frac{l_2}{2} \eta \right) + h_1 h_2 \left[F_r \left(\left(\frac{l_1 + l_2}{2} + s \right) \frac{\eta}{2} \right) + F_r \left(\left(\frac{l_1 + l_2}{2} - s \right) \frac{\eta}{2} \right) - \right. \right.}{2\eta^2} \left. \left. - F_r \left(\left(\frac{|l_1 - l_2|}{2} + s \right) \frac{\eta}{2} \right) - F_r \left(\left(\frac{|l_1 - l_2|}{2} - s \right) \frac{\eta}{2} \right) \right] \right\}}{2\eta^2} =$$

$$= \lambda^2 \Phi_r \left(0, \frac{\lambda^2 \eta}{\kappa} \right) + (1-\lambda)^2 \Phi_r \left(0, \frac{(1-\lambda)^2 \eta}{(1-\kappa)} \right) +$$

$$+ \frac{\kappa(1-\kappa)}{\pi^2 \lambda(1-\lambda)} \left\{ (\alpha+s)^2 \Phi_r \left(0, \frac{(\alpha+s)\eta}{\pi} \right) + (\alpha-s)^2 \Phi_r \left(0, \frac{(\alpha-s)\eta}{\pi} \right) - \right.$$

$$\left. - (\beta+s)^2 \Phi_r \left(0, \frac{(\beta+s)\eta}{\pi} \right) - (\beta-s)^2 \Phi_r \left(0, \frac{(\beta-s)\eta}{\pi} \right) \right\}$$

где $F_r(z) = -2\sin^2(z) + 2z \cdot \text{si}(2z) - \text{cin}(2z)$ - функция, через которую $\Phi_r(0, \eta)$ выра-

жается в виде $\Phi_r(0, \eta) = \frac{2}{(\pi\eta)^2} F_r \left(\frac{\pi}{2} \eta \right)$. (см. (I.38)).

2) $S_{2tr}(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi)$ - собственно-нормированный спектр из двух различных равнобедренных (симметричных) треугольных спектров, см. рис.2, где

$$S_1(\chi) = A_1(1 - \alpha|\chi|), \quad |\chi| \leq 1/\alpha; \quad S_2(\chi) = A_2(1 - \beta|\chi - s|), \quad |\chi - s| \leq 1/\beta.$$

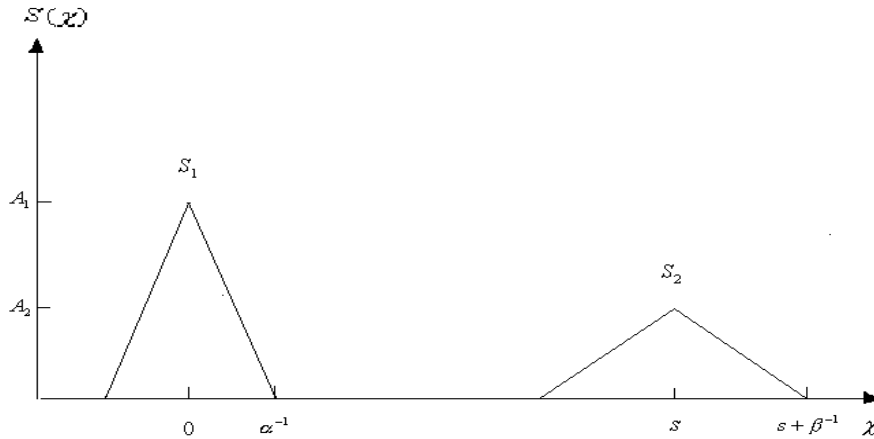


Рис.2. Спектр $S_{2tr}(\chi)$ из двух различных равнобедренных треугольников.

Помещаем начало отсчета χ в вершину первого треугольника, а s - координата вершины второго треугольника, которая выступает как параметр семейства треугольных спектров. Считаем треугольники не перекрывающимися, т.е. выполнено условие (3) - $s \geq 1/\alpha + 1/\beta$.

Из условий нормировки (1.17-18) спектра $S_{2tr}(\chi)$ имеем

$$\begin{cases} A_1^2/\alpha + A_2^2/\beta = 6/\pi \\ A_1/\alpha + A_2/\beta = 2 \end{cases},$$

откуда через λ из (2) и κ из (4) получим

$$\alpha = \frac{3\kappa}{2\pi\lambda^2}; \quad \beta = \frac{3(1-\kappa)}{2\pi(1-\lambda)^2}; \quad A_1 = \frac{3\kappa}{\pi\lambda} = 2\alpha\lambda; \quad A_2 = \frac{3(1-\kappa)}{\pi(1-\lambda)} = 2\beta(1-\lambda).$$

Здесь тоже λ , κ и s независимы и полностью определяют $S_{2tr}(\chi)$. Чтобы треугольники не перекрывались, условие на s , выраженное через λ и κ примет вид, близкий условию (11)

$$s \geq \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\lambda^2}{\kappa} + \frac{(1-\lambda)^2}{(1-\kappa)} \right) \geq \frac{2}{3}\pi. \quad (12)$$

Параметры протяженности $s_{0,5}$ и $s_{0,9}$ для спектра $S_{2tr}(\chi)$ равны

$$s_{0,5} = \begin{cases} \frac{2\pi \cdot \phi(1-\lambda)}{3(1-\kappa)}, & 0 \leq \lambda < \frac{1}{4} \\ s + \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\phi_1(\lambda)}{\kappa} + \frac{\phi_2(1-\lambda)}{1-\kappa} \right), & \frac{1}{4} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}; \\ s + \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\phi_2(\lambda)}{\kappa} + \frac{\phi_1(1-\lambda)}{1-\kappa} \right), & \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{4} \\ \frac{2\pi \cdot \phi(\lambda)}{3\kappa}, & \frac{3}{4} < \lambda \leq 1 \end{cases} \quad s_{0,9} = \begin{cases} \frac{2\pi \cdot \phi(1-\lambda)}{3(1-\kappa)}, & 0 \leq \lambda < \frac{1}{20} \\ s + \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\phi_1(\lambda)}{\kappa} + \frac{\phi_2(1-\lambda)}{1-\kappa} \right), & \frac{1}{20} \leq \lambda \leq \frac{1}{10} \\ s + \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\phi_2(\lambda)}{\kappa} + \frac{\phi_2(1-\lambda)}{1-\kappa} \right), & \frac{1}{10} \leq \lambda \leq \frac{9}{10} \\ s + \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\phi_2(\lambda)}{\kappa} + \frac{\phi_1(1-\lambda)}{1-\kappa} \right), & \frac{9}{10} \leq \lambda \leq \frac{19}{20} \\ \frac{2\pi \cdot \phi(\lambda)}{3\kappa}, & \frac{19}{20} < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

где введены функции $\varphi(x) = x\sqrt{x}(2\sqrt{x} - \sqrt{0,5} - \sqrt{2x-1,5})$; $\varphi_1(x) = x\sqrt{x}(\sqrt{2x-0,5} - \sqrt{x})$; $\varphi_2(x) = x\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{0,5})$ и $\phi(x) = x\sqrt{x}(2\sqrt{x} - \sqrt{0,1} - \sqrt{2x-1,9})$, $\phi_1(x) = x\sqrt{x}(\sqrt{2x-0,1} - \sqrt{x})$, $\phi_2(x) = x\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{0,1})$. С учетом (12) всегда $s_{0,5} > 0,72(\pi/2)$. В большей части значений λ и κ $s_{0,5} \geq \pi/2$, т.е. спектр $S_{2tr}(\chi)$ не компактен по критерию (1.39). Выполнить этот критерий для $S_{2tr}(\chi)$ можно (хотя бы при минимальных s из (12)) лишь в малой области $\kappa < 1 - \varphi(2 - 2\lambda)/3$ при $\lambda \in [0; 0,25]$ и $\kappa > \varphi(2\lambda)/3$ при $\lambda \in [0,75; 1]$. При $0,05 < \lambda < 0,95$ и любом κ не выполняется критерий компактности (1.45) для $s_{0,9}$.

Функции $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ спектра $S_{2tr}(\chi)$ выразим через функции одиночного равнобедренного треугольного спектра [5] (индекс t из [5] заменен здесь на tr)

$$|\gamma_0^{2tr}(\xi)| = \frac{2}{\xi^2} \sqrt{A_1^2 \alpha^2 \sin^4(0,5\xi/\alpha) + A_2^2 \beta^2 \sin^4(0,5\xi/\beta) + 2A_1 A_2 \alpha \beta \cdot \sin^2(0,5\xi/\alpha) \cdot \sin^2(0,5\xi/\beta) \cdot \cos(s\xi)} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \left[\gamma_0^{tr} \left(\frac{\lambda^2 \xi}{\kappa} \right) \right]^2 + (1-\lambda)^2 \left[\gamma_0^{tr} \left(\frac{(1-\lambda)^2 \xi}{(1-\kappa)} \right) \right]^2 + 2\lambda(1-\lambda) \cdot \gamma_0^{tr} \left(\frac{\lambda^2 \xi}{\kappa} \right) \cdot \gamma_0^{tr} \left(\frac{(1-\lambda)^2 \xi}{(1-\kappa)} \right) \cos(s\xi)}$$

$$\tilde{\Gamma}_0^{2tr}(\mu) = \kappa \cdot \tilde{\Gamma}_0^{tr} \left(\frac{\kappa}{\lambda^2} \mu \right) + (1-\kappa) \cdot \tilde{\Gamma}_0^{tr} \left(\frac{(1-\kappa)}{(1-\lambda)^2} \mu \right) + 2\lambda(1-\lambda) \cdot \mathcal{G}(|\mu - s|),$$

где (для определенности считаем $\alpha \geq \beta$, т.е. $\kappa \geq \lambda^2/(\lambda^2 + (1-\lambda)^2)$); в силу симметричности $\mathcal{G}(|\mu - s|)$ относительно α и β это не принципиально при $\beta \leq \alpha \leq 2\beta$

$$\mathcal{G}(t) = \frac{\pi\alpha\beta}{12} \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha\beta \cdot t^2 \left(t - \frac{3}{\alpha} \right) + \frac{2\beta}{\alpha} \left(\frac{3}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right), \quad t \in \left[0, \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right] \\ \alpha\beta \left[\left(t - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)^3 + 2t^3 \right] + 6 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2t \right), \quad t \in \left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right], \\ \alpha\beta \left[t - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right]^3 + \frac{6\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta} - t \right), \quad t \in \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right] \\ \alpha\beta \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - t \right]^3, \quad t \in \left[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right] \end{array} \right.,$$

и при $\alpha \geq 2\beta$

$$\mathcal{G}(t) = \frac{\pi\alpha\beta}{12} \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha\beta \cdot t^2 \left(t - \frac{3}{\alpha} \right) + \frac{2\beta}{\alpha} \left(\frac{3}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right), \quad t \in \left[0, \frac{1}{\alpha} \right] \\ \frac{6\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta} - t \right), \quad t \in \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right] \\ \alpha\beta \left[t - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right]^3 + \frac{6\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta} - t \right), \quad t \in \left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right] \\ \alpha\beta \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - t \right]^3, \quad t \in \left[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right] \end{array} \right. .$$

Если треугольники одинаковы ($\lambda = \kappa = 1/2$; $\alpha = \beta = 3/\pi$), то $\mathcal{G}(t)$ примет вид

$$\mathcal{G}(t) = \frac{\pi\alpha^2}{12} \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 \left[\left(t - \frac{2}{\alpha} \right)^3 + 2t^3 \right] + 12 \left(\frac{1}{\alpha} - t \right), \quad t \in \left[0, \frac{1}{\alpha} \right] \\ \alpha^2 \left[\frac{2}{\alpha} - t \right]^3, \quad t \in \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha} \right] \end{array} \right. = \frac{\pi\alpha}{3} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{3}{4}(t\alpha)^2(2-t\alpha), \quad t\alpha \in [0,1] \\ [2-t\alpha]^3/4, \quad t\alpha \in [1,2] \end{array} \right. = \tilde{\Gamma}_0^{tr}(2t),$$

и $\tilde{\Gamma}_0^{2tr}(\mu)$ совпадет с (9), учитывая, что $\tilde{\Gamma}_0^{tr}(2(\mu+s))=0$ для s , удовлетворяющих (12).

$$\Phi_{2tr}(0, \eta) = \lambda^2 \Phi_{tr}(0, \lambda^2 \eta / \kappa) + (1-\lambda)^2 \Phi_{tr}(0, (1-\lambda)^2 \eta / (1-\kappa)) + 2\lambda(1-\lambda) \cdot \Delta(\eta),$$

где

$$\Delta(\eta) = \frac{(\alpha\beta)^2}{3\eta^2} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{\alpha} + s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\alpha} + s \right) \eta \right) + \left(\frac{1}{\beta} + s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\beta} + s \right) \eta \right) + \\ & + \left(\frac{1}{\alpha} - s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\alpha} - s \right) \eta \right) + \left(\frac{1}{\beta} - s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\beta} - s \right) \eta \right) - 2s^2 F_{tr}(s\eta) - \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + s \right) \eta \right) + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + s \right) \eta \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - s \right) \eta \right) + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - s \right) \eta \right) \right] \end{aligned} \right\},$$

а $F_{tr}(z) = -z \cdot \text{si}(z) + 3\text{cin}(z) + 2 \frac{\sin(z)}{z} + \frac{\sin^2(z/2)}{2(z/2)^2} + 2\sin^2(z/2)$ - функция (см. табл.1.3 в ч.1),

через которую $\Phi_{tr}(0, \eta) = \frac{3}{(\pi\eta)^2} \left(F_{tr} \left(\frac{2\pi}{3} \eta \right) - F_{tr} \left(\frac{4\pi}{3} \eta \right) \right)$. При $\lambda = \kappa = 1/2$ $\alpha = \beta = 3/\pi$ и

$$\begin{aligned} \Delta(\eta) &= \frac{2(\alpha)^4}{3\eta^2} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{\alpha} + s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\alpha} + s \right) \eta \right) + \left(\frac{1}{\alpha} - s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{1}{\alpha} - s \right) \eta \right) - s^2 F_{tr}(s\eta) - \\ & - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{2}{\alpha} + s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{2}{\alpha} + s \right) \eta \right) + \left(\frac{2}{\alpha} - s \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{2}{\alpha} - s \right) \eta \right) + 2(s)^2 F_{tr}(s\eta) \right] \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{6}{(\pi\eta)^2} \left\{ \begin{aligned} & \left(1 + \frac{3s}{\pi} \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{\pi}{3} + s \right) \eta \right) + \left(1 - \frac{3s}{\pi} \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{\pi}{3} - s \right) \eta \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{3s}{\pi} \right)^2 F_{tr}(s\eta) - \\ & - \frac{1}{4} \left[\left(2 + \frac{3s}{\pi} \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{2\pi}{3} + s \right) \eta \right) + \left(2 - \frac{3s}{\pi} \right)^2 F_{tr} \left(\left(\frac{2\pi}{3} - s \right) \eta \right) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

3) $S_{2e}(\chi)$ - собственно-нормированный спектр из двух различных симметричных экспоненциальных спектров; рис.3:

$$S_{2e}(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi) = \frac{\exp(-|\chi|/\chi_1) + k \exp(-|\chi - s|/\chi_2)}{\chi_1 + k\chi_2}, \quad (13)$$

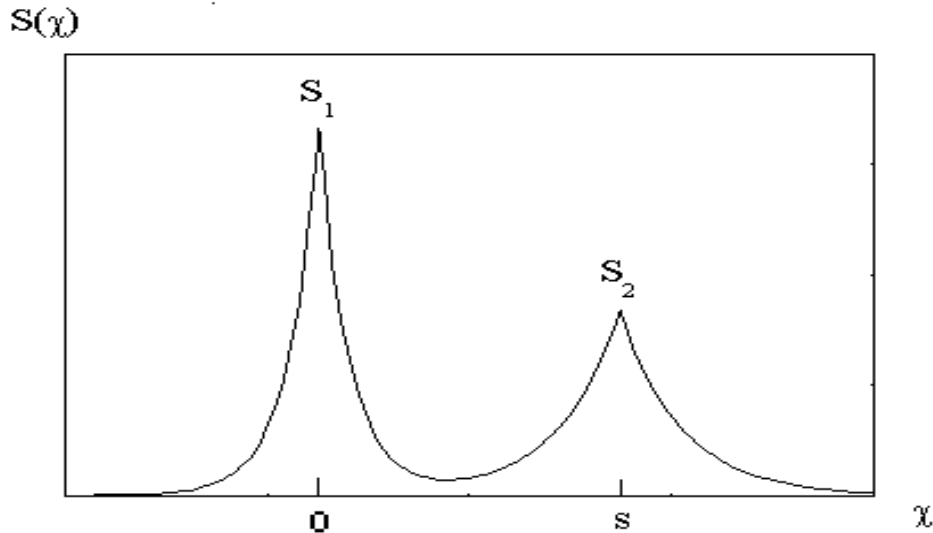


Рис.3. Спектр $S_{2e}(\chi)$ из двух различных симметричных экспоненциальных спектров.

где s - расстояние между центрами экспонент, начало отсчета $\chi=0$ помещено в вершину первой экспоненты, а три положительных параметра $\chi_{1,2}$ и k из-за нормировки спектра (1.18) (нормировка (1.17) уже учтена в (13)) связаны соотношением

$$\chi_1 + k^2 \chi_2 + 4k\chi_1\chi_2 \cdot f(\chi_1, \chi_2, s) / (\chi_1 + \chi_2) = 4(\chi_1 + k\chi_2)^2 / \pi; \quad (14)$$

здесь введена вспомогательная функция – см. табл.1.2.

$$f(a, b, x) = \frac{a \exp(-x/a) - b \exp(-x/b)}{a - b} = \tilde{\Gamma}_0^e \left(\frac{\pi x}{2(a+b)}; \frac{b}{a} \right).$$

В (13) $S_1(\chi)$ и $S_2(\chi)$ перекрываются, поэтому используем для описания спектра параметры $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$ и $\tilde{\lambda}$. Напомним, что мы условились для $S_{1,2}(\chi)$, удовлетворяющих (3) (как спектры **1** и **2**) выше), независимые в этом случае параметры λ и k из (2,4) писать без тильды, а для неудовлетворяющих (3) $S_{1,2}(\chi)$ (типа (13) и (16,28) ниже) использовать $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$ из (5) и писать $\tilde{\lambda}$ для (2) ($\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$ и $\tilde{\lambda}$ в этом случае не независимы, т.к. связаны нормировкой (1.18)). Для спектров (13,16,28) будем применять и те и другие параметры в зависимости от способа разбиения спектра на $S_{1,2}(\chi)$.

Полагая два слагаемых в (13) как $S_{1,2}(\chi)$, получим для $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$ и $\tilde{\lambda}$ спектра $S_{2e}(\chi)$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\chi_1}{\chi_1 + k\chi_2}; \quad 1 - \tilde{\lambda} = \frac{k\chi_2}{\chi_1 + k\chi_2}; \quad \tilde{\kappa} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\chi_1}{(\chi_1 + k\chi_2)^2}; \quad \tilde{\tilde{\kappa}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{k^2 \chi_2}{(\chi_1 + k\chi_2)^2}.$$

И наоборот, $\chi_1 = \frac{\pi \tilde{\lambda}^2}{4 \tilde{\tilde{\kappa}}}$; $\chi_2 = \frac{\pi(1 - \tilde{\lambda})^2}{4 \tilde{\tilde{\kappa}}}$; $k = \frac{\tilde{\tilde{\kappa}} \tilde{\lambda}}{\tilde{\kappa}(1 - \tilde{\lambda})}$. Спектр (13) полностью определен

тремя независимыми параметрами из $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$ и s , связанных соотношением (14):

$$\tilde{k} + \tilde{k} = 1 - \frac{4\tilde{\lambda}(1-\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}^2/\tilde{\kappa} + (1-\tilde{\lambda})^2/\tilde{\kappa}} \cdot f\left(\frac{\pi\tilde{\lambda}^2}{4\tilde{\kappa}}, \frac{\pi(1-\tilde{\lambda})^2}{4\tilde{\kappa}}, s\right) < 1, \quad (14^*)$$

смысл которого (как и (14)) в выполнении равенства $\Gamma_0^{2e}(0) = 1$ - см. (15) ниже.

Параметр протяженности $s_{0,5}$ для спектра $S_{2e}(\chi)$ вычисляется как $s_{0,5} = b - a$, где a и b находятся из уравнений (здесь $\tilde{\lambda} \leq 1/2$; в противном случае в уравнениях и определении \tilde{s} меняем местами $\tilde{\lambda}$ и $1 - \tilde{\lambda}$, $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\kappa}$):

$$\begin{cases} (1-\tilde{\lambda})\exp(4\tilde{\kappa}(a-s)/\pi/(1-\tilde{\lambda})^2) + \tilde{\lambda}\exp(4\tilde{\kappa}a/\pi/\tilde{\lambda}^2) = 1/2, & s \leq \tilde{s} \\ (1-\tilde{\lambda})\exp(4\tilde{\kappa}(a-s)/\pi/(1-\tilde{\lambda})^2) - \tilde{\lambda}\exp(-4\tilde{\kappa}a/\pi/\tilde{\lambda}^2) = 1/2 - \tilde{\lambda}, & s > \tilde{s} \end{cases};$$

$$(1-\tilde{\lambda})\exp(4\tilde{\kappa}(s-b)/\pi/(1-\tilde{\lambda})^2) + \tilde{\lambda}\exp(-4\tilde{\kappa}b/\pi/\tilde{\lambda}^2) = 1/2,$$

где $\tilde{s} = \frac{\pi(1-\tilde{\lambda})^2}{4\tilde{\kappa}} \ln\left(\frac{1-\tilde{\lambda}}{1/2-\tilde{\lambda}}\right)$. Из похожих уравнений вычисляется и параметр протяженности спектра $s_{0,9}$.

В отличие от спектров $S_{2r}(\chi)$ и $S_{2tr}(\chi)$, где из-за ограничений (11-12) на s $s_{0,5}$ и $s_{0,9}$ лишь при некоторых λ и κ могут удовлетворить критериям компактности (1.39,45), да и то на их границах, в $S_{2e}(\chi)$ при любых $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\kappa}$ можно обеспечить $s_{0,5} < \pi/2$ и/или $s_{0,9} < \pi$ при $s \rightarrow 0$ и проследить переход от некомпактного спектра к компактному. Аналитически такие режимы исследовать сложнее, чем у спектров **1)-2)**; мы это сделаем для спектра $S_{2g}(\chi)$ ниже.

Нормированные статистические характеристики случайного процесса со спектром (13) получим, используя функции, описывающие статистические характеристики случайного процесса с одиночным экспоненциальным спектром [5]

$$\begin{aligned} |\gamma_0^{2e}(\xi)| &= \frac{1}{(\chi_1 + k\chi_2)} \sqrt{\left[\frac{\chi_1}{1+(\chi_1\xi)^2}\right]^2 + \left[\frac{k\chi_2}{1+(\chi_2\xi)^2}\right]^2 + \frac{2k\chi_1\chi_2 \cos(s\xi)}{\left[1+(\chi_1\xi)^2\right]\left[1+(\chi_2\xi)^2\right]}}; \\ &= \sqrt{\tilde{\lambda}^2 \left[\gamma_0^e\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}}\xi\right)\right]^2 + (1-\tilde{\lambda})^2 \left[\gamma_0^e\left(\frac{(1-\tilde{\lambda})^2}{\tilde{\kappa}}\xi\right)\right]^2 + 2\tilde{\lambda}(1-\tilde{\lambda}) \cdot \gamma_0^e\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}}\xi\right) \cdot \gamma_0^e\left(\frac{(1-\tilde{\lambda})^2}{\tilde{\kappa}}\xi\right) \cos(s\xi)} \\ \Gamma_0^{2e}(\mu) &= \frac{\pi}{4(\chi_1 + k\chi_2)^2} \left\{ \chi_1 \left(1 + \frac{|\mu|}{\chi_1}\right) \exp\left(-\frac{|\mu|}{\chi_1}\right) + k^2 \chi_2 \left(1 + \frac{|\mu|}{\chi_2}\right) \exp\left(-\frac{|\mu|}{\chi_2}\right) + 2 \frac{k\chi_1\chi_2}{\chi_1 + \chi_2} [f(\chi_1, \chi_2, |\mu+s|) + f(\chi_1, \chi_2, |\mu-s|)] \right\} = \\ &= \tilde{\kappa} \cdot \tilde{\Gamma}_0^e\left(\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\lambda}^2}\mu\right) + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{\Gamma}_0^e\left(\frac{\tilde{\kappa}}{(1-\tilde{\lambda})^2}\mu\right) + 2\tilde{\lambda}(1-\tilde{\lambda}) \cdot \frac{\tilde{\Gamma}_0^e\left(\frac{2|\mu+s|}{\tilde{\sigma}_e}, \frac{(1-\tilde{\lambda})^2\tilde{\kappa}}{\tilde{\lambda}^2\tilde{\kappa}}\right) + \tilde{\Gamma}_0^e\left(\frac{2|\mu-s|}{\tilde{\sigma}_e}, \frac{(1-\tilde{\lambda})^2\tilde{\kappa}}{\tilde{\lambda}^2\tilde{\kappa}}\right)}{\tilde{\sigma}_e} \end{aligned} \quad (15)$$

где функция $f(a, b, x)$ определена выше, а $\tilde{\sigma}_e = \tilde{\lambda}^2/\tilde{\kappa} + (1-\tilde{\lambda})^2/\tilde{\kappa}$.

$$\Phi_{2e}(0, \eta) = \frac{1}{2\eta(\chi_1 + k\chi_2)^2} \left\{ \chi_1 \operatorname{arctg}(\chi_1 \eta) + k^2 \chi_2 \operatorname{arctg}(\chi_2 \eta) + \frac{4k\chi_1\chi_2}{\eta(\chi_1^2 - \chi_2^2)} \left[I\left(\chi_1 \eta, \frac{s}{\chi_1}\right) - I\left(\chi_2 \eta, \frac{s}{\chi_2}\right) \right] \right\} =$$

$$= \tilde{\lambda}^2 \cdot \Phi_e\left(0, \frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{k}} \eta\right) + (1 - \tilde{\lambda})^2 \cdot \Phi_e\left(0, \frac{(1 - \tilde{\lambda})^2}{\tilde{k}} \eta\right) +$$

$$+ 2\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda}) \cdot \frac{\left[I\left(\frac{\tilde{\lambda}^2 \pi}{4\tilde{k}} \eta, \frac{4\tilde{k}}{\tilde{\lambda}^2 \pi} s\right) - I\left(\frac{(1 - \tilde{\lambda})^2 \pi}{4\tilde{k}} \eta, \frac{4\tilde{k}}{(1 - \tilde{\lambda})^2 \pi} s\right) \right]}{\eta^2 \left[\left(\frac{\pi \tilde{\lambda}^2}{4\tilde{k}}\right)^2 - \left(\frac{\pi(1 - \tilde{\lambda})^2}{4\tilde{k}}\right)^2 \right]}$$

где функция $I(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha (\alpha - x) \frac{\cos(\beta x)}{1 + x^2} dx$ (см. табл.1.3. в ч.1).

4) $S_{2g}(\chi)$ - собственно-нормированный спектр из двух различных симметричных гауссоид; см. рис.4. В этом примере, как и в **3)**, $S_1(\chi)$ и $S_2(\chi)$ - перекрываются

$$S_{2g}(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(\chi_1 + k\chi_2)} \left[\exp\left(-\frac{\chi^2}{\chi_1^2}\right) + k \exp\left(-\frac{(\chi - s)^2}{\chi_2^2}\right) \right], \quad (16)$$

где опять s - расстояние между центрами гауссоид и $\chi = 0$ расположено в центре первой из них. Собственно-нормированный спектр (16) зависит от s и еще от трех параметров - $\chi_{1,2}$, k или $\tilde{\lambda}$, \tilde{k} , $\tilde{\tilde{k}}$ из (2,5), которые выражаются друг через друга

$$\tilde{\lambda} = \frac{\chi_1}{\chi_1 + k\chi_2}; \quad 1 - \tilde{\lambda} = \frac{k\chi_2}{\chi_1 + k\chi_2}; \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\chi_1}{(\chi_1 + k\chi_2)^2}; \quad \tilde{\tilde{k}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \chi_2}{(\chi_1 + k\chi_2)^2}$$

или $\chi_1 = \frac{\sqrt{\pi} \tilde{\lambda}^2}{\sqrt{2\tilde{k}}}; \quad \chi_2 = \frac{\sqrt{\pi}(1 - \tilde{\lambda})^2}{\sqrt{2\tilde{\tilde{k}}}}; \quad k = \frac{\tilde{\tilde{k}} \tilde{\lambda}}{\tilde{k}(1 - \tilde{\lambda})}.$

$S(\chi)$

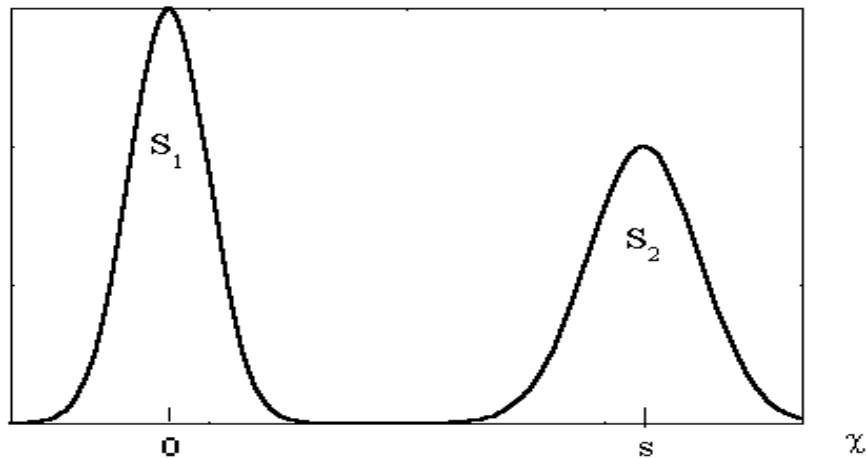


Рис.4. Спектр $S_{2g}(\chi)$ из двух различных симметричных гауссоид.

Каждый набор из четырех параметров спектра (16) связан нормировкой (I.18) (т.е. только три параметра независимы)

$$\chi_1 + k^2 \chi_2 + 2\sqrt{2} \frac{k\chi_1\chi_2}{\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}} \cdot \exp\left[-\frac{s^2}{\chi_1^2 + \chi_2^2}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\chi_1 + k\chi_2)^2 \quad \text{или}$$

$$\tilde{k} + \tilde{k} = 1 - 4 \frac{\tilde{\lambda}(1-\tilde{\lambda})}{\tilde{\sigma}_g} \cdot \exp\left[-\frac{4s^2}{\pi\tilde{\sigma}_g^2}\right] < 1, \quad \text{где } \tilde{\sigma}_g = \sqrt{2\left[\left(\tilde{\lambda}^2/\tilde{\kappa}\right)^2 + \left((1-\tilde{\lambda})^2/\tilde{\kappa}\right)^2\right]},$$

смысл которой, как и у спектра (13), в выполнении равенства $\Gamma_0^{2g}(0) = 1$ - см.(17) ниже.

Параметр протяженности $s_{0,5} = b - a$ для $S_{2g}(\chi)$ вычисляется из уравнений

$$\begin{cases} (1-\tilde{\lambda}) \operatorname{erf}\left(\sqrt{2/\pi}\tilde{\kappa}(s-a)/(1-\tilde{\lambda})\right) - \tilde{\lambda} \operatorname{erf}\left(\sqrt{2/\pi}\tilde{\kappa}a/\tilde{\lambda}\right) = 1/2 \\ (1-\tilde{\lambda}) \operatorname{erf}\left(\sqrt{2/\pi}\tilde{\kappa}(s-b)/(1-\tilde{\lambda})\right) - \tilde{\lambda} \operatorname{erf}\left(\sqrt{2/\pi}\tilde{\kappa}b/\tilde{\lambda}\right) = -1/2 \end{cases}$$

Протяженность $s_{0,9}$ спектра $S_{2g}(\chi)$ вычисляется из таких же уравнений, где справа вместо $\pm 1/2$ стоят, соответственно, $\pm 0,9$. В спектре $S_{2g}(\chi)$, как и в $S_{2e}(\chi)$, s может принимать любое значение и $s_{0,5}$ и $s_{0,9}$ как удовлетворять, так и не удовлетворять критериям (I.39) и (I.45). Мы исследуем эти ситуации дальше.

Для функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ спектра $S_{2g}(\chi)$ получаем через функции одиночного симметричного гауссова спектра [5]

$$\begin{aligned} |\gamma_0^{2g}(\xi)| &= \sqrt{\frac{\chi_1 \exp\left[-\frac{(\chi_1\xi)^2}{2}\right] + k\chi_2 \exp\left[-\frac{(\chi_2\xi)^2}{2}\right] + 2k\chi_1\chi_2 \exp\left[-\frac{(\chi_1\xi)^2 + (\chi_2\xi)^2}{4}\right] \cos(s\xi)}{(\chi_1 + k\chi_2)^2}} = \\ &= \sqrt{\tilde{\lambda}^2 \left[\gamma_0^g\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}}\xi\right)\right]^2 + (1-\tilde{\lambda})^2 \left[\gamma_0^g\left(\frac{(1-\tilde{\lambda})^2}{\tilde{\kappa}}\xi\right)\right]^2 + 2\tilde{\lambda}(1-\tilde{\lambda}) \cdot \gamma_0^g\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\kappa}}\xi\right) \cdot \gamma_0^g\left(\frac{(1-\tilde{\lambda})^2}{\tilde{\kappa}}\xi\right) \cos(s\xi)} \\ \tilde{\Gamma}_0^{2g}(\mu) &= \tilde{\kappa} \cdot \tilde{\Gamma}_0^g\left(\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\lambda}^2}\mu\right) + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{\Gamma}_0^g\left(\frac{\tilde{\kappa}}{(1-\tilde{\lambda})^2}\mu\right) + \frac{2\tilde{\lambda}(1-\tilde{\lambda})}{\tilde{\sigma}_g} \cdot \left(\tilde{\Gamma}_0^g\left(\frac{2|\mu+s|}{\tilde{\sigma}_g}\right) + \tilde{\Gamma}_0^g\left(\frac{2|\mu-s|}{\tilde{\sigma}_g}\right)\right); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Phi_{2g}(0, \eta) = \tilde{\lambda}^2 \Phi_g\left(0, \frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{k}}\eta\right) + (1-\tilde{\lambda})^2 \Phi_g\left(0, \frac{(1-\tilde{\lambda})^2}{\tilde{k}}\eta\right) + 2\tilde{\lambda}(1-\tilde{\lambda})J(\eta),$$

где

$$J(\eta) = \frac{8}{\pi(\tilde{\sigma}_g\eta)^2} \left\{ \exp\left(-\frac{4s^2}{\pi\tilde{\sigma}_g^2}\right) \cdot \left[\frac{\pi\tilde{\sigma}_g\eta}{4} \operatorname{Re}(\operatorname{erf} c) - \frac{2s}{\tilde{\sigma}_g} (\operatorname{Im}(\operatorname{erf} c) + i \operatorname{erf}(i \operatorname{Im} c)) \right] - \left[-1 + \exp\left(-\frac{\pi(\tilde{\sigma}_g\eta)^2}{16}\right) \cdot \cos(\eta s) \right] \right\},$$

$$c = \frac{\sqrt{\pi\sigma_g}}{4}\eta + \frac{2s}{\sqrt{\pi\sigma_g}}i.$$

2.4. Обобщенные формулы для нормированных статистических характеристик случайных процессов со спектрами, состоящими из двух компактных частей

В предыдущем разделе характеристики $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ были получены для конкретных видов собственно-нормированных двугорбых спектров $S_{1-4}(\chi)$ с симметричными разновеликими горбами. Используя их, выведем для статистических характеристик процессов с произвольными двухкомпонентными спектрами, удовлетворяющими (3), выражения, не зависящие от вида спектра. Затем проверим их на совпадение с точными функциями, полученными выше в случае спектров $S_{1-4}(\chi)$, а потом и для других двугорбых и произвольных двухкомпонентных спектров.

Будем искать функции $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$, зависящие кроме аргументов ξ , μ , η лишь от λ , κ и S_1 , поскольку в случаях $S_{1-4}(\chi)$ они зависят от этих параметров. Для $|\gamma_0(\xi)|$ мы уже получили выражение (7), которое является точным для любых симметричных $S_{1,2}(\chi)$, что и подтвердилось для спектров $S_{1-4}(\chi)$. В (7) два первых слагаемых не зависят ни от каких ограничений на $S_{1,2}(\chi)$ (включая выполнимость условия (3)); симметричность $S_{1,2}(\chi)$ проявляется лишь в третьем слагаемом. Подразумевая компактность $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ и выполнение условия (3), т.е. положив $\tilde{\kappa} = \kappa$, $\tilde{\lambda} = 1 - \kappa$, $\tilde{\lambda} = \lambda$, предположим, что формула (7) справедлива и в случае любых двухкомпонентных спектров, у которых расстояние между компонентами $s = s_1$, а именно

$$|\gamma_0(\xi)|^2 \cong \lambda^2 U_\gamma^2 \left(\frac{\lambda^2}{\kappa} \xi \right) + (1 - \lambda)^2 U_\gamma^2 \left(\frac{(1 - \lambda)^2}{(1 - \kappa)} \xi \right) + 2\lambda(1 - \lambda) U_\gamma \left(\frac{\lambda^2}{\kappa} \xi \right) U_\gamma \left(\frac{(1 - \lambda)^2}{(1 - \kappa)} \xi \right) \cos(s_1 \xi). \quad (18)$$

Функция (18) удовлетворяет необходимому начальному условию $|\gamma_0(0)|^2 = 1$. Мы заменили в (18) s на S_1 , подразумевая, что это уже не расстояние между произвольно взятыми «центрами» $S_{1,2}(\chi)$, а расстояние между конкретными центрами частей, т.е. обобщение расстояния, введенного в [5-6]. Подробнее об этом будет сказано ниже.

Из (18) видно, что $|\gamma_0(\xi)|$ можно трактовать как длину вектора, являющегося суммой двух векторов - $\lambda U_\gamma \left(\frac{\lambda^2}{\kappa} \xi \right) = \lambda U_\gamma \left(\frac{\tau_{c1}}{\tau_c} \xi \right)$ и $(1 - \lambda) U_\gamma \left(\frac{\lambda^2}{\kappa} \xi \right) = (1 - \lambda) U_\gamma \left(\frac{\tau_{c2}}{\tau_c} \xi \right)$,

отвечающих двум частям $S_{1,2}(\chi)$ спектра, с «углом» между ними равным $s_1\xi$. То есть две разновеликие части $S_{1,2}(\chi)$ спектра $S(\chi)$ трансформируются в функции $|\gamma_0(\xi)|$ в сумму двух векторов $\gamma_0(\xi_{1,2})$, соответствующих $S_{1,2}(\chi)$ от их собственных координат $\xi_{1,2}$, пересчитанных на координату ξ всего спектра (см. (1*)), с соответствующими весами λ и $1-\lambda$, повернутых друг относительно друга на указанный «угол».

Вид первых двух слагаемых в формуле для функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, получаемой из $|\gamma_0(\xi)|$ с помощью уравнения (1.14), тоже не зависит от $S_{1,2}(\chi)$ (их симметричности, компактности или выполнимости (3)). Он определяется функциями $\tilde{\Gamma}_{01}(\mu)$ и $\tilde{\Gamma}_{02}(\mu)$, полученными операцией свертки из $S_1^n(\chi_1)$ и $S_2^n(\chi_2)$, соответственно, и универсален для компактных $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$. Третье же слагаемое в $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ в случаях рассмотренных в разделе 2.3 спектров удалось выразить через $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ соответствующих монохромных процессов лишь для спектров $S_{2e}(\chi)$ и $S_{2g}(\chi)$ - см. (15,17).

Опираясь на эти формулы (15,17), для компактных $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$, удовлетворяющих условию (3), запишем обобщение $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ для произвольного спектра из двух компактных компонент в виде (заменяя в (15,17) $\tilde{\Gamma}_0^{e,g}(\mu)$ на $U_\Gamma(\mu)$ (1.37), s на s_1 и полагая $\tilde{\kappa} = \kappa$, $\tilde{\kappa} = 1-\kappa$, $\tilde{\lambda} = \lambda$):

$$\tilde{\Gamma}_0(\mu) \cong \frac{\kappa \cdot U_\Gamma\left(\frac{\kappa}{\lambda^2}\mu\right) + (1-\kappa) \cdot U_\Gamma\left(\frac{(1-\kappa)}{(1-\lambda)^2}\mu\right) + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{\sigma} \cdot \left[U_\Gamma\left(\frac{2|\mu+s_1|}{\sigma}\right) + U_\Gamma\left(\frac{2|\mu-s_1|}{\sigma}\right) \right]}{1 + 4\lambda(1-\lambda) \cdot U_\Gamma(2s_1/\sigma)/\sigma}. \quad (19)$$

Учитывая (15,17), σ в (19) выражается через параметры λ и κ с помощью одного из равенств:

$$\sigma_e = \lambda^2/\kappa + (1-\lambda)^2/(1-\kappa) \geq 1; \quad \sigma_g = \sqrt{2\left[\left(\lambda^2/\kappa\right)^2 + \left((1-\lambda)^2/(1-\kappa)\right)^2\right]} \geq 1. \quad (20)$$

На рис.5 показаны значения σ_e и отношения σ_e/σ_g от κ при различных значениях $\lambda \in [0;0,5]$. Из рисунка видно, что при любых значениях λ и κ из области их определения отношение σ_e/σ_g попадает в интервал 0,7-1, и чем больше отличие σ_e/σ_g от единицы, тем больше само σ_e и меньше вклад третьего слагаемого в (19). Для простоты положим в (19) $\sigma = \sigma_e$ из (20). Тогда, согласно (1*,1**), $\sigma = \tau_c(\tau_{c1}^{-1} + \tau_{c2}^{-1})$, а условия (11-12) сведутся к условиям $s \geq (\pi/2)\sigma$; $(2\pi/3)\sigma$.

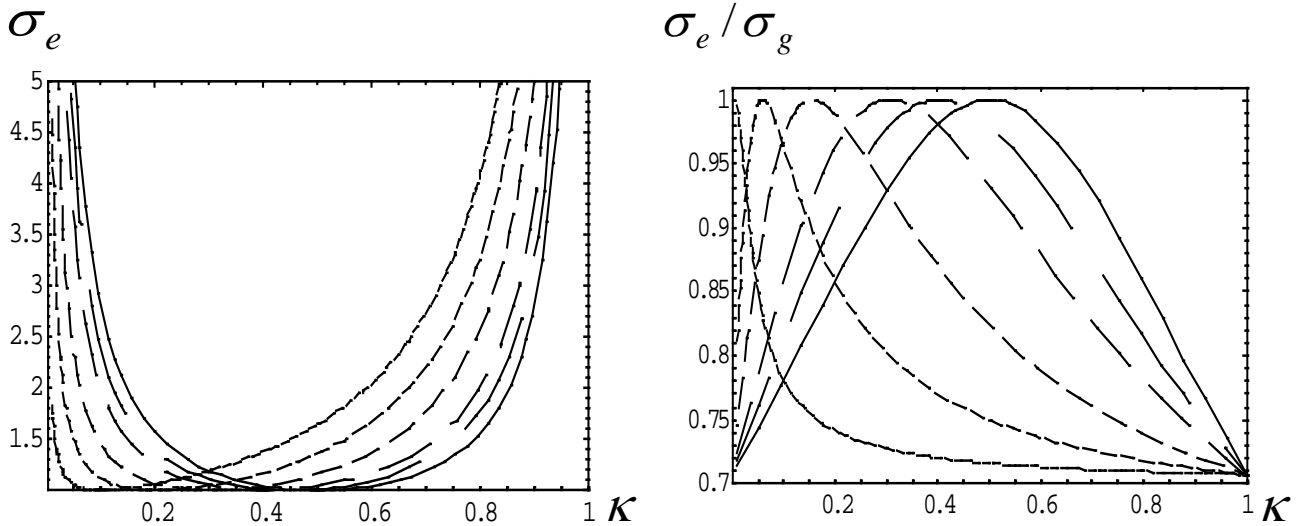


Рис.5. Зависимость σ_e и отношения σ_e/σ_g от κ при различных λ . непрерывные линии соответствуют $\lambda = 0,5$, штриховые - $\lambda = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,45$ (длина штрихов возрастает с ростом λ). Кривые идентичны при замене λ и κ на $1-\lambda$ и $1-\kappa$.

Знаменатель в (19) введен для обеспечения условия $\tilde{\Gamma}_0(0) = 1$. Вследствие (3) третье слагаемое в (19) должно равняться нулю при $\mu = 0$, а знаменатель (19) - единице. Но так как некоторые представления (1.37) универсальной функции $U_\Gamma(\mu)$ могут при $\mu = 0$ давать отличные от нуля значения ($U_\Gamma(2s_1/\sigma) \neq 0$), знаменатель (19) нужен для нормировки $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (в (15,17) знаменатель не требовался, потому что там $\tilde{\kappa} \neq \kappa$, $\tilde{\kappa} \neq 1-\kappa$ и они зависели от $\tilde{\lambda}$ и s согласно (14*) или аналогичному уравнению для $S_{2g}(\chi)$ как раз так, чтобы $\tilde{\Gamma}_0(0) = 1$). По той же причине в третьем слагаемом числителя (19) оставлен член, зависящий от $|\mu + s_1|$, в то время как из (3) вытекает лишь зависимость от $|\mu - s_1|$ (см. $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ для спектров **1-2**), где нет зависимости от $|\mu + s|$).

Приближение (19) можно получить непосредственно из (18) с помощью уравнения (1.14), если в третьем слагаемом (18) использовать представления $U_\gamma \cong \gamma_0^e$ или $U_\gamma \cong \gamma_0^g$, позволяющие довести интегрирование (1.14) до аналитического результата через функции, соответственно, Γ_0^e или Γ_0^g , положить затем $\Gamma_0^e \cong \Gamma_0^g \cong U_\Gamma$ и добавить нормировочный знаменатель. Строго говоря, приближение (19) удовлетворяет необходимым требованиям для функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ лишь при $U_\Gamma(2s_1/\sigma) = 0$, что ограничивает как выбор представления функции $U_\Gamma(\mu)$ в (19), так и диапазон допустимых значений s_1 в нем (см. обсуждение в конце раздела 3 ниже). Но погрешность от при-

менения в (19) любого представления для U_Γ из (1.37) с соответствующим знаменателем пренебрежимо мала при допустимых для диахромных спектров значениях S_1 .

Функция $\Phi(0, \eta)$ в примерах раздела 2.3 лишь в случае спектра $S_1(\chi)$ выразилась через соответствующую функцию монохромного процесса, т.е. через $\Phi_r(0, \eta)$. Поэтому для получения обобщенной формулы для функции $\Phi(0, \eta)$ в случае спектра из двух компактных частей подставим в третье слагаемое функции (19) представление $U_\Gamma \cong \tilde{\Gamma}_0^r$, полагая знаменатель (19) равным единице (т.к. при этом $s_1 \geq \pi\sigma/2$ в силу (11) и $\tilde{\Gamma}_0^r(\mu \geq \pi) = 0$ - см. табл.1.2), и проинтегрируем в соответствии с первым вариантом правой части (1.16). Первые два слагаемых (19) интегрируются точно при любых $S_{1,2}(\chi)$ вне зависимости от выполнения условия (3) (как и у $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$), а $\tilde{\Gamma}_0^r(\mu)$ в третьем слагаемом позволяет выразить результат через $\Phi_r(0, \eta)$. В итоге получим

$$\Phi(0, \eta) = \lambda^2 U_\Phi(\lambda^2 \eta / \kappa) + (1 - \lambda)^2 U_\Phi((1 - \lambda)^2 \eta / (1 - \kappa)) + \\ + \lambda(1 - \lambda) \left\{ \left(1 + \frac{2s_1}{\pi\sigma}\right)^2 \Phi_r\left(0, \frac{\eta}{2} \left(\sigma + \frac{2s_1}{\pi}\right)\right) + \left(1 - \frac{2s_1}{\pi\sigma}\right)^2 \Phi_r\left(0, \frac{\eta}{2} \left|\sigma - \frac{2s_1}{\pi}\right|\right) - 2 \left(\frac{2s_1}{\pi\sigma}\right)^2 \Phi_r\left(0, \frac{s_1 \eta}{\pi}\right) \right\}.$$

Подставив сюда, согласно (1.38), вместо $\Phi_r(0, \eta)$ универсальную функцию $U_\Phi(\eta)$, окончательно получим для $\Phi(0, \eta)$ в случае спектра из двух компактных компонент

$$\Phi(0, \eta) \cong \lambda^2 U_\Phi(\lambda^2 \eta / \kappa) + (1 - \lambda)^2 U_\Phi((1 - \lambda)^2 \eta / (1 - \kappa)) + \\ + \lambda(1 - \lambda) \left\{ \left(1 + \frac{2s_1}{\pi\sigma}\right)^2 U_\Phi\left(\frac{\eta}{2} \left(\sigma + \frac{2s_1}{\pi}\right)\right) + \left(1 - \frac{2s_1}{\pi\sigma}\right)^2 U_\Phi\left(\frac{\eta}{2} \left|\sigma - \frac{2s_1}{\pi}\right|\right) - 2 \left(\frac{2s_1}{\pi\sigma}\right)^2 U_\Phi\left(\frac{s_1 \eta}{\pi}\right) \right\}, \quad (21)$$

где, как и в (19), положим $\sigma = \sigma_e$ из (20). Это выражение удовлетворяет необходимому начальному условию $\Phi(0, 0) = 1/2$.

Итак, точные формулы для нормированных статистических характеристик случайных процессов с несколькими конкретными двугорбыми спектрами с симметричными разновеликими горбами, полученные в предыдущем разделе 2.3, удалось представить в виде формул (18, 19, 21), где уже не фигурируют конкретные спектры.

Функции, описываемые формулами (18, 19, 21), определяются только универсальными функциями процессов с компактными спектрами и потому тоже универсальны в пространстве переменных ξ, μ, η , дополненных параметрами λ, κ и S_1 .

Они не являются нормированными статистическими характеристиками конкретного спектра, а получаются с помощью точных соотношений (1.13-16), в которых для спектра, разбиваемого на две симметричные компактные части, в ходе расчетов заменяются одни из представлений (1.28, 37-38) универсальных функций процессов с компактными спектрами на другие. Так, (18) следует из (1.13) для любых симметрич-

ных $S_{1,2}(\chi)$, (19) - из (18) с помощью (I.14) при подстановке $U_\gamma \cong \gamma_0^e$, а (21) - из (19) с помощью (I.16) при подстановке $U_\Gamma \cong \tilde{\Gamma}_0^r$.

Формулы (18,19,21), таким образом, представляют собой обобщенные формулы для нормированных статистических характеристик процессов с двухкомпонентными спектрами с симметричными непересекающимися компактными частями и являются обобщением универсальных функций для симметричных двугорбых спектров с одинаковыми симметричными горбами из работы [5] на случай разновеликих горбов. Возникает вопрос, могут ли формулы (18,19,21) и при каких условиях приближенно описывать нормированные статистические характеристики процессов в случае произвольных двухкомпонентных спектров с непересекающимися компактными частями? Понятно, что поскольку при выводе функций (18,19,21) предполагалась симметричность $S_{1,2}(\chi)$, применимость их для случаев других спектров требует проверки.

Отметим, что при $s_1 = s$, $\lambda = 1/2$ и $\kappa = 1 - \kappa = \tilde{\kappa}$ ($\sigma = (2\tilde{\kappa})^{-1}$) функции (18) переходят в (8), (21) - в (10), а (19) - в (9), если знаменатель в (19) приравнять единице (т.к. из-за замены $\tilde{\kappa}$, удовлетворяющего уравнению $2\tilde{\kappa}(1 + U_\Gamma(4\tilde{\kappa}s_1)) = 1$, на κ он и вводился).

При выводе (18,19,21) на $S(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi)$ накладывались ограничения симметричности и компактности каждого $S_{1,2}(\chi)$ в собственной нормировке (см. (1*)) и условие (3) отсутствия перекрытия $S_{1,2}(\chi)$. Мы явно пользовались симметрией $S_{1,2}(\chi)$ при получении упрощенной формулы (18) для $|\gamma_0(\xi)|$ (именно симметрией, а не их одинаковым функциональным видом, хотя и выводили функции с помощью таких спектров). Компактность $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ была необходима для замены функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$, отвечающих конкретным компактными спектрам, различными представлениями универсальных функций (I.28,37-38).

Наибольшие погрешности при использовании функций (18,19,21) в случаях произвольных спектров, состоящих из двух компактных частей, можно ожидать по двум причинам. Во-первых, если $S_{1,2}(\chi)$ не симметричны, то это погрешность обусловлена пренебрежением членом $\Sigma(\xi)$ при переходе от (6) к приближенной формуле (18) для $|\gamma_0(\xi)|$. Во-вторых, при выводе (19,21) из (18), да и самого (18), мы пользовались взаимозаменяемостью функций $|\gamma_0(\xi)|$ компактных спектров. Однако, в отличие от $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ таких спектров, действительно очень близких друг к другу во всей области своего определения, функции $|\gamma_0(\xi)|$ для них могут заметно отличаться на хвостах и иметь даже разный характер поведения – монотонный спад или убывающие колебания (см.[5]). И если это мало влияет на $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ в случае компактных спектров (хватает совпадения $|\gamma_0(\xi)|$ при $|\gamma_0(\xi)| \geq 0,3$ – см. раздел 5 в ч.1), то

априори не очевидно, что так будет и для двугорбого спектра, даже если компактные $S_{1,2}(\chi)$ симметричны, а тем более, если нет. И действительно, нам придется добавить ограничения на параметры λ , κ и S_1 двухкомпонентного спектра $S(\chi)$ (т.е. параметры соотношения и связи частей $S_{1,2}(\chi)$ в $S(\chi)$), чтобы можно было пользоваться для них функциями (18,19,21). Отметим здесь, что значения параметров спектра λ , κ и S_1 и факт компактности его частей в собственно-нормированной форме $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ – независимые атрибуты спектра (т.е., если $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ заданы, то можно произвольно варьировать λ , κ и S_1). Кроме того, для конкретного $S(\chi)$ и компактность частей и значения λ , κ и S_1 зависят от того, как спектр поделен на части.

Далее, говоря о погрешностях при использовании формул (18,19,21), заметим, что по соображениям простоты функционального вида $\Phi_e(0,\eta)$ и единообразия почти во всех дальнейших расчетах данной работы из аналитических представлений универсальных функций монохромного спектра (I.28,37-38) мы использовали функции, отвечающие случаю монохромного экспоненциального спектра. В конце работы будет показано, что это не самый удачный выбор, и правильнее для разных функций (18,19,21) из совокупности (I.28,37-38) брать разные представления. Хотя на качественные и количественные результаты проведенных расчетов это заметно не влияет.

Конечно, в случае диахромных спектров в качестве универсальных функций для $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ вместо приближенных обобщенных формул (19,21) можно было бы взять и точные выражения, полученные выше для спектров **1)-4)** (мы покажем, что они приближенно равны (19,21) и тоже зависят лишь от λ , κ и S_1). Но практически это неудобно. Для спектров **1)-2)**, где действительно фигурируют λ , κ и $S_1 = S$, эти $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ не выражены как (18,19,21) через соответствующие функции компактных спектров. А для спектров **3)-4)**, где $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ выражены, нет простой связи между λ , κ , S_1 и $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\kappa}$, S . А найти такой диахромный спектр, для которого $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ точно выражались бы через функции компактного спектра, нам пока не удалось.

2.5. Критерии диахромности некомпактных спектров и анализ параметров обобщенных формул

Чтобы показать, что из множества случайных процессов с некомпактными спектрами можно выделить класс диахромных процессов, для которых имеет место подобие одноименных статистических характеристик, надо решить четыре задачи.

Во-первых, определить, какие спектры следует отнести к категории некомпактных диахромных, т.е. каким критериям должны удовлетворять спектры, чтобы

случайные процессы с такими спектрами проявляли себя как процессы, представляющие совокупность двух процессов с различными несущими частотами, поскольку их статистические характеристики приближенно подобны функциям (18,19,21), обобщающим характеристики процессов с симметричными двугорбыми спектрами.

Во-вторых, показать в конкретных расчетах, что одноименные нормированные статистические характеристики процессов с такими спектрами действительно аппроксимируются полученными функциями (18,19,21). Так как (18,19,21) кроме своих аргументов зависят от трех параметров λ , κ и S_1 , надо показать необходимость и достаточность этой совокупности параметров.

В-третьих, надо разработать способ определения указанных параметров для диахромных спектров произвольного вида, учитывая тот факт, что разбиение спектра на компактные части почти всегда не однозначно, а, значит, неоднозначен и набор тройки параметров для каждого конкретного спектра.

В-четвертых, следует изучить поведение функций (18,19,21) и универсальных функций (I.28,37-38), соответствующих монохромным спектрам, на границе между диахромными и монохромными спектрами, т.е. при значениях параметров, соответствующих переходу от диахромных спектров к монохромным.

Везде дальше будем говорить о нормированных статистических характеристиках $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0,\eta)$ и собственно-нормированных спектрах $S(\chi)$.

Начнем с первой задачи. По внешнему признаку выделяем два вида спектров – **одногогорбые и двугорбые**, являющиеся главными объектами исследования, соответственно, в ч.I [6] и здесь, в ч.II. Для ряда таких спектров простой формы мы аналитически рассчитали нормированные статистические характеристики, которые легли в основу выражений для универсальных функций монохромных и диахромных спектров. Среди одногогорбых спектров нас главным образом интересуют монохромные, т.е. отвечающие критериям компактности, сформулированным в ч.I. Среди двугорбых выделяем спектры, горбы которых представляют собой по отдельности тоже компактные структуры, разновеликие и разнесенные по частоте на расстояние порядка или более их характерных ширин. Грань между этими видами спектров расплывчата. Два компактных спектра могут сблизиться, образуя один компактный спектр. Или один горб может оказаться настолько меньше другого, что на статистических характеристиках его влияние не скажется. И вообще, внешний вид спектров не гарантирует, что нормированные статистические характеристики одногогорбых спектров хорошо описываются универсальными функциями (I.28,37-38), полученными в [5-6], а характеристики двугорбых – полученными выше функциями (18,19,21). Спектры, для которых это действительно имеет место, мы назвали, соответственно, **компактными (монохромными) и диахромным**, остальные спектры процессов, статистические характеристики которых не подобны ни (I.28,37-38), ни (18,19,21), отнесем к **полихромным спектрам**. Соответственно, и случайный процесс, которому отвечает компактный спектр, мы назвали **монохромным**, процессы с некомпактными спектрами – **полихромными**, а те из них, которым отвечают диахромные спектры, соответственно,

диахромными. Большинство одnogорбых спектров являются компактными, но не все – в ч.1 приведены такие примеры. Компактными могут быть спектры и двугорбого и более сложного вида – примеры приведены и в ч.1 и далее здесь. Собственно, упомянутая выше граница перехода – это и есть компактные спектры двугорбого вида. Диахромные спектры тоже могут не очень подходить под определение двугорбых.

Поэтому диахромные спектры, как и монохромные в ч.1, будем отличать не по виду, а по критериям. В функциях (18,19,21) все особенности спектров отображаются параметрами λ , κ и S_1 . Мы найдем связь этих параметров с критериями диахромности. В конце работы будет обсуждена возможность продолжения классификации спектров по полихромности.

Заметим, что фигурирующее в нормированных характеристиках $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ расстояние s между центрами симметрии горбов спектров **1)-4)** в разделе 2.3 и между вершинами несимметричных частей спектров (24,28) в разделе 2.7 ниже, вообще говоря, не совпадает с параметром S_1 , фигурирующим в функциях (18,19,21). Величина s у спектров **1)-4)** и (24,28) - просто характеристика спектров, для которых рассчитываются точные $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$. То, что для каких-то спектров s совпадает с S_1 , просто результат удачного выбора систем отсчета для этих спектров.

Параметр S_1 в (18,19,21) определяется как нормированный на τ_c частотный интервал между разнесенными частями спектра. У него более общий смысл, чем у s . В определении S_1 не предполагается, что спектр имеет определенный вид, например, двугорбый. Способ вычисления S_1 для произвольных двухкомпонентных спектров еще предстоит определить. Это будет сделано в разделе 2.7 путем сравнения функций (18,19,21) и точных статистических характеристик процессов, отвечающих двум простым видам спектров с разновеликими и асимметричными частями $S_{1,2}(\chi)$.

Другие параметры, входящие в функции (18,19,21), λ и κ , определены в (2) и (4). Их выбор, как и соответствующего им S_1 , не однозначен. То, что эта неоднозначность не препятствует наличию приближенного подобия в пространстве переменных ξ , μ , η , дополненных параметрами λ , κ и S_1 , будет также показано в разделе 2.7.

Обратимся к характеристикам спектров, определяющим их как монохромные или диахромные. Две из необходимых для этого характеристик, $s_{0,5}$ и $s_{0,9}$ - протяженности собственно-нормированного спектра, введены в ч.1. Их величины показывают, компактный спектр или некомпактный. Если спектр компактный, то нормированные статистические характеристики $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ процесса, отвечающего такому спектру, приближенно описываются функциями (1.28,37-38)).

Характеристика $s_{0,5}$ вычисляется с помощью (I.40), а критерий компактности спектра - $s_{0,5} \leq \pi/2$ (I.39); характеристика $s_{0,9}$ вычисляется по схожему алгоритму, а критерий компактности - $s_{0,9} \leq \pi$ (I.45). Нарушение (I.39,45), т.е. $s_{0,5} > \pi/2$ или $s_{0,9} > \pi$, даже для спектра двугорбого вида, еще не значит, что такой некомпактный спектр диахромный и статистические характеристики случайного процесса с таким спектром хорошо описываются функциями (18,19,21).

Чтобы это было так, как оказалось, нужны дополнительные критерии, которым должны подчиняться непересекающиеся части $S_{1,2}(\chi)$, на которые этот спектр разбит. При выводе формул (18,19,21) предполагалась компактность собственно-нормированных спектров $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$, соответствующих частям $S_{1,2}(\chi)$, чтобы можно было при выводе (18,19,21) заменять нормированные статистические характеристики процессов со спектрами $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ универсальными функциями (I.28,37-38). Расчеты показали, что этого недостаточно для выделения из множества некомпактных спектров класса диахромных спектров, одноименные статистические характеристики которых подобны. Оказалось необходимым наложить еще определенные ограничения на совокупность параметров λ , κ и S_1 двухкомпонентного спектра, которые вытекают из дополнительного требования выполнения критериев компактности $S_{1,2}(\chi)$ как функций переменной χ , получаемой нормировкой аргумента Ω на τ_c^{-1} всего спектра.

В итоге диахромность накладывает на спектр следующие условия. Во-первых, весь спектр $S(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi)$ должен быть некомпактным, т.е. для него критерии компактности (I.39,45) (или один из них) должны нарушаться. Во-вторых, каждая часть $S_{1,2}(\chi)$ отдельно должна удовлетворять критериям типа (I.39,45) как в переменных $\chi_{1,2}$, соответственно, так и в переменной χ . То есть, учитывая (1*), для частей $S_{1,2}(\chi)$ должны выполняться критерии

$$s_{0,5i} \leq (\pi/2) \min\{\lambda_i^2 / \kappa_i, 1\}; s_{0,9i} \leq \pi \min\{\lambda_i^2 / \kappa_i, 1\} \quad (22)$$

(где для краткости использованы обозначения $\lambda_1 = \lambda$; $\lambda_2 = 1 - \lambda$; $\kappa_1 = \kappa$; $\kappa_2 = 1 - \kappa$). В (22) $s_{0,5i}$ и $s_{0,9i}$ - протяженности каждой $S_{1,2}(\chi)$ по уровням, соответственно, 0,5 и 0,9 по площади, определяемые как $s_{0,5i}, s_{0,9i} = b_i - a_i$, где a_i и b_i - такие точки на оси χ , для которых выполнены, соответственно, условия (ср. (I,40)):

$$\int_{-\infty}^{a_1} S_1(\chi) d\chi = \frac{1}{2} \int_{a_1}^{b_1} S_1(\chi) d\chi = \int_{b_1}^{\infty} S_1(\chi) d\chi = \frac{\lambda}{2}; \quad \int_{-\infty}^{a_1} S_1(\chi) d\chi = \frac{1}{18} \int_{a_1}^{b_1} S_1(\chi) d\chi = \int_{b_1}^{\infty} S_1(\chi) d\chi = \frac{\lambda}{10};$$

и

$$\int_{-\infty}^{a_2} S_2(\chi) d\chi = \frac{1}{2} \int_{a_2}^{b_2} S_2(\chi) d\chi = \int_{b_2}^{\infty} S_2(\chi) d\chi = \frac{1-\lambda}{2} \quad \int_{-\infty}^{a_2} S_2(\chi) d\chi = \frac{1}{18} \int_{a_2}^{b_2} S_2(\chi) d\chi = \int_{b_2}^{\infty} S_2(\chi) d\chi = \frac{1-\lambda}{10}$$

(здесь учтено равенство (2) для интегралов от $S_{1,2}(\chi)$ и условие (3), предполагающее $S_1(\chi) = 0$ правее и $S_2(\chi) = 0$ левее точки χ_0 разбиения $S(\chi)$ на $S_{1,2}(\chi)$).

В критериях (22) первое число в $\min\{ \}$ соответствует требованию компактности $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ в координатах $\chi_{1,2}$, а второе – компактности $S_{1,2}(\chi)$ в координате χ . Напомним (см.(1*)), что поскольку (22) даны для безразмерной переменной χ спектра в целом, а не для $\chi_{1,2}$, условия компактности $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ в координатах $\chi_{1,2}$ содержат параметры λ и κ , а условия компактности $S_{1,2}(\chi)$ в координатах χ - нет. Если, например, (22) переписать для $\chi_{1,2}$ - что практически неудобно, но более естественно, т.к. $\chi_{1,2}$, в отличие от χ , не зависят от λ и κ - параметров взаимосвязи $S_{1,2}(\chi)$, то (22) примет вид $s_{0,5i}(\chi_i) \leq (\pi/2) \min\{1, \kappa_i / \lambda_i^2\}$; и аналогично для $s_{0,9i}(\chi_i)$.

Требования компактности $S_{1,2}(\chi)$ в координатах χ в критерии (22) дают ограничения на совокупность λ и κ в (18,19,21). Посмотрим на эти ограничения для двух важных примеров – рассмотренного выше спектра **1)** из двух прямоугольников, и рассмотренного ниже спектра **(1)** из двух произвольных треугольников.

Для спектра, состоящего из двух прямоугольников (компактных в собственнорегулированных координатах), условия $s_{0,5i} \leq \pi/2$ сводятся к ограничениям на λ и κ

$$\lambda^2 < \kappa < 1 - (1 - \lambda)^2 = 2\lambda - \lambda^2 \quad (\lambda^2 / \kappa; (1 - \lambda)^2 / (1 - \kappa) < 1). \quad (23)$$

Для этого спектра из $s_{0,5i} \leq \pi/2$ вытекает и $s_{0,9i} \leq \pi$ (точнее даже $s_{0,9i} \leq 0,9\pi$). Таково свойство функций $S_{1,2}(\chi)$ с резким обрывом краев. Из (20,23) следует $1 \leq \sigma < 2$.

Для спектра, состоящего из двух произвольных треугольных спектров (тоже компактных в собственнорегулированных координатах) ограничения на λ и κ , вытекающие из (22), имеет схожий вид

$$v(\varepsilon_1)\lambda^2 < \kappa < 1 - v(\varepsilon_2)(1 - \lambda)^2, \quad (23^*)$$

где $V(\varepsilon)$ - коэффициенты, зависящие от параметров неравнобедренности ε_1 и ε_2 треугольных спектров, образующих общий спектр (см. ниже (24)). Они различны для условий $s_{0,5i} \leq \pi/2$ и $s_{0,9i} \leq \pi$ и, соответственно, равны ($v(\varepsilon) = v(1/\varepsilon)$)

$$v_{0,5}(\varepsilon) = \frac{4}{3} \begin{cases} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{1+\varepsilon}}, & \varepsilon \leq \frac{1}{3} \\ 2 - \frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}, & \frac{1}{3} < \varepsilon \leq 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad v_{0,9}(\varepsilon) = \frac{4}{3} \begin{cases} \frac{\sqrt{0,95}-\sqrt{0,05}}{\sqrt{1+\varepsilon}}, & \varepsilon \leq \frac{1}{19} \\ 1 - \sqrt{0,05} \frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}, & \frac{1}{19} < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

с минимумами при $\varepsilon = 1$ (равнобедренный треугольник) - $v_{0,5}(1) = 4(2 - \sqrt{2})/3 \approx 0,78$ и $v_{0,9}(1) = 4(1 - \sqrt{0,1})/3 \approx 0,91$; и максимумами при $\varepsilon = 0; \infty$ (прямоугольный треугольник), соответственно, $v_{0,5}(0; \infty) = 4(\sqrt{3} - 1)/3 \approx 0,976$ и $v_{0,9}(0; \infty) = 4(\sqrt{0,95} - \sqrt{0,05})/3 \approx 1,001$. Т.е. $0,78 \leq v_{0,5} \leq 0,976$, $0,91 \leq v_{0,9} \leq 1,001$ и условие $s_{0,9i} \leq \pi$ дает более жесткое ограничение на λ и κ , чем $s_{0,5i} \leq \pi/2$. Для спектра из двух равнобедренно-треугольных спектров ограничение (23*) на λ и κ минимально: $\lambda^2 / \kappa; (1 - \lambda)^2 / (1 - \kappa) < 1,1$, а для спектра из двух прямоугольно-треугольных спектров – максимально и совпадает с (23). Из (20,23*) при этом следует, соответственно, $1 \leq \sigma < v^{-1}(\varepsilon_1) + v^{-1}(\varepsilon_2) \leq 2,2; 2$. Для остальных спектров, состоящих из двух треугольных спектров, ограничения на λ , κ и σ находятся в промежутке между приведенными крайними ограничениями.

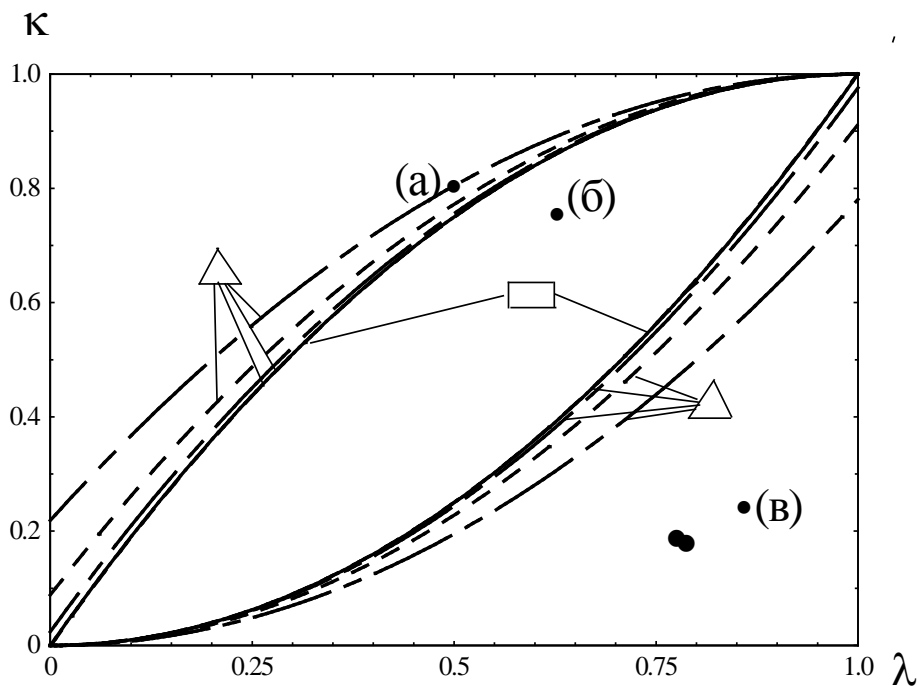


Рис.6. Границы областей допустимых значений λ и κ , удовлетворяющих условиям (23) $s_{0,5i} \leq \pi/2$ для спектров, состоящих из двух прямоугольных спектров (сплошные линии), и условиям (23*) $s_{0,5i} \leq \pi/2$ (штрих-пунктирные линии) и $s_{0,9i} \leq \pi$ (штриховые линии) для спектров, состоящих из двух равнобедренных и двух прямоугольно-треугольных спектров. Ограничительные

линии условия $s_{0,9i} \leq \pi$ для прямоугольно-треугольных спектров визуально слились со сплошными линиями. Ограничения (23*), отвечающие спектрам из двух произвольных треугольных спектров, находятся между приведенными парами соответственных ограничительных кривых. Маленькими черными точками отмечены спектры рис.10а-в (помечены (а), (б) и (в)), большими – соответствующие спектрам с рис.15.

Ограничения (23,23*) на область значений λ и κ показаны на рис.6. Для (23*) приведены ограничения в случаях двух равнобедренных ($\varepsilon_{1,2} = 1$) и двух прямоугольных ($\varepsilon_{1,2} = 0; \infty$) треугольников, как минимальные и максимальные.

Прямоугольный и треугольный спектры – грубые модели двух крайних случаев компактных одногорбых спектров, соответственно, с резким и плавным обрывом краев. Условие (23) сильнее (23*), и обычно для диахромных спектров ограничения на λ и κ из (22) находятся между (23) и (23*) для $\nu_{0,5}(1)$ (крайними границами на рис.6).

При компактности каждого $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ выполнимости (23) достаточно для диахромности $S(\chi)$, т.е. выполнимости (22) (т.к. при этом каждый из спектров $S_{1,2}(\chi)$ растянут по оси абсцисс не больше, чем в собственно-нормированной форме), но не всегда необходимо - например, для спектров невыраженного двугорбого вида. Тогда в (18,19,21) в аргументах универсальных функций, отвечающих компактным спектрам, $(1-\lambda)^2/(1-\kappa)$, $\lambda^2/\kappa < 1$ (т.е. $\tau_{ci} > \tau_c$). Условие (23) на λ и κ (или его более слабый аналог) и компактность собственно-нормированных спектров $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ - независимые требования к спектру и лишь вместе гарантируют выполнимость критериев (22).

Обсудим критерии диахромности спектра (22). Критерий компактности спектра (I.39) $s_{0,5} \leq \pi/2$ своей границей для спектра из двух одинаковых разнесенных прямоугольных спектров точно соответствует слиянию двух прямоугольников в один. По координате χ расстояние между серединами двух прямоугольников при слиянии становится равным $\pi/2$ и, согласно (I.40), оно и есть $s_{0,5}$ такого спектра. В [5] мы численно подтвердили критерий (I.39) для рассмотренных симметричных одногорбых спектров. И также показали, что в случае рассмотренных симметричных двугорбых спектров, и с симметричными, и с несимметричными горбами именно при $s_{0,5} \geq 1,5$ точные нормированные статистические характеристики случайных процессов с такими спектрами начинают качественно и количественно отличаться от одноименных характеристик (I.28,37-38), отвечающих случаю компактного спектра. С помощью (I.40) в [6] мы обобщили определение $s_{0,5}$ на случай несимметричных спектров и численно подтвердили и в этом случае необходимость критерия компактности (I.39), сопоставляя отвечающие таким спектрам нормированные статистические характеристики и универсальные функции (I.28,37-38). Из условий (11,12) неперекрывания частей спек-

тров 1)-2), представляющих собой два различных прямоугольника или равнобедренных треугольника, тоже в основном следует $s_{0,5} \geq \pi/2 \geq$, т.е. нарушение критерия (I.39).

Второй критерий компактности спектра (I.45) $s_{0,9} \leq \pi$ был добавлен к (I.39) для исключения из категории компактных одnogорбых спектров с длинными хвостами (типа лоренцева) и спектров с удаленными на расстояние «кусками», содержащими более 5% интеграла от спектра. Эти 5% с каждой стороны, т.е. всего 10%, были взяты из численных экспериментов со спектрами двугорбого вида. Оказалось, что отвечающие им статистические характеристики перестают проявлять себя как характеристики процессов с двугорбыми спектрами и начинают проявлять себя как характеристики процессов с компактными одnogорбыми спектрами как раз при $\lambda < 0,1$ (или $1 - \lambda < 0,1$). Для спектров одnogорбого вида критерий (I.45) может быть ослаблен до $s_{0,9} \leq 1,25\pi$, но поскольку это не всегда верно для любых структур (как показано ниже), мы сохранили (I.45), не привязываясь к виду спектра.

Далее оказалось, что в случае произвольных спектров, представленных в виде двух не перекрывающихся частей $S(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi)$, требования от $S_{1,2}(\chi)$ компактности их собственно-нормированных форм $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ недостаточно для выделения класса диахромных спектров и соответствующих им случайных процессов с подобными друг другу одноименными статистическими характеристиками, описываемыми функциям (18,19,21). Численные эксперименты показали, что для выделения класса таких спектров надо дополнительно потребовать от $S_{1,2}(\chi)$ компактности в форме (I.39,45) еще и по переменной χ , для чего мы определили $s_{0,5i}$ и $s_{0,9i}$ каждой части и сформулировали для них ограничения (22), включающие оба требования. Образно говоря, собственно-нормированный прямоугольный спектр всегда одинаков - его ширина равна π , а высота $2/\pi$. А вот у собственно-нормированного спектра из двух разнесенных прямоугольных спектров ширина и высота каждого из них могут сколько угодно отличаться от π и $2/\pi$ (см.(1*)). Критерии (22) для $s_{0,5i}$ и $s_{0,9i}$ кроме компактности $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ обеспечивают определенную соразмерность частей $S_{1,2}(\chi)$. Эта соразмерность, как видно из рис.6, сводится к ограничениям (23,23*) на λ и κ и, как мы покажем ниже, ограничениям $s_1 \geq (0,5 \div 1)\pi\sigma$ на s_1 . Объединяя эти ограничения по максимуму, можно кратко сформулировать, что диахромный спектр – это спектр, разбивающийся на две компактные части с геометрическими параметрами s_1 , λ и κ , удовлетворяющими условиям (23) и $s_1 \geq \pi\sigma$. Мы подтвердим далее в численных экспериментах, что действительно нормированные статистические характеристики хорошо аппроксимируются функциями (18,19,21) в случаях определенных указанным образом диахромных спектров и заметно хуже в случае спектров, не удовлетворяю-

щих критериям диахромности, или когда диахромный спектр поделен на части так, что новые λ , κ и s_1 выходят за рамки (23) и условия $s_1 \geq \pi\sigma/2$.

Выполнение критериев диахромности (22) для спектра, состоящего из двух частей, не значит, что этот спектр не может также удовлетворять критериям компактности (I.39,45). Такой спектр все же логично считать компактным. Чтобы наша классификация спектров не была внутренне противоречива, необходимо, чтобы во всех подобных случаях статистические характеристики диахромных спектров практически совпадали с одноименными характеристиками компактных спектров. Приведем несколько примеров, что так оно и есть в случае исследованных в разделе 2.3 спектров двугорбого вида **1)-4)** (примеры со спектрами другого вида будут приведены далее).

В ч.I мы показали, что при нарушении критериев компактности даже для спектров одногорбого вида точность приближения их нормированных характеристик универсальными функциями (I.28,37-38) ухудшается. Покажем теперь, что если диахромные двугорбые спектры **1)-4)** компактны (обычно они пограничны по критериям компактности), то кривые их точных функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ оказываются промежуточными между близкими кривыми универсальных функций (I.28,37-38), отвечающих компактным спектрам, и кривыми функций (18,19,21), отвечающих диахромным спектрам. Причем близость точных функций функциям (I.28,37-38) тем лучше, чем лучше выполнены критерии компактности спектра. На рис.7 даны 6 таких примеров.

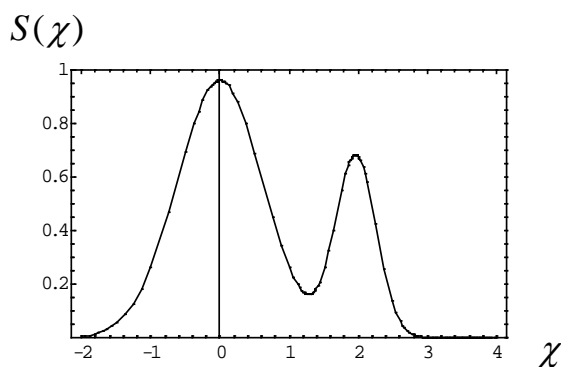
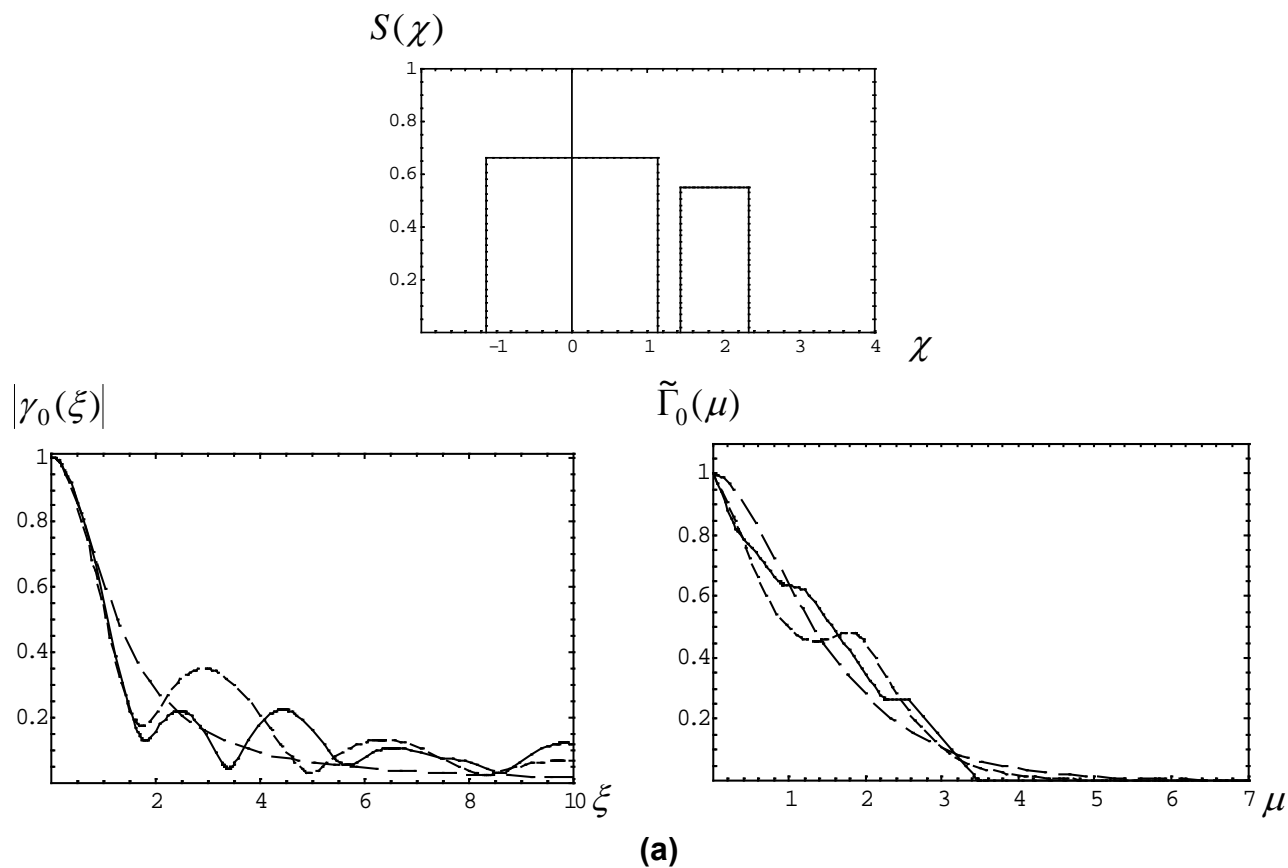
Поскольку замена λ и κ на $1-\lambda$ и $1-\kappa$ означает замену спектра на зеркально-симметричный, что не меняет ни отвечающих ему точных статистических характеристик, ни функций (18,19,21), в большинстве примеров будем полагать $\lambda \geq 1/2$.

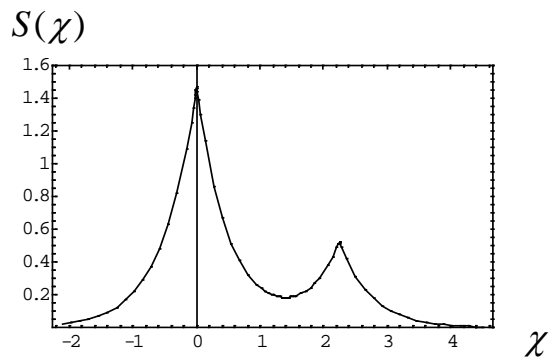
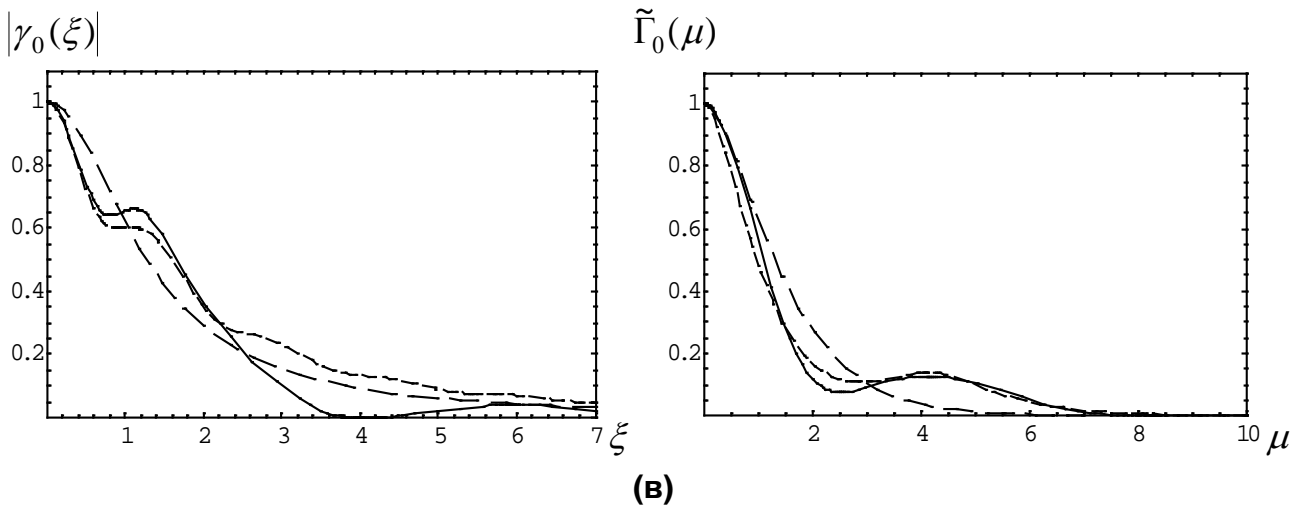
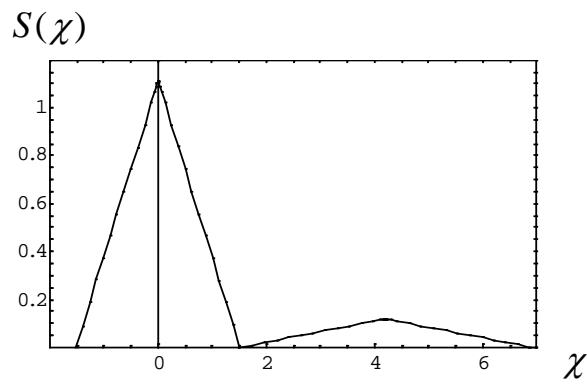
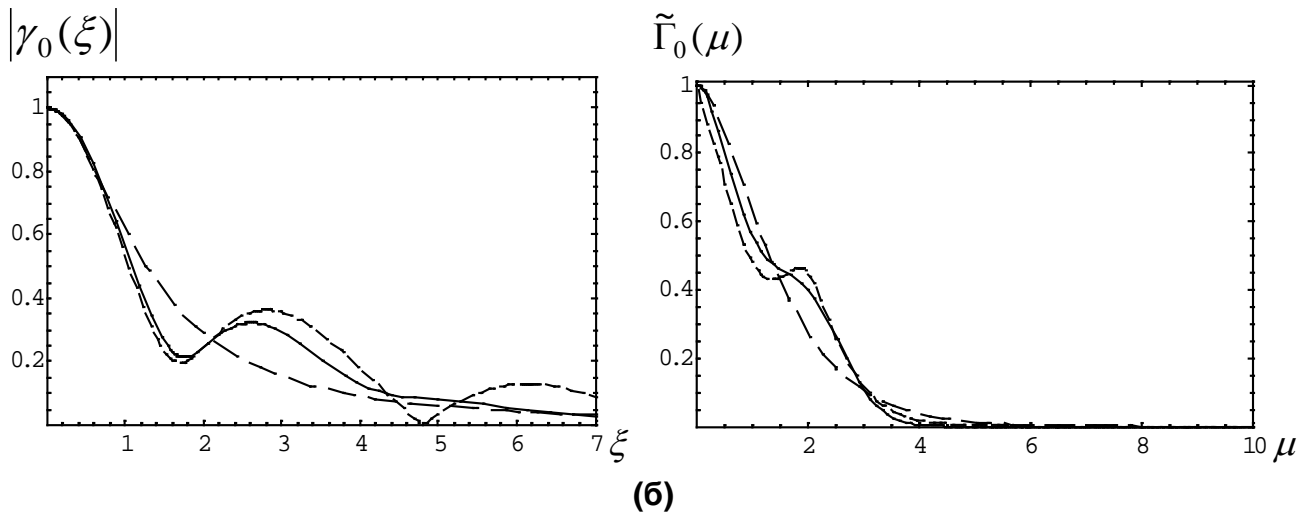
В примерах на рис.7 двугорбые спектры **1)-4)** состоят из компактных собственнo-нормированных частей, удовлетворяющих условиям (23,23*), т.е. критерии диахромности (22) выполнены. Критерий компактности (I.39) $s_{0,5} \leq \pi/2$ выполнен в 4-х примерах (а-г), критерий (I.45) $s_{0,9} \leq \pi$ - в 4-х примерах (а,б,д,е). Следовательно, в (а,б) выполнены оба критерия; т.е. спектры компактны, в (в,г) выполнен только (I.39); а в (д,е) – наоборот, выполнен только (I.45).

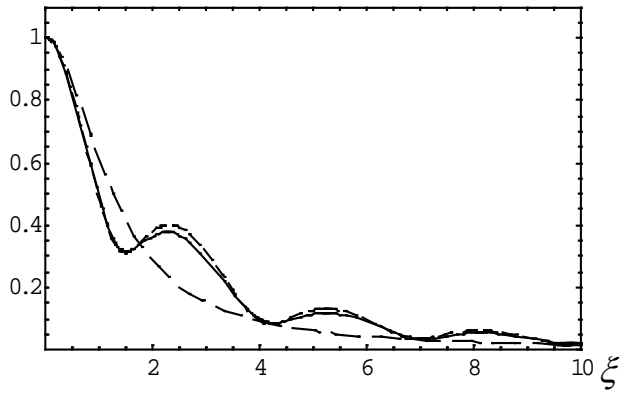
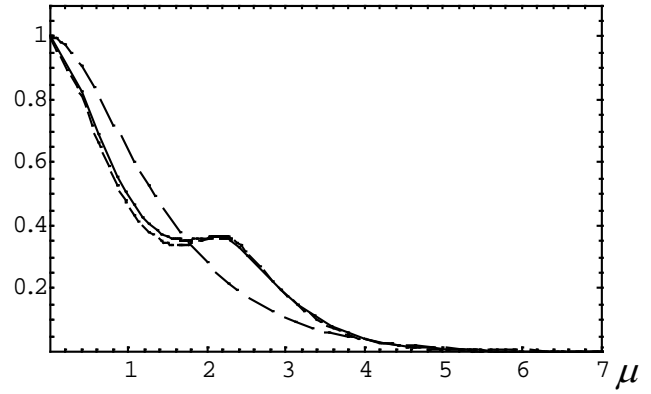
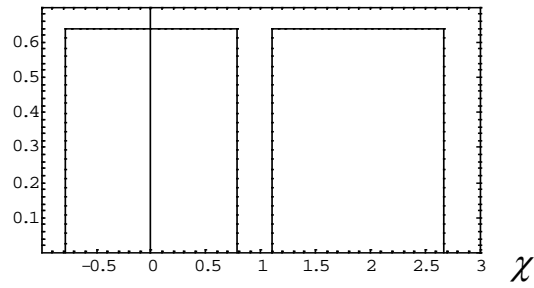
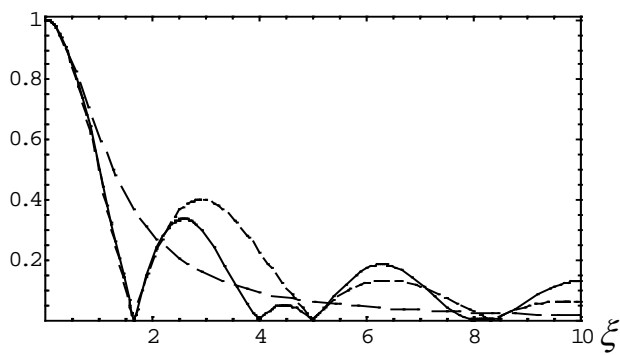
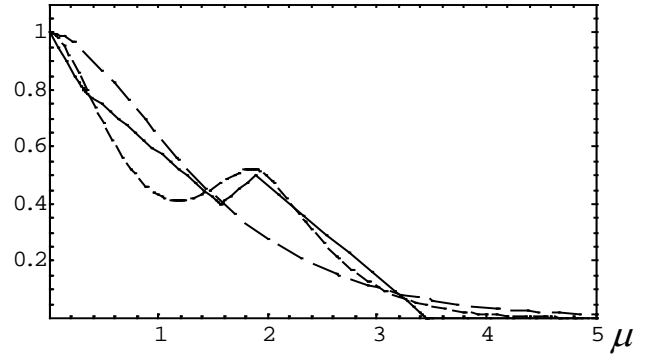
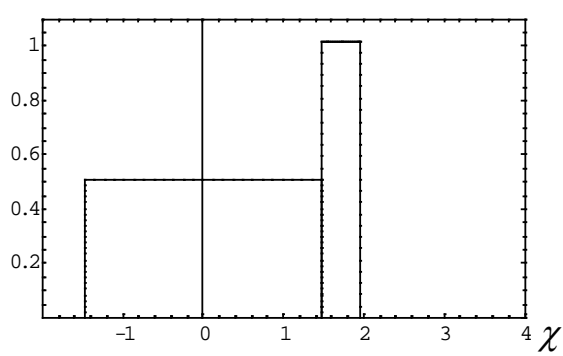
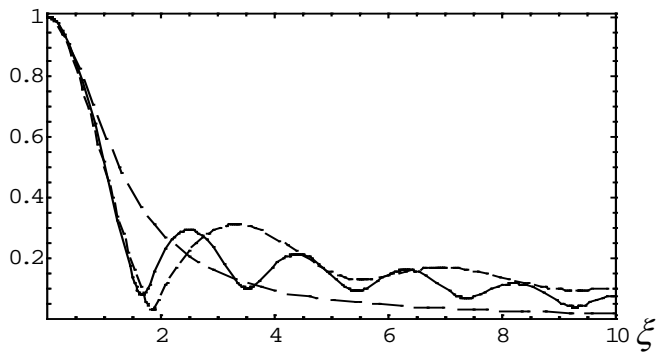
Для рис.(а,е,д) взяты спектры **1)** из двух прямоугольников. В (а,е) $\lambda=0,75$; в (а) κ максимизирует s при выполнении обоих критериев компактности (I.39,45); в (е) κ такое, что при минимальном s (прямоугольники смыкаются) $s_{0,5}$ максимально (с нарушением критерия (I.39)) при выполнении (I.45) для $s_{0,9}$. Для рис.(д) спектр симметричен и два одинаковых прямоугольника максимально разнесены при выполнении критерия (I.45). Критерий (I.39) при этом нарушен, т.к. его граница у симметричного спектра – слияние прямоугольников. Для рис.(в) взят спектр **2)** из двух равнобедренных треугольников с состыкованными основаниями и такими λ и κ , что $s_{0,5}$ минимально при выполнении (23*). При этом критерий (I.39) выполнен, а (I.45) – нет. Для рис.(г) взят спектр (13) из двух частей в виде симметричных экспоненциальных спектров. Здесь критерий (I.39) выполнен на границе; а (I.45) не выполнен. Для рис.(б)

взяв спектр (16) из двух гауссоид при $\lambda = 0,743$, $\kappa = 0,801$, когда $s_{0,5}$ и $s_{0,9}$ равны граничным значениям критериев (1.39,45).

На рис.7 с приближенными функциями сравниваются точные функции $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, а $\Phi(0,\eta)$ лишь в примере (е), т.к. в остальных случаях различия малозаметны. Видно, что везде точные функции оказались между универсальными функциями для монохромного спектра и близкими к ним функциями (18,19,21) для диахромного спектра. На рис.(а-б), в случае компактных спектров двугорбного вида, точные функции равно близки и функциями (1.28,37), и (18,19), т.е. оба приближения допустимы. В четырех других примерах, где один из критериев компактности не выполнен, характеристики заметно ближе к функциям (18,19,21). Чем хуже выполнены критерии компактности, тем сильнее отличие двух групп приближенных функций и тем ближе точные функции к функциям (18,19,21), относящимся к диахромным спектрам.





$|\gamma_0(\xi)|$  $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ **(r)** $S(\chi)$  $|\gamma_0(\xi)|$  $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ **(d)** $S(\chi)$  $|\gamma_0(\xi)|$ 

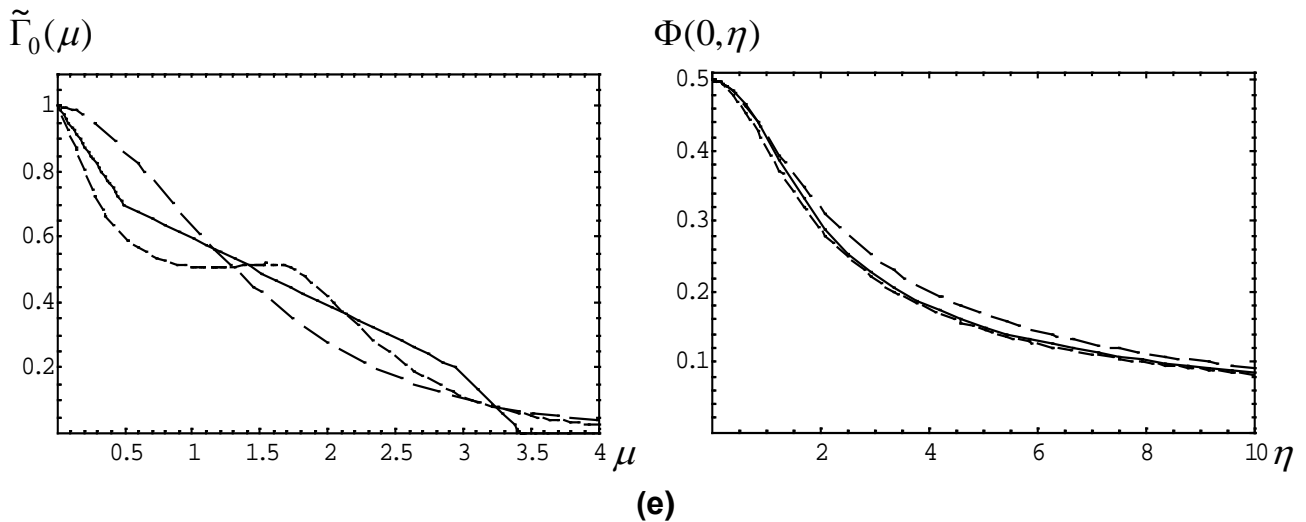


Рис.7. Диахромные двугорбые спектры, пограничные по критериям компактности (1.39,45), и статистические характеристики случайных процессов с такими спектрами.

(а) – спектр **1**) при $\lambda = 0,75$; $\kappa = 0,783$; $s = 0,6\pi\sigma$: $s_{0,5} = 0,96(\pi/2)$; $s_{0,9} = \pi$.

(б) – спектр (16) при $\lambda = 0,743$; $\kappa = 0,801$; $s = 0,61\pi\sigma$: $s_{0,5} = 1,08(\pi/2)$; $s_{0,9} = \pi$.

(в) – спектр **2**) при $\lambda = 0,84$; $\kappa = 0,98$; $s = 0,67\pi\sigma$: $s_{0,5} = 0,74(\pi/2)$; $s_{0,9} = 1,82\pi$.

(г) – спектр (13) при $\lambda = 0,748$; $\kappa = 0,884$; $s = 0,61\pi\sigma$: $s_{0,5} = 1,04(\pi/2)$; $s_{0,9} = 1,2\pi$.

(д) – спектр **1**) при $\lambda = \kappa = 0,5$; $s = 0,6\pi\sigma$: $s_{0,5} = 1,2(\pi/2)$; $s_{0,9} = \pi$.

(е) – спектр **1**) при $\lambda = 0,75$; $\kappa = 0,6$; $s = 0,5\pi\sigma$: $s_{0,5} = 1,25(\pi/2)$; $s_{0,9} = \pi$.

Сплошные линии на графиках соответствуют точным функциям. Штриховые линии с длинными штрихами – универсальным функциям (1.28,37-38) в случае компактных спектров; с короткими штрихами – функциям (18,19,21). Параметры λ и κ для (18,19,21) рассчитывались при разбивке спектров на части в минимуме между горбами (в (е) – в точке соприкосновения частей). Т.к. горбы симметричны, то считалось, что $s_1 = s$.

Примеры рис.7 показывают, что компактными двугорбые спектры будут при выполнении обоих критериев (1.39,45). Критерия $s_{0,5} \leq \pi/2$ недостаточно, т.к. «удаление» не только четверти спектра (по площади) от остальной части, но и меньших кусков в 15% заметно влияет на соответствующие спектрам статистические характеристики. Для спектра с таким отдельным куском лучше подходят приближения (18,19,21). Критерий же $s_{0,9} \leq \pi$ ограничивает отрыв кусков спектра до 5%, что действительно мало влияет на статистические характеристики. Одного критерия $s_{0,9} \leq \pi$ тоже недостаточно, поскольку при резком обрыве внешних краев спектра этот критерий допускает провал в центральной части спектра, делающий его явно двугорбым (примеры (д,е) на рис.7). К исследованию границ компактных и диахромных спектров мы еще вернемся.

Пограничные случаи обычно хуже описываются приближенными выражениями. Мы видели это в ч. I у компактных спектров одногорбого вида, видим и на рис. 7а,б у спектров двугорбого вида, где оба приближения допустимы. Это будет и с универсальными функциями диахромных спектров на границе критериев (22). Здесь важен тот факт, что функции (18,19,21) точно не переходят в (1.28,37-38) на границе компактности спектра. Подробнее об этом ниже.

Обратимся ко второй поставленной в начале раздела задаче. Для подтверждения подобия статистических характеристик случайных процессов с диахромными спектрами при одинаковых λ , κ , s_1 , мы рассчитали $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ для различных таких спектров и сравнили их с функциями (18,19,21), тоже зависящими от λ , κ , s_1 и полученными обобщением формул для нормированных статистических характеристик процессов с простыми несимметричными спектрами с симметричными частями **1)-4)**. Сравнение в следующем разделе 2.6 функций (18,19,21) с точными функциями $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ спектров **1)-4)** позволило оценить допустимость сделанных при выводе (18,19,21) упрощений. А дальнейшее сравнение в разделе 2.7 (18,19,21) с точными функциями $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ в случаях двух семейств несимметричных спектров с несимметричными частями подтвердило факт подобия статистических характеристик в случае диахромных спектров, возможность их хорошего описания трехпараметрическими функциями (18,19,21), и позволило исследовать проблему расчета параметров λ , κ , s_1 . Характерные примеры даны в разделах 2.6-7.

Но прежде, чем приводить примеры, обсудим, какими свойствами должны обладать функции (1.13,14,16) вообще и их приближения (18,19,21) в частности, чтобы подобие статистических характеристик случайных процессов с диахромными спектрами могло иметь место. Эти свойства касаются зависимости функций от параметров λ , κ и s_1 и поведения в области перехода к функциям, отвечающим компактным спектрам (третья и четвертая задачи, поставленные в начале раздела).

По смыслу s_1 - нормированное расстояние между частями $S_{1,2}(\chi)$ спектра, которое следует понимать как расстояние между некими центрами $S_{1,2}(\chi)$. У спектров типа **1)-2)** с неперекрывающимися симметричными частями мы считаем $s_1 = s$ аналогично тому, как это делалось в [5] для симметричных спектров с симметричными частями. Для не удовлетворяющих (3) даже симметричных $S_{1,2}(\chi)$ типа **3)-4)** уже возможно $s_1 \neq s$. При произвольных $S_{1,2}(\chi)$ разумным обобщением определения [5] для s_1 симметричных спектров с несимметричными частями является расстояние между точками деления интегралов от $S_{1,2}(\chi)$ пополам – см. ниже. Но разбиение спектра на

части $S_{1,2}(\chi)$ не однозначно. Поэтому при любом определении параметр s_1 , зависящий от выбора $S_{1,2}(\chi)$, тоже неоднозначен для данного $S(\chi)$.

Неоднозначен и выбор λ с κ . Для не перекрывающихся $S_{1,2}(\chi)$ с провалом до нуля между ними (типа спектров **1)-2)** с этим вроде нет проблем. Хотя, что запрещает делить спектр на части иначе, с другими λ и κ , если это не противоречит критериям (22)? В случае же спектров с ненулевым провалом между горбами (или даже несколькими провалами) выбор λ и κ в принципе неоднозначен. Эта проблема стоит уже для спектров **3)-4)**. Хотя у них один минимум между горбами, спектр можно делить и не по минимуму. Мы приведем спектры **3)-4)**, раздел которых не в минимуме, не нарушая критериев (22), заметно меняет λ и κ (и s_1 , хотя в меньшей степени).

Свойство приближенного подобия статистических характеристик в случае компактных спектров (или равенства их соответствующих нормированных форм между собой и универсальным функциям (I.28,37-38)) математически означает приближенное равенство результатов действия операторов (I.13-14,16) на собственно-нормированные компактные спектры. Факт необычный, но внутренне не противоречивый.

В случае диахромных спектров это не так. Если имеет место подобие статистических характеристик случайных процессов с такими спектрами, то собственно-нормированные формы этих спектров должны описываться лишь набором трех параметров λ , κ и s_1 , поскольку их нормированные статистические характеристики приближенно равны обобщенным функциям (18,19,21), зависящим только от этих параметров. Но значения параметров зависит от того, **как** мы делим спектр на компактные части. Точные же нормированные характеристики, естественно, от этого не зависят.

Как можно представить себе возможность подобия в такой ситуации? Предположим, что нормированные функции $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0,\eta)$ и (18,19,21), как хорошие их аппроксимации, зависят от совокупности параметров λ , κ и s_1 , характеризующих диахромный спектр, т.е. от вектора $\{\lambda, \kappa, s_1\}$ в трехмерном пространстве этих параметров, и зависимость эта плавная, по крайней мере, по λ и κ . Тогда в некоторой пространственной окрестности каждой допустимой для диахромного спектра точки $\{\lambda, \kappa, s_1\}$ упомянутые функции меняются незначительно. Как мы увидим далее, разные диахромные спектры с заданными λ , κ и s_1 в собственно-нормированном виде одинаково локализованы по обеим осям и в целом и каждой частью, части примерно одинаково соотносятся по размерам. Собственно, это верно и для компактных спектров – см. рис.1 в [5]. Поэтому логично предположить, что и область изменения λ , κ и s_1 , допустимая для таких спектров при изменении разбивки спектра на две части, пока параметры частей еще не выходят за рамки критериев диахромности (22), тоже у этих спектров будет близкой. Если эта область совпадет с упомянутой окрестностью точки $\{\lambda, \kappa, s_1\}$ незначительных изменений функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0,\eta)$, то можно

говорить о приближенном подобии статистических характеристик случайных процессов с диахромными спектрами, несмотря на неоднозначность параметров.

Если такая предполагаемая схема подобия верна (а мы увидим, что так оно и есть), то возникают две задачи. Во-первых, надо хорошо очертить область допустимых значений параметров λ, κ, s_1 , где наблюдается приближенное равенство точных функций $|\gamma_0(\xi)|, \tilde{\Gamma}_0(\mu), \Phi(0, \eta)$ приближенным (18,19,21). И, во-вторых, т.к. (18,19,21) все-таки зависят от $\{\lambda, \kappa, s_1\}$, для лучшей аппроксимации точных функций приближенными нужно разработать оптимальный алгоритм разбиения $S(\chi)$ на части $S_{1,2}(\chi)$.

Обратимся теперь к переходу диахромного спектра в компактный (и соответствующему переходу функций $|\gamma_0(\xi)|, \tilde{\Gamma}_0(\mu), \Phi(0, \eta)$). Из общих соображений представляются два пути такого перехода. Первый – сближение частей спектра, приводящее в итоге к удовлетворению критериев компактности (I.39,45). И второй - уменьшение долей интегралов от $S(\chi)$ и $S^2(\chi)$ одной из частей. В функциях (18,19,21) первый путь должен проявляться переходом их в (I.28,37-38) при уменьшении s_1 , второй – переходом при уменьшении λ, κ (или $(1-\lambda), (1-\kappa)$) до значений $\ll 1$. Разберем оба варианта. Начнем с уменьшения s_1 .

Мы писали уже, что параметры λ и κ диахромных спектров должны удовлетворять условиям близким (23) (рис.6). Посмотрим ограничения на s_1 . Функции (18,19,21) имеют смысл при любых λ и κ , удовлетворяющих (2,4), и любых неотрицательных s_1 , включая $s_1 = 0$. Однако при $s_1 \rightarrow 0$ (18,19,21) не переходят в (I.28,37-38) ни в общем случае, ни в частном ($\lambda = \kappa = 1/2$), ни по формулам, ни численно. Функции (I.28,37-38) не являются частным случаем или пределом (18,19,21). Но это не требуется и не заложено в структуру функций (18,19,21). Формально допустимое в (18,19,21) $s_1 \approx 0$ в действительности не реализуется, т.к. из разбиения спектра на неперекрывающиеся части следует, что $s_1 \neq 0$. Из условий (11-12) для спектров **1)-2)** следует ограничение $s_1 = s \geq (\pi/2)\sigma; (2\pi/3)\sigma$, которое можно взять за основу, полагая, что при $s_1 \geq \pi\sigma$ (здесь добавлено ограничение для несимметричных треугольников – см. (25,34) ниже) спектр диахромный, а при $s_1 \cong (\pi/2 \div \pi)\sigma$ переходит в компактный, т.к. уменьшение s_1 уменьшает и $s_{0,5}, s_{0,9}$ до критериев (I.39,45) (учитывая (22)). Точная связь $s_{0,5}, s_{0,9}$ с s_1 зависит от спектра, но обычно этот переход происходит как раз при $s_1 \cong (\pi/2)\sigma$. Мы покажем дальше, что, как и $s_{0,5}, s_1$ тоже расстояние между точками на оси χ , где заключена половина интеграла от $S(\chi)$, но, вообще говоря, другими. Поэтому, как и $s_{0,5}$, практически $s_1 \geq 1$. Следовательно, использовать функций (18,19,21) при $s_1 < 1$ не требуется. Далее мы приведем дополнительные сообра-

жения, почему функции (18,19,21) нельзя применять при $s_1 \leq (\pi/2 \div \pi)\sigma$. В переходной области $(\pi/2)\sigma \leq s_1 < \pi\sigma$ при допустимых согласно (22) λ и κ функции (18,19,21) близки (1.28,37-38) (см., например, рис.7 и далее рис.20,28). Аппроксимация точных функций приближенными здесь обычно хуже, и приближения (18,19,21) лучше, чем (1.28,37-38), но для компактных спектров можно пользоваться и (1.28,37-38) (рис.7,28). То, что для одинаковых симметричных $S_{1,2}(\chi)$ функции (18,19,21) совпадают с (8,9,10) и при $s \rightarrow 0$ точно переходят в функции компактных спектров, ничего не меняет в приведенных рассуждениях, т.к. у s и $\tilde{\kappa}$ в (8,9,10) другой смысл, чем у s_1 и κ в (18,19,21) ($\tilde{\kappa}$ зависит от s по уравнению $2\tilde{\kappa}(1+U_\Gamma(4\tilde{\kappa}s))=1$). В конце мы обсудим такой альтернативный вариант определения s_1 , допускающий $s_1 \rightarrow 0$.

Рассмотрим второй режим перехода от диахромных спектров к компактным, когда одна из частей двухкомпонентного спектра много меньше другой. Пусть сначала части $S_{1,2}(\chi)$ одинаковы по форме, т.е. $S_2(\chi) = nS_1(\pm(\chi - s_1))$, где $n \ll 1$. Тогда

$$\lambda = 1/(1+n) \cong 1; 1 - \lambda = n/(1+n) \ll 1; \kappa = 1/(1+n^2) \cong 1; 1 - \kappa = n^2/(1+n^2) \ll 1$$

$$\lambda^2 / \kappa = (1-\lambda)^2 / (1-\kappa) = (1+n^2)/(1+n)^2 \cong 1; \lambda^2 \cong 1; (1-\lambda)^2 \ll 1; \text{ и (18,19,21) примут вид}$$

$$|\gamma_0(\xi)|^2 = U_\gamma^2 \left(\frac{1+n^2}{(1+n)^2} \xi \right) \left(\frac{1+2n \cos(s_1 \xi) + n^2}{(1+n)^2} \right) \cong U_\gamma^2(\xi);$$

$$\tilde{\Gamma}_0(\mu) = \frac{U_\Gamma \left(\frac{(1+n)^2}{1+n^2} \mu \right) + \frac{n}{1+n^2} \cdot \left[U_\Gamma \left(\frac{(1+n)^2}{1+n^2} |\mu + s_1| \right) + U_\Gamma \left(\frac{(1+n)^2}{1+n^2} |\mu - s_1| \right) \right]}{1 + 2n/(1+n^2) \cdot U_\Gamma \left((1+n)^2 s_1 / (1+n^2) \right)} \cong U_\Gamma(\mu);$$

$$\Phi(0, \eta) = \frac{1+n^2}{(1+n)^2} U_\Phi \left(\frac{1+n^2}{(1+n)^2} \eta \right) + \frac{n}{(1+n)^2} \cdot \left[\begin{aligned} & \left(1 + \frac{(1+n)^2 s_1}{\pi(1+n^2)} \right)^2 U_\Phi \left(\eta \left(\frac{1+n^2}{(1+n)^2} + \frac{s_1}{\pi} \right) \right) + \\ & + \left(1 - \frac{(1+n)^2 s_1}{\pi(1+n^2)} \right)^2 U_\Phi \left(\eta \left| \frac{1+n^2}{(1+n)^2} - \frac{s_1}{\pi} \right| \right) - \\ & - 2 \left(\frac{(1+n)^2 s_1}{\pi(1+n^2)} \right)^2 U_\Phi \left(\frac{s_1 \eta}{\pi} \right) \end{aligned} \right] \cong U_\Phi(\eta).$$

В этом случае функции (18,19,21) математически переходят в (1.28,37-38) при любом s_1 . В общем случае, когда $S_{1,2}(\chi)$ неодинаковы по форме и выполнены условия $\lambda, \kappa \ll 1$ или $(1-\lambda), (1-\kappa) \ll 1$, будет такой же переход, но проявится он численно.

Примеры приведены на рис.8, где слева при $\lambda = 0,95, \kappa = 0,99, s_1 = 2,5; 3; 4$ функции (18,19,21) сравниваются с универсальными функциями (1.28,37-38), отвечающими компактному спектру, а справа для одного такого набора параметров $\lambda = 0,95, \kappa = 0,99, s_1 = 3$ функции (18,19,21) сравниваются с точными функциями $|\gamma_0(\xi)|, \tilde{\Gamma}_0(\mu)$,

$\Phi(0, \eta)$ для четырех спектров $S_{1-4}(\chi)$, рассмотренных в разделе 2.3. Видно, что действительно функции (18,19,21) близки (I.28,37-38) при $(1-\lambda), (1-\kappa) \ll 1$, независимо от значений s_1 . А также видна адекватность приближений (18,19,21) точным функциям в рассматриваемом переходном режиме, по крайней мере, для спектров $S_{1-4}(\chi)$.

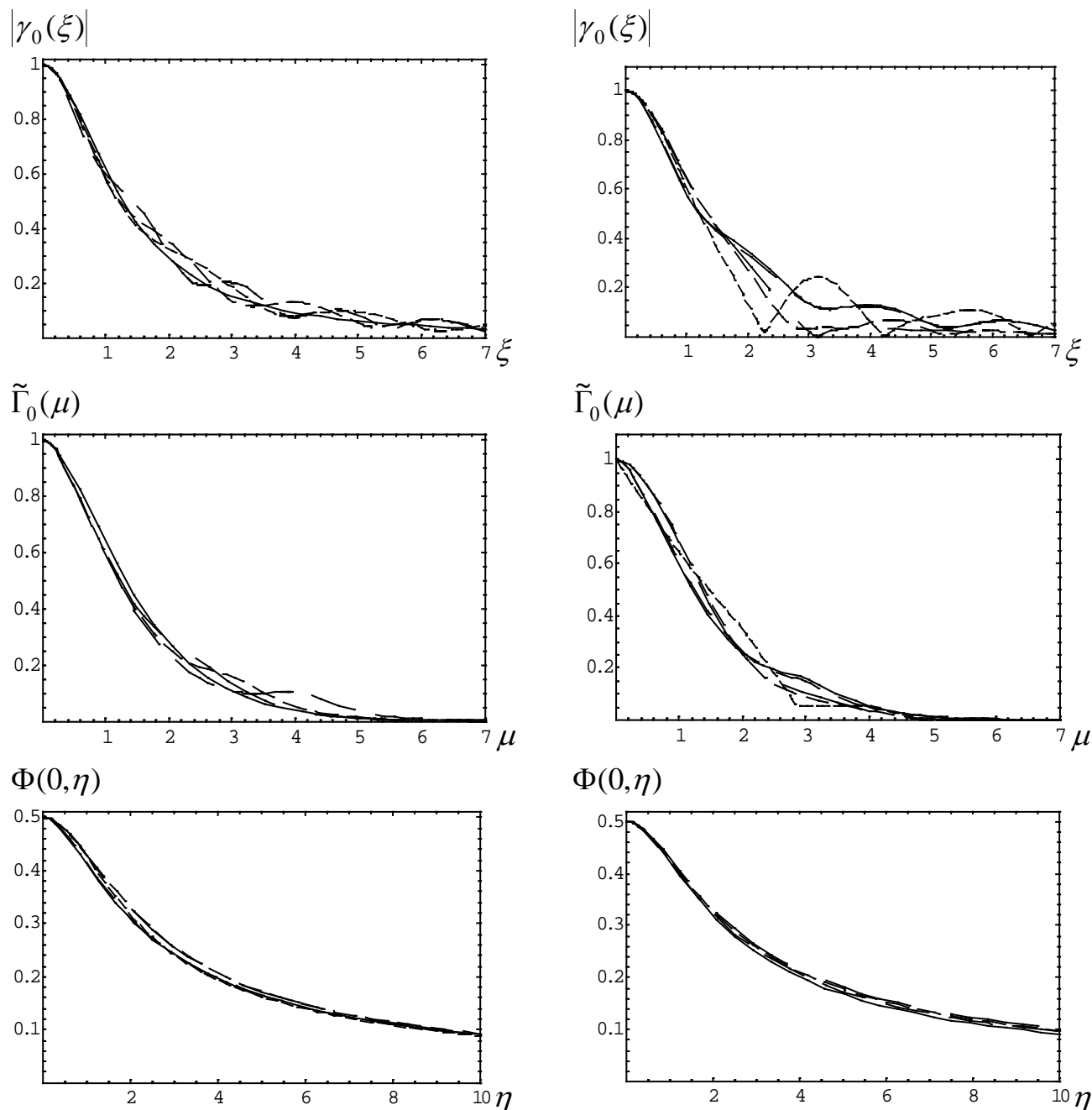


Рис.8. Слева: графики функций (18,19,21) при $\lambda = 0,95$, $\kappa = 0,99$ и $s_1 = 2,5$ (кривые с самыми длинными штрихами), $s_1 = 3$ (короткие штрихи), $s_1 = 4$ (штрихи промежуточной длины). Сплошными линиями приведены функции (I.28,37-38) для одногорбого экспоненциального спектра.

Справа: графики точных функций $|\gamma_0(\xi)$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0, \eta)$ для спектров $S_{1-4}(\chi)$ при $\lambda = 0,95$, $\kappa = 0,99$, $s_1 = 3$ (штриховые кривые; длина штрихов возрастает).

тает по порядку нумерации спектров – **1),2),3),4)**). Сплошными линиями приведены функции (18,19,21) при тех же параметрах (одна из левых кривых).

Суммируем сказанное о переходном режиме между диахромными и монохромными спектрами в определении диахромного спектра. Диахромный спектр – это спектр, у которого части $S_{1,2}(\chi)$ компактны (в собственно-нормированной форме), а параметры λ , κ и s_1 , их связывающие, в трехмерной области допустимых значений $0 < \lambda, \kappa < 1; s_1 \geq 0$ занимают область, ограниченную полубесконечной цилиндрической поверхностью параллельной оси s_1 с сечением в плоскости (λ, κ) , соответствующим условиям (23) (рис.6), и поверхностью $s_1 = \pi\sigma$ снизу. Переход диахромных спектров в компактные происходит в углах области (23) при любых s_1 и между границами $s_1 = \pi\sigma/2$ и $s_1 = \pi\sigma$. Напомним, что согласно (20) $\sigma = \lambda^2/\kappa + (1 - \lambda)^2/(1 - \kappa)$.

2.6. Сравнение точных нормированных статистических характеристик, отвечающих асимметричным двугорбым спектрам с симметричными горбами, с обобщенными функциями для диахромных спектров

Покажем применимость функций (18,19,21) для аппроксимации точных функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0, \eta)$ процессов со спектрами $S_{1-4}(\chi)$ из раздела 2.3.

Мы хотим убедиться, что нормированные статистические характеристики процессов, которые мы отнесли к диахромным, действительно зависят не от всех особенностей спектров $S(\chi)$, а лишь от их геометрических параметров λ , κ , s_1 , смысл которых был обсужден выше. Из рассмотренных в разделе 2.3 спектров **1)-4)** для тех из них, части $S_{1,2}(\chi)$ которых не перекрываются (спектры **1)-2)**), λ , κ , s_1 в (18,19,21) возьмем равными λ , κ и $s_1 = s$ соответствующих формул. А для перекрывающихся $S_{1,2}(\chi)$ (спектры (13,16)) будем подставлять в (18,19,21) λ , κ и s_1 , рассчитанные при различном разбиении спектра на части. Спектры $S_{1-4}(\chi)$ состоят из компактных частей, поэтому их соответствие критериям (22) сводится к критериям (23,23*).

Сначала посмотрим, как зависят функции (18,19,21) от параметров λ , κ и s_1 . На рис.9 показаны функции (18,19,21) s_1 для нескольких наборов λ и κ , дающих качественно различные спектры. Для некоторых из них далее (18,19,21) сравним с точными функциями. Зависимость (18,19,21) от s_1 будет исследована ниже (рис.20). Мы видим из рис.9 и заметную зависимость функций (18,19,21) от λ и κ и отличие их от функций компактного спектра (I.28,37-38).

Первый график рис.9 показывает роль параметров λ и κ в поведении функции $|\gamma_0(\xi)|$ - Фурье-образе $S(\chi)$ (как Фурье-образ $|\gamma_0(\xi)|$ содержит ту же информацию о случайном процессе, что и $S(\chi)$; и уравнения (I.14,16) выражают $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0, \eta)$

и через $|\gamma_0(\xi)|$). В случае компактных спектров в области $|\gamma_0(\xi)| \geq 0,3$ (как показано в ч.1, наиболее важной для остальных статистических характеристик) $|\gamma_0(\xi)|$ лишь монотонно спадает по определенному закону. У диахромных спектров $|\gamma_0(\xi)|$ в указанной области кроме максимума в нуле имеет еще экстремумы, один максимум и один минимум. Параметр s_1 определяет положение по оси абсцисс этих экстремумов - $\xi_{\min} \cong \pi/s_1$; $\xi_{\max} \cong 2\pi/s_1$ (см. также рис.20,35 далее), а λ и κ - ширины основного и второго максимумов, глубину минимума и высоту второго максимума.

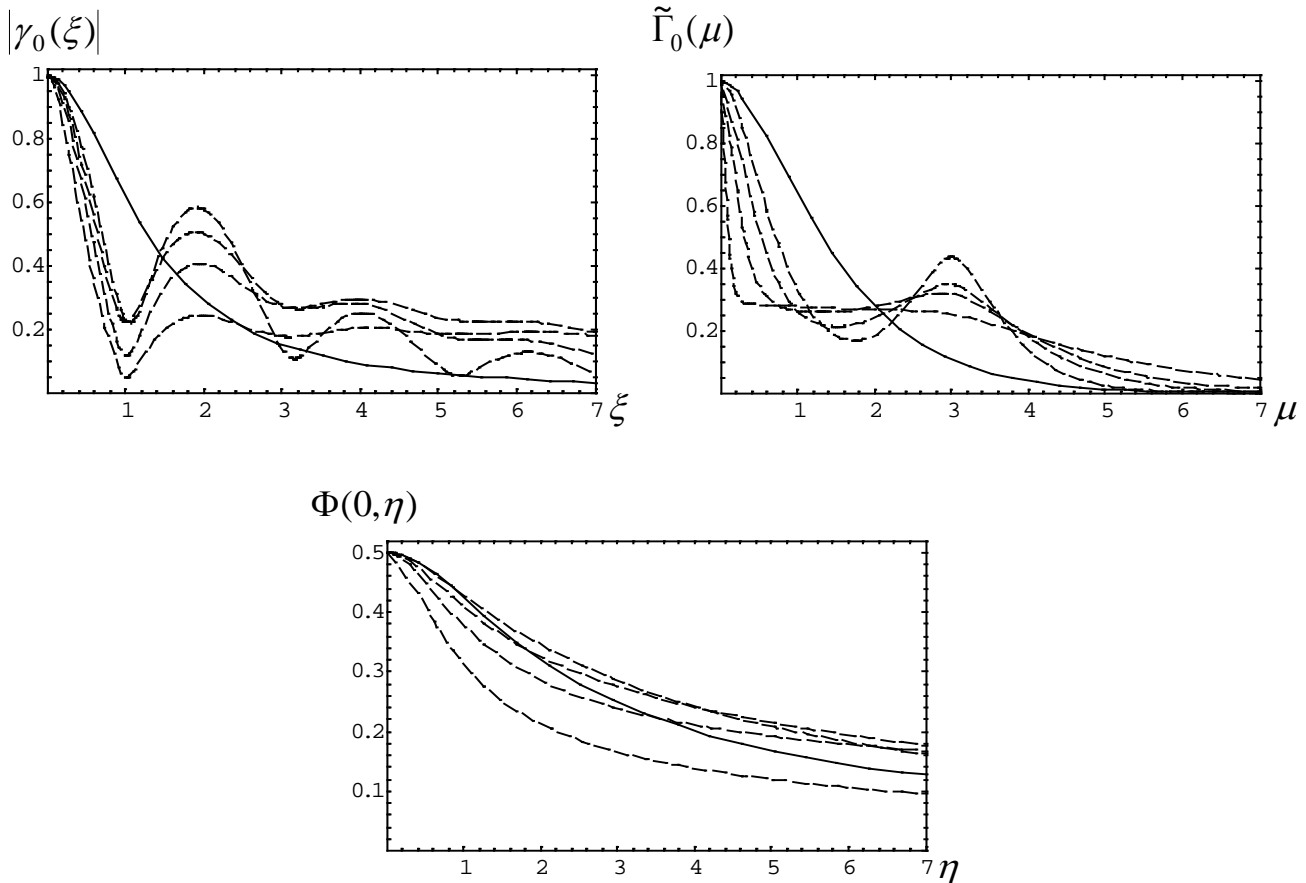


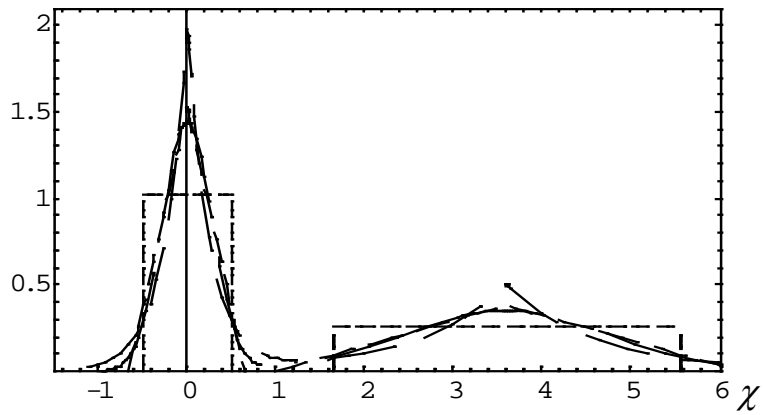
Рис.9. Графики функций (18,19,21) для λ и κ (0,5 и 0,8), (0,625 и 0,75), (0,65 и 0,25), (0,8 и 0,25) (пунктирные кривые). Везде $s_1 = 3$. Сплошные линии - функции (1.28,37-38) для одногорбого экспоненциального спектра.

На рис.10 приведены спектры **1)-4)**, для которых далее сравниваются функции (18,19,21) и точные характеристики. Их λ и κ близки рис.9, а s удовлетворяют условиям (11-12). У спектров **3)-4)** λ и κ соответствуют разбиению спектра на части в минимуме между горбами. Для всех спектров рис.10 выполнены критерии некомпактности спектра $s_{0,5} > \pi/2$ и/или $s_{0,9} > \pi$, но не для всех критерии диахромности частей (22). Параметры s_1 полагались равными s или рассчитывались по правилу (33) (см. ниже).

Рис.10 показывает, что собственно-нормированные двугорбые диахромные спектры при равенстве параметров λ , κ и s_1 одинаково локализованы по обеим

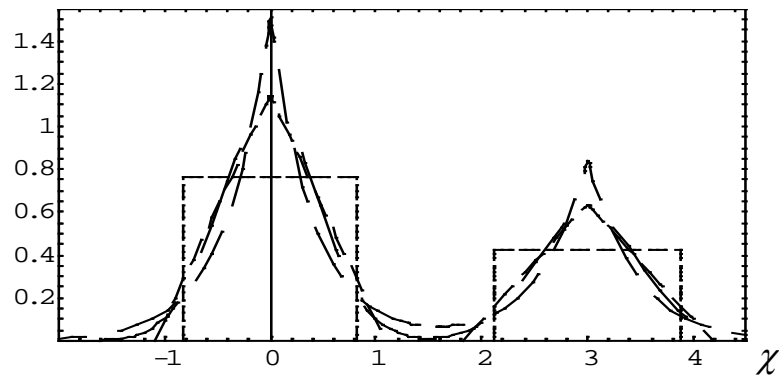
осям, и в целом и каждой частью, а части примерно одинаково соотносятся по размерам. То есть λ , κ и s_1 в прямом смысле отражают основные черты таких спектров.

$S(\chi)$



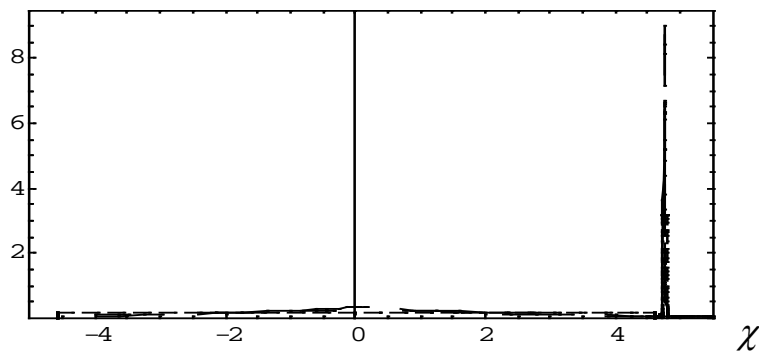
(a)

$S(\chi)$



(b)

$S(\chi)$



(B)

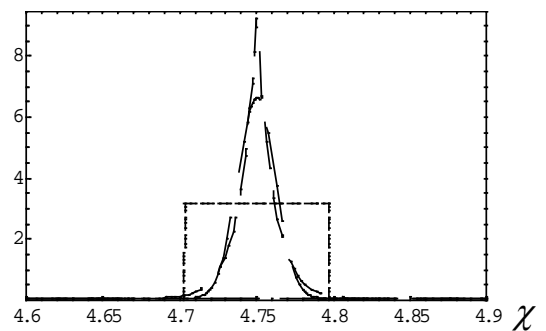
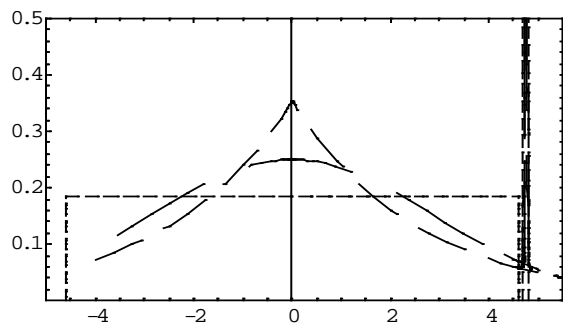


Рис.10. Спектры для сравнения (18,19,21) и точных статистических характеристик. У спектров **(а)** параметры равны $\lambda = 0,5, \kappa = 0,8, s = 3,6 = 0,73\pi\sigma$ (λ и κ совпадают с одним из случаев рис.9, а s больше для выполнения условий (11,12)). Взяты все четыре типа спектров **1)-4)**. При этом полагаем $s_1 = s$.

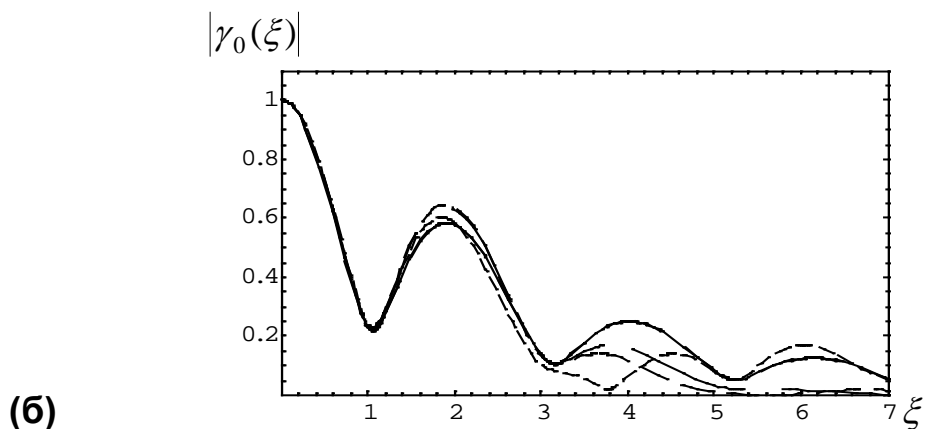
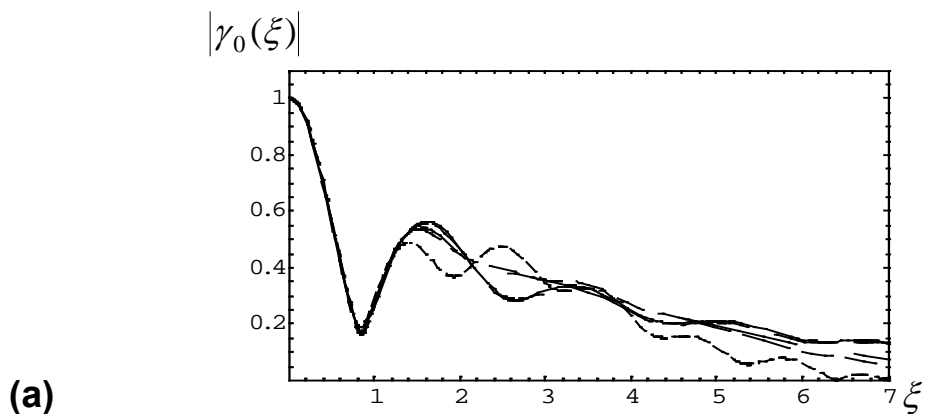
У спектров **(б)** $\lambda = 0,625, \kappa = 0,75, s = 3 = 0,88\pi\sigma$, как на рис.9. Тоже присутствуют все четыре типа спектра **1)-4)**. Для **1)-2)** $s_1 = s$, для **3)-4)** $s_1 \cong 2,9$.

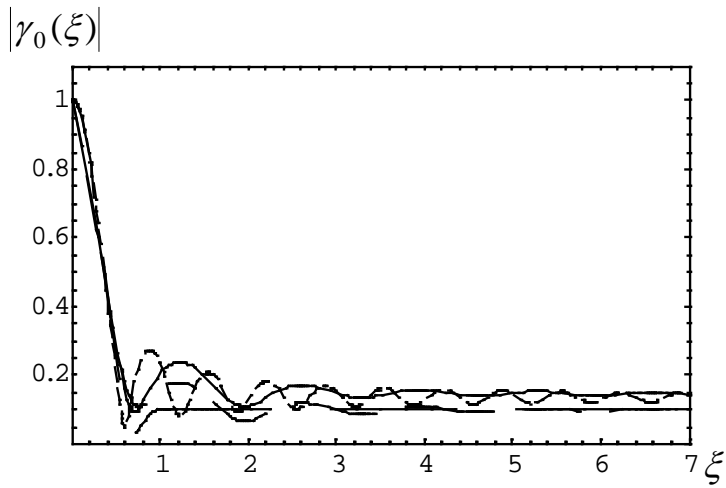
Спектры **(в)** соответствуют $\lambda = 0,85, \kappa = 0,25, s = 4,75 = 0,52\pi\sigma$ (λ и κ близки рис.9, а s больше для выполнения (11)). Используются спектры **1), 3)** и **4)**. Показан общий вид спектров и крупным планом оба горба по отдельности. Для **1)** $s_1 = s$, для **3)** $s_1 \cong 4,3$, для **4)** $s_1 \cong 4,5$.

Спектры (б) - диахромные, удовлетворяют условиям (23,23*); спектры (а) – пограничные; спектры (в) - не диахромные. Длина штрихов кривых на графиках возрастает по порядку **1), 2), 3), 4)**. Разбиение всех спектров на $S_{1,2}(\chi)$ предполагается в минимуме между горбами.

Рис.10 показывает, что собственно-нормированные двугорбые диахромные спектры при равенстве параметров λ, κ и s_1 одинаково локализованы по обеим осям, и в целом и каждой частью, а части примерно одинаково соотносятся по размерам. То есть λ, κ и s_1 в прямом смысле отражают основные черты таких спектров.

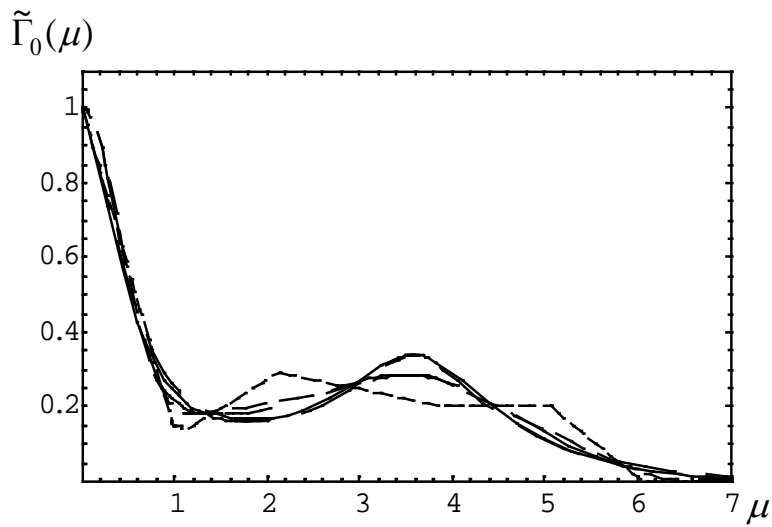
На рис.11-13 для спектров рис.10 сравниваются точные функции $|\gamma_0(\xi)|$ с приближенными функциями (18), функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ с (19) и $\Phi(0, \eta)$ с (21).



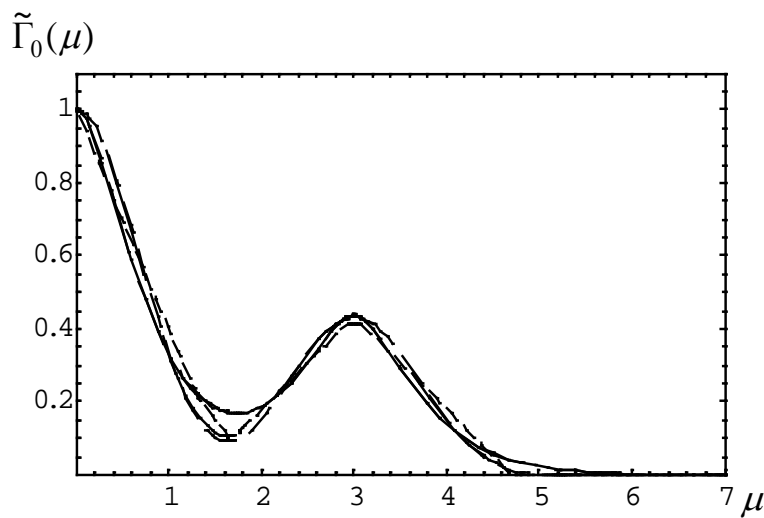


(B)

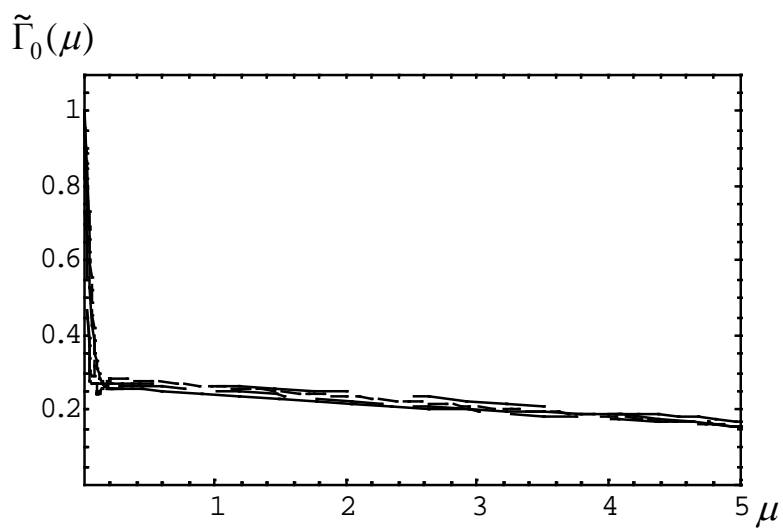
Рис.11. Сравнение точных функций $|\gamma_0(\xi)|$ с приближением (18) для спектров рис.10. Сплошными линиями приведены функции (18) со значениями λ , κ и s_1 из подписей к рис.10. Остальные типы линий соответствуют рис.10.



(a)

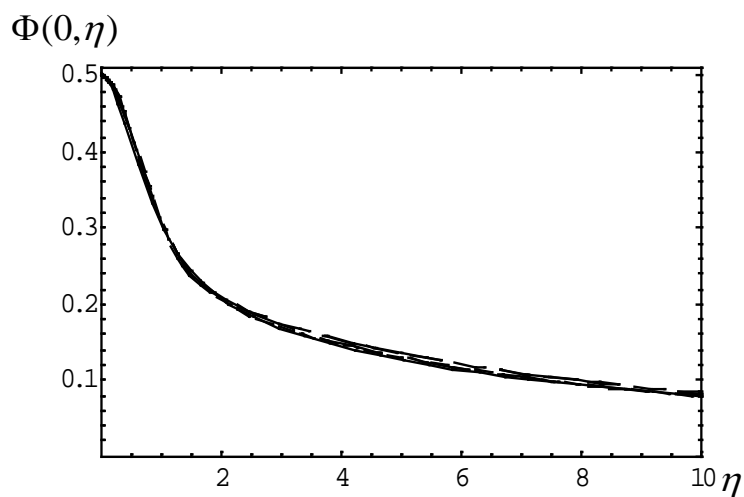


(б)

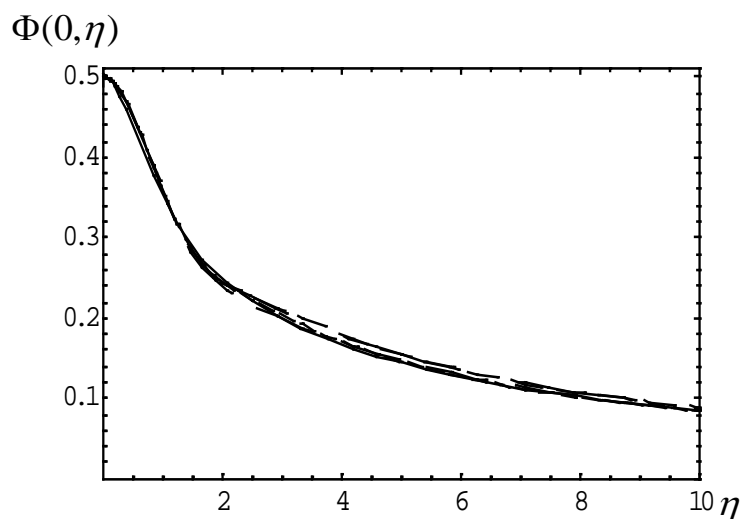


(B)

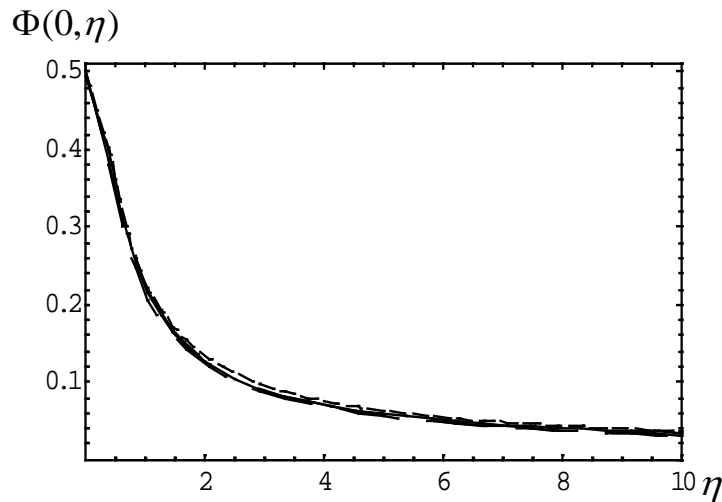
Рис.12. Сравнение точных функций $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ с приближением (19) для спектров рис.10. Сплошными линиями приведены функции (19) со значениями λ , κ и s_1 из подписей к рис.10. Остальные типы линий соответствуют рис.10.



(a)



(б)



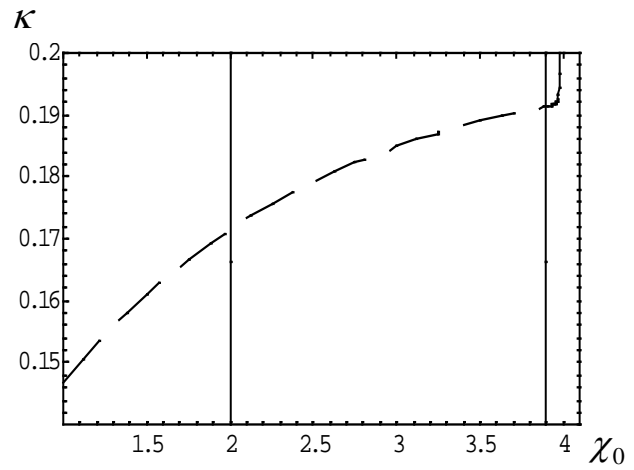
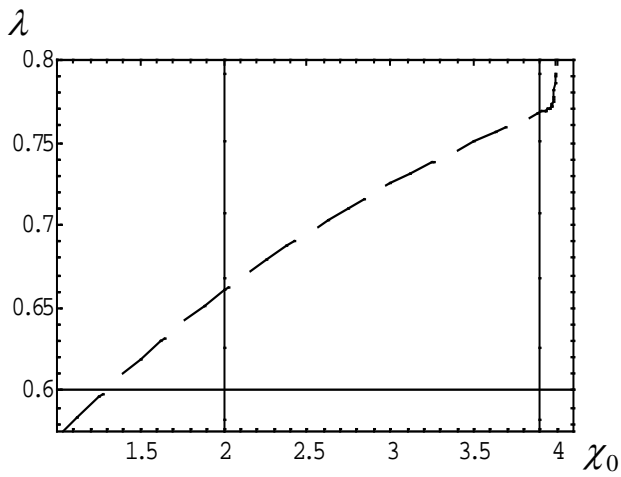
(в)

Рис.13. Сравнение точных функций $\Phi(0, \eta)$ с приближением (21) для спектров рис.10. Сплошными линиями приведены функции (21) со значениями λ , κ и s_1 из подписей к рис.10. Остальные типы линий соответствуют рис.10.

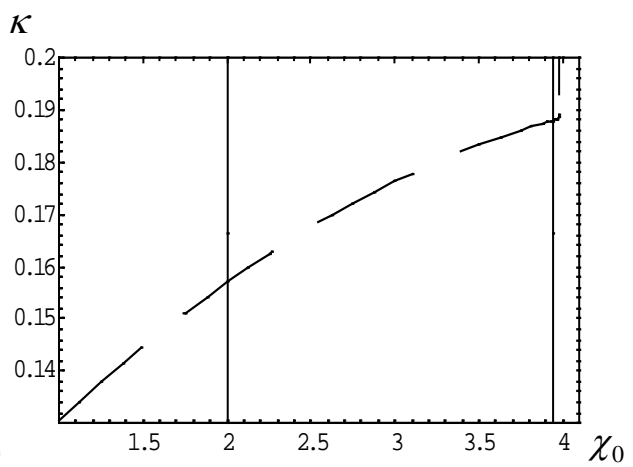
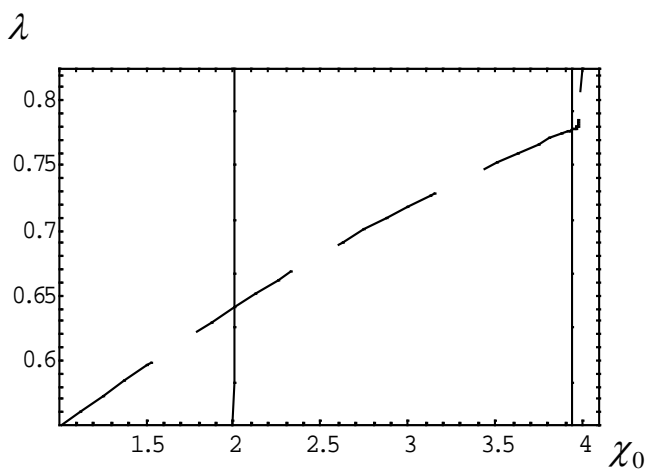
Из рис.11-13 видно, что (18,19,21) хорошо аппроксимируют точные статистические характеристики в случаях рассмотренных четырех типов двугорбых спектров, несмотря на то, что спектр с рис.10в не удовлетворяет критериям диахромности (22). Деление на части $S_{1,2}(\chi)$ спектров **1),2)** было очевидным, соответствующим формулам в разделе 2.3. Выбор деления спектров **3),4)** на части не так очевиден. В случаях диахромных спектров (а,б) рис.10, когда между горбами имеется провал почти до нуля, неоднозначность деления не важна для точек внутри провала - λ и κ меняются мало, что не сказывается на точности аппроксимации в пределах точности, которую мы видим на рис.11-13. По-другому обстоит дело с недиахромными спектрами с рис.10в, которые представляют собой высокие узкие пики на фоне широких боковых пьедесталов и на удовлетворяющие (22) части не делятся. Выбор $S_{1,2}(\chi)$ для них не очевиден и сильно влияет на качество аппроксимации. Для рис.11-13 мы делили эти спектры в слабо выраженном минимуме на пьедестале, что дало приемлемую аппроксимацию. Но если раздел поместить, например, посередине между вершинами, качество аппроксимации заметно ухудшится. На рис.14-15 это показано для аналогичных недиахромных спектров с сильным нарушением критериев (22) (см. рис.6).

Мы взяли спектры (13,16) из двух экспонент и гауссоид при $\tilde{\lambda} = 0,9$, $\tilde{\kappa} = 0,2$, $\tilde{\kappa} = 0,77$, $s = 4$. Значения λ и κ в зависимости от координаты точки деления χ_0 этих спектров на $S_{1,2}(\chi)$ ($s/4 \leq \chi_0 \leq s$) приведены на рис.14. Точка $\chi = 0$, как и раньше, помещена в вершину левой (пьедестальной) экспоненты или гауссоиды.

Для этих спектров на рис.15 сравниваются точные функции с приближениями (18,19,21) при четырех наборах λ и κ - при $\chi_0 = s/2$, в минимуме между вершинами $S_{1,2}(\chi)$ (правая вертикальная черта на рис.14) и еще в двух точках правее минимума. Два последних варианта взяты как попытка получить лучше совпадение точных и приближенных функций. Для не приведенных на рис.15 функций картины похожи.

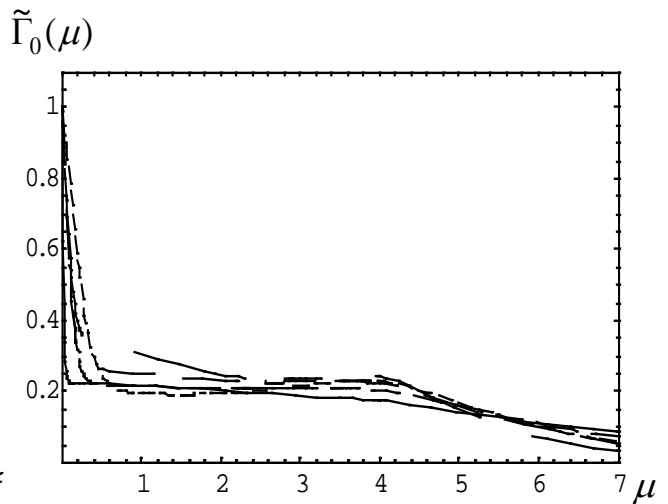
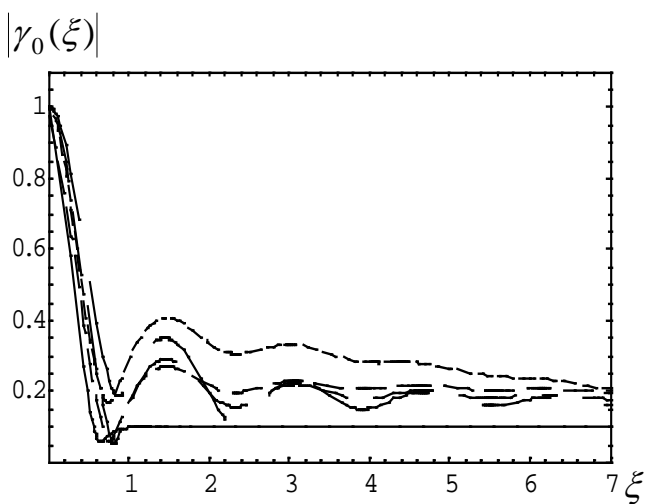


(a)



(б)

Рис.14. Значения λ и κ для спектров (13) (а) и (16) (б) с $\tilde{\lambda} = 0,9$, $\tilde{\kappa} = 0,2$, $\tilde{\kappa} \approx 0,77$ ($\tilde{\kappa} = 0,775$ для (а) и $\tilde{\kappa} = 0,766$ для (б)) и $s = 4$ в зависимости от координаты χ_0 точки деления спектров на $S_{1,2}(\chi)$. Вертикальные линии пересекают графики в точках $\chi_0 = s/2$ - посередине между вершинами и в точках слабо выраженных минимумов между ними.



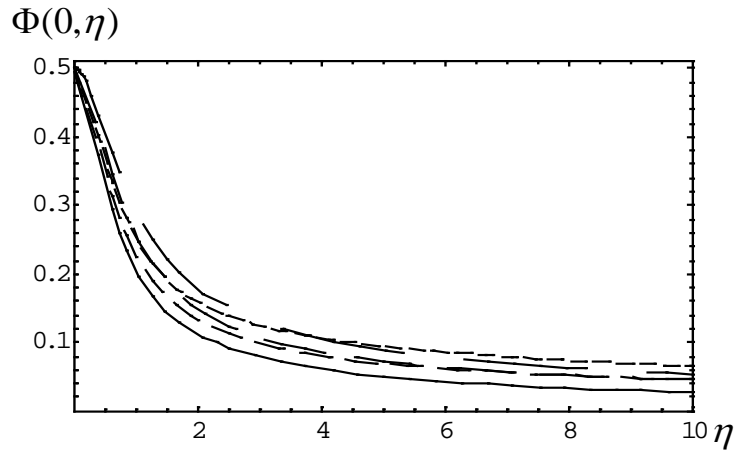


Рис.15. Сравнение точных функций $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ для спектра (13) и $|\gamma_0(\xi)|$, $\Phi(0, \eta)$ для спектра (16) при $\tilde{\lambda} = 0,9$, $\tilde{\kappa} = 0,2$, $\tilde{\kappa} \approx 0,77$ и $s = 4$ (сплошные линии) с функциями (18,19,21) при четырех наборах λ и κ с рис.14 для этих спектров: χ_0 посередине между вершинами горбов (штриховые кривые с короткими штрихами), в минимумах между вершинами – правые вертикальные линии на рис.14 (штрихи средней длины) и в двух точках правее этих минимумов (длинные штрихи; для точек правее штрихи длиннее). Везде $s_1 = s$.

Из рис.15 видно, что все четыре приближенные кривые на всех трех графиках заметно отличаются от точных функций. Лучшие приближения соответствуют разбиению спектров на части в минимумах между вершинами. Даже небольшой сдвиг вправо или влево от минимума ухудшает приближение. Это не значит, что нельзя в каждом примере подобрать такую пару λ и κ , чтобы точные и приближенные функции совпали лучше, но эта пара уже не будет принадлежать графикам рис.14, т.е. спектрам. Примеры на рис.14-15 показывают, что для спектров, не разбивающихся на части, удовлетворяющие критериям (22), и аппроксимация статистических характеристик функциями (18,19,21) неудачна, и выбор λ и κ сильно влияет на точность приближения. Далее мы покажем, что для диахромных спектров нет такой зависимости качества приближения от места разбиения спектра на части; пока они удовлетворяют (22); и тогда, когда λ , κ и s_1 от этого почти не зависят, и когда зависят существенно.

Итак, проанализировав качество приближения нормированных статистических характеристик процессов со спектрами **1)-4)** функциями (18,19,21), мы получили прямую его зависимость от выполнения критериев компактности $S_{1,2}(\chi)$ (22). Для спектров рис.10б критерии выполняются, и приближения (18,19,21) хорошие, как и для спектров рис.10а, чьи параметры близки границе критериев. А вот спектры рис.10в (точка (в) на рис.6) и спектры рис.15 (большие точки на рис.6) не делятся на удовлетворяющие (22) части. В итоге для них и качество приближения заметно хуже и существенно его зависимость от способа разбиения спектра (при этом λ и κ сильно меняются).

Таким образом, для асимметричных двугорбых спектров с симметричными или почти симметричными горбами мы показали и факт подобия одноименных статисти-

ческих характеристик, и пригодность функций (18,19,21) в качестве универсальных для функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0,\eta)$, и верность критериев диахромности таких спектров. Перейдем к рассмотрению ситуаций, когда и спектры и их части асимметричны.

2.7. Сравнение точных нормированных статистических характеристик, отвечающих асимметричным двугорбым спектрам с асимметричными горбами, с обобщенными функциями для диахромных спектров

Рассмотрим два примера несимметричных двугорбых спектров с несимметричными частями $S_{1,2}(\chi)$, для которых функции $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и отчасти $\Phi(0,\eta)$ рассчитываются аналитически, – спектры из двух неравносторонних треугольных спектров и двух несимметричных экспоненциальных спектров. Это позволит в самом общем случае исследовать подобие статистических характеристик процессов с диахромными спектрами и выяснить, как считать параметр s_1 таких спектров, т.е. позволит обобщить для произвольных спектров способ расчета s_1 , предложенный в [5] для симметричных двугорбых спектров с несимметричными частями $S_{1,2}(\chi)$.

(1) Спектр $S_{2nr}(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi)$, состоящий из двух различных асимметричных треугольных спектров $S_{1,2}(\chi)$ – рис.16. Здесь

$$S_1(\chi) = A_1 \begin{cases} 1 - \alpha|\chi|, & -1/\alpha \leq \chi \leq 0 \\ 1 - (\alpha/\varepsilon_1)|\chi|, & 0 \leq \chi \leq \varepsilon_1/\alpha \end{cases}; \quad S_2(\chi) = A_2 \begin{cases} 1 - (\beta/\varepsilon_2)|\chi - s|, & -\varepsilon_2/\beta \leq \chi - s \leq 0 \\ 1 - \beta|\chi - s|, & 0 \leq \chi - s \leq 1/\beta \end{cases}. \quad (24)$$

Опять начало отсчета χ помещено в вершину первого треугольника; s - координата вершины второго. Считаем треугольники неперекрывающимися, т.е. $s \geq \varepsilon_1/\alpha + \varepsilon_2/\beta$. Как и у спектра **2)** в разделе 2.3, s в (24) - параметр семейства спектров, который не должен (и не будет в общем случае) совпадать с s_1 в функциях (18,19,21), а $\varepsilon_{1,2} \geq 0$ - параметры, при $\varepsilon_{1,2} \neq 1$ характеризующие асимметрию треугольников.

Из условия нормировки спектра (I.17-18) имеем

$$\begin{cases} A_1^2(1 + \varepsilon_1)/\alpha + A_2^2(1 + \varepsilon_2)/\beta = 12/\pi \\ A_1(1 + \varepsilon_1)/\alpha + A_2(1 + \varepsilon_2)/\beta = 4 \end{cases},$$

откуда, используя λ из (2) и κ из (4), получаем

$$A_1 = \frac{3\kappa}{\pi\lambda}; \quad A_2 = \frac{3(1-\kappa)}{\pi(1-\lambda)}; \quad \alpha = \frac{3\kappa(1+\varepsilon_1)}{4\pi\lambda^2}; \quad \beta = \frac{3(1-\kappa)(1+\varepsilon_2)}{4\pi(1-\lambda)^2}.$$

Спектр $S_{2nr}(\chi)$ полностью определяется параметрами λ , κ и ε_1 с ε_2 ; он переходит в спектр **2)** $S_{2tr}(\chi)$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Условие того, что треугольники (24) не перекрываются теперь принимает вид (обобщение условия (12))

$$s \geq \frac{\varepsilon_1}{\alpha} + \frac{\varepsilon_2}{\beta} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\varepsilon_1 \lambda^2}{\kappa(1+\varepsilon_1)} + \frac{\varepsilon_2(1-\lambda)^2}{(1-\kappa)(1+\varepsilon_2)} \right). \quad (25)$$

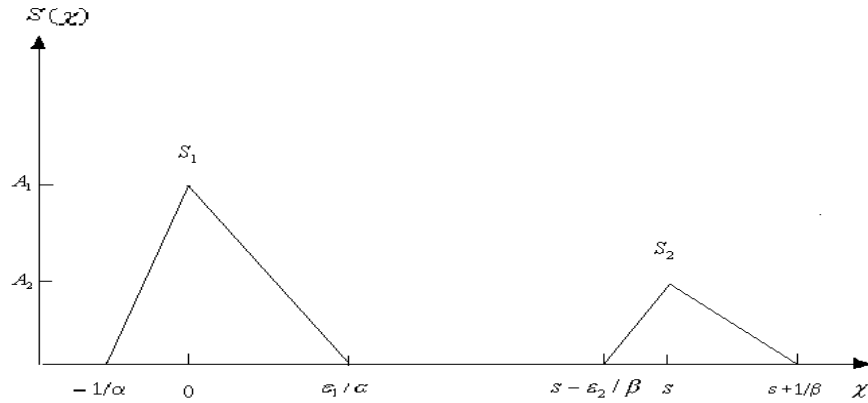


Рис.16. Спектр $S_{2ntr}(\chi)$ из двух неравносторонних треугольных спектров.

Используя $|\gamma_0^{tr}(\xi, \varepsilon)|$ из табл.1.1 для неравностороннего треугольного спектра (у действительной и неотрицательной функции $\gamma_0^{tr}(\xi, 1) = \gamma_0^{tr}(\xi)$ модуль пускаем), получим для функции $|\gamma_0^{2ntr}(\xi)|$, отвечающей спектру (24),

$$|\gamma_0^{2ntr}(\xi)| = \sqrt{\lambda^2 |\gamma_0^{tr}(\lambda^2 \xi / \kappa, \varepsilon_1)|^2 + (1-\lambda)^2 |\gamma_0^{tr}((1-\lambda)^2 \xi / (1-\kappa), \varepsilon_2)|^2 + 2\lambda(1-\lambda) f_1 f_2 \cos(s\xi) + \frac{3\kappa(1-\kappa)}{\pi \xi \lambda (1-\lambda)} \left\{ \sin(s\xi) [\lambda^2 f_1 f_{22} / \kappa + (1-\lambda)^2 f_2 f_{11} / (1-\kappa)] - 1,5 \cos(s\xi) f_{11} f_{22} / \pi / \xi \right\}}, \quad (26)$$

где введены функции

$$f_1(\xi) = \frac{4\alpha^2}{\xi^2 \varepsilon_1} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\varepsilon_1 \xi}{2\alpha}\right) + \varepsilon_1 \sin^2\left(\frac{\xi}{2\alpha}\right)}{1 + \varepsilon_1} = \frac{\gamma_0^{tr}\left(\frac{2\lambda^2 \xi}{\kappa(1+\varepsilon_1)}\right) + \varepsilon_1 \cdot \gamma_0^{tr}\left(\frac{2\lambda^2 \xi \varepsilon_1}{\kappa(1+\varepsilon_1)}\right)}{1 + \varepsilon_1};$$

$$f_2(\xi) = \frac{4\beta^2}{\xi^2 \varepsilon_2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\varepsilon_2 \xi}{2\beta}\right) + \varepsilon_2 \sin^2\left(\frac{\xi}{2\beta}\right)}{1 + \varepsilon_2} = \frac{\gamma_0^{tr}\left(\frac{(1-\lambda)^2 \xi}{(1-\kappa)(1+\varepsilon_2)}\right) + \varepsilon_2 \cdot \gamma_0^{tr}\left(\frac{(1-\lambda)^2 \xi \varepsilon_2}{(1-\kappa)(1+\varepsilon_2)}\right)}{1 + \varepsilon_2};$$

$$f_{11}(\xi) = \alpha(\varepsilon_1 \sin(\xi/\alpha) - \sin(\xi \varepsilon_1 / \alpha)) / \xi / \varepsilon_1; \quad f_{22}(\xi) = \beta(\varepsilon_2 \sin(\xi/\beta) - \sin(\xi \varepsilon_2 / \beta)) / \xi / \varepsilon_2.$$

В частном случае $\lambda = \kappa = 0,5$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, и, следовательно, $\beta = \alpha = 1,5(1 + \varepsilon) / \pi$,

$A = 3/\pi$ (случай симметричного спектра из двух неравносторонних треугольных спектров; в [5] не рассматривался), эти выражения примут вид

$$|\gamma_0^{2ntrs}(\xi)| = \sqrt{0,5 |\gamma_0^{tr}(\xi/2, \varepsilon)|^2 + 0,5 f_1^2 \cos(s\xi) + 3 f_{11} \{f_1 \sin(s\xi) - 1,5 f_{11} \cos(s\xi) / \pi / \xi\} / \pi / \xi},$$

где теперь

$$f_1(\xi) = \frac{4\alpha^2}{\xi^2 \varepsilon} \cdot \frac{\sin^2(0,5\varepsilon\xi/\alpha) + \varepsilon \cdot \sin^2(0,5\xi/\alpha)}{1 + \varepsilon} = \frac{\gamma_0^{tr}(\xi/(1+\varepsilon)) + \varepsilon \cdot \gamma_0^{tr}(\xi\varepsilon/(1+\varepsilon))}{1 + \varepsilon},$$

$$f_{11}(\xi) = \frac{\alpha}{\xi\varepsilon} \left(\varepsilon \sin\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) - \sin\left(\frac{\xi\varepsilon}{\alpha}\right) \right) = \frac{3(1+\varepsilon)}{2\pi\varepsilon\xi} \left(\varepsilon \sin\left(\frac{2\pi\xi}{3(1+\varepsilon)}\right) - \sin\left(\frac{2\pi\varepsilon\xi}{3(1+\varepsilon)}\right) \right).$$

Другой частный случай – два прямоугольно-треугольных спектра, имеет 4 варианта взаимного расположения прямых углов – когда оба прямых угла в центре спектра ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ в (24)), оба справа ($\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \infty, \beta = \infty, \varepsilon_2/\beta = 4\pi(1-\lambda)^2/(1-\kappa)/3$), оба слева ($\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 = \infty, \alpha = \infty, \varepsilon_1/\alpha = 4\pi\lambda^2/\kappa/3$) и оба снаружи спектра ($\varepsilon_1 = \infty, \alpha = \infty, \varepsilon_1/\alpha = 4\pi\lambda^2/\kappa/3, \varepsilon_2 = \infty, \beta = \infty, \varepsilon_2/\beta = 4\pi(1-\lambda)^2/(1-\kappa)/3$). Для этих спектров

$$|\gamma_0^{2nrr}(\xi)| = \sqrt{\lambda^2 |\gamma_0^{rr}(\lambda^2 \xi / \kappa)|^2 + (1-\lambda)^2 |\gamma_0^{rr}((1-\lambda)^2 \xi / (1-\kappa))|^2 + 2\lambda(1-\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \cos(s\xi) \left[\gamma_0^{tr}(2\lambda^2 \xi / \kappa) \cdot \gamma_0^{tr}(2(1-\lambda)^2 \xi / (1-\kappa)) - \right. \\ \left. - 4\bar{f}(\lambda^2 \xi / \kappa) \cdot \bar{f}((1-\lambda)^2 \xi / (1-\kappa)) \right] + \\ \left. + 2\sin(s\xi) \left[\pm \gamma_0^{tr}(2\lambda^2 \xi / \kappa) \cdot \bar{f}((1-\lambda)^2 \xi / (1-\kappa)) \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \gamma_0^{tr}(2(1-\lambda)^2 \xi / (1-\kappa)) \cdot \bar{f}(\lambda^2 \xi / \kappa) \right] \right\}},$$

где два «-» в последней квадратной скобке соответствуют первому варианту, два «+» - последнему, первый «+», второй «-» - второму, первый «-», второй «+» - третьему.

Здесь $|\gamma_0^{rr}(x)| = \sqrt{\sin^2 z + z^2 - z \sin(2z)}/z^2$, $z = 2\pi x/3$ - функция (I.13) для прямоугольно-треугольного спектра, приведенная в [6, стр.24], а функция $\bar{f}(x) = (1 - \sin z/z)/z$, $z = 4\pi x/3$.

Для функции $\tilde{\Gamma}_0^{2nrr}(\mu)$ спектра (24), используя $\tilde{\Gamma}_0^{tr}(\mu, \varepsilon)$, отвечающее неравнобедренному треугольному спектру (табл.I.2), получаем

$$\tilde{\Gamma}_0^{2nrr}(\mu) = \kappa \cdot \tilde{\Gamma}_0^{tr}(\kappa\mu/\lambda^2, \varepsilon_1) + (1-\kappa) \cdot \tilde{\Gamma}_0^{tr}((1-\kappa)\mu/(1-\lambda)^2, \varepsilon_2) + 2\lambda(1-\lambda) \cdot \mathcal{G}(\mu-s), \quad (27)$$

где $\mathcal{G}(\mu-s)$ - интеграл перекрытия $S_{1,2}(\chi)$ в (I.14). Для произвольных $\varepsilon_{1,2}$ он равен

$$\mathcal{G}(t) = \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{512\varepsilon_1\varepsilon_2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^3 \left(\frac{\kappa(1-\kappa)}{\lambda^2(1-\lambda)^2} \right)^2 \left(\begin{array}{l} \left\{ (t + \tilde{\Delta}_+)^3 + \tilde{\Delta}_- [\tilde{\Delta}_+(3t + \tilde{\Delta}_+) + 2\Delta_*] \theta(t, -\tilde{\Delta}_+, -\tilde{\Delta}_1) + \right. \\ \left. + (t + \tilde{\Delta}_+)^3 - \tilde{\Delta}_- [\tilde{\Delta}_+(3t + \tilde{\Delta}_+) + 2\Delta_*] \theta(t, -\tilde{\Delta}_+, -\tilde{\Delta}_2) - \right. \\ \left. - (1+\varepsilon_2)t^2(t + 3\tilde{\Delta}_1)\theta(t, -\tilde{\Delta}_1, 0) - (1+\varepsilon_1)t^2(t + 3\tilde{\Delta}_2)\theta(t, -\tilde{\Delta}_2, 0) + \right. \\ \left. + (1+\varepsilon_2)t^2(\varepsilon_1 t - 3\tilde{\Delta}_1)\theta(t, 0, \Delta_1) + (1+\varepsilon_1)t^2(\varepsilon_2 t - 3\tilde{\Delta}_2)\theta(t, 0, \Delta_2) - \right. \\ \left. - \left\{ \varepsilon_1\varepsilon_2(t - \Delta_+)^3 + \Delta_- [\varepsilon_1\varepsilon_2\Delta_+(3t - \Delta_+) - 2\Delta_*] \theta(t, \Delta_1, \Delta_+) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left\{ \varepsilon_1\varepsilon_2(t - \Delta_+)^3 - \Delta_- [\varepsilon_1\varepsilon_2\Delta_+(3t - \Delta_+) - 2\Delta_*] \theta(t, \Delta_2, \Delta_+) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \left\{ \varepsilon_1(t - \tilde{\Delta}_-)^3 - \tilde{\Delta}_+ [\varepsilon_1\tilde{\Delta}_-(3t - \tilde{\Delta}_-) + 2\Delta_*] \theta(t, -\tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_-) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left\{ \varepsilon_1(t - \tilde{\Delta}_-)^3 + \tilde{\Delta}_+ [\varepsilon_1\tilde{\Delta}_-(3t - \tilde{\Delta}_-) + 2\Delta_*] \theta(t, \tilde{\Delta}_-, \Delta_1) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \left\{ \varepsilon_2(t + \tilde{\Delta}_-)^3 + \tilde{\Delta}_+ [\varepsilon_2\tilde{\Delta}_-(3t + \tilde{\Delta}_-) - 2\Delta_*] \theta(t, -\tilde{\Delta}_1, -\tilde{\Delta}_-) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left\{ \varepsilon_2(t + \tilde{\Delta}_-)^3 - \tilde{\Delta}_+ [\varepsilon_2\tilde{\Delta}_-(3t + \tilde{\Delta}_-) - 2\Delta_*] \theta(t, -\tilde{\Delta}_-, \Delta_2) \right. \right. \right. \end{array} \right),$$

где введены обозначения

$$\Delta_1 = \frac{1}{\alpha}; \Delta_2 = \frac{1}{\beta}; \Delta_+ = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}; \Delta_- = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}; \tilde{\Delta}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\alpha}; \tilde{\Delta}_2 = \frac{\varepsilon_2}{\beta}; \tilde{\Delta}_+ = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} + \frac{\varepsilon_2}{\beta}; \tilde{\Delta}_- = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} - \frac{\varepsilon_2}{\beta};$$

$$\Delta_* = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\alpha \beta}; \tilde{\tilde{\Delta}}_+ = \frac{1}{\alpha} + \frac{\varepsilon_2}{\beta}; \tilde{\tilde{\Delta}}_- = \frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon_2}{\beta}; \tilde{\tilde{\tilde{\Delta}}}_+ = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}; \tilde{\tilde{\tilde{\Delta}}}_- = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} - \frac{1}{\beta};$$

$$\theta(t, a, b) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b] \\ 0, & t \notin [a, b] \end{cases}$$

При зеркально симметричных $S_{1,2}(\chi)$ ($\lambda = \kappa = 0,5$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$; $\beta = \alpha = 1,5(1 + \varepsilon)/\pi$; спектр (24) симметричен) для $\mathcal{G}(\mu - s)$ получим

при $\varepsilon \geq 1$

$$\mathcal{G}\left(\frac{2\pi}{3(1+\varepsilon)}\right) = \frac{1}{2(1+\varepsilon)\varepsilon^2} \begin{cases} (t+2\varepsilon)^3, & t \in [-2\varepsilon, -\varepsilon] \\ -2\varepsilon((t+\varepsilon)^3 - 3\varepsilon(t+\varepsilon)) - t^3, & t \in [-\varepsilon, 1-\varepsilon] \\ -2((t+\varepsilon)^3 - 3\varepsilon(t+\varepsilon)) + t^3 + 2\varepsilon(\varepsilon^2 - 1), & t \in [1-\varepsilon, 0] \\ 2\varepsilon((t-1)^3 - 3\varepsilon(t-1)) + \varepsilon^2 t^3, & t \in [0, 1] \\ \varepsilon^2(2-t)^3, & t \in [1, 2] \end{cases},$$

при $\varepsilon \leq 1$

$$\mathcal{G}\left(\frac{2\pi}{3(1+\varepsilon)}\right) = \frac{1}{2(1+\varepsilon)\varepsilon^2} \begin{cases} (t+2\varepsilon)^3, & t \in [-2\varepsilon, -\varepsilon] \\ -2\varepsilon((t+\varepsilon)^3 - 3\varepsilon(t+\varepsilon)) - t^3, & t \in [-\varepsilon, 0] \\ 2\varepsilon^2((t-1)^3 - 3\varepsilon(t-1)) - \varepsilon^2(t^3 + 2(\varepsilon^2 - 1)), & t \in [0, 1-\varepsilon] \\ 2\varepsilon((t-1)^3 - 3\varepsilon(t-1)) + \varepsilon^2 t^3, & t \in [1-\varepsilon, 1] \\ \varepsilon^2(2-t)^3, & t \in [1, 2] \end{cases}.$$

Для спектра (24), состоящего из двух прямоугольно-треугольных спектров, когда оба прямых угла расположены внутри суммарного спектра – первый вариант из

перечисленных выше (для определенности положим $\bar{\alpha} = \frac{3\kappa}{4\pi\lambda^2} \geq \bar{\beta} = \frac{3(1-\kappa)}{4\pi(1-\lambda)^2}$),

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{F}(t) = \frac{\pi}{3} \begin{cases} t\bar{\alpha}\bar{\beta}(t^2\bar{\alpha}\bar{\beta} - 3t(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + 6), & t \in [0, 1/\bar{\alpha}] \\ \bar{\beta}(\bar{\beta}/\bar{\alpha} + 3(1-t\bar{\beta})), & t \in [1/\bar{\alpha}, 1/\bar{\beta}] \\ (\bar{\alpha} + \bar{\beta} - t\bar{\alpha}\bar{\beta})^3 / \bar{\alpha}\bar{\beta}, & t \in [1/\bar{\beta}, 1/\bar{\alpha} + 1/\bar{\beta}] \end{cases}.$$

Если оба прямых угла расположены снаружи спектра – четвертый вариант из перечисленных выше (опять для определенности полагаем $\bar{\alpha} \geq \bar{\beta}$), то $\mathcal{G}(t) = \mathcal{F}(-t)$.

Когда оба прямых угла справа (второй вариант, $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ соотносятся произвольно)

$$\mathcal{G}(t) = \frac{\pi}{6} \left(\left\{ \begin{array}{l} -\mathcal{G}_1(t), t \in [-1/\bar{\beta}, 0] \\ \mathcal{G}_1(t), t \in [0, 1/\bar{\alpha}] \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -\mathcal{G}_1(t) - 2\bar{\alpha}(3(t\bar{\alpha} - 1) + \bar{\alpha}/\bar{\beta}), t \in [-1/\bar{\beta}, 1/\bar{\alpha} - 1/\bar{\beta}] \\ \mathcal{G}_1(t) + 2\bar{\beta}(3(t\bar{\beta} + 1) - \bar{\beta}/\bar{\alpha}), t \in [1/\bar{\alpha} - 1/\bar{\beta}, 1/\bar{\alpha}] \end{array} \right\} \right),$$

где $\mathcal{G}_1(t) = t\bar{\alpha}\bar{\beta}(t^2\bar{\alpha}\bar{\beta} + 3t(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - 6)$.

Когда оба прямых угла слева (третий вариант), $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ в последней формуле меняются местами.

Мы не приводим аналитические выражения для $\Phi_{2nr}(0, \eta)$, отвечающего спектру (24), ни в общем случае, ни в частных, хотя (I.16) позволяет это сделать (интегралы считаются). Выражения эти так громоздки, что $\Phi_{2nr}(0, \eta)$ легче считать численно.

(2) Спектр $S_{2ne}(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi)$, состоящий из двух различных асимметричных экспоненциальных спектров $S_{1,2}(\chi)$, где

$$S_1(\chi) = A_1 \begin{cases} \exp(\alpha\chi), & \chi \leq 0 \\ \exp(-\alpha\chi/\varepsilon_1), & \chi \geq 0 \end{cases}; \quad S_2(\chi) = A_2 \begin{cases} \exp(\beta(\chi - s)/\varepsilon_2), & \chi \leq s \\ \exp(-\beta(\chi - s)), & \chi \geq s \end{cases}. \quad (28)$$

График спектра (28) похож на график спектра (13) на рис.3, но ширины каждой из 4-х экспонент по разные стороны от вершин находятся в произвольном соотношении. В (28) взяты параметры как в (24), а не как в (13), При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ (28) переходит в (13).

Из нормировки (I.17) $A_{1,2}$, α и β в (28) выражаются через $\varepsilon_{1,2}$, s , $\tilde{\lambda}$ из (2) и $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$: из (5) (здесь берутся параметры с тильдой, т.к. $S_{1,2}(\chi)$ в (28) перекрываются)

$$A_1 = \frac{2\alpha\tilde{\lambda}}{1 + \varepsilon_1} = \frac{4\tilde{\kappa}}{\pi\tilde{\lambda}}; \quad A_2 = \frac{2\beta(1 - \tilde{\lambda})}{1 + \varepsilon_2} = \frac{4\tilde{\tilde{\kappa}}}{\pi(1 - \tilde{\lambda})}; \quad \alpha = \frac{2\tilde{\kappa}(1 + \varepsilon_1)}{\pi\tilde{\lambda}^2}; \quad \beta = \frac{2\tilde{\tilde{\kappa}}(1 + \varepsilon_2)}{\pi(1 - \tilde{\lambda})^2}.$$

Шесть параметров $\varepsilon_{1,2}$, s , $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\tilde{\kappa}}$ не независимы и связаны уравнением (I.18)

$$\tilde{\kappa} + \tilde{\tilde{\kappa}} = 1 - \frac{2\pi\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda})\alpha\beta}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{\beta\varepsilon_1^2(1 + \varepsilon_2) \exp(-\alpha s/\varepsilon_1) - \alpha\varepsilon_2^2(1 + \varepsilon_1) \exp(-\beta s/\varepsilon_2)}{\beta\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_2}, \quad (29)$$

где α и β выражены через $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}$ и $\varepsilon_{1,2}$ из формул выше.

Для спектра (28) получаем нормированные статистические характеристики

$$|\gamma_0^{2ne}(\xi)| = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}^2\alpha^4}{[\alpha^2 + \xi^2] \cdot [\alpha^2 + (\xi\varepsilon_1)^2]} + \frac{(1 - \tilde{\lambda})^2\beta^4}{[\beta^2 + \xi^2] \cdot [\beta^2 + (\xi\varepsilon_2)^2]}} + 2 \frac{\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda})(\alpha\beta)^2 \left\{ \left[(\xi^2 - \alpha\beta)(\xi^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha\beta) + \xi^2(\alpha + \beta)(\alpha\varepsilon_2 + \beta\varepsilon_1) \right] \cos(s\xi) + \left[\xi[\alpha(\varepsilon_1 - 1)(\xi^2\varepsilon_2 + \beta^2) + \beta(\varepsilon_2 - 1)(\xi^2\varepsilon_1 + \alpha^2)] \sin(s\xi) \right] \right\}}{[\alpha^2 + \xi^2] \cdot [\alpha^2 + (\xi\varepsilon_1)^2] \cdot [\beta^2 + \xi^2] \cdot [\beta^2 + (\xi\varepsilon_2)^2]} =$$

$$= \sqrt{\tilde{\lambda}^2 \left| \gamma_0^e(\tilde{\lambda}^2 \xi / \tilde{\kappa}, \varepsilon_1) \right|^2 + (1 - \tilde{\lambda})^2 \left| \gamma_0^e((1 - \tilde{\lambda})^2 \xi / \tilde{\kappa}, \varepsilon_2) \right|^2 + 2\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda}) \gamma_0^e(2\tilde{\lambda}^2 \varepsilon_1 \xi / \tilde{\kappa} / (1 + \varepsilon_1)) \cdot \gamma_0^e(2(1 - \tilde{\lambda})^2 \varepsilon_2 \xi / \tilde{\kappa} / (1 + \varepsilon_2)) \cos(s\xi) + 2\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda})(\alpha\beta)^2 \left\{ \xi^2 \left[(\xi^2 - \alpha\beta)(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1) + (\alpha + \beta)(\alpha(\varepsilon_2 - 1) + \beta(\varepsilon_1 - 1)) \right] \cos(s\xi) + \xi \left[\alpha(\varepsilon_1 - 1)(\xi^2 \varepsilon_2 + \beta^2) + \beta(\varepsilon_2 - 1)(\xi^2 \varepsilon_1 + \alpha^2) \right] \sin(s\xi) \right\}} \quad (30)$$

и

$$\tilde{\Gamma}_0^{2ne}(\mu) = \pi \left\{ \frac{\tilde{\lambda}^2 \alpha}{2(1 + \varepsilon_1)} \cdot \frac{\varepsilon_1 \exp(-\alpha\mu / \varepsilon_1) - \exp(-\alpha\mu)}{\varepsilon_1 - 1} + \frac{(1 - \tilde{\lambda})^2 \beta}{2(1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{\varepsilon_2 \exp(-\beta\mu / \varepsilon_2) - \exp(-\beta\mu)}{\varepsilon_2 - 1} + \frac{\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda})\alpha\beta}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{\frac{\varepsilon_1^2(1 + \varepsilon_2)\beta}{\beta\varepsilon_1 + \alpha} \exp(-\alpha(s + \mu) / \varepsilon_1) - \frac{\varepsilon_2^2(1 + \varepsilon_1)\alpha}{\alpha\varepsilon_2 + \beta} \exp(-\beta(s + \mu) / \varepsilon_2)}{\beta\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_2} + \frac{\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda})\alpha\beta}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{\frac{\varepsilon_1^2(1 + \varepsilon_2)\beta}{\beta\varepsilon_1 + \alpha} \exp(-\alpha(s - \mu) / \varepsilon_1) - \frac{\varepsilon_2^2(1 + \varepsilon_1)\alpha}{\alpha\varepsilon_2 + \beta} \exp(-\beta(s - \mu) / \varepsilon_2)}{\beta\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_2}, \mu \leq s \right\} + \left\{ \frac{(1 + \varepsilon_2)\beta}{\alpha\varepsilon_2 + \beta} \exp(\alpha(s - \mu)) - \frac{(1 + \varepsilon_1)\alpha}{\beta\varepsilon_1 + \alpha} \exp(\beta(s - \mu)) \right\}, \mu \geq s \quad (31)$$

$$= \tilde{\kappa} \cdot \tilde{\Gamma}_0^e(\tilde{\kappa}\mu / \tilde{\lambda}^2, \varepsilon_1) + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{\Gamma}_0^e(\tilde{\kappa}\mu / (1 - \tilde{\lambda})^2, \varepsilon_2) + \frac{\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda})\pi\alpha\beta}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)} \left[\psi(s + \mu, \alpha, \beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \begin{cases} \psi(s - \mu, \alpha, \beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2), & \mu \leq s \\ \psi(\mu - s, \alpha / \varepsilon_1, \beta / \varepsilon_2, 1 / \varepsilon_1, 1 / \varepsilon_2), & \mu \geq s \end{cases} \right]$$

В (31) введена функция

$$\hat{\psi}(y, a, b, t_1, t_2) = \frac{\frac{t_1^2(1 + t_2)b}{bt_1 + a} \exp(-ay/t_1) - \frac{t_2^2(1 + t_1)a}{at_2 + b} \exp(-by/t_2)}{bt_1 - at_2} = \frac{\exp(-ay/t_1) - \exp(-by/t_2)}{bt_1 - at_2} + \frac{t_1 \exp(-ay/t_1)}{bt_1 + a} + \frac{t_2 \exp(-by/t_2)}{at_2 + b}, \quad (32)$$

а $\left| \gamma_0^e(\xi, \varepsilon) \right|$ и $\tilde{\Gamma}_0^e(\mu, \varepsilon)$ в (31-32) - функции, взятые из табл. I.1-2 для несимметричного экспоненциального спектра (модуль в $\gamma_0^e(\xi, 1) = \gamma_0^e(\xi)$ опущен, т.к. функция $\gamma_0^e(\xi)$ - действительная и неотрицательная). Через функцию (32) уравнение (29) связи $\varepsilon_{1,2}, \tilde{\lambda}, \tilde{\kappa}, \tilde{\kappa}$ и s предстает в виде

$$\tilde{\kappa} + \tilde{\kappa} = 1 - \frac{8\tilde{\kappa}\tilde{\kappa}}{\pi\tilde{\lambda}(1-\tilde{\lambda})} \cdot \hat{\psi} \left(s, \frac{2\tilde{\kappa}(1+\varepsilon_1)}{\pi\tilde{\lambda}^2}, \frac{2\tilde{\kappa}(1+\varepsilon_2)}{\pi(1-\tilde{\lambda})^2}, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \right),$$

что соответствует $\tilde{\Gamma}_0^{2ne}(0) = 1$ (см. (31))

Функции $\Phi_{2ne}(0, \eta)$ аналитически в случае спектра (2) рассчитать не удалось.

Сравним функции (26,27,30,31) с приближенными функциями (18,19), варьируя $\varepsilon_{1,2}$ для выяснения влияния на точность приближения несимметричности $S_{1,2}(\chi)$.

Начнем со спектров (24) при выполнении (25) с заданным (24) делением спектра на $S_{1,2}(\chi)$ с соответствующими λ и κ . И подберем параметр s_1 . В работе [5] показано, что в общем случае s из (24) не есть расстояние s_1 между $S_{1,2}(\chi)$ в (18,19). В качестве s_1 опробуем обобщение s_1 из [5] и похожий параметр s_2 . Обобщением s_1 из [5] будет $s_1 = \chi_2 - \chi_1$, где χ_1 и χ_2 делят пополам интегралы от $S_1(\chi)$ и $S_2(\chi)$:

$$\int_{-\infty}^{\chi_{2,1}} S_{1,2}(\chi) d\chi = \int_{\chi_{2,1}}^{\infty} S_{1,2}(\chi) d\chi, \quad (33)$$

Параметр s_2 рассчитывается аналогично (33) с заменой $S_{1,2}(\chi)$ на $S_{1,2}^2(\chi)$ -

$$\int_{-\infty}^{\chi_{2,1}} S_{1,2}^2(\chi) d\chi = \int_{\chi_{2,1}}^{\infty} S_{1,2}^2(\chi) d\chi.$$

В работе [5] параметр s_2 не исследовался.

Для спектра (24) s_1 и s_2 выражаются через параметры спектра формулами:

$$s_1 = s + \frac{1-\varepsilon_1}{2\alpha(1+\sqrt{(1+t_1)/2})} + \frac{1-\varepsilon_2}{2\beta(1+\sqrt{(1+t_2)/2})}; \quad (34)$$

$$s_2 = s + \frac{1-\varepsilon_1}{2\alpha(1+\sqrt[3]{(1+t_1)/2} + (\sqrt[3]{(1+t_1)/2})^2)} + \frac{1-\varepsilon_2}{2\beta(1+\sqrt[3]{(1+t_2)/2} + (\sqrt[3]{(1+t_2)/2})^2)}, \quad (35)$$

где $t_i = \begin{cases} \varepsilon_i, & \varepsilon_i \leq 1 \\ 1/\varepsilon_i, & \varepsilon_i \geq 1 \end{cases} \in [0;1]$. Знаменатели (34,35) отличаются множителями, отноше-

ние которых при изменении t_i от 0 до 1 меняется от 0,705 до 0,666. Поэтому, учитывая зависимость функций (18,19) от s_1 и приближенность подобия, выбор между s_1 и s_2 с помощью спектров (24) не будет категоричным.

Мы сравнили при разных $\varepsilon_{1,2}$ точные функции $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (26,27) для спектров (24) с функциями (18,19) при тех же λ , κ и s или $s_{1,2}$ в качестве третьего параметра. Были взяты три набора λ и κ , как на рис.10-13, и для каждого - по четыре

набора $\varepsilon_{1,2}$, заметно отличных от единиц: (10;5); (0,1;5); (10;0,2) (0,2;0,1). Значения s были взяты большими, чем на рис.10-13, чтобы при всех $\varepsilon_{1,2}$ обеспечить условие (25): $s = 6 = 1,22\pi\sigma$ для $\lambda = 0,5, \kappa = 0,8$; $s = 4 = 1,175\pi\sigma$ для $\lambda = 0,625, \kappa = 0,75$ и $s = 11,5 = 1,254\pi\sigma$ для $\lambda = 0,85, \kappa = 0,25$. Результаты расчетов оказались качественно одинаковыми и для обеих функций и для всех рассмотренных параметров. Характерные примеры приведены на рис.17-19. На рис.17 точные функции сравниваются с приближенными при $s_1 = s$ для всех $\varepsilon_{1,2}$. На рис.18 точные функции (26) сравниваются с (18) с использованием s_1 (34) или s_2 (35) для одного из наборов $\lambda, \kappa, s, \varepsilon_{1,2}$, а на рис.19 - аналогично сравниваются точные функции (27) с (19) при другом наборе $\lambda, \kappa, s, \varepsilon_{1,2}$. Для $\Phi(0, \eta)$ результаты такие же, как и для $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$.

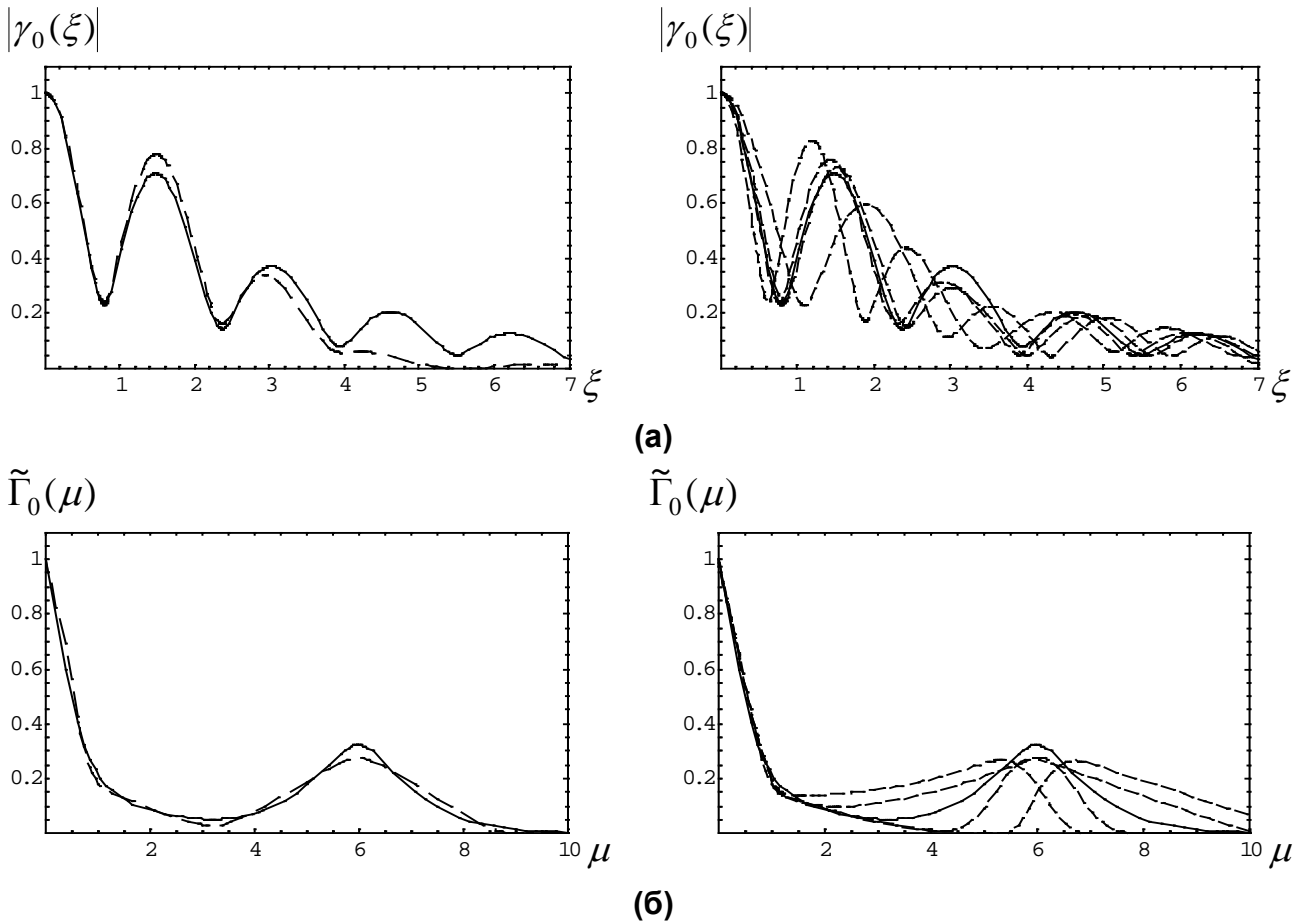
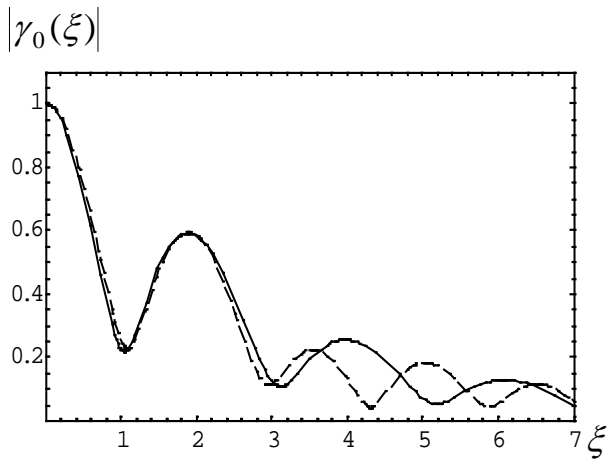
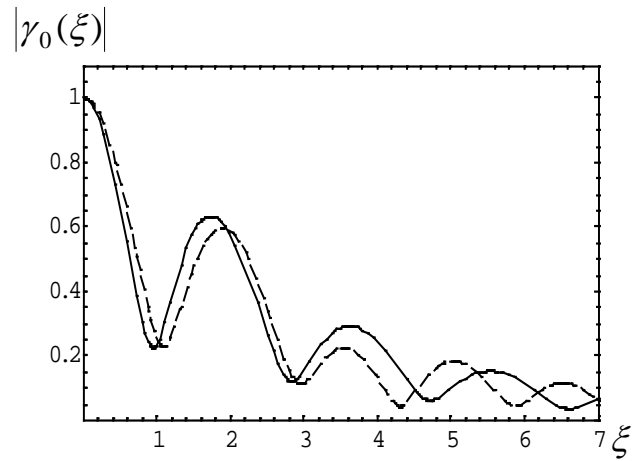


Рис.17. Сравнение точных функций $|\gamma_0(\xi)|$ (а) и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (б) (штриховые линии) для спектров (24) с приближениями (18,19) (сплошные линии) при параметрах $s_1 = s = 4 = 1,175\pi\sigma, \lambda = 0,625, \kappa = 0,75$ (а) и $s_1 = s = 6 = 1,22\pi\sigma, \lambda = 0,5, \kappa = 0,8$ (б). Точные функции на графиках слева приведены для равнобедренных треугольных спектров ($\varepsilon_{1,2} = 1$), справа – для неравнобедренных с параметрами асимметрии $\varepsilon_{1,2}$: (5; 10), (5; 0,1), (0,2; 10), (0,1; 0,2) в (а) и (10; 5), (0,1; 5), (10; 0,2), (0,2; 0,1) в (б).

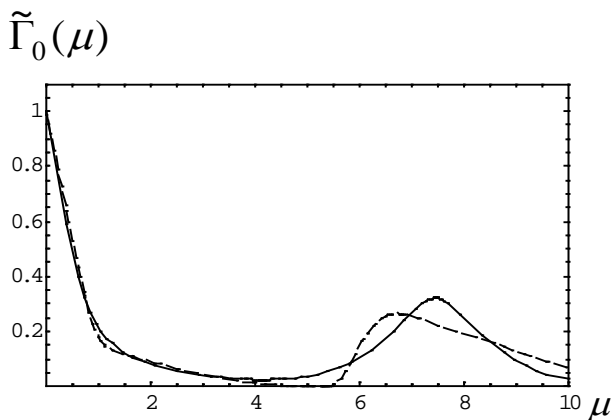


$$s_1 = 3,037 = 0,823\pi\sigma$$

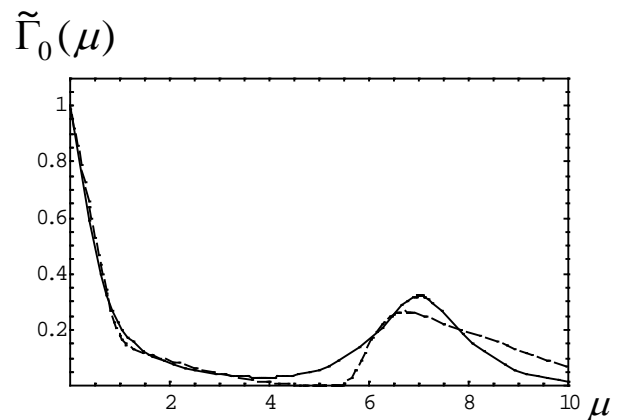


$$s_2 = 3,334 = 0,903\pi\sigma$$

Рис.18. Сравнение точных функции $|\gamma_0(\xi)|$ (штриховые линии) для спектров (24) с параметрами $s = 4, \lambda = 0,625, \kappa = 0,75, \varepsilon_1 = 5, \varepsilon_2 = 10$ с приближением (18) (сплошные линии) при тех же λ и κ , и s_1 (34) (слева) и вместо него s_2 (35) (справа). Значения s_1 и s_2 указаны под графиками.



$$s_1 = 7,476 = 1,95\pi\sigma$$



$$s_2 = 7,034 = 1,835\pi\sigma$$

Рис.19. Сравнение точных функций $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (штриховые линии) для спектров (24) с параметрами $s = 6, \lambda = 0,5, \kappa = 0,8, \varepsilon_1 = 0,2, \varepsilon_2 = 0,1$ с приближением (19) (сплошные линии) при тех же λ и κ , и s_1 (34) (слева) и вместо него s_2 (35) (справа). Значения s_1 и s_2 указаны под графиками.

Из проведенных расчетов (примеры на рис.17-19) следуют три вывода:

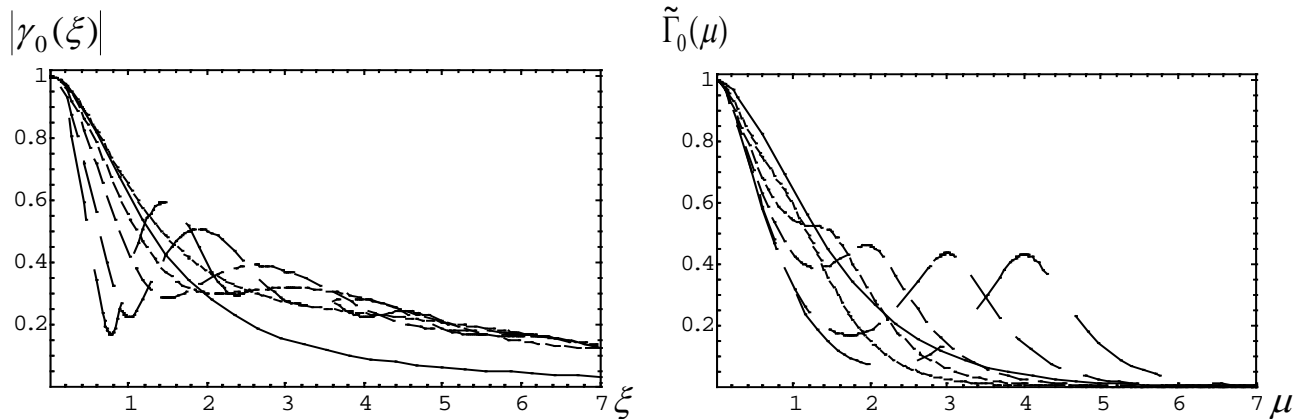
- во-первых, точные функции $|\gamma_0(\xi)|, \tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ спектров (24) с несимметричными $S_{1,2}(\chi)$ аппроксимируются формулами (18,19,21) не хуже, чем с симметричными;
- во-вторых, в качестве s_1 в (18,19,21) подходит s_1 , вычисляемое по схеме (33);
- в-третьих, приближенные функции (18,19,21), судя по набранной статистике расчетов, мало отличаются при изменении s_1 в пределах разницы между s_1 и s_2 из (34-35).

На рис.18-19 приведены примеры наибольшего различия функций (18,19) при подстановке в них s_1 и s_2 для всех рассчитанных спектров (24). Но даже для них трудно сделать выбор между s_1 и s_2 . Мы остановились на s_1 , т.к. в большинстве рассмотренных примеров с ним приближение получалось чуть лучше. В то же время рис.17 показал, что аппроксимация точных функций функциями (18,19,21) с s вместо s_1 (или s_2) всегда заметно хуже, если только s не близко s_1 (или s_2).

Из определения s_1 (34) для спектра (24) и условия отсутствия перекрытия треугольных спектров (25) следует $s_1 \geq \pi \frac{2}{3} \left(\frac{\lambda^2}{\kappa} g(\varepsilon_1) + \frac{(1-\lambda)^2}{1-\kappa} g(\varepsilon_2) \right)$, где $g(\varepsilon) = \begin{cases} 2 - \sqrt{2/(1+\varepsilon)}, & 0 < \varepsilon \leq 1 \\ \sqrt{2\varepsilon/(1+\varepsilon)}, & \varepsilon \geq 1 \end{cases}$; поэтому, учитывая, что $(2/3)g_{\max} = (2/3)g(\infty) = 2\sqrt{2}/3 \cong 0,943$, получим уже учтенное выше (раздел 2.5) ограничение для s_1 диахромных спектров: $s_1 \geq \pi\sigma$.

Сравним теперь функций (18,19,21) с точными функциями $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ для спектров (28). Главное отличие спектров (28) от (24) в том, что из-за перекрытия $S_{1,2}(\chi)$ получается двугорбый спектр с разной выраженностью провала между горбами. Когда провал небольшой или их несколько, от того, где мы разделим спектр на части, могут заметно меняться параметры λ , κ и s_1 . Если это существенно скажется на графиках функций (18,19,21), то последние не могут быть хорошими приближениями точных функций. Как раз эту проблему и исследуем с помощью спектров (28)

Функции (18,19,21) зависят от s_1 , и на эту зависимость влияют λ и κ . Это иллюстрирует рис.20, где показаны зависимости (18,19,21) от s_1 для λ и κ с рис.10-13. Для первых двух наборов λ и κ , удовлетворяющих критериям (23,23*) (см. рис.6), все функции (18,19,21) явно зависят от s_1 (показано по одному примеру). И прослеживается их приближение при уменьшении s_1 до $\approx (\pi/2)\sigma$ к универсальным функциям компактных спектров (I.28,37-38) (сплошные линии). При дальнейшем уменьшении s_1 отличие функций (18,19,21) от (I.28,37-38) опять возрастает. Для третьего набора λ и κ на рис.20, не удовлетворяющего (23,23*), не прослеживается ни зависимость (18,19,21) от s_1 , ни приближение к функциям (I.28,37-38).



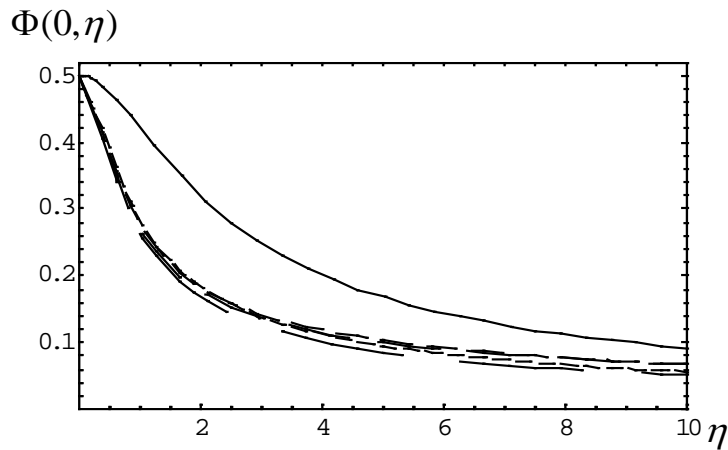


Рис.20. Графики функций (18) ($\lambda = 0,5; \kappa = 0,8; \pi\sigma/2 = 1,92$), (19) ($\lambda = 0,625; \kappa = 0,75; \pi\sigma/2 = 1,85$) при $s_1 = 1; 1,5; 2; 3; 4$ и (21) ($\lambda = 0,85; \kappa = 0,25; \pi\sigma/2 = 4,59$) при $s_1 = 3; 4; 5; 6$ (штриховые линии, длина штрихов увеличивается с ростом s_1). Сплошные линии - функции (1.28,37-38) для экспоненциального спектра.

На рис.15 для спектров с параметрами, не удовлетворяющими критериям (22), выбирая λ и κ из возможных вариантов разбиения, мы полагали $s_1 = s$. Но для таких спектров согласно (33) $s_1 \neq s$. Так, для четырех вариантов разбиения на неперекрывающиеся части экспоненциального спектра с рис.15 при $s = 4$ s_1 менялись от 4,81 до 5,19. Мы пересчитали функции (18,19,21) для каждого набора λ и κ , подставляя s_1 вместо s , что почти не сказалось на значениях этих функций и качестве их приближения к точным функциям (весьма среднем), вполне в согласии с рис.20. Это иллюстрирует пример функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ на рис.21 (с $|\gamma_0(\xi)|$ и $\Phi(0, \eta)$ аналогично).

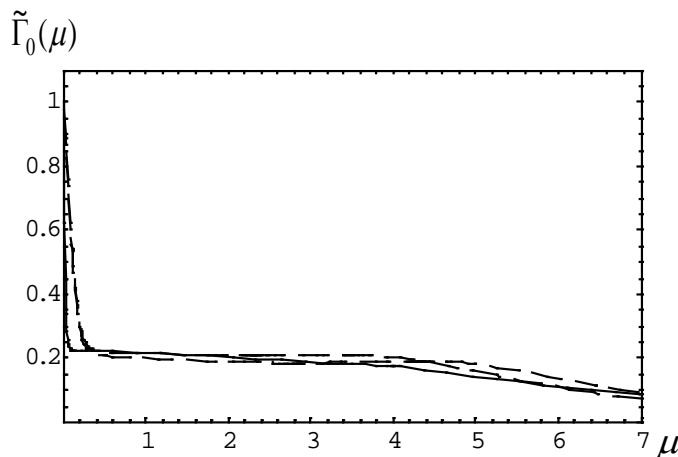


Рис.21. Графики точной функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ для спектра (13) при $\tilde{\lambda} = 0,9, \tilde{\kappa} = 0,2$ ($\tilde{\kappa} = 0,775$), $s = 4$ – сплошная линия (взята с рис.15), и приближений (19) – штриховые линии ($\lambda = 0,77, \kappa = 0,19$ для случая разбиения спектра на неперекрывающиеся части в слабом минимуме между горбами; одна кривая с $s_1 = s = 4$ взята с рис.15; у второй $s_1 = 4,81 = 0,487\pi\sigma$).

Будем сравнивать точные функции $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ с приближениями (18-19) для спектра (28) с теми же наборами $\tilde{\lambda}, \tilde{\kappa}$ и s , что на рис.10-13, и четырьмя наборами ε_1 и ε_2 , как на рис.17-19 (по четыре возможных сочетания перекосов каждой из экспонент с большим отношением ширины плеч – 5-10). Используем параметры с тильдой $\tilde{\kappa}, \tilde{\tilde{\kappa}}, \tilde{\lambda}$ и s , характеризующие $S_{1,2}(\chi)$ из (28), и параметры λ, κ и s_1 , зависящие от точки деления χ_0 спектра (28) на две непересекающиеся части. В зависимости от $\tilde{\lambda}, \tilde{\kappa}, s$ и $\varepsilon_{1,2}$ параметры λ, κ и s_1 могут в разной степени меняться при сдвиге χ_0 (обычно λ больше, чем κ). Чем больше перекрытие $S_{1,2}(\chi)$, тем сильнее это изменение (согласно (28), оно растет с ростом $\varepsilon_{1,2}$). На рис.22 приведены два противоположных примера из рассмотренных. При независимости параметров от χ_0 имеем ситуацию, аналогичную случаю спектра (24). Наибольший интерес представляют противоположные случаи сильной зависимости параметров от χ_0 , т.е. больших значений $\varepsilon_{1,2}$. По той же причине используем меньшие s , чем в (24).

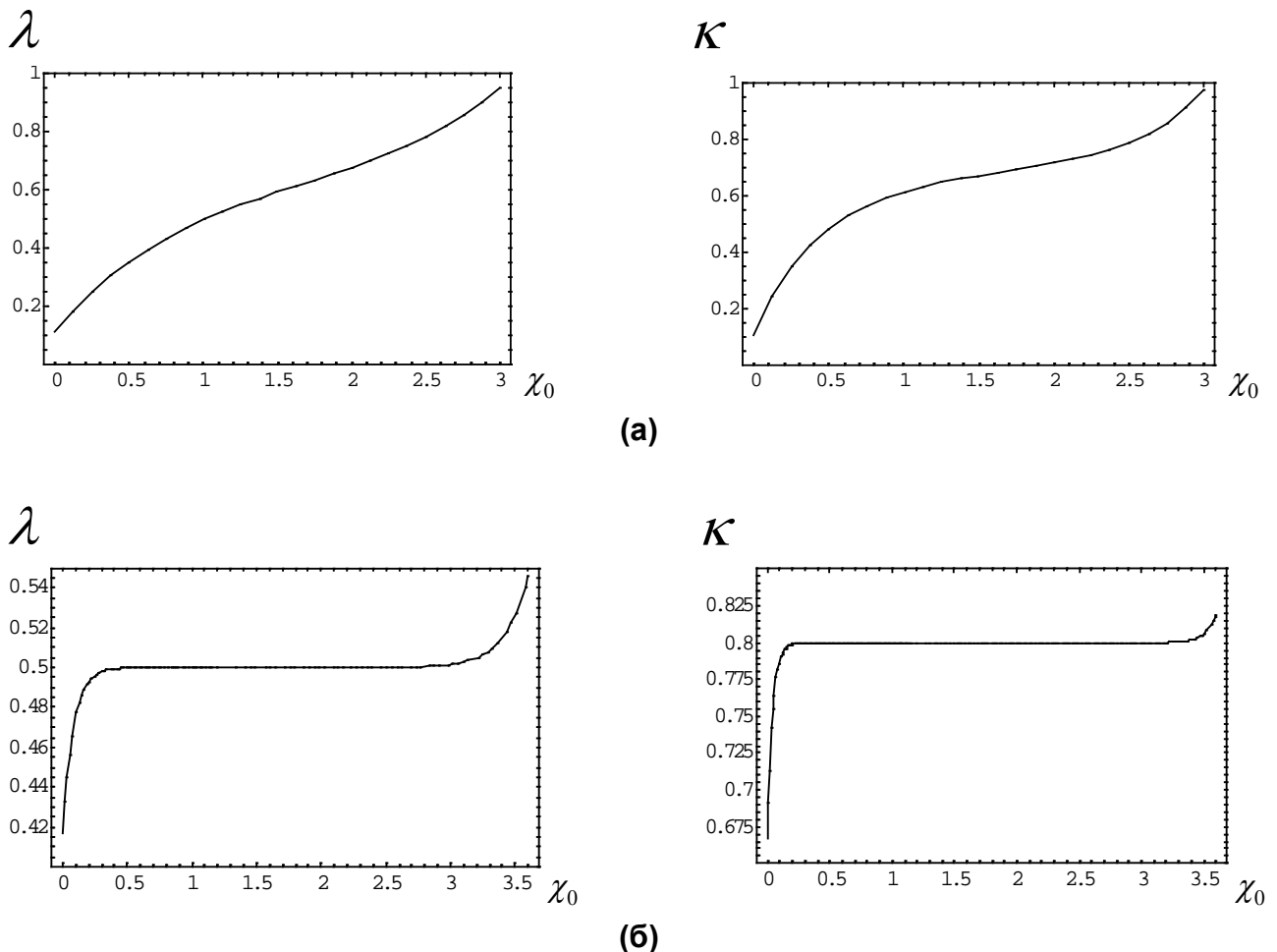


Рис.22. Зависимости λ и κ от положения χ_0 при разбиении спектра (28) на неперекрывающиеся части; (а) соответствует $s = 3; \tilde{\lambda} = 0,625; \tilde{\kappa} = 0,6; \varepsilon_1 = 5;$

$\varepsilon_2 = 10$, (б) - $s = 3,6$; $\tilde{\lambda} = 0,5$; $\tilde{\kappa} = 0,8$; $\varepsilon_1 = 0,2$; $\varepsilon_2 = 0,1$. Положение χ_0 меняется от вершины левой экспоненты до вершины правой. Для (а) $s_1 = 2,2$ при χ_0 посередине между вершинами и $s_1 = 2,22$ при χ_0 в минимуме спектра $\chi_{\min} = 1,67$. Для (б) $s_1 = 4,876$ для всех χ_0 , кроме краев. Здесь $\chi_{\min} = 1,25$.

Для каждого из трех наборов $\tilde{\lambda} = 0,5$, $\tilde{\kappa} = 0,8$, $s = 3,6$; $\tilde{\lambda} = 0,625$, $\tilde{\kappa} = 0,613$, $s = 3$ и $\tilde{\lambda} = 0,85$, $\tilde{\kappa} = 0,25$, $s = 4,75$ и каждого из наборов $\varepsilon_{1,2}$ (10;5), (0,1;5), (10;0,2), (0,2;0,1) (т.е. всего 12 комплектов параметров) мы сравнили точные функции $|\gamma_0(\xi)|$ (30) и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (31) с функциями (18-19) при λ , κ и s_1 , рассчитанных для четырех точек χ_0 разбишки спектра на неперекрывающиеся части – трех, делящих расстояние s между вершинами экспонент на 4 равные части, и точки минимума спектра между вершинами (последняя могла попасть в любой из четырех промежутков, образованных первыми тремя). При таком разбросе χ_0 , часть которых явно не соответствует удачному на глаз разделу – см. рис.23, соответствующий рис.22а, мы могли проследить зависимость функций (18-19) от выбора χ_0 .

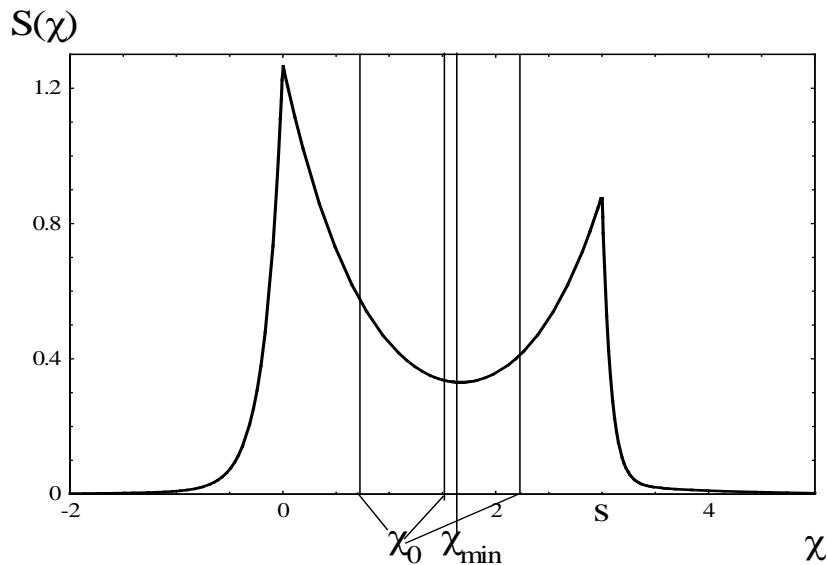


Рис.23. Выбор точки разбиения спектра (28), соответствующего рис.22а, на две неперекрывающиеся части. Параметры спектра $s = 3$; $\tilde{\lambda} = 0,625$; $\tilde{\kappa} = 0,61$ ($\tilde{\kappa} = 0,25$); $\varepsilon_1 = 5$; $\varepsilon_2 = 10$, что соответствует $s_1 = 2,22 = 0,69\pi\sigma$; $\lambda = 0,62$; $\kappa = 0,69$ в минимуме. Вертикальные прямые показывают варианты разбиения спектра: три прямые $\chi_0 = s/4$; $s/2$; $3s/4$, четвертая - $\chi_0 = \chi_{\min} = 1,67$.

В зависимости от выбора χ_0 меняются все три параметра спектра λ , κ и s_1 . В рассмотренных наборах параметров λ для взятых четырех точек могли различаться более чем в 2 раза, κ - до 1,85 раз, а s_1 - до 1,4 раз.

Из рис.11-13 мы видели, что для симметричных экспоненциальных спектров ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$) функции (18-19) хорошо совпали с точными (30-31), даже несмотря на то, что в (18,19) полагалось $s_1 = s$ (отличие s_1 от s , впрочем, было невелико и составляло от 1 до 3,5% для разных спектров, что почти не сказывается на функциях (18-19)). Результаты расчетов с асимметричными экспоненциальными спектрами можно суммировать следующим образом.

- **Во-первых**, вариации ε_1 и ε_2 в рассмотренном диапазоне значений заметно сказываются на виде точных функций $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ для всех наборов $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\kappa}$ и s - см. пример на рис.24.

- **Во-вторых**, λ , κ и s_1 для рассмотренных точек χ_0 могли сильно различаться между собой. Например, для приведенного на рис.23 спектра λ , κ и s_1 для крайних точек $\chi_0 = 0,25s$ и $\chi_0 = 0,75s$ различались, соответственно, в 1,67, 1,32 и 1,11 раз (а $1 - \lambda$ и $1 - \kappa$, соответственно, в 2,05 и 1,71 раз). В точке $\chi_{\min} = 1,67$ $s_1 = s/1,35$.

- **В-третьих**, несмотря на заметное отличие λ , κ и s_1 для четырех точек χ_0 (когда оно было), функции (18-19) в рассмотренных примерах отличались мало. Причем отличие функций было не больше и тогда, когда в них полагалось $s_1 = s$, хотя эти два комплекта подчас заметно различались. Характерный пример с $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ приведен на рис.25 для спектра (28) с рис.23. Это говорит о том, что в некоторых пределах функции (18-19) не критичны к разбиению спектра на неперекрывающиеся части.

- **В-четвертых**, что является главным, совпадение точных функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и функций (18-19) оказалось хорошим при использовании s_1 , вычисляемого по правилу (33), и выполнении критериев (22) для частей спектра. Чем лучше выполнены (22) тем лучше совпадение: хорошо для спектров, удовлетворяющих (22), с параметрами $\tilde{\lambda} = 0,625$, $\tilde{\kappa} = 0,613$, $s = 3$ (рис.25); хуже – с $\tilde{\lambda} = 0,5$, $\tilde{\kappa} = 0,8$, $s = 3,6$ на границе условий (22) (рис.26), заметно хуже – с $\tilde{\lambda} = 0,85$, $\tilde{\kappa} = 0,25$, $s = 4,75$, не удовлетворяющих (22) (рис.27). На рис.26-27 для $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ показаны наихудшие из полученных результатов для двух последних случаев. Но даже здесь (18-19) приемлемо воспроизводят точные функции, в особенности когда $\chi_0 = \chi_{\min}$. Заметим, что функции (18-19) на рис.26-27 мало меняются, если в них вместо s_1 положить s , поскольку в этих примерах спектров и s_1 с s мало отличаются друг от друга, и функции (18-19) меняются незначительно при изменении s_1 и s в интервале их отличия.

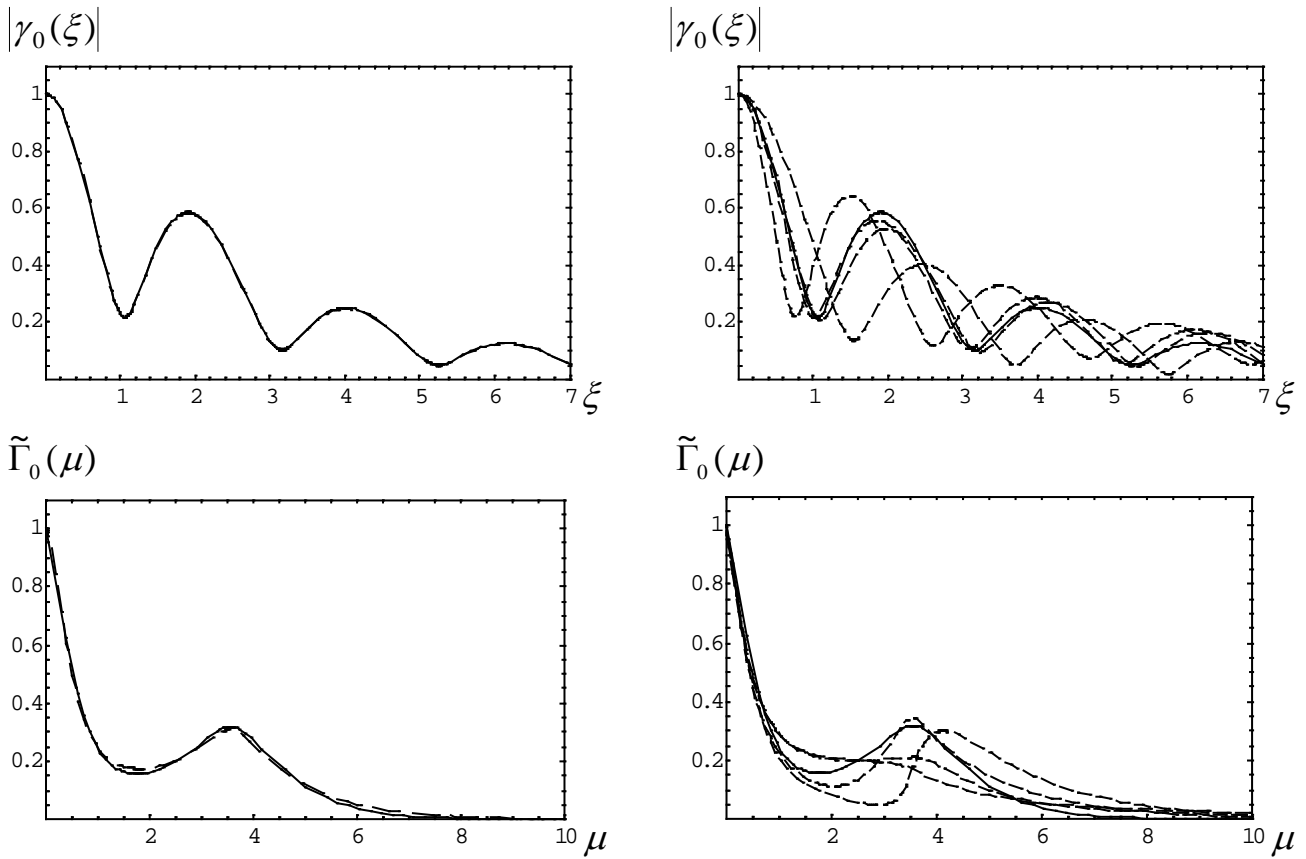


Рис.24. Сравнение точных функций $|\gamma_0(\xi)|$ ($\tilde{\lambda} = 0,625, \tilde{\kappa} = 0,613, s = 3$) и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ ($\tilde{\lambda} = 0,5, \tilde{\kappa} = 0,8, s = 3,6$) с приближенными функциями (18,19) для спектра (28) при различных значениях $\varepsilon_{1,2}$. В качестве s_1 взято s - расстояние между вершинами экспонент. Слева штриховые линии - точные функции для спектра, состоящего из двух симметричных экспоненциальных спектров ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$), сплошными линиями – приближенные функции (18) и (19) с параметрами $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\kappa}$, соответствующими разбиению спектра на две части в точке минимума между вершинами. Справа функции (18) и (19) с левых рисунков (сплошные линии) сравниваются с 4-мя точными функциями (штриховые линии) при значениях ε_1 и ε_2 : (5; 10), (5; 0,1), (0,2; 10), (0,1; 0,2). Длина штрихов у всех точных кривых одинакова; кривые лишь иллюстрируют отличия.

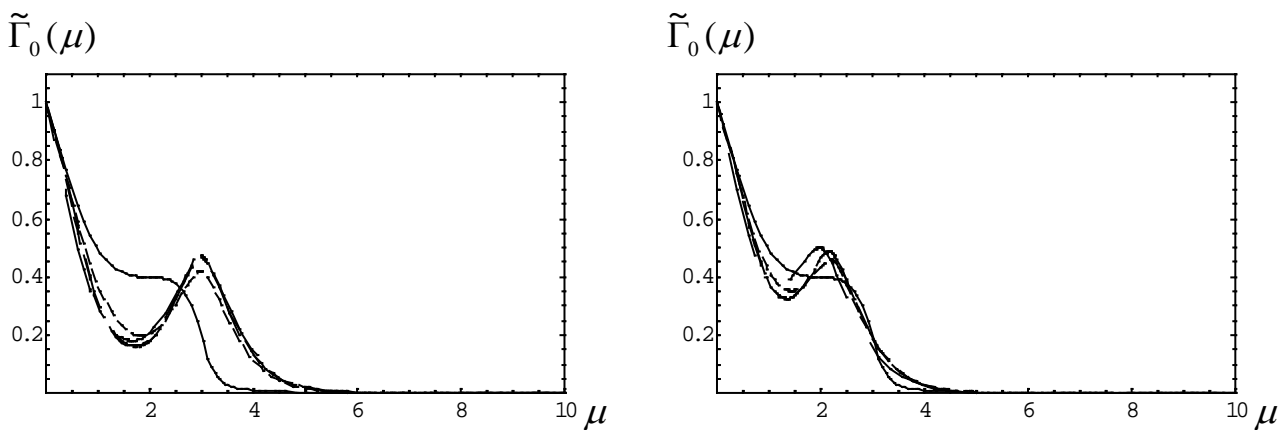


Рис.25. Сравнение точной функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (сплошные линии) для спектра (28) с $\tilde{\lambda} = 0,625, \tilde{\kappa} = 0,613, s = 3, \varepsilon_1 = 5, \varepsilon_2 = 10$ с функциями (19) (штриховые линии), рассчитанными для 4-х наборов λ, κ и s_1 при различных положениях точки χ_0 разбиения спектра на две неперекрывающиеся части (см. рис.23). Длина штрихов уменьшается в порядке выбора χ_0 : $\chi_0 = s/4, \chi_0 = s/2, \chi_0 = \chi_{\min}$ и $\chi_0 = 3s/4$. На левом графике все функции (19) рассчитаны с $s_1 = s = 3$, а на правом – с s_1 из (33) для каждой точки χ_0 .

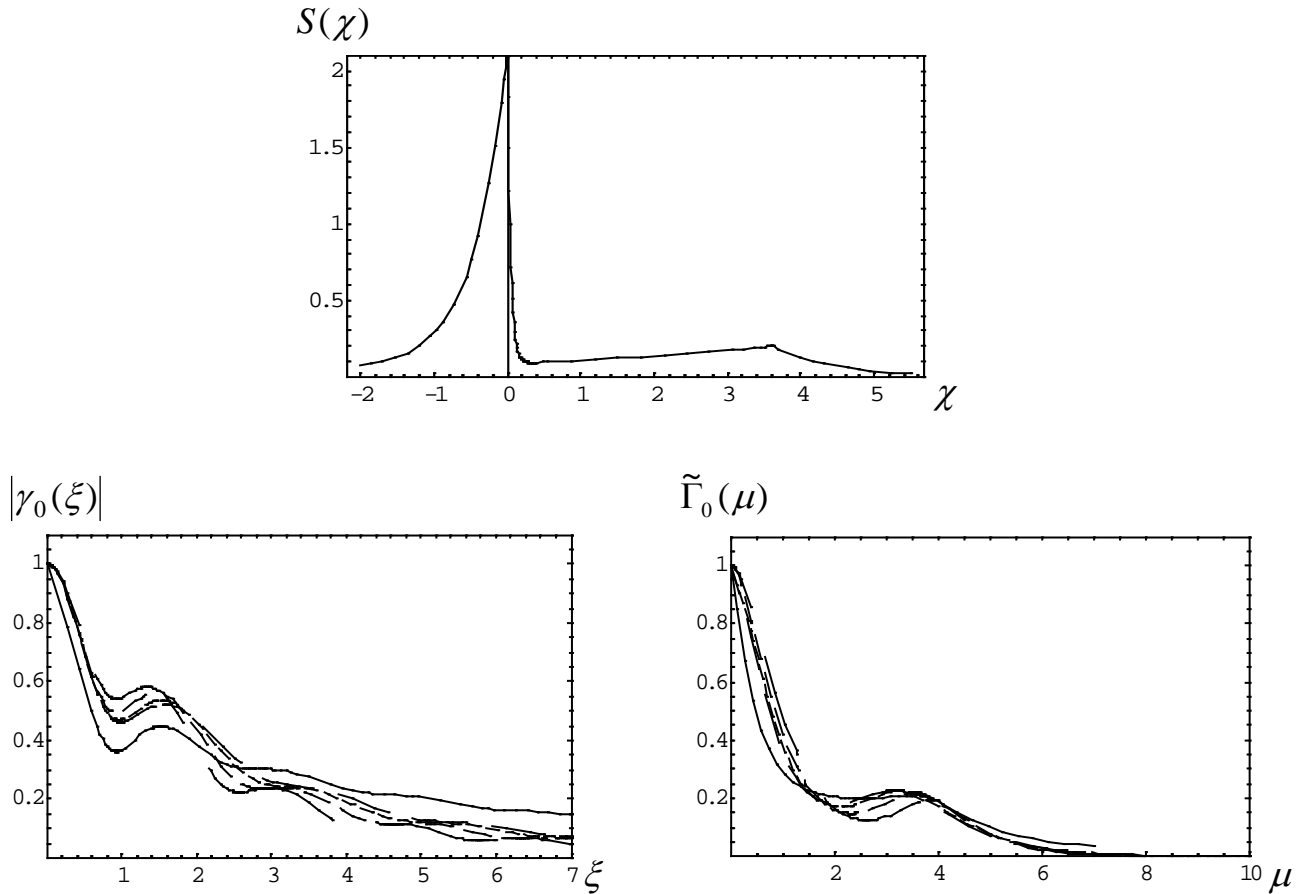


Рис.26. Верхний рисунок - вид спектра (28) с параметрами $\tilde{\lambda} = 0,5, \tilde{\kappa} = 0,8, s = 3,6, \varepsilon_1 = 0,1, \varepsilon_2 = 5$. На нижних рисунках - сравнение для этого спектра точных функций $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (сплошные линии) с приближенными функциями (18,19) (штриховые линии), рассчитанными для 4-х наборов λ, κ, s_1 , полученных при разных положениях точки χ_0 разбиения спектра на две неперекрывающиеся части. Длина штрихов кривых увеличивается в порядке выбора χ_0 : $\chi_0 = s/4, \chi_0 = s/2, \chi_0 = \chi_{\min} = 0,34$ и $\chi_0 = 3s/4$. При $\chi_{\min} = 0,34$ $\lambda = 0,69; \kappa = 0,93; s_1 = 3,21 = 0,542\pi\sigma$.

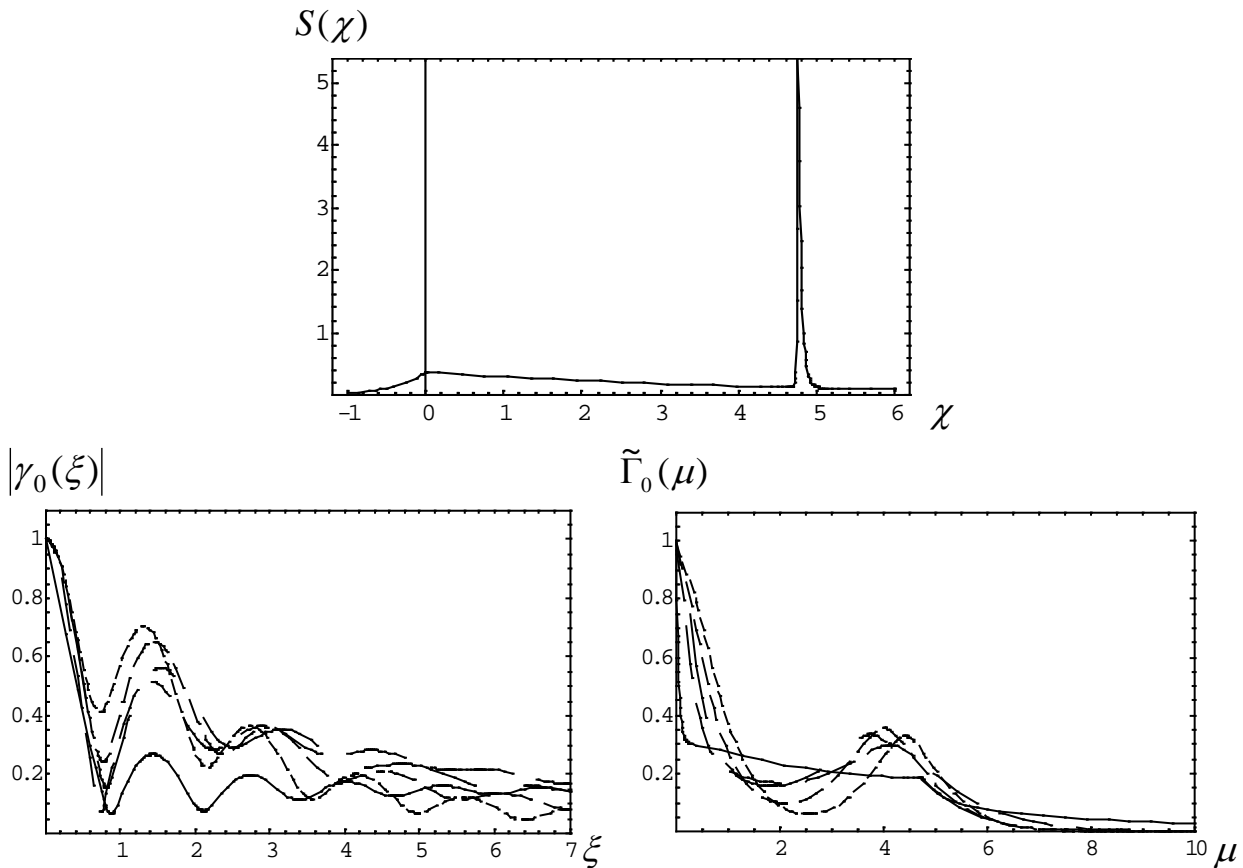
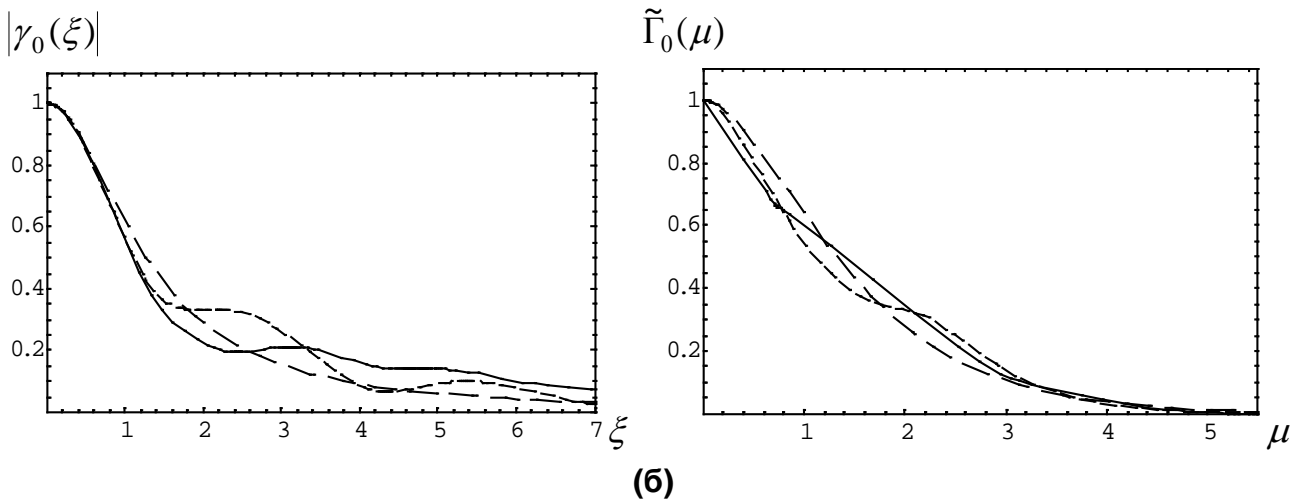
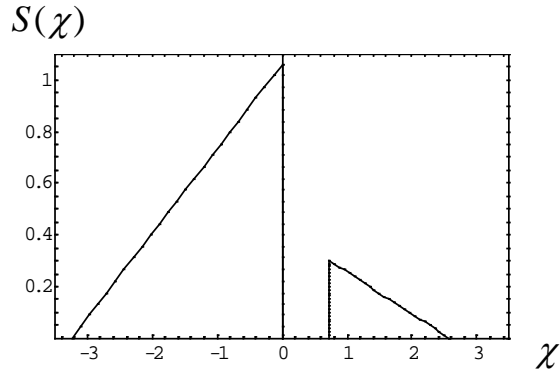
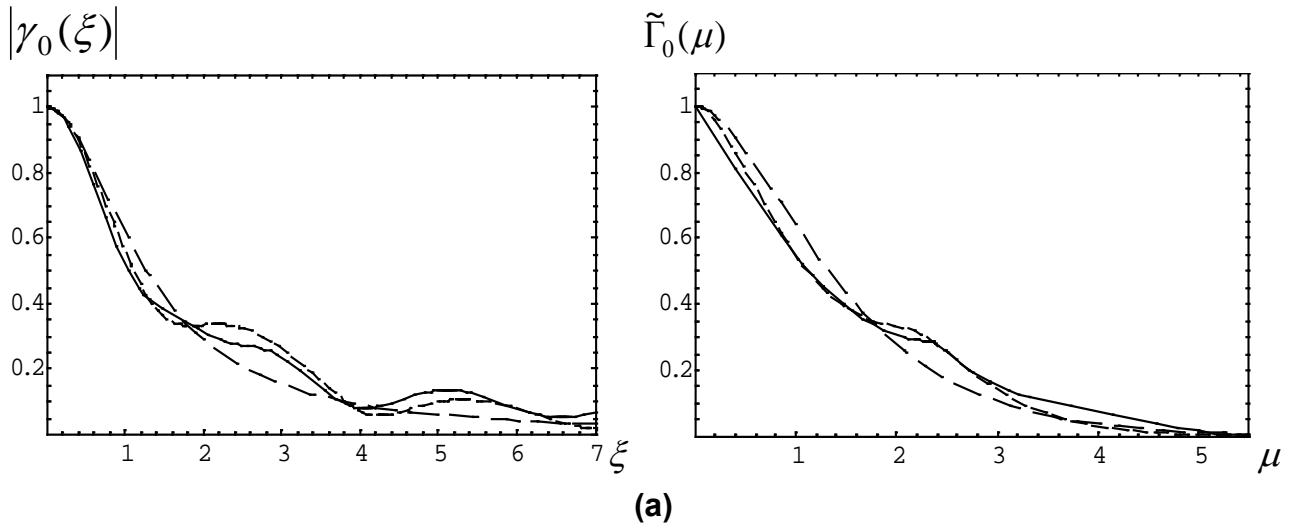
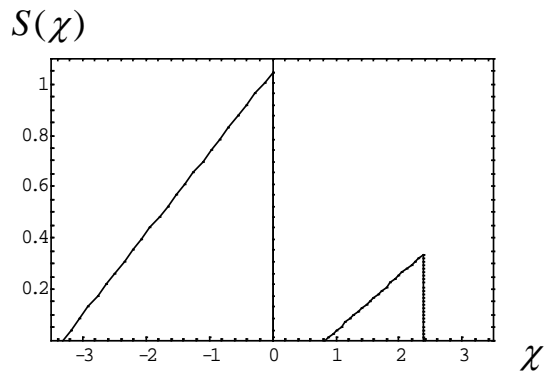


Рис.27. Верхний рисунок - вид спектра (28) с параметрами $\tilde{\lambda} = 0,85$, $\kappa = 0,25$, $s = 4,75$, $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_2 = 0,2$. На нижних рисунках - сравнение для этого спектра точных функций $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (сплошные линии) с приближенными функциями (18,19) (штриховые линии), рассчитанными для 4-х наборов λ, κ, s_1 , полученных при разных положениях точки χ_0 разбиения спектра на две части. Длина штрихов кривых увеличивается в следующем порядке выбора χ_0 : $\chi_0 = s/4$, $\chi_0 = s/2$, $\chi_0 = \chi_{\min} = 4,665$ и $\chi_0 = 3s/4$. При χ_{\min} $\lambda = 0,4$; $\kappa = 0,77$; $s_1 = 4,18 = 0,75\pi\sigma$

Приведенный выше рис.7 иллюстрировал трансформацию друг в друга нормированных статистических характеристик случайных процессов с компактными и диахромными спектрами двугорбкого вида с симметричными частями $S_{1,2}(\chi)$ при уменьшении параметра s_1 . На рис.28 показаны три аналогичных примера в случае несимметричных спектров (24) с двумя прямоугольно-треугольными частями $S_{1,2}(\chi)$, по-разному расположенными друг относительно друга. Два примера пограничны по критерию (I.39) ($s_{0,5} = \pi/2$) и соответствуют $s_{0,9} = 1,25\pi$. Третий, наоборот, пограничен по критерию (I.45). ($s_{0,9} = \pi$) и соответствует $s_{0,5} = 1,535(\pi/2)$. Их нормированные статистические характеристики, как и на рис.7, тоже в равной степени описываются и функциями (I.28,37-38), и функциями (18,19,21), но в целом функции (18,19,21) точнее.



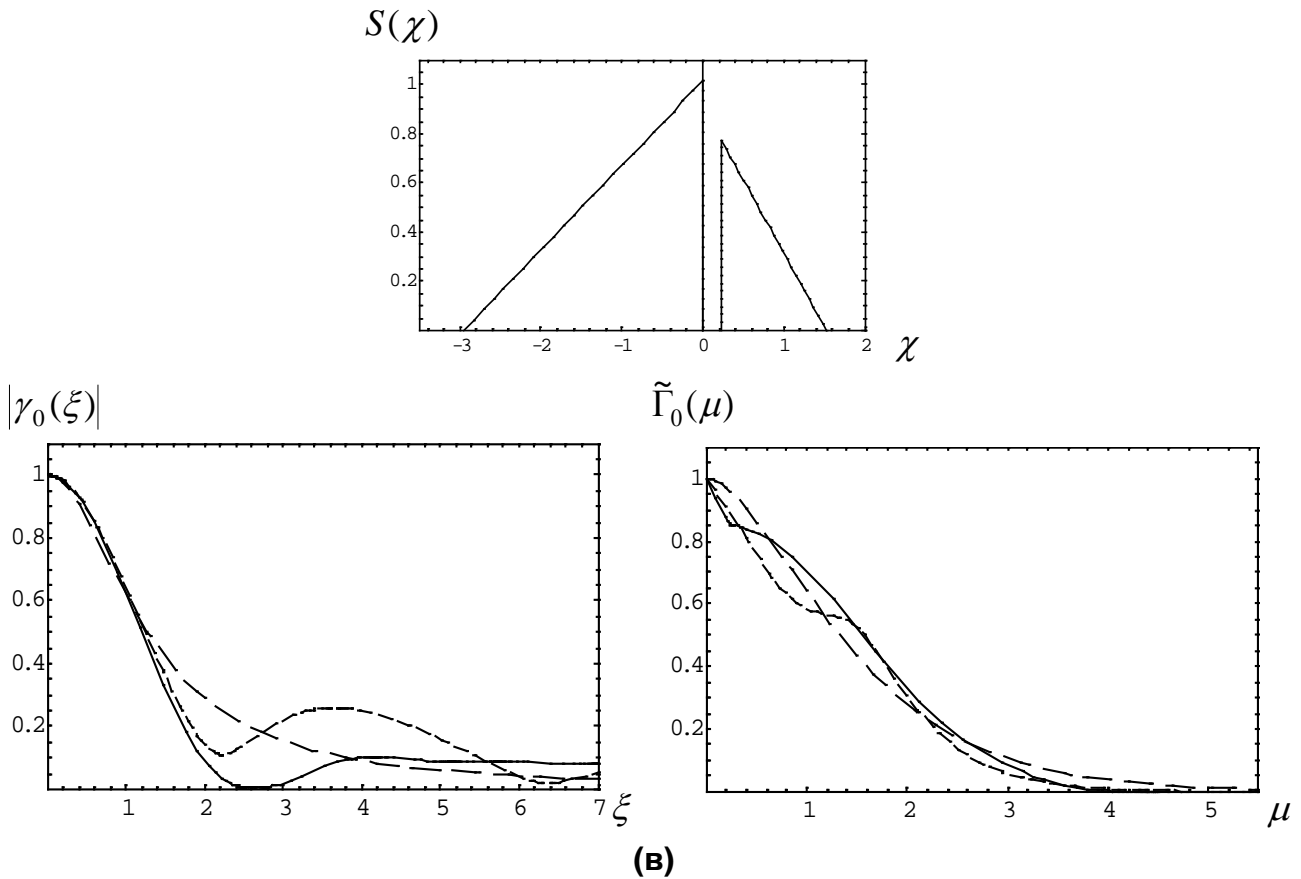


Рис.28. Собственно-нормированные спектры (24) из прямоугольно-треугольных частей разной взаимной ориентации и их характеристики $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$. Спектры пограничны по критериям компактности (1.39,45): $s_{0,5} = \pi/2, s_{0,9} = 1,25\pi$ (а,б) и $s_{0,5} = 1,535(\pi/2), s_{0,9} = \pi$ (в). Параметры спектров: **(а)** – $\lambda = 0,87, \kappa = 0,95, s_1 = 0,62\pi\sigma$; **(б)** – $\lambda = 0,86, \kappa = 0,96, s_1 = 0,58\pi\sigma$; **(в)** – $\lambda = 0,75, \kappa = 0,8, s_1 = 0,46\pi\sigma$. Сплошными линиями изображены точные функции характеристик. Штриховыми с длинными штрихами – универсальные функции компактных спектров (1.28,37), с короткими штрихами – функции (18,19).

Примеры на рис.28 показывают, что нередко не только для спектров одногорбого вида, но и для спектров двугорбого вида критерий компактности (1.45) можно ослабить до условия $s_{0,9} \leq 1,25\pi$, если выполнен критерий (1.39) $s_{0,5} \leq \pi/2$, т.е. считать границей критерия (1.45) $s_{0,9} = (1 \div 1,25)\pi$. Выполнение же (1.39) строго необходимо для компактных спектров. Расчеты для двугорбых спектров показали, что при $s_{0,9} = 1,25\pi$ даже небольшое нарушение (1.39) сразу приводит к заметному отличию точных характеристик от функций (1.28,37-38) и равенству их именно функциям (18,19,21). Образно говоря, во многих случаях компактным можно считать и более протяженный спектр, чем требует критерий (1.45), но «ядро» его должно удовлетворять условию (1.39).

Итак, мы показали с помощью асимметричных спектров (24,28) с асимметричными горбами, что подобие статистических характеристик имеет место и в случае та-

ких спектров, если они удовлетворяют критериям диахромности. Подтвердилось и то, что функции (18,19,21) являются хорошим приближением для нормированных статистических характеристик $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0,\eta)$ случайных процессов с этими спектрами и могут рассматриваться как аналитические представления соответствующих универсальных функций. Если спектры диахромны, то подобие сохраняется при варьировании положения точки разбиения спектра на части в том диапазоне его значений, в котором части удовлетворяют критериям диахромности (22). При уменьшении s_1 до значения $\approx \pi\sigma/2$ рассмотренные диахромные спектры становятся компактными.

Если же критерии (22) не выполнены ни при каком разбиении спектра или же параметры спектра находятся на границах этих критериев, то совпадение точных и приближенных функций менее удачно, и его качество может заметно зависеть от разбиения спектра на части. В таких случаях функции (18,19,21) дают только грубое приближение реальных характеристик.

3. Обсуждение полученных результатов и выводы

Подведем итоги. В работе [5] и ч.1 [6] данной работы мы показали, что для случайных процессов, спектры $S(\Omega)$ которых являются компактными (мы назвали такие процессы монохромными), имеет место приближенное подобие одноименных статистических характеристик этих процессов при различных $S(\Omega)$. Коэффициентом подобия является отношение времен корреляции τ_c случайных процессов, вычисляемых через $S(\Omega)$ по формуле (1.10). Тогда нормированные по определенному правилу с помощью τ_c статистические характеристики с хорошей точностью равны универсальным функциям, достаточно точные аналитические представления которых удалось получить в нескольких вариантах, рассмотрев простые спектры $S(\Omega)$, допускающие аналитический расчет статистических характеристик – см. (1.28,37-38).

В [5] мы получили соотношения для симметричных одnogорбых спектров $S(\Omega)$, а в ч.1 показали, что они применимы и к спектрам более общего вида, не обладающим симметрией и могущих иметь даже более одного горба. Критериями компактности спектра $S(\Omega)$ являются условия (1.39,45) для его собственно-нормированной формы $S(\chi)$: $s_{0,5} \leq \pi/2$ и $s_{0,9} \leq \pi$, где $s_{0,5}, s_{0,9} = \chi_2 - \chi_1$ - протяженности $S(\chi)$. Первая из них

находится из уравнения (1.40) $\int_{-\infty}^{\chi_1} S(\chi)d\chi = \int_{\chi_2}^{\infty} S(\chi)d\chi = 0,5 = 2 \cdot 0,25$ - протяженность по поло-

винной площади, т.к. при этом $\int_{\chi_1}^{\chi_2} S(\chi)d\chi = 1 = 2 \cdot 0,5$ (учитывая, что интеграл от $S(\chi)$

по всей оси равен 2, согласно (1.5)). А вторая – из уравнения аналогичного (1.40)

$\int_{-\infty}^{\chi_1} S(\chi) d\chi = \int_{\chi_2}^{\infty} S(\chi) d\chi = 0,1 = 2 \cdot 0,05$; она является протяженностью по 0,9 площади, т.к. при

этом $\int_{\chi_1}^{\chi_2} S(\chi) d\chi = 1,8 = 2 \cdot 0,9$. Критерий (1.39) взят из анализа прямоугольного спектра

$S(\chi)$ – это его точная протяженность по половинной площади, а критерий (1.45) – из аналитического и численного анализа многих видов спектров.

В случае компактных спектров универсальные функции для нормированных статистических характеристик зависят только от безразмерных аргументов $\xi = \tau / \tau_c$, $\eta = \tau_e / \tau_c$ и $\mu = \omega \tau_c$.

В настоящей части работы мы показали, что полученное в ч.1 подобие статистических характеристик случайных процессов допускает обобщение и на случай некоторых некомпактных спектров, а именно, спектров, представимых в виде двух компактных частей, разнесенных на расстояние, соизмеримое или большее протяженностей каждой из них, и отвечающих определенным критериям - критериям (22).

Пусть спектр процесса некомпактный, т.е. не удовлетворяет условиям компактности (1.39,45) (одному или обоим). И пусть он допускает разбиение на две непересекающихся части $S(\chi) = S_1(\chi) + S_2(\chi)$, каждая из которых компактна в собственно-нормированной форме $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ и удовлетворяет критериям компактности в переменной χ . Последнее утверждение означает, что части $S_{1,2}(\chi)$ удовлетворяют также критериям $s_{0,5i} \leq \pi/2$ и $s_{0,9i} \leq \pi$, где протяженности $s_{0,5i}$ и $s_{0,9i}$ спектров $S_{1,2}(\chi)$ вычисляются по формулам типа (1.40), но в них справа вместо $1/2$ стоят $\lambda/2$ или $\lambda/10$ для $S_1(\chi)$ и $(1-\lambda)/2$ или $(1-\lambda)/10$ для $S_2(\chi)$, где λ - «вес» интеграла от $S_1(\chi)$ в интеграле от $S(\chi)$, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} S_i(\chi) d\chi = \begin{cases} 2\lambda, & i=1 \\ 2(1-\lambda), & i=2 \end{cases}$ (см. (2)).

Некомпактные спектры, удовлетворяющие описанным критериям (22), мы назвали диахромными, и сами критерии (22) называем критериями диахромности. Они сводятся к условиям компактности $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$, плюс (достаточно, но не всегда необходимо) ограничение (23) на параметры λ и κ спектра: $\lambda^2 < \kappa < 1 - (1-\lambda)^2$ ($\kappa \in [0;1]$, согласно (4), - «вес» интеграла от $S_1^2(\chi)$ в интеграле от $S^2(\chi)$), плюс ограничение $s_1 \geq (\pi/2 \div \pi)\sigma$ на параметр s_1 - расстояние между центрами $S_{1,2}(\chi)$, вычисляемым по правилу (33). Здесь $\sigma = \lambda^2/\kappa + (1-\lambda)^2/(1-\kappa)$.

Как и для компактных спектров, статистические характеристики $|\gamma_0(\tau)|$, $\Gamma_0(\omega)$ и $\Phi(0, \tau_e)$ случайных процессов с различными диахромными спектрами, но с одинаковыми λ , κ и s_1 тоже с хорошей точностью подобны друг другу. И коэффициент подобия любой пары таких процессов также равен отношению времен корреляции τ_c этих процессов. А значит, в нормированном с помощью τ_c виде характеристики $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ тоже можно описывать безразмерными универсальными функциями, зависящими теперь не только от безразмерных аргументов ξ , μ , η , но и от безразмерных параметров спектров λ , κ и s_1 .

Еще в работе [5] мы аналитически рассчитали нормированные статистические характеристики в случае нескольких симметричных спектров $S(\chi)$ (четных функций $S(\chi)$), состоящих из двух тоже симметричных $S_{1,2}(\chi)$, возможно пересекающихся и разнесенных на расстояние s между их центрами симметрии. Это соответствует $\lambda = \kappa = 1/2$, $s_1 = s_{0,5} \cong s$. Полученные характеристики практически совпали между собой при одинаковых s . При $s \rightarrow 0$ они переходили в характеристики, отвечающие компактным спектрам. Этот переход проявлялся, начиная с $s \approx 1,5$, в согласии с критерием компактности (I.39).

Там же в [5] для симметричных $S(\chi)$ с несимметричными одинаковыми $S_{1,2}(\chi)$ в виде несимметричных экспоненциальных и гауссовых спектров ($\lambda = \kappa = 1/2$), мы показали, что подобие характеристик сохраняется и для таких спектров; если у них равны не расстояния между вершинами s , а расстояния s_1 между точками, делящими площади $S_{1,2}(\chi)$ пополам. При этом $s_{0,5} = s_1$ согласно (I.40) и (33). Численно подтвердился и переход к характеристикам, отвечающим компактным спектрам, при выполнении критерия (I.39).

В настоящей части работы мы сперва получили обобщенные выражения (18,19,21) для функций, описывающих нормированные статистические характеристики $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0, \eta)$ случайных процессов с диахромными спектрами, состоящих из разных по размеру и форме, но симметричных частей $S_{1,2}(\chi)$. Это было сделано путем вывода формул для указанных характеристик из общих формул (I.13-16), в которых использовались универсальные функции, отвечающие компактным спектрам, и, чтобы получить результаты интегрирования в аналитическом виде, проводился подбор и замена подходящих для этого аналитических представлений таких универсальных функций из имеющегося набора (I.28,37-38). Функции (18,19,21) зависят от λ , κ и s_1 . И здесь уже $s_{0,5} \neq s_1$. Полученные формулы (18,19,21) представили собой разложение статистических характеристик случайных процессов с диахромными

ми спектрами из симметричных частей по статистическим характеристикам процессов с монохромными спектрами.

Рассчитав функции $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ для некоторых несимметричных спектров $S(\chi)$ и с симметричными и с несимметричными частями $S_{1,2}(\chi)$ и сравнив их с функциями (18,19,21), мы показали, что последние являются аналитическими представлениями универсальных функций, описывающих нормированные статистические характеристики процессов с произвольными диахромными спектрами в пространстве переменных ξ , μ , η , дополненных параметрами λ , κ и s_1 .

Точные нормированные статистические характеристики не зависят от разбиения спектра на части $S_{1,2}(\chi)$; значит, не должны зависеть и универсальные функции, их описывающие. Но функции (18,19,21) и по виду и фактически зависят от λ , κ и s_1 (см. рис.9,20), которые в свою очередь подчас заметно зависят от разбиения спектра. На примере диахромных спектров с такой зависимостью мы показали, что функции (18,19,21) почти не меняются при подстановке разных троек λ , κ и s_1 , удовлетворяющих критериям диахромности рассмотренных конкретных спектров. Это обусловлено тем, что допустимая тройка параметров $\{\lambda, \kappa, s_1\}$ задает определенный облик диахромного спектра, и множество значений параметров в окрестности этой тройки, соответствующее выполнению критериев диахромности при различном разбиении спектра на две части, близко для разных конкретных реализаций спектров, отвечающих указанной тройке параметров. А функции (18,19,21) почти постоянны на таком множестве. Образно говоря, функции (18,19,21) обладают свойством приближенного равенства на некотором множестве наборов λ , κ и s_1 , отвечающих различному разбиению соответствующего диахромного спектра на допустимые критериями диахромности части. А значит, фактически статистические характеристики случайных процессов, отвечающих диахромным спектрам, обладают подобием не только при одинаковых наборах параметров спектров λ , κ и s_1 , но и на некотором множестве таких наборов, соответствующих разбиению спектра на части, удовлетворяющие (22). Область параметров λ , κ и s_1 , соответствующих критериям (22) диахромности спектра можно по максимуму выделить в общем виде - это ограничения (23) $\lambda^2 < \kappa < 1 - (1 - \lambda)^2$ на λ и κ и $s_1 \geq \pi\sigma$ на s_1 . Но пока мы не можем в общем виде для каждого набора $\{\lambda, \kappa, s_1\}$ определить его окрестность, в которой подобие сохраняется.

Итак, для вычисления статистических характеристик случайного процесса с произвольным диахромным спектром достаточно знать лишь четыре параметра такого спектра - τ_c , λ , κ , s_1 , или, с учетом равенства $\kappa/\lambda^2 = \tau_{c1}/\tau_c$, эквивалентный набор параметров τ_c , λ , τ_{c1} , s_1 . При одинаковых значениях параметров соответствующие характеристики обладают свойством приближенного подобия с коэффициентом подобия, равным отношению τ_c . Нормированные с помощью τ_c характери-

ки описываются универсальными функциями, зависящими от безразмерных аргументов $\xi = \tau/\tau_c$, $\eta = \tau_e/\tau_c$, $\mu = \omega\tau_c$ и параметров λ , κ и s_1 . Мы получили аналитические представления (18,19,21) этих универсальных функций, выраженные через универсальные функции компактных спектров (I.28,37-38). Они инвариантны по отношению к выбору λ , κ и s_1 , соответствующего делению диахромного спектра на части, удовлетворяющие критериям диахромности (22).

Нарушение критериев диахромности (22) для спектра обычно ухудшает совпадение точных нормированных статистических характеристик с рассчитанными по формулам (18,19,21), хотя нередко последние все же можно использовать как оценочные, т.к. они отражают и основные черты, и масштаб точных характеристик. Иногда и для спектров с параметрами за пределами ограничений (22) функции (18,19,21) могут быть хорошими аппроксимациями статистических характеристик.

Нормированные статистические характеристики процессов с диахромными спектрами переходят в характеристики процессов с компактными спектрами в двух случаях – при уменьшении λ и κ (или $1-\lambda$ и $1-\kappa$) до значений много меньших единиц и при уменьшением s_1 до величины $\leq (\pi/2)\sigma$.

Первый случай означает малую роль одной части спектра по сравнению с другой. При этом при $\lambda \rightarrow 0$ (или $(1-\lambda) \rightarrow 0$) и κ , удовлетворяющем критериям (22), функции (18,19,21) математически стремятся к функциям (I.28,37-38). Вторым случаем означает слияние двух частей спектра в один компактный спектр. При уменьшении s_1 функции (18,19,21), вообще говоря, не преобразуются в функции (I.28,37-38) и не стремятся к ним при $s_1 \rightarrow 0$. Они сближаются с этими функциями по значениям при $s_1 \approx (\pi/2)\sigma$. Поэтому переход второго типа следует описывать скачком, переходя при соответствующих s_1 от функций (18,19,21) к функциям (I.28,37-38). Граница перехода от одного вида функций к другому - $s_1 \approx (\pi/2 \div \pi)\sigma$ - зависит от λ , κ и формы спектра. Это видно из рис.7, где для приведенных пограничных примеров $s_1/\sigma \cong 0,5 \div 0,67$, и из рис.28, где $s_1/\sigma \cong 0,46 \div 0,62$. Точность аппроксимации реальных функций универсальными (и теми и другими) в пограничной по s_1 ситуации обычно хуже.

Полученные универсальные функции (18,19,21) для статистических характеристик процессов с диахромными спектрами выражены через универсальные функции, отвечающие компактным спектрам - U_γ , U_Γ и U_Φ , в качестве которых предполагалось брать любые найденные их аналитические представления (см. табл.1-3 в [5]). На самом деле, т.к. представления эти все же немного различаются; будут различаться и функции (18,19,21). Но есть и другие ограничения на выбор функций $U_{\gamma,\Gamma,\Phi}$ для подстановки в (18,19,21). Еще в работе [3] мы показали, что функции $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$

должны удовлетворять двум условиям: $\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^2(\xi) d\xi = 2$ (вытекает из уравнения (1.14)

и равенства $\tilde{\Gamma}_0(0)=1$) и $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_0(\mu) d\mu = \pi$ (вытекает из уравнения (1.16) и равенства $\Phi(0,0)=1/2$). Эти соотношения накладывают ограничения и на выбор функций $U_{\gamma,\Gamma,\Phi}$ и на параметры λ , κ и s_1 в (18,19,21).

Из формулы (18) для $|\gamma_0(\xi)|^2$ следует, что равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^2(\xi) d\xi = 2$ для этой

функции требует выполнения равенства $\int_{-\infty}^{\infty} U_{\gamma}(\lambda^2 \xi / \kappa) U_{\gamma}((1-\lambda)^2 \xi / (1-\kappa)) \cos(s_1 \xi) d\xi = 0$.

Представления (1.28) для U_{γ} этому условию не удовлетворяют. В качестве U_{γ} нужно брать функции, полученные для компактных спектров со строго ограниченной областью частот. Из всех рассмотренных в [5] собственно-нормированных компактных спектров такое равенство может быть выполнено для прямоугольного, равнобедренно-треугольного и параболического спектров. Для этих трех спектров точное равенство нулю интеграла имеет место (см. [7-8]) при $s_1 \geq \pi\sigma/2; 2\pi\sigma/3; 3\pi\sigma/5$, соответственно, что, естественно, совпадает с ограничениями, вытекающими из соображений неперекрывания частей двухкомпонентного спектра (см.(11,12)). Из рис.2 и табл.1 в [3] видно, что наиболее удачен из этих трех выбор представления, отвечающего равнобедренно-треугольному спектру $U_{\gamma}(\xi) = \gamma_0^{tr}(\xi) = (\sin(\pi\xi/3)/(\pi\xi/3))^2$, т.к. эта функция проста, неотрицательна и имеет малые затухающие колебания на «хвосте». Ее выбор накладывает ограничения $s_1 \geq 2\pi\sigma/3 \cong 0,67\pi\sigma$ на параметр s_1 в (18), что совпадает с (12).

Используя (19) для $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, легко показать, что $\int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}_0(\mu) d\mu = \frac{\pi}{2}$ строго выполнимо

только тогда, когда знаменатель в (19) равен единице, т.е. когда $U_{\Gamma}(2s_1/\sigma) = 0$ (т.к. интеграл от числителя равен $\pi/2$ при использовании $U_{\Gamma}(\mu)$, полученного с помощью любого компактного спектра). Т.е. в (19) нужно не вводить нормировочный множитель в знаменателе, а брать подходящие U_{Γ} и s_1 (а также опустить первое слагаемое в квадратной скобке в (19), как равное нулю). Из рис.3 и табл.2 в [3] видно, что наиболее удачными здесь являются выбор $U_{\Gamma}(\mu) = \tilde{\Gamma}_0^p(\mu)$ ($s_1 \geq 0,6\pi\sigma$) или $U_{\Gamma}(\mu) = \tilde{\Gamma}_0^{tr}(\mu)$ ($s_1 \geq 2\pi\sigma/3$), т.е. функций, полученных с помощью параболического или треугольного спектров. Обе они - достаточно простые полиномы на ограниченных отрезках оси μ

В (21) качестве $U_{\Phi}(\eta)$ можно брать $\Phi(0, \eta)$ для любого компактного спектра.

4. Математические вопросы

Уже отмечалось в работах [5-6] по исследованию подобия статистических характеристик монохромных процессов, что, несмотря на большой объем расчетов и охват многих качественно различных ситуаций, остается без ответа ключевой вопрос – **почему** определенное формулой (I.10) время корреляции случайного процесса τ_c оказалось таким универсальным нормировочным параметром и коэффициентом подобия статистических характеристик? Свойство подобия установлено нами численно. Собственно-нормированный спектр случайного процесса $S(\chi)$ (I.11), от которого зависят рассмотренные нормированные статистические характеристики, оказался для них бесструктурным объектом, почти не влияющим на их численные значения.

Еще больше вопросов ставит анализ статистических характеристик диахромных процессов. Из численных расчетов не вызывает сомнения факт наличия подобия и в этих случаях. Значит, опять статистические характеристики могут быть представлены в безразмерном виде и описываться универсальными функциями, зависящими, в отличие от универсальных функций в случае компактных спектров, от найденных в данной части работы нескольких геометрических параметров спектров. Т.е. универсальные функции в случае диахромных спектров уже содержат некую информацию о структуре собственно-нормированного спектра. И, наоборот, заключенная в геометрических параметрах структура спектра сказывается на универсальных функциях.

Функции $|\gamma_0(\xi)|$ являются Фурье-образами спектра $S(\chi)$. В ч.1 мы установили, что в случае компактных спектров подобие $|\gamma_0(\xi)|$ проявляется в области значений $|\gamma_0(\xi)| \geq 0,3 \approx 1/\pi$, где отвечающие различным таким спектрам $|\gamma_0(\xi)|$ практически не различаются. Эта область отвечает значениям $\xi \leq \pi/2$, значит, влияние более высоких гармоник спектра на поведение функций $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$, которые согласно (I.14,16) выражаются через $|\gamma_0(\xi)|$, незначительно. Совпадение $|\gamma_0(\xi)|$ с U_γ в области $\xi \leq \pi/2$ обеспечивает совпадение функций $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ с их универсальными функциями U_Γ и U_Φ во всех областях их определения. В случае компактных спектров функции $|\gamma_0(\xi)|$ в области $\xi \leq \pi/2$ монотонно спадают при увеличении ξ (ширина спада на полувысоте от максимума $\approx 1,3$). А, значит, с точки зрения формы кривых нормированных характеристик $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ и функции $|\gamma_0(\xi)|$ и сами собственно-нормированные монохромные спектры фактически бесструктурны. Ненормированные же статистические характеристики несут информацию только о τ_c .

В случае диахромных спектров определяющее влияние на вид функций $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ тоже оказывает область, где $|\gamma_0(\xi)| \geq 0,3$. Но у диахромных спектров $|\gamma_0(\xi)|$ в

этой области помимо максимума в нуле аргумента имеется дополнительный максимум (а, значит, и минимум) - см. рис.35 в разделе 5.

Появление второго максимума говорит о том, что случайный процесс можно рассматривать как совокупность двух монохромных процессов на разных несущих частотах. В этом и проявляется та структура диахромного спектра, которая отражается на виде универсальных функций статистических характеристик с таким спектром, выраженных с помощью трех безразмерных геометрических параметров диахромного спектра через универсальные функции, отвечающие компактным спектрам.

Полученные результаты породили новые вопросы. Начнем с критериев принадлежности некомпактных спектров к диахромным. Напомним, что к компактным мы отнесли спектры, удовлетворяющие критериям (I.39,45) $s_{0,5} \leq \pi/2$ и $s_{0,9} \leq \pi$. Их нормированные статистические характеристики описываются универсальными функциями (I.28,37-38). Остальные спектры некомпактные. К диахромным среди них мы отнесли спектры, которые можно разбить на две части, удовлетворяющие условиям компактности (I.39,45) как в собственной нормировке, так и в нормировке на τ_c всего спектра - критерии (22). Эти критерии характеризуют не только компактность частей, но и их соразмерность. Численно мы показали, что такие критерии работают и для двугорбых спектров и для рассмотренных спектров более сложного вида. Однако в численных экспериментах невозможно рассмотреть все каверзные случаи. Немало тому примеров, когда функции (18,19,21) подходят и для спектров, выходящих за рамки условий (22). Поэтому вопрос правильности выбора критериев и их математическая обоснованность остаются, вообще говоря, открытыми.

На рис.29-31 приведены три примера, иллюстрирующие сказанное. Для рис.29 взят явно двугорбый спектр, симметричный, состоящий из трех состыкованных прямоугольников. В этом случае

$$|\gamma_0(\xi)| = \left| (1-h)\gamma_0^r(\beta\xi) + h(1+2l)\gamma_0^r(\beta\xi(1+2l)) \right| / (1+2lh);$$

$$\tilde{\Gamma}_0(\mu) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1+2lh}{1+2lh^2} \right) \begin{cases} -\mu(2h^2 - 2h + 1) + \pi\beta(1+2lh^2), & 0 \leq \mu/\pi \leq l\beta \\ -\mu + \pi\beta(1+2lh), & l\beta \leq \mu/\pi \leq \beta \\ \mu(h^2 - 2h) + \pi\beta(-h^2 + 2h(1+l)), & \beta \leq \mu/\pi \leq \beta(1+l) \\ -\mu h^2 + \pi\beta h^2(1+2l), & \beta(1+l) \leq \mu/\pi \leq \beta(1+2l) \end{cases} ;$$

$$\Phi(0,\eta) = \left\{ (1-h)^2 \Phi_r(0,\beta\eta) + h^2(1+2l)^2 \Phi_r(0,\beta(1+2l)\eta) + \right. \\ \left. + 2h(1-h)[(1+l)^2 \Phi_r(0,\beta(1+l)\eta) - l^2 \Phi_r(0,\beta l\eta)] \right\} / (1+2lh)^2,$$

где h и l - отношение, соответственно, высот и ширин внешних и центрального прямоугольников, $\beta = (1+2lh^2)/(1+2lh)^2$, а функция $\Phi_r(0,\eta)$ монохромного прямоугольного спектра приведена выше в разделе 2.3 (спектр **1**). Если $h > 1$ (двугорбый спектр), то $s_{0,5\min} > \pi/2$ и критерий (I.39) не выполнен. Максимум $s_{0,5} = \pi(1+h)/4$ достига-

ется в конфигурации $lh=0,5$. Тогда $s_{0,9} = 0,25\pi(1+h)(0,8+h)/h$ и монотонно возрастает с ростом h . Значение $s_{0,9} = \pi$, соответствующее границе критерия (1.45), достигается при $h = 1,1 + \sqrt{0,41} \approx 1,74$ и $l \approx 0,287$; и тогда максимум $s_{0,5}$ равен $1,37(\pi/2)$.

На рис.29 представлены графики функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ именно для такого спектра с параметрами, дающими максимум $s_{0,5}$ при $s_{0,9} = \pi$. Спектр не компактен, и это видно из рисунка - его нормированные характеристики ближе функциям (18,19,21) и заметно отличаются от (1.28,37-38). Но и критериям (22) он не удовлетворяет, т.к. его одинаковые собственно-нормированные части $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ не компактны – у них не выполнен критерий (1.39) на «ядро». Т.е. спектр на рис.29 и не компактный и не диахромный, но его характеристики приемлемо описываются универсальными функциями (18,19,21) диахромного спектра. Мы достигнем более точного описания характеристик, разбивая этот спектр на большее число частей, о чем речь пойдет в разделе 5, но полученные поправки незначительны.

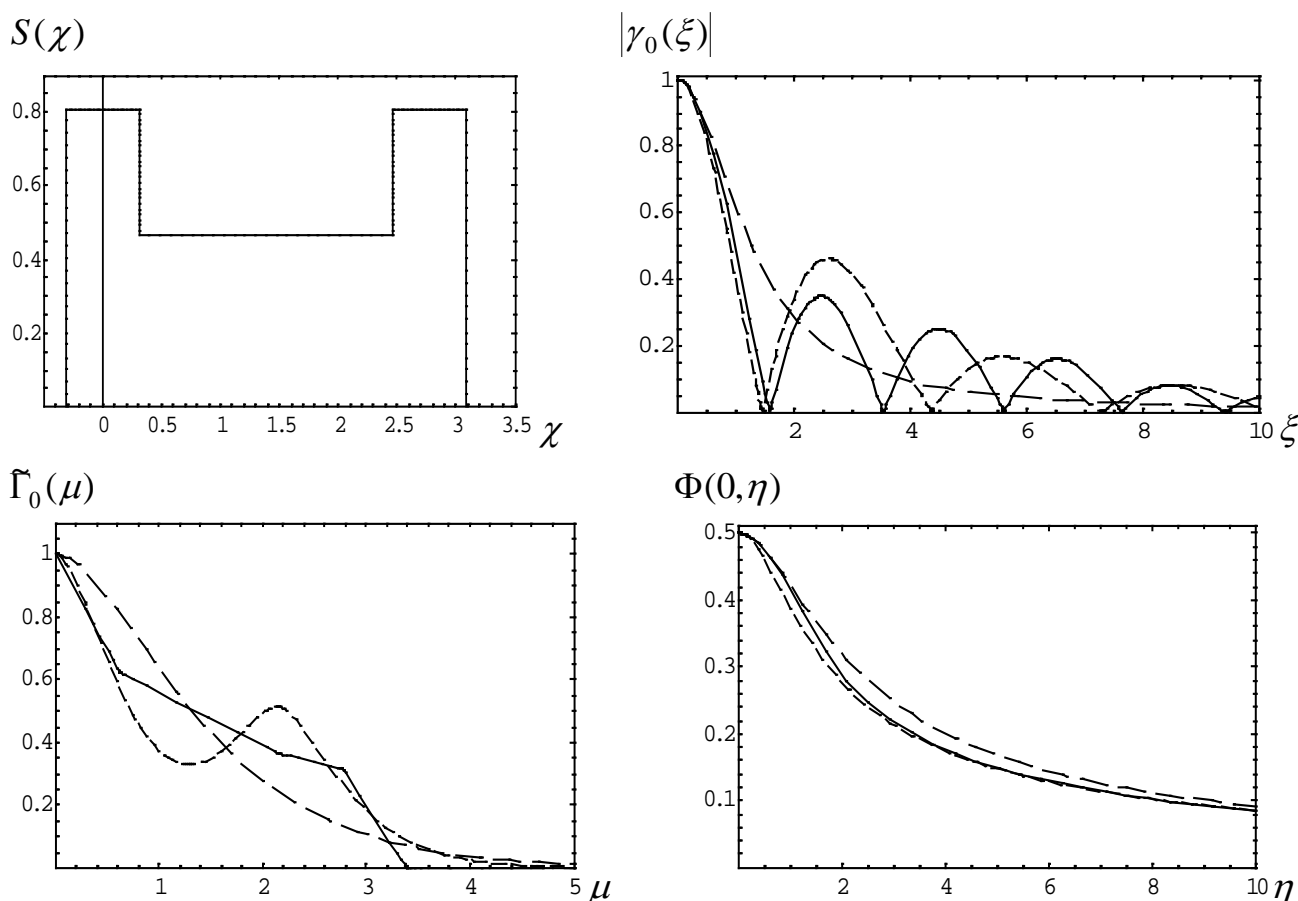


Рис.29. Статистические характеристики случайного процесса с двугорбым симметричным спектром, состоящим из трех состыкованных прямоугольных спектров при $h = 1,74$ и $l \approx 0,287$. В такой конфигурации достигается максимум $s_{0,5} = 1,37(\pi/2)$ при $s_{0,9} = \pi$. Как у диахромного спектра его параметры равны

$\lambda = \kappa = 0,5$, $s_1 = s_{0,5} = \pi\beta = 0,685\pi\sigma$ - протяженность внутреннего прямоугольного спектра. Сплошные линии на графиках характеристик - точные функции. Штриховые линии с длинными штрихами – универсальные функции компактных спектров (1.28,37-38), с короткими штрихами – универсальные функции диахромных спектров (18,19,21).

На рис.30 представлены графики функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ для спектра $S_{hL}(\chi) = (4/\pi)/(1+\chi^2)$; $\chi \geq 0$ («пол-Лоренцевский» спектр), уже приводившегося в ч.1. Он одnogорбый и некомпактный по обоим критериям (1.39,45), его характеристики плохо аппроксимируются универсальными функциями, отвечающими компактным спектрам, – см. рис.1.9. Этот спектр и не диахромный, т.к. его нельзя разбить на две компактные части $S_{1,2}$. Левая часть S_1 удовлетворяет критериям (22) при $0 < \lambda \leq 0,7$, а правая S_2 не удовлетворяет ни одному условию (22) ни при каких λ . Тем не менее, рассмотрение этого спектра как диахромного заметно улучшает качество аппроксимации его точных нормированных характеристик универсальными функциями. Причем, наилучшая аппроксимация достигается как раз при $\lambda = 0,7$. При этом $s_1 < 0,5\pi\sigma$.

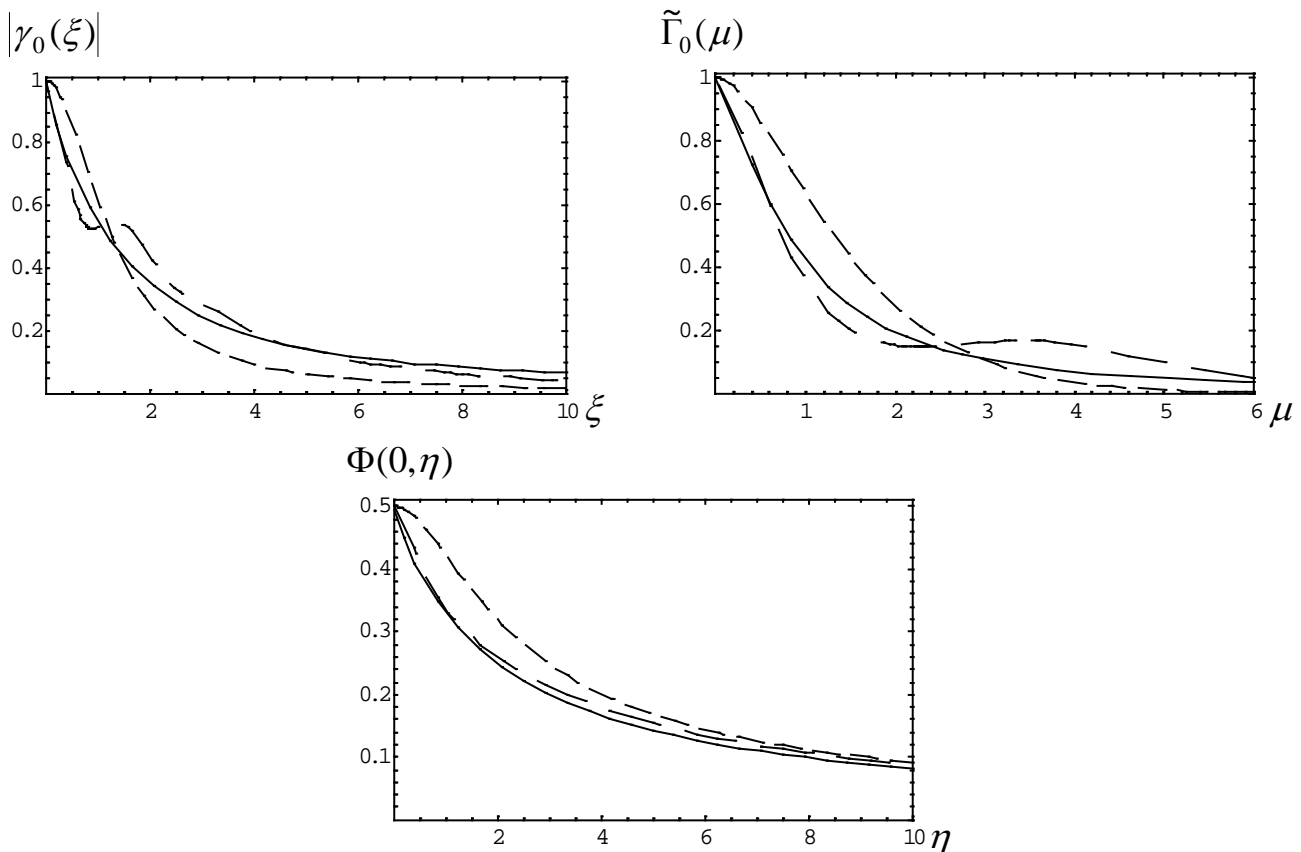
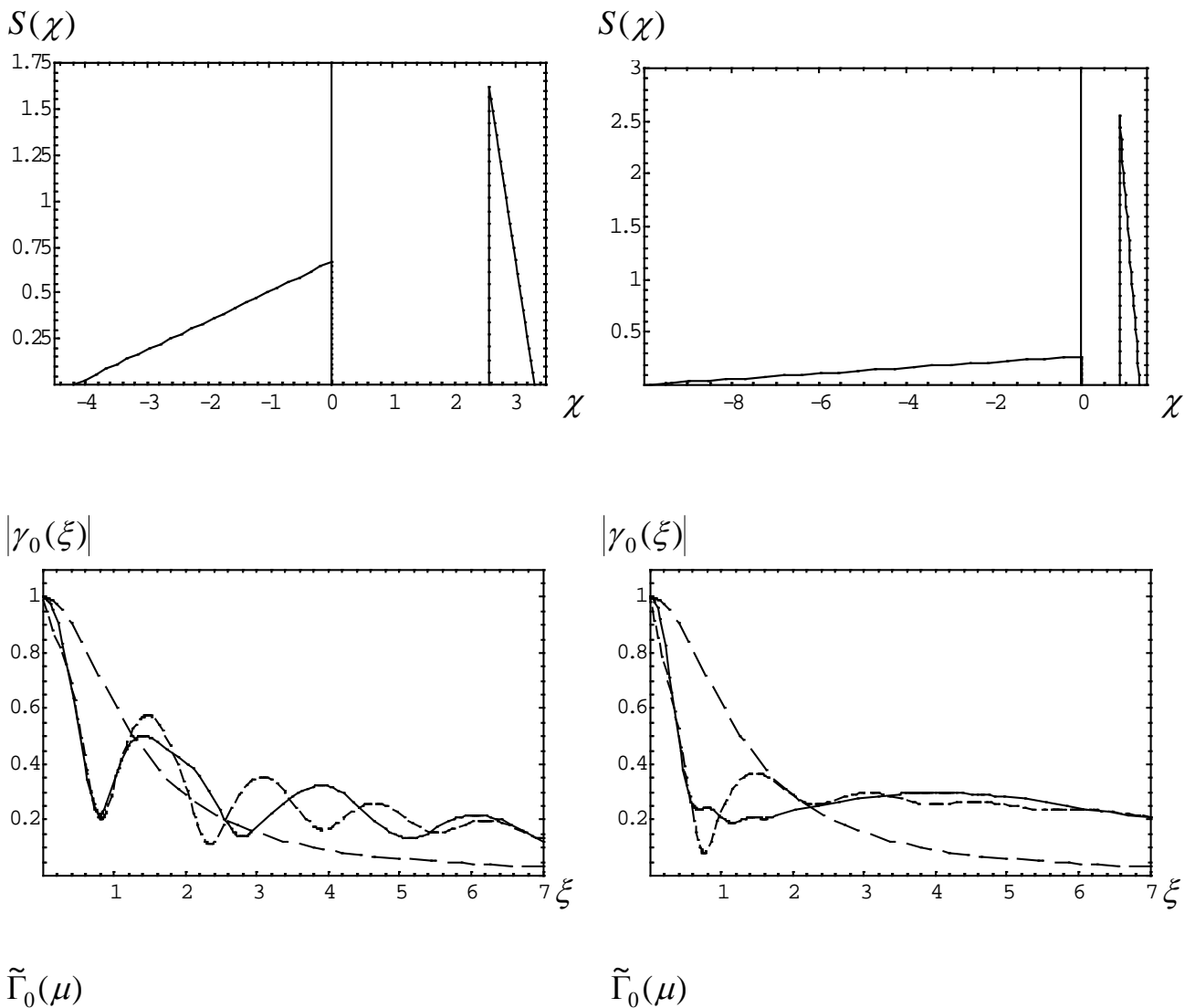


Рис.30. Статистические характеристики случайного процесса со спектром $S_{hL}(\chi) = (4/\pi)/(1+\chi^2)$; $\chi \geq 0$ («пол-Лоренцевский» спектр). Сплошные линии - точные функции. Штриховые линии с короткими штрихами – универсальные функции (1.28,37-38), отвечающие компактным спектрам; с длинными штрихами – универсальные функции (18,19,21), отвечающие диахромным спектрам при $\lambda = 0,7$. При этом $\kappa = \lambda + (\sin \pi\lambda)/\pi \cong 0,96$, $\sigma = 2,63$ и $s_1 = 3,55 = 0,43\pi\sigma$.

На рис.31 показаны статистические характеристики случайного процесса с некомпактным спектром (24), состоящим из двух прямоугольно-треугольных спектров с прямыми углами внутри суммарного спектра. Критерием диахромности такого спектра почти точно служит неравенство (23). При $\lambda = 0,7$ мы варьировали κ от значений, удовлетворяющих (23), до значений далеко за его границей. Для левого спектра рис.31 взято $\kappa = 0,49$ точно на границе критерия (23), а для правого - $\kappa = 0,2$, не удовлетворяющее (23). Сравнение точных нормированных характеристик, отвечающих этим спектрам, с универсальными функциями (18,19,21) показывает в обоих случаях хорошее совпадение их для $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, не говоря уже о $\Phi(0,\eta)$. Хотя, конечно, детали структур точных функций не прорисовываются на графиках приближенных.



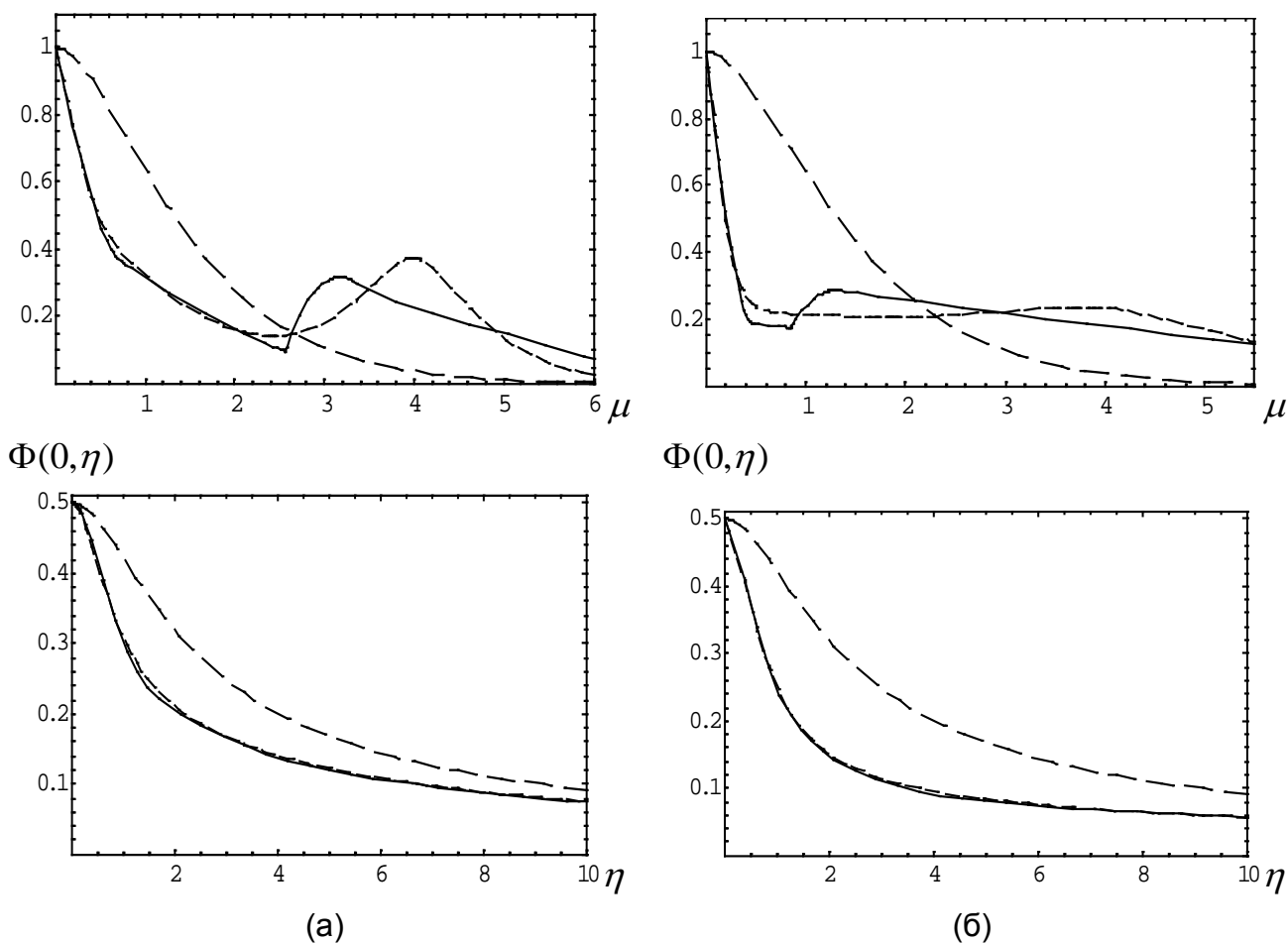


Рис.31. Статистические характеристики случайного процесса с некомпактным спектром (24), состоящим из двух прямоугольно-треугольных спектров. Для спектра (а) $\lambda = 0,7$; $\kappa = 0,49$; $s_1 = 4 = 1,1\pi\sigma$ - параметры удовлетворяют критериям диахромности на их границе. Для спектра (б) $\lambda = 0,7$; $\kappa = 0,2$; $s_1 = 4 = 0,5\pi\sigma$ - критерии диахромности не выполнены. Сплошные линии на графиках характеристик - точные функции. Штриховые линии с длинными штрихами – универсальные функции компактных спектров (1.28,37-38), с короткими штрихами – универсальные функции диахромных спектров (18,19,21).

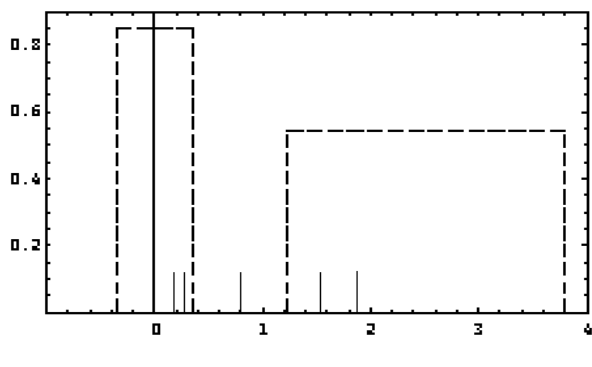
Рис.29-31 показывают применимость функций (18,19,21) для спектров, не удовлетворяющих критериям диахромности (22). В других случаях (см., например, рис.15) при нарушении (22) отличия точных и приближенных кривых оказываются все же весьма заметными. В то же время, когда мы взяли спектр из двух прямоугольников с параметрами λ , κ и s_1 с рис.15, совпадение точных и приближенных кривых стало намного лучше. По-видимому, у процессов с недиахромными некомпактными спектрами в статистических характеристиках проявляются структурные элементы, не отслеживаемые функциями (18,19,21), но для каких-то спектров они проявляются не сильно; во всяком случае, функции (18,19,21) вполне можно использовать для описания статистических характеристик процессов с такими спектрами как оценочные.

Второй важный вопрос анализа диахромных спектров – математическое обоснование инвариантности универсальных функций (18,19,21) для таких спектров при изменении их параметров λ , κ и s_1 , возникающем при различном разбиении спектра на две неперекрывающиеся компактные части. Выше мы высказали соображения о причинах этой инвариантности – слабой зависимости функций (18,19,21) от параметров на множестве тех их значений, которые не нарушают критерии диахромности (22) спектра, и усиление этой зависимости, приводящее к ухудшению совпадения точных нормированных характеристик (не зависящих от параметров) и функций (18,19,21) (только от параметров и зависящих) при разбиении с нарушением (22). Это подтверждают два примера численных экспериментов на рис.32-33 со спектрами в виде одного и двух прямоугольников.

На рис.32 показан один из многих примеров деления на разные части спектра из двух прямоугольников. Приведена функция $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (19); для функций (18,21) ситуация аналогична.

Две правые и две левые точки разбиения на рис.32а. отстоят от внутренних краев соответствующих прямоугольников на $1/8$ и $1/4$ части их ширин. Для всех пяти взятых точек универсальные функции близки, хотя кроме центральной, лишь для второй слева выполнены критерии (22). При дальнейшем расширении диапазона положения точек деления отличие функций станет уже заметным. Все такие точки попадают в область выполнимости (23), что показывает недостаточность (23) для выполнения (22). Границами компактности $S_{1,2}(\chi)$ в нормировке на τ_c всего спектра ($s_{0,5i} \leq \pi/2$ и $s_{0,9i} \leq \pi$) служат точки, отстоящие на $1/(8,55)$ часть ширины от правого края левого прямоугольника и на $1/(9,35)$ часть от левого края правого прямоугольника, а границами компактности собственно-нормированных $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$, - соответственно, на $1/(8,14)$ часть от края левого прямоугольника и на $1/(44,33)$ часть от края правого прямоугольника. В данном примере, как и на рис.29-31, применимость функций (18,19,21) допускает заметный выход за рамки требований (22) диахромности спектра.

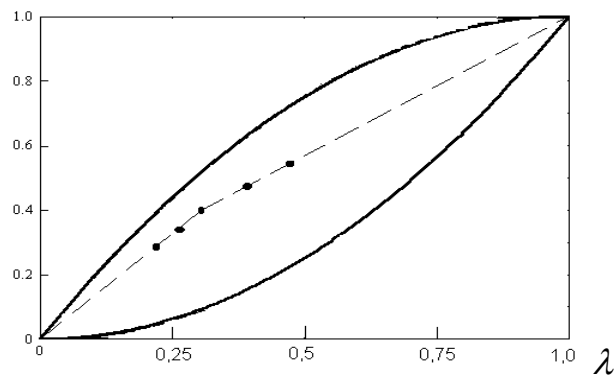
$S(\chi)$



(а)

$\tilde{\Gamma}_0(\mu)$

κ



(б)

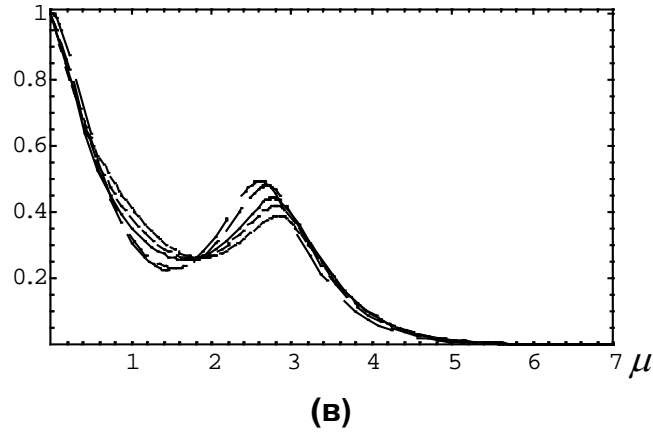


Рис.32. (а) - спектр $S_1(\chi)$ из двух прямоугольных спектров при $\lambda = 0,3, \kappa = 0,4, s = 2,8$. Вертикальными прямыми показано разбиение спектра на $S_{1,2}(\chi)$. **(б)** – связь (пунктирная линия) параметров λ и κ при произвольном разбиении спектра на $S_{1,2}(\chi)$. Точками отмечены случаи, соответствующие разбиению на рис.(а). Значения s_1 при этом равны (слева направо): $2,87 = 0,9\pi\sigma$; $2,83$; $2,80$; $2,70$; $2,61 = 0,8\pi\sigma$, λ увеличивается в 2 раза, а κ в 1,8. Сплошными линиями ограничена область, удовлетворяющая (23) (рис.6). **(в)** – графики универсальной функции (19) для $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, рассчитанные для λ и κ точек с рис.(б). Сплошная линия соответствует средней точке - разбиению спектра прямой, проходящей между прямоугольниками, у штриховых линий длина штрихов возрастает для точек с рис.(б) слева направо.

На рис.33 приведен пример разбиения на две части прямоугольного спектра. Его собственно-нормированная спектральная плотность (см. [5]) имеет вид прямоугольника высотой $2/\pi$ и шириной π ($s_{0,5} = \pi/2, s_{0,9} = 0,9\pi$). Этот спектр компактный, его статистические характеристики приведены в [5] и используются нами как варианты представлений универсальных функций для процессов с компактными спектрами (1.28,37-38). Разобьем мысленно этот прямоугольник вертикальной прямой и представим спектр состоящим из двух слившихся прямоугольников одинаковой высоты. Естественно, на характеристиках спектра это никак не скажется. Легко видеть, что у такого «двугорбого» спектра $\lambda = \kappa, s_1 = \pi/2, \sigma = 1$ и критерии (22) удовлетворяются для всех $0 \leq \kappa \leq 1$. Используя для него функции (18,19,21), получим соотношения

$$\left(\gamma_0^r(\xi)\right)^2 \approx \kappa^2 U_\gamma^2(\kappa\xi) + (1-\kappa)^2 U_\gamma^2((1-\kappa)\xi) + 2\kappa(1-\kappa)U_\gamma(\kappa\xi)U_\gamma((1-\kappa)\xi)\cos(\pi\xi/2), \quad (36)$$

$$\tilde{\Gamma}_0^r(\mu) \approx \frac{\kappa U_\Gamma^2(\mu/\kappa) + (1-\kappa)U_\Gamma^2(\mu/(1-\kappa)) + 2\kappa(1-\kappa)\left[U_\Gamma\left(2\left(\mu + \frac{\pi}{2}\right)\right) + U_\Gamma\left(2\left|\mu - \frac{\pi}{2}\right|\right)\right]}{1 + 4\kappa(1-\kappa)U_\Gamma(\pi)}, \quad (37)$$

$$\Phi_r(0,\eta) \approx \kappa^2 U_\Phi(\kappa\eta) + (1-\kappa)^2 U_\Phi((1-\kappa)\eta) + 2\kappa(1-\kappa)[2U_\Phi(\eta) - U_\Phi(\eta/2)]; \quad (38)$$

причем (36) - точное равенство при $U_\gamma = \gamma_0^r$ и приближенное для остальных представлений, а (37-38) - приближенные при любых представлениях. Три соотношения (36-

38) должны приблизительно выполняться при любом $0 \leq \kappa \leq 1$. И они действительно выполняются – см. рис.33 (для других представлений графики похожи). Показаны лишь кривые для $0 \leq \kappa \leq 1/2$, т.к. (36-38) симметричны относительно κ и $1 - \kappa$. Приближенные равенства (36-38) иллюстрируют свойства функций (1.28,37-38). Видно, что точность равенств (36-38) зависит от аналитических представлений U , и, в согласии с высказанными выше соображениями, в качестве U_γ и U_Γ лучше использовать представления, полученные с помощью равнобедренного треугольного спектра.

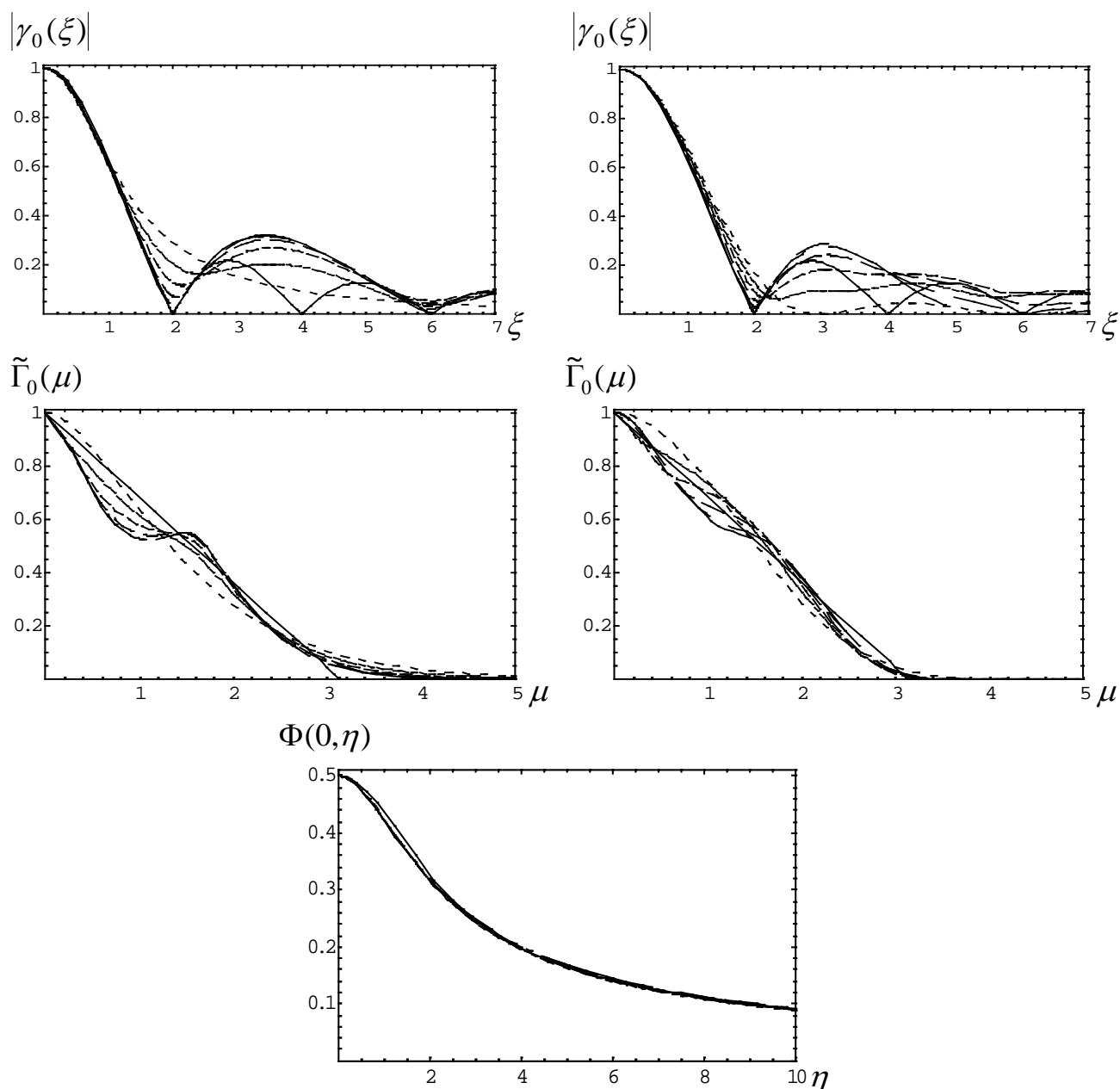


Рис.33. Иллюстрация точности выполнения приближенных равенств (36-38). Сплошные линии – графики левых частей равенств. Кривые с самыми короткими штрихами – правые части равенств при $\kappa = 0$ (т.е. функции компактного спектра). Остальные штриховые линии (в порядке роста длины штрихов) соответствуют правым частям (36-28) при $\kappa = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$. На ле-

вых рисунках для $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ - $U_\gamma = \gamma_0^e$ и $U_\Gamma = \tilde{\Gamma}_0^e$; на правых - $U_\gamma = \gamma_0^{tr}$ и $U_\Gamma = \tilde{\Gamma}_0^{tr}$; для $\Phi(0,\eta)$ - $U_\Phi = \Phi_e$ и при использовании других представлений графики выглядят похоже.

Полученные универсальные функции (18,19,21), аппроксимирующие нормированные статистические характеристики диахромных процессов, зависят от параметров, в которых учтена асимметрия спектра, но никак не отражена асимметрия его частей $S_{1,2}(\chi)$. А влияние ее на функции $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0,\eta)$ в случае диахромных спектров больше, чем влияние асимметрии в случае компактных спектров, поскольку сказывается не только на первых двух слагаемых этих функций (как и в случае компактных спектров обусловленных в функциональных операторах (I.13-16) сочетанием S_1 с S_1 и S_2 с S_2), но в большей степени на слагаемых, обусловленных вкладом перекрестных членов – сочетанием S_1 с S_2 . Вклад асимметрии $S_{1,2}(\chi)$ в функции $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, $\Phi(0,\eta)$, как следует из раздела 2.2, двояк – сам факт асимметрии, отраженный в параметрах симметрии ρ_i , и взаимная ориентация $S_{1,2}(\chi)$ по отношению друг к другу. Оба этих фактора не были учтены в приближении (18) для $|\gamma_0(\xi)|$ в случае двухкомпонентного спектра, и, как следствие, не вошли и в приближения (19,21) для остальных функций, вычисляемых через (18). Пренебрежение ρ_i в (18) выразилось в том, что мы подставили в точное выражение (6) для $|\gamma_0(\xi)|$ $\rho_i = 1$, а неучет ориентации - в пренебрежении там же слагаемым $\Sigma(\xi)$, описывающим вклад мнимых частей функций $\gamma_{0i}(\xi)$ для компонент $S_i(\chi)$ в перекрестных членах $|\gamma_0(\xi)|$.

Отличие ρ_i от единиц невелико при выборе центров $S_{1,2}(\chi)$ по правилу (33). Так, для любых треугольников в спектре (24) эти центры совпадают с абсциссами максимумов ρ_i для треугольников; и для всех этих максимумов $\rho_{\max} \geq 0.87$. А для несимметричных экспонент в спектре (28), хотя центры из (33) и не совпадают с абсциссами максимумов ρ_i , для которых $\rho_{\max} \geq 0.91$, но ρ_i отличаются в них от своих максимальных значений менее, чем на 2,5%. Поэтому влияние на функции (18,19,21) подстановок единиц вместо точных ρ_i невелико и, в принципе, легко учитывается. Надо подсчитать реальные $\rho_i \neq 1$ для каждого из $S_{1,2}(\chi)$ при выборе их центров согласно (33) и подставить их в знаменатели аргументов третьего слагаемого (18) в соответствии с (6) и в знаменатели двух слагаемых σ в (19,21).

С ориентацией $S_{1,2}(\chi)$ сложнее. Ее роль проиллюстрирована рис.34 для сильно асимметричных $S_{1,2}(\chi)$ - спектра (24) из двух прямоугольно-треугольных спектров. В этом случае собственно-нормированные $S_{1,2}^n(\chi_{1,2})$ компактны почти точно по грани-

цам критериев (I.39,45) (см. табл.I.4 в [6]), а критерии диахромности (22) выполнены для одного из приведенных примеров и не выполнены для другого. Рис.34 показывает изменение точных статистических характеристик при замене в $S(\chi)$ одной или обеих $S_{1,2}(\chi)$ на зеркально-симметричные функции относительно прямых $\chi = \chi_i$, где χ_i - середины $S_i(\chi)$ по определению (33) (λ , κ , s_1 и ρ_i при этом не меняются).

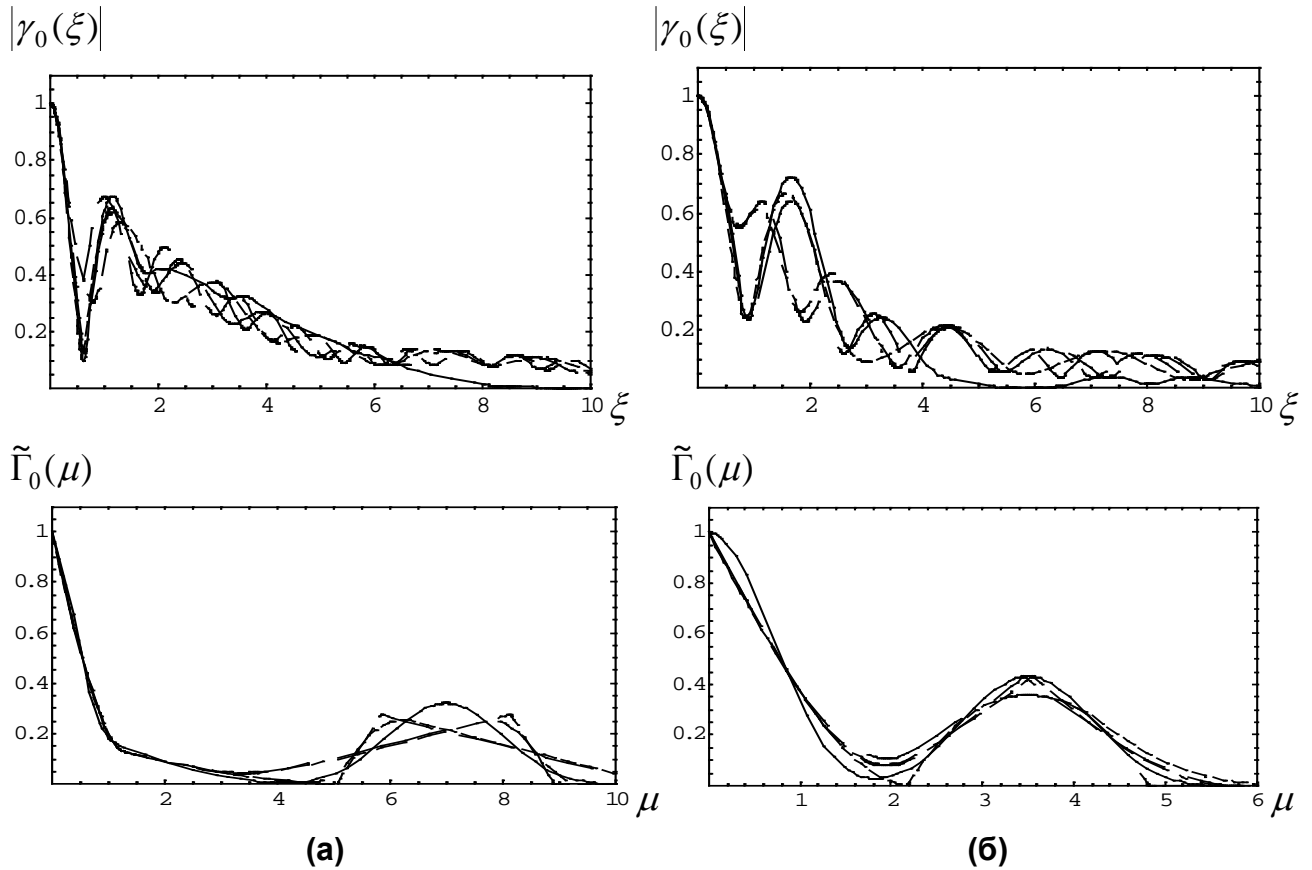


Рис.34. Функции $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ для спектров (24) из двух прямоугольно-треугольных спектров. **(а)** – $\lambda = 0,5$; $\kappa = 0,8$; $s_1 = 7$ (не все критерии (22) выполнены); **(б)** - $\lambda = 0,625$; $\kappa = 0,75$; $s_1 = 3,5$ (диахромный спектр). Сплошные линии – функции (18,19) при $U_\gamma = \gamma_0^{tr}$, $U_\Gamma = \tilde{\Gamma}_0^{tr}$, штриховые – точные функции (26-27), длина штрихов возрастает в порядке ориентации прямых углов у $S_{1,2}(\chi)$ в суммарном спектре: оба угла внутри ($\varepsilon_{1,2} = 0$), оба справа ($\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = \infty$), слева ($\varepsilon_1 = \infty; \varepsilon_2 = 0$), оба снаружи ($\varepsilon_{1,2} = \infty$).

Из рис.34 видно влияние асимметрии и взаимной ориентации частей $S_{1,2}(\chi)$ в суммарном спектре на статистические характеристики (показаны функции $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$; в $\Phi(0,\eta)$ это влияние мало). Асимметрия в основном сказывается на начальных участках функций $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, где она проявляется даже в меньшей степени,

чем в случае компактных спектров, как легко видеть из сравнения рис.34 и рис.1.3,7 из [6]. А взаимная ориентация $S_{1,2}(\chi)$ сказывается (и заметно) на вторичных максимумах и минимумах функций $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$, хотя все же отличие их от универсальных выражений (18,19) (не зависящих ни от ρ_i , ни от ориентации $S_{1,2}(\chi)$) приемлемо, особенно, когда выполнены критерии диахромности (22). Хотелось бы учесть хотя бы основную часть ориентационного вклада, подобрав необходимый для этого параметр или иначе, чем в (18), аппроксимировав $|\gamma_0(\xi)|$. Тогда универсальные функции процессов с диахромными спектрами зависели бы кроме λ , κ , s_1 еще от двух-трех параметров (ρ_i и взаимной ориентации $S_{1,2}(\chi)$). Мы таких исследований не проводили.

В заключение заметим, что, вероятно, можно иначе, чем это сделано в настоящей работе, получить универсальные функции для статистических характеристик процессов с диахромными спектрами, допустив разбиение $S(\chi)$ на перекрывающиеся части $S_{1,2}(\chi)$ (без выполнения (3)) и используя параметры $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\kappa}$ и s_1 , допускающие $s_1 \rightarrow 0$ и строгий переход универсальных функций, отвечающих диахромным спектрам, в универсальные функции, отвечающие компактным спектрам. Серьезное усложнение такой модели в том, что $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\kappa}$ не независимы и связаны нормировкой (1.18), которая при произвольных $S_{1,2}(\chi)$ уже не сводится к простому уравнению вида $2\tilde{\kappa}(1 + U_{\Gamma}(4\tilde{\kappa}s_1)) = 1$, а требует решения уравнения $\tilde{\Gamma}_0(0) = 1$ с расчетом интеграла пересечения $S_{1,2}(\chi)$. Как эту задачу решить в общем виде непонятно. При больших значениях s_1 такая модель совпадает с использованной в данной работе. Последняя, по-видимому, практичнее, но поиски других вариантов тоже интересны.

5. Дальнейшее развитие теории

Естественно, возникает вопрос, можно ли продолжить дальше классификацию спектров (удовлетворяющих условию узкополосности [6]) по «полихромности» (трихромный, тетрахромный и т.д.), как показано на условной схеме рис.35? И можно ли для любого такого спектра нормированные статистические характеристики аппроксимировать универсальными функциями, выраженными через соответственные универсальные функции монохромных спектров?

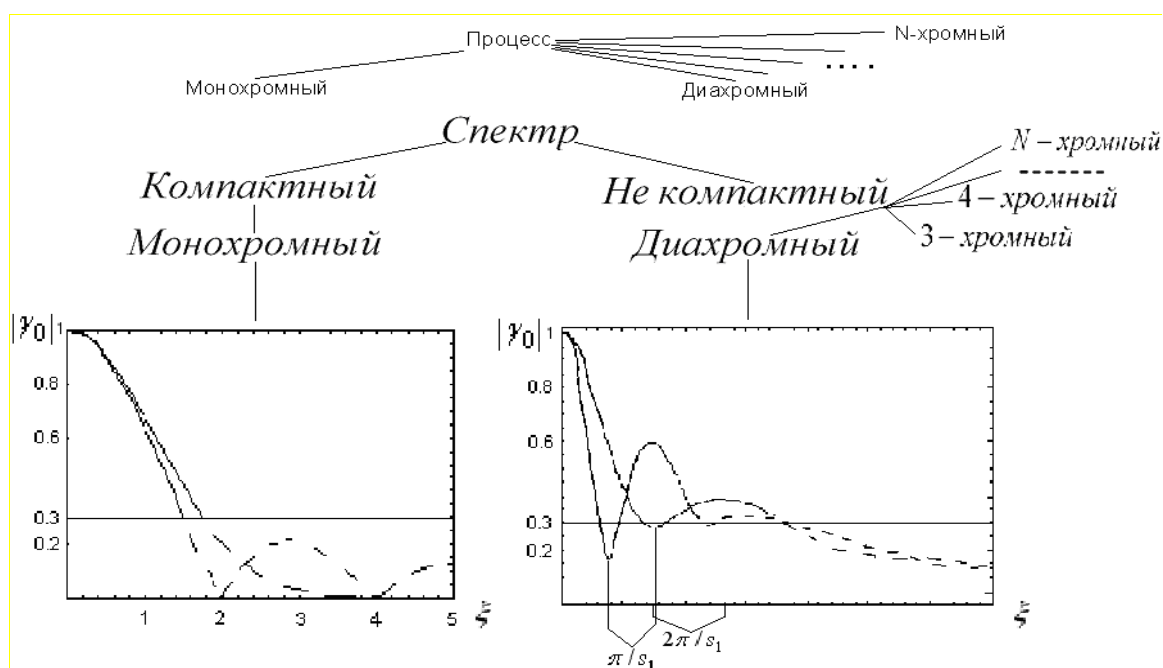


Рис.35. Схема классификации случайных процессов и их спектров по полихромности. Показаны характерные виды функций $|\gamma_0(\xi)|$ для компактного (монохромного) и некомпактного (диахромного) спектров. Сплошными линиями изображены части $|\gamma_0(\xi)|$, определяемые основными параметрами собственн-нормированных спектров, а штрихами – остальные части (хвосты), мало влияющие на другие статистические характеристики.

Если взять на вооружение использованный выше способ получения универсальных функций (18,19,21) для статистических характеристик случайных процессов с диахромными спектрами через универсальные функции (1.28,37-38) процессов с монохромными спектрами, то с тем же упрощением можно строить универсальные функции процессов с трихромными, тетрахромными и т.д. спектрами, разбивая анализируемый спектр на 3, 4 и более неперекрывающиеся компактные части S_i . Такая возможность основана на том, что, согласно формулам (1.13,14,16) для статистических характеристик, их вычисление сводится к расчету интегралов от всевозможных сочетаний пар частей спектра, самих с собой и перекрестных (для характеристики $|\gamma_0(\xi)|$ пары возникают не из интегрирования, а из расчета модуля комплексной функции). Поэтому способ построения диахромных функций из компактных легко обобщается на «полихромные». Такие «универсальные» функции случайного процесса с n-хромным спектром будут иметь вид

$$|\gamma_0(\xi)|^2 \cong \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j U_\gamma(\lambda_i^2 \xi / \kappa_i) U_\gamma(\lambda_j^2 \xi / \kappa_j) \cos(s_{ij} \xi); \quad (39)$$

$$\tilde{\Gamma}_0(\mu) \cong \frac{\sum_{i=1}^n \kappa_i U_\Gamma\left(\frac{\kappa_i}{\lambda_i^2} \mu\right) + \sum_{i,j=1; i \neq j}^n \lambda_i \lambda_j \cdot \frac{U_\Gamma(2|\mu + s_{ij}|/\sigma_{ij}) + U_\Gamma(2|\mu - s_{ij}|/\sigma_{ij})}{\sigma_{ij}}}{1 + 2 \sum_{i,j=1; i \neq j}^n (\lambda_i \lambda_j / \sigma_{ij}) \cdot U_\Gamma(2|s_{ij}|/\sigma_{ij})} = \frac{\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \cdot \frac{U_\Gamma(2|\mu + s_{ij}|/\sigma_{ij}) + U_\Gamma(2|\mu - s_{ij}|/\sigma_{ij})}{\sigma_{ij}}}{2 \sum_{i,j=1}^n (\lambda_i \lambda_j / \sigma_{ij}) \cdot U_\Gamma(2|s_{ij}|/\sigma_{ij})}; \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \Phi(0, \eta) &\cong \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 U_\Phi\left(\frac{\lambda_i^2 \eta}{\kappa_i}\right) + \sum_{i,j=1; i \neq j}^n \lambda_i \lambda_j \left\{ \left(1 + \frac{2s_{ij}}{\pi \sigma_{ij}}\right)^2 U_\Phi\left(\frac{\eta}{2} \left| \sigma_{ij} + \frac{2s_{ij}}{\pi} \right| \right) - \left(\frac{2s_{ij}}{\pi \sigma_{ij}}\right)^2 U_\Phi\left(\frac{|s_{ij}| \eta}{\pi}\right) \right\} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \left\{ \left(1 + \frac{2s_{ij}}{\pi \sigma_{ij}}\right)^2 U_\Phi\left(\frac{\eta}{2} \left| \sigma_{ij} + \frac{2s_{ij}}{\pi} \right| \right) - \left(\frac{2s_{ij}}{\pi \sigma_{ij}}\right)^2 U_\Phi\left(\frac{|s_{ij}| \eta}{\pi}\right) \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

В (39-41) λ_i и κ_i - «веса» интегралов от $S_i(\chi)$ и $S_i^2(\chi)$, соответственно, в интегралах от $S(\chi)$ и $S^2(\chi)$ (т.е. в 2 и $4/\pi$, учитывая (I.17-18)); для них $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ и $\sum_{i=1}^n \kappa_i = 1$.

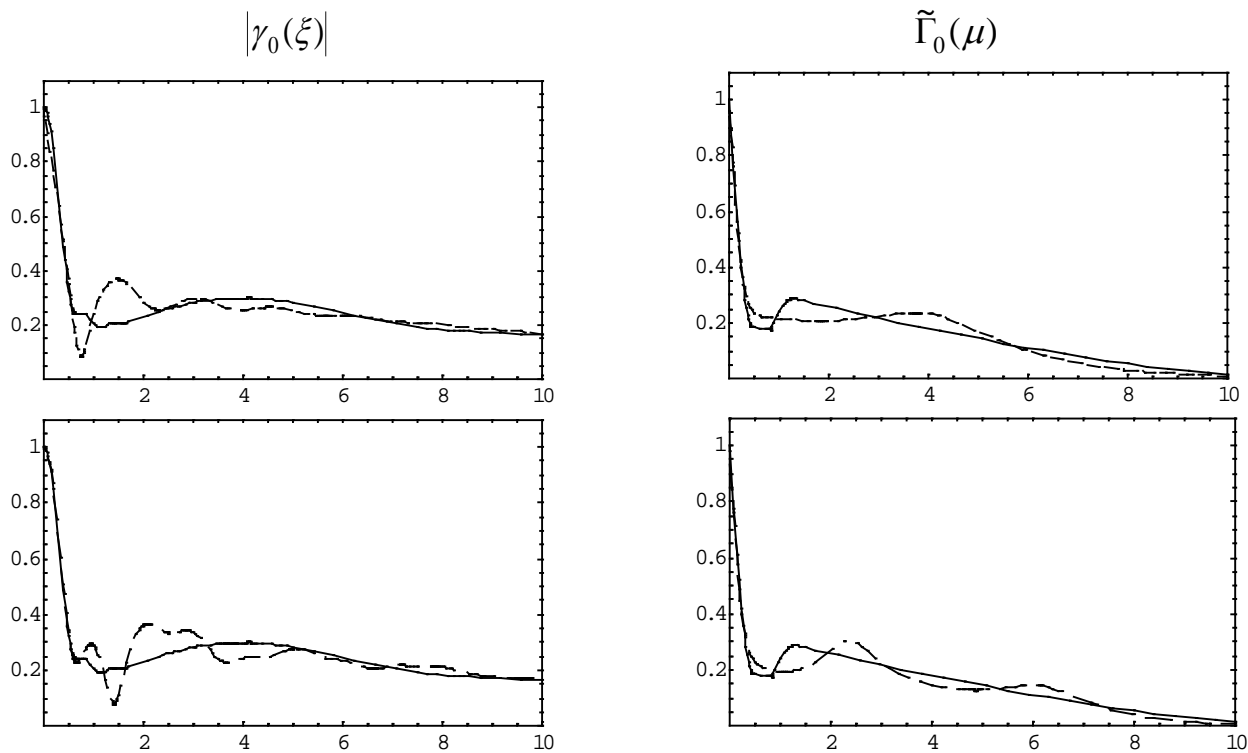
Через s_{ij} - обозначено расстояние между «центрами» частей спектра $S_i(\chi)$ и $S_j(\chi)$ со знаком, т.е. $s_{ij} = -s_{ji}$, $s_{ii} = 0$; а $\sigma_{ij} = \lambda_i^2/\kappa_i + \lambda_j^2/\kappa_j$. Функции (39-41) при $n=2$ совпадают с (18,19,21), а при $n=1$ - с (I.28,37-38). В (39-41) нет функционального перехода от n -хромности к $n-1$ -хромности вследствие выполнения для некоторых s_{ij} условий $|s_{ij}| \rightarrow 0$. Как и в (18,19,21), выбор параметров λ_i , κ_i и s_{ij} в (39-41) неоднозначен и часто могут быть приемлемы описания с разными n .

Внешний вид спектра при разбиении на n частей, как и при делении на две части, может отражать смысл термина « n -горбый», а может и не отражать. Условие компактности частей по аналогии с построенной выше теорией можно тоже предположить в виде (22): $s_{0,5i} \leq (\pi/2) \min\{\lambda_i^2/\kappa_i, 1\}$ и $s_{0,9i} \leq (1 \div 1,25)\pi \min\{\lambda_i^2/\kappa_i, 1\}$. Плюс условие на s_{ij} ($i \neq j$) - $|s_{ij}| \geq (\pi/2 \div \pi)\sigma_{ij}$. В этом подходе многие узкополосные спектры можно отнести к одной из категорий « n -хромный» (разными способами), и приближенно представлять спектральные характеристики приведенными выше функциями. Такая теория приобрела бы логически заверченный вид.

Вопрос в том, насколько адекватен подобный анализ произвольного спектра? На этом пути возникает еще больше проблем, чем при анализе диахромных спектров. Можно ли вообще ожидать, что теория подобия спектральных характеристик верна в том или ином виде для произвольного спектра? И, если да, то насколько удачен именно наш подход? И в этом последнем случае, насколько верны критерии отнесения спектра к « n -хромному»; насколько изменятся значения универсальных функций, если их считать для какого-то спектра при его различном разбиении и даже на различное число частей, и т.д.? Ответы на эти вопросы вряд ли можно найти на

базе численных экспериментов (как мы делали до сих пор), без математической теории. Мы не берем на себя право утверждать правомерность предложенной модели, хотя несколько пробных расчетов позволяют на это надеяться. Результаты этих расчетов приведены на рис.36 -39. В них $|s_{ij}|$ считались по правилу (33).

На рис.36 показан пример попытки улучшить аппроксимацию характеристик недиахромного двугорбого по виду спектра за счет разбиения его на большее число частей и представления как 3-х или 4-хромного. Взял двугорбый спектр (б) с рис.31, у которого левый треугольник некомпактен по (22) и не разбивается на две компактные части. Поэтому мы сначала делили его по-разному на две части, сравнивая с точными характеристиками и между собой функции (18,19,21) и несколько вариантов (39-41) при $n=3$, а затем с ними всеми один из вариантов (39-41) при $n=4$, когда левый треугольник разбит на 3 компактные части. На рисунке показаны лишь функции $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$; т.к. $\Phi(0,\eta)$ почти неотличимы для всех вариантов. Из рис.36 видно, что разбиение спектра на три части лучше, чем на две (и если две из трех компактны – см. вторые сверху графики, то это лучше, чем только одна компактная), а 4 компактных части лучше, чем три с одной некомпактной. Но в целом улучшение не радикальное и диахромное приближение функциями (18,19,21) немногим уступает 4-хромному приближению (39-41). Главное, что (39-41) при $n > 2$ не хуже, чем (18,19,21), а даже лучше аппроксимируют реальные функции. Таких примеров, как на рис.36, мы рассчитали несколько, и для других форм спектров, в частности, для спектра, состоящего из двух прямоугольных спектров, с параметрами как на рис.15,21. Результаты такие же.



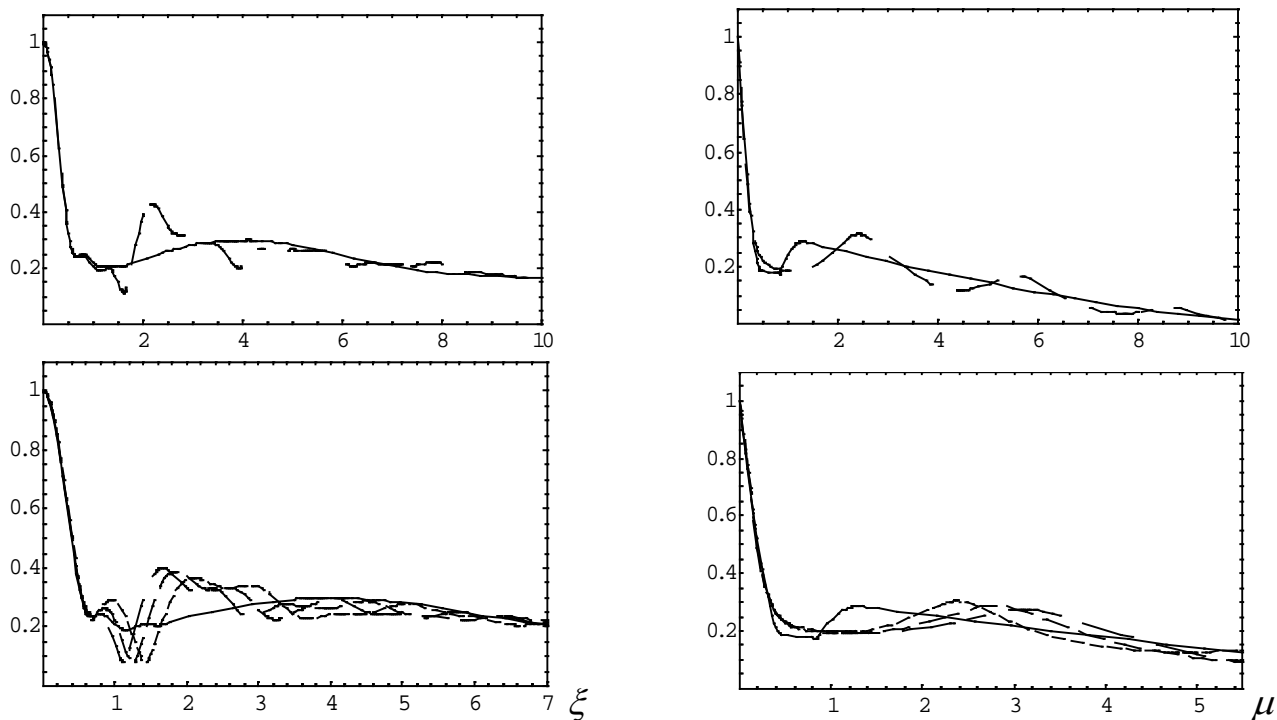
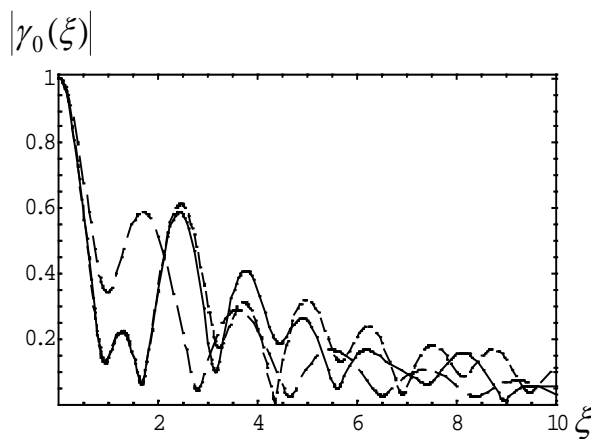
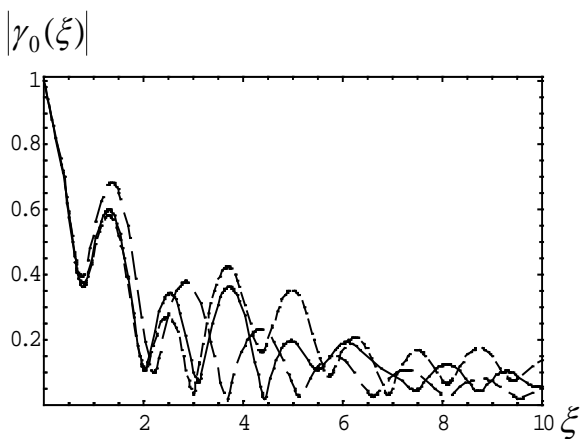
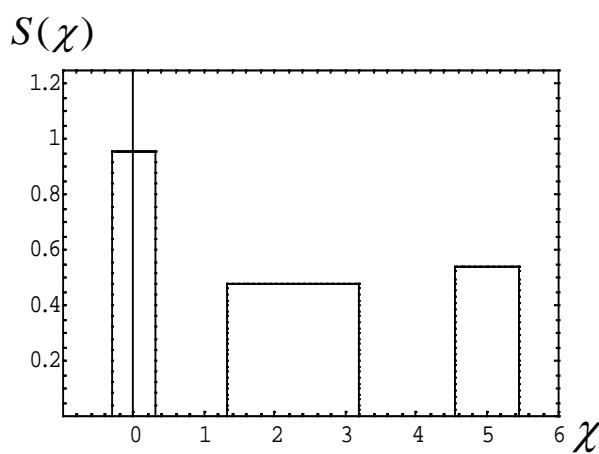
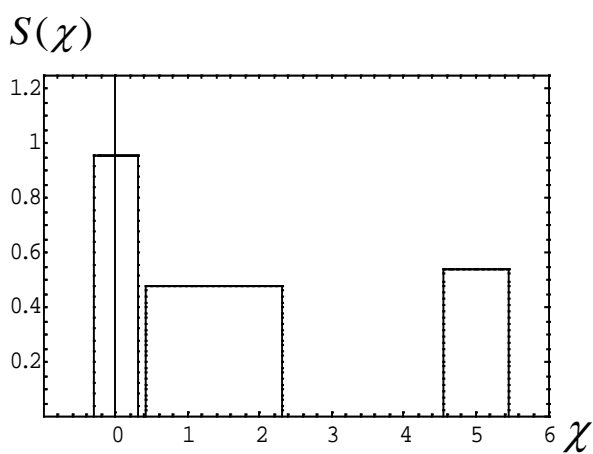


Рис.36. Сравнение точных и приближенных функций $|\gamma_0(\xi)|$ и $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ в случае спектра с рис.31б. Сплошные линии - везде точные функции, штриховые линии – функции (39-40) при (сверху вниз): $n=2$ (диахромный спектр; естественное разбиение на два треугольных спектра); $n=3$ (трихромный спектр; левый треугольник разбит на две части по основанию в отношении 7:3 от вершины) и $n=4$ (тетрахромный спектр; левый треугольник разбит на три части по основанию в отношении 7:7:6 от вершины). Штриховые линии на нижних графиках соответствуют $n=3$ при различном разбиении основания левого треугольника - 7:3, 3:2 и пополам (в порядке увеличения длины штрихов). Параметры функций (39-41) при разбиении на 4 части: $\lambda_1 = 0,086$; $\lambda_2 = 0,257$; $\lambda_3 = 0,357$; $\lambda_4 = 0,3$; $\kappa_1 = 0,01$; $\kappa_2 = 0,06$; $\kappa_3 = 0,13$; $\kappa_4 = 0,8$. При этом $s_{0,51} = 0,84(\pi/2)$; $s_{0,91} = 0,86\pi$ $s_{0,52} = 1,1(\pi/2)$; $s_{0,92} = 1,02\pi$; $s_{0,53} = 0,97(\pi/2)$; $s_{0,93} = 0,87\pi$; $s_{0,54} = 0,11(\pi/2)$; $s_{0,94} = 0,11\pi$. При разбиении на 3 части на вторых сверху графиках параметры двух последних частей те же, а две первые объединены в одну с $\lambda = 0,34$; $\kappa = 0,07$ и $s_{0,5} = 1,67(\pi/2)$; $s_{0,9} = 1,72\pi$ (т.е. из трех частей лишь одна некомпактная). На верхних графиках параметры правого треугольника – как третья часть на графиках под ними, а параметры левого треугольника (объединение всех его частей) - $\lambda = 0,7$; $\kappa = 0,2$; $s_{0,5} = 2,4(\pi/2)$; $s_{0,9} = 2,45\pi$. Для пары нижних графиков у трех различных разбиений левого треугольного спектра на две части $\lambda_{1,2}$ меняются от 0,343; 0,357 до 0,175; 0,525, $\kappa_{1,2}$ - от 0,069; 0,13 до 0,025; 0,175 (в порядке увеличения длины штрихов). При этом протяженности двух левых частей спектра меняются от значений параметров вторых сверху графиков до $s_{0,51} = 1,2(\pi/2)$; $s_{0,91} = 1,225\pi$; $s_{0,52} = 1,57(\pi/2)$; $s_{0,92} = 1,445\pi$.

На рис.37 приведен пример качественно другого типа. Взят простейший трехгорбый спектр, состоящий из трех отдельных компактных по критериям (22) прямо-

угольных спектров. Их точные статистические характеристики выражаются формулами, очень похожими на формулы для спектра, состоящего из двух прямоугольных спектров, - спектра **1)** из раздела 2.3, где вместо первых двух слагаемых - три слагаемых, соответственно, с λ_i и κ_i , а вместо одного перекрестного члена – три аналогичных члена с тремя возможными сочетаниями $\lambda_i, \lambda_j, \kappa_i, \kappa_j$ и s_{ij} .

Зазор между двумя левыми прямоугольными спектрами брался небольшим и варьировался в обе стороны от величины, соответствующей компактности совокупности этих двух спектров; а третий прямоугольный спектр всегда находился на значительном расстоянии от второго. Статистические характеристики, отвечающие такому спектру, аппроксимировались функциями (39-41) как при $n=2$, так и при $n=3$. Результаты расчетов показывают, что пока два левых прямоугольных спектра в совокупности отвечают условиям (22), оба приближения и точные функции близки между собой (пример на рис.37а). Если же по критериям (22) компактность левой пары сильно нарушена (пример на рис.37б), то трихромное приближение заметно отличается в лучшую сторону от диахромного приближения. Варьируя зазор между двумя левыми прямоугольными спектрами, можно было наблюдать в точных функциях все стадии перехода от универсальных функций (18,19,21) для диахромного спектра к функциям (39-41) для трихромного с максимальной неточностью аппроксимации в промежуточном случае.



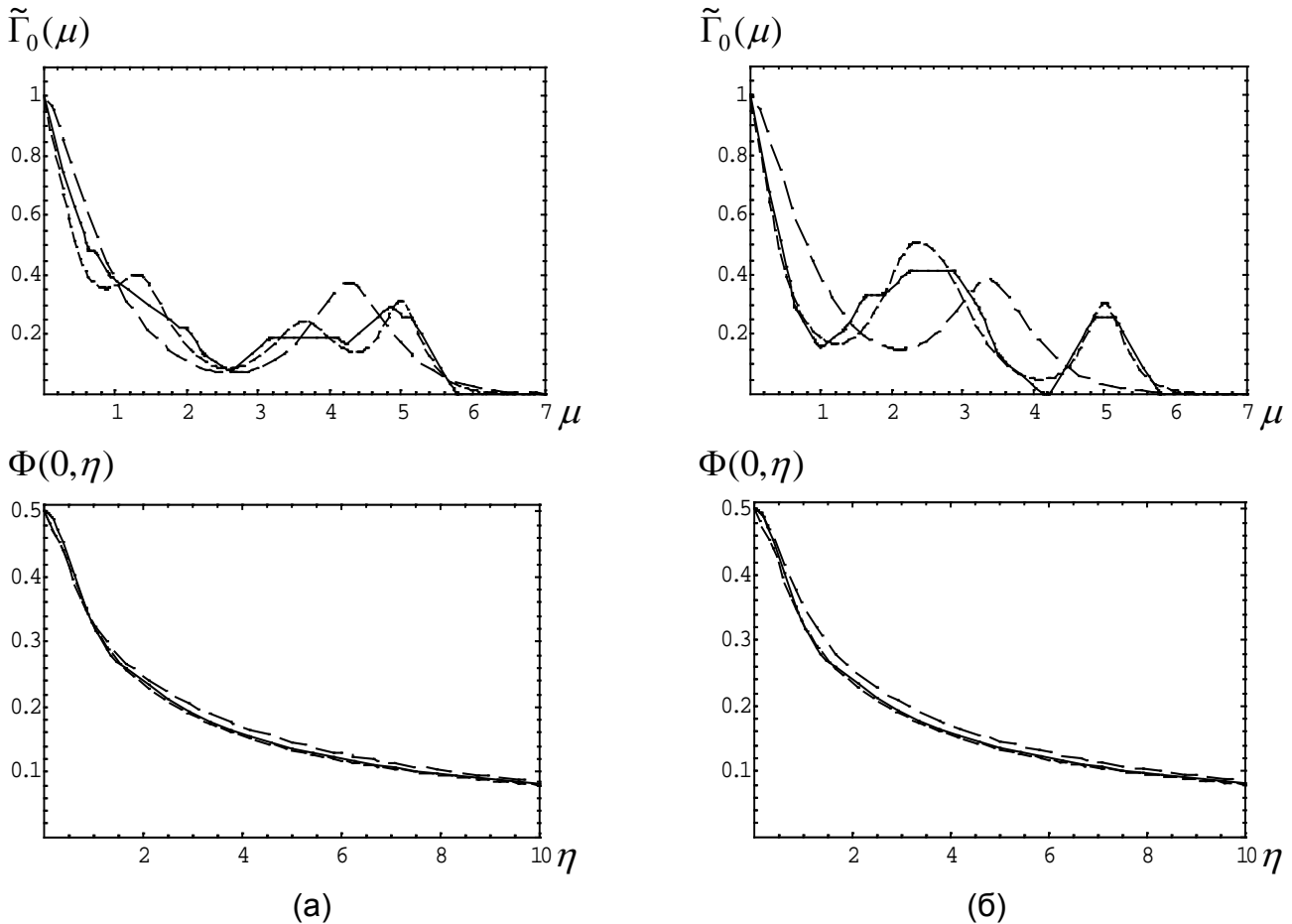


Рис.37. Сравнение приближенных и точных нормированных характеристик процессов со спектрами, состоящими из трех компактных прямоугольных спектров. Сплошные линии – точные функции; штриховые с длинными штрихами – (39-41) при $n=2$ (диахромный спектр, два левых прямоугольных спектра считаются как $S_1(\chi)$); с короткими штрихами – (39-41) при $n=3$ (трихромный спектр; все прямоугольные спектры рассматриваются как $S_{1,2,3}(\chi)$). Прямоугольные спектры обоих примеров одинаковы с $\lambda_1 = 0,3; \lambda_2 = 0,45; \lambda_3 = 0,25$ и $\kappa_1 = 0,45; \kappa_2 = 0,3375; \kappa_3 = 0,2125$. В (а) для двух левых прямоугольных спектров в совокупности $s_{0,51} = 0,75(\pi/2); s_{0,91} = 0,675\pi$ а в (б) - $s_{0,51} = 1,32(\pi/2); s_{0,91} = 0,96\pi$. Для этих двух прямоугольных спектров, рассматриваемых как один спектр $S_1(\chi)$, отношение $\lambda^2 / \kappa = 0,714$ (входит в правые части (22)).

На рис.38 представлены аппроксимации нормированных статистических характеристик процесса с двугорбым спектром с рис.29 (не компактного и не диахромного) функциями (39-41) при $n=3$ (когда три прямоугольные части спектра рассматриваются как $S_{1,2,3}(\chi)$) и при $n=4$ (средняя прямоугольная часть дополнительно разбивается пополам). Расчеты показали, что в обоих вариантах при любых аналитических представлениях U_γ и U_Φ из (1.28,38) точные $|\gamma_0(\xi)|$ и $\Phi(0, \eta)$ лучше описываются функциями (39,41), чем диахромными приближениями (18,21) на рис.29 (тоже вполне хорошими).

А для $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ обе функции (40) оказались чем-то лучше, чем-то хуже, чем диахромное приближение (19) на рис.29. Лучше – для средней (платообразной) части точной функции (с $n=4$ лучше, чем с $n=3$), хуже – начальный участок спектра (в обоих случаях). Кроме того, качество приближений заметно зависит от представления U_Γ – из всех вариантов (1.37) хуже всего с $\tilde{\Gamma}_0^e(\mu)$, лучше – с $\tilde{\Gamma}_0^r(\mu)$. На рис.38 приведены именно эти варианты. Заметим, что ситуация не обусловлена отличием от единицы знаменателей в (19,40) (отчего (19,40) точно не удовлетворяют равенству π интеграла от $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ - см. замечание в разделе 3). Для всех U_Γ из (1.37) этот знаменатель почти равен 1, и для (40) при $n=3$ точнее (при $n=4$ еще точнее), чем при $n=2$ в (19).

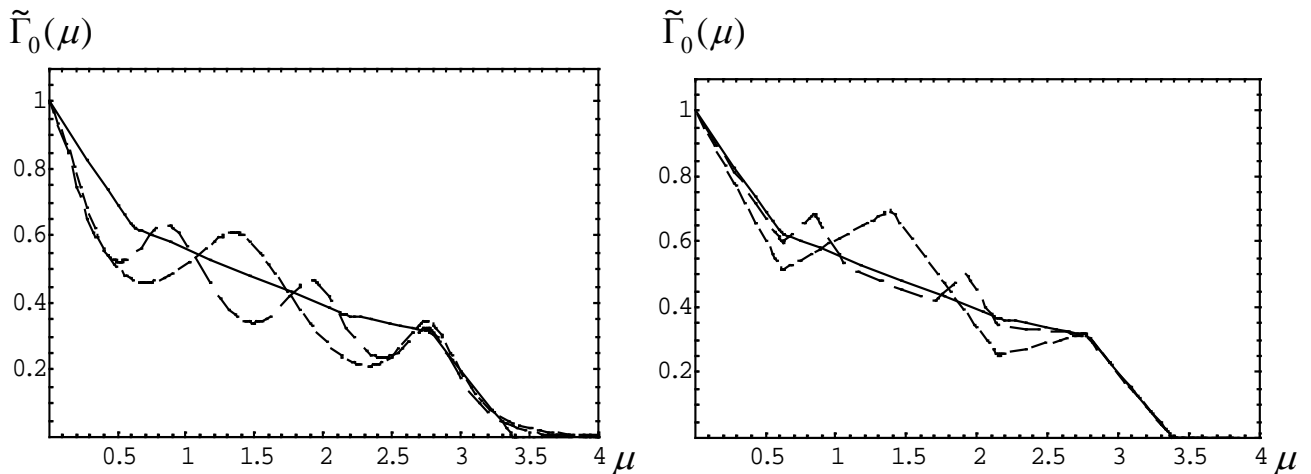


Рис.38. Сравнение точной функции $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ (сплошные линии) для спектра с рис.29 с приближением (40) при $n=3$ (штриховые линии с короткими штрихами) и при $n=4$ (штриховые линии с длинными штрихами). Слева в (40) в качестве U_Γ использована $\tilde{\Gamma}_0^e(\mu)$, справа - $\tilde{\Gamma}_0^r(\mu)$. Приближение (19) при $U_\Gamma \equiv \tilde{\Gamma}_0^e(\mu)$ (т.е. $n=2$ в (40)) приведено на рис.29.

На рис.39 показана попытка улучшить аппроксимацию характеристик в случае спектра $S_{hL}(\chi) = (4/\pi)/(1+\chi^2)$; $\chi \geq 0$ («пол-Лоренцевский» спектр) с рис.30 с помощью функций (39-41). Заметим, что если вообще можно продолжить классификацию спектров по «полихромности» и ставить целью выразить универсальные функции через соответствующие функции компактного спектра, то как минимум надо разбить анализируемый спектр на компактные в собственно-нормированной форме неперекрывающиеся части. Не любой спектр можно разбить на конечное число таких частей, и $S_{hL}(\chi)$ как раз такой пример. Его «хвост» никогда не будет компактным, и чем он тоньше, тем более некомпактен. Для диахромного приближения на рис.30 мы взяли максимальную по размеру компактную часть S_1 с $\lambda_1 = 0,7$. При этом получили неплохое приближение всех характеристик. Любая часть S_2 , строго говоря, не удовлетворяет критериям (22), но примерно до $\lambda_2 = 0,15$ S_2 отвечает границе (22). На рис.39

сравниваются $|\gamma_0(\xi)|$, $\tilde{\Gamma}_0(\mu)$ и $\Phi(0,\eta)$ для $S_{hL}(\chi)$ с (39-41) при $n=3$ и как раз таких λ_i . Расчеты показали, что при $\lambda_1 = 0,7$ именно с $\lambda_2 = 0,15$ достигается наилучшее приближение с помощью (39-41) при $n=3$. И хотя при этом спектр S_3 ($\lambda_3 = 0,15$) не удовлетворяет ни одному из условий (22), его вклад в (39-41) оказался несущественным.

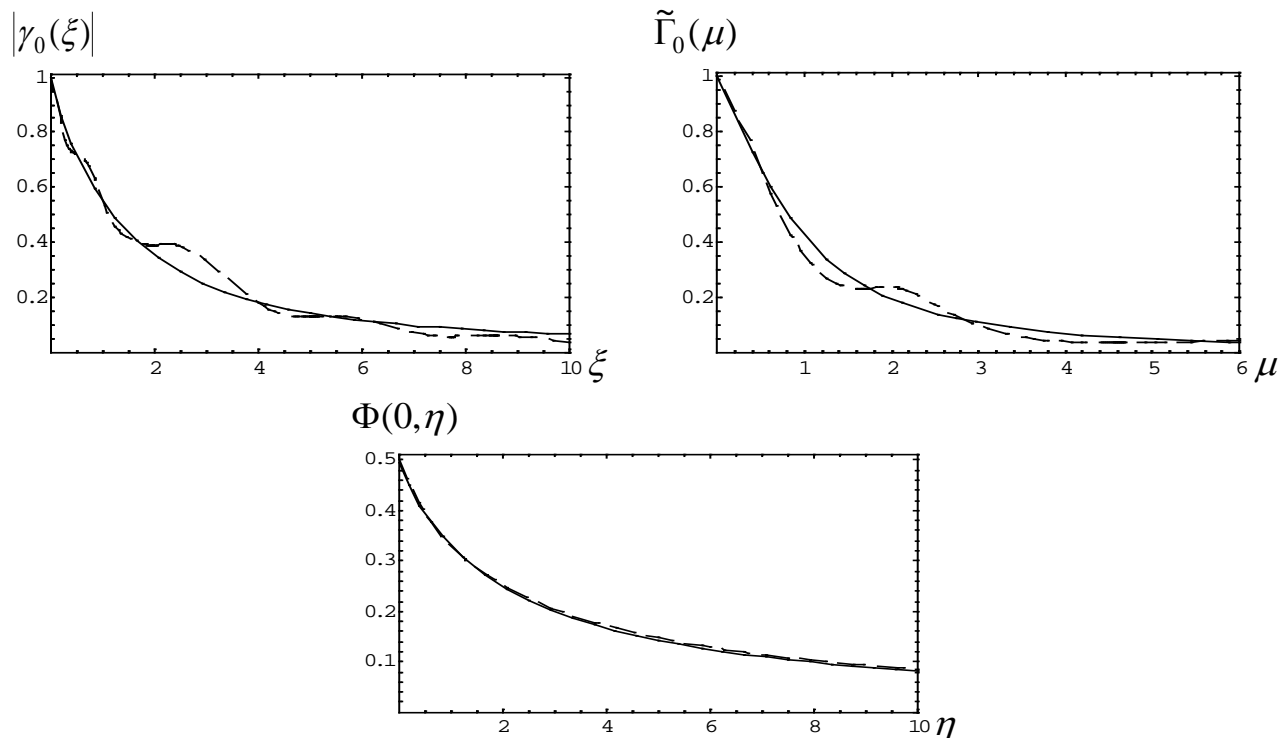


Рис.39. Статистические характеристики случайного процесса со спектром $S_{hL}(\chi) = (4/\pi)/(1+\chi^2)$; $\chi \geq 0$ («пол-Лоренцевский» спектр) с рис.30. Сплошные линии - точные функции. Штриховые линии - функции (39-41) при $n=3$ с $\lambda_1 = 0,7$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0,15$, что соответствует $\kappa_1 = 0,96$, $\kappa_2 = 0,037$, $\kappa_3 = 0,003$. Часть S_1 удовлетворяет (22), S_2 - погранична по (22), S_3 не удовлетворяет ни одному из неравенств (22). Диахромные приближения (18,19,21) для этого спектра приведены на рис.30.

Пример со спектром $S_{hL}(\chi)$ показателен и важен. Во-первых, сравнив точные характеристики процесса с этим спектром с характеристиками, отвечающими спектру $S_{hL}(\chi)$ с отрезанным «хвостом» S_3 в 15%, мы убедились, что они отличны друг от друга заметно больше, чем точность приближения, полученного на рис.39, т.е. это точность не результат пренебрежения S_3 . Во-вторых, численно считать функции $\Phi(0,\eta)$ и для $S_{hL}(\chi)$ и для его «обрезанного» варианта неудобно – интегралы очень медленно сходятся. Тоже относится и к функции $|\gamma_0(\xi)|$ обрезанного варианта – она аналитически выражена через сумму интегральных показательных функций комплексных аргументов. А функции (39-41) - очень простые приближения для всех этих фун-

кций. И, в-третьих, главное, похоже, не всегда надо делить спектр строго на компактные части для получения хорошего приближения его статистических характеристик.

Мы, конечно, далеки от того, чтобы из нескольких примеров делать выводы о применимости приближений (39-41) для произвольного спектра. Однако необходимость исследований в этом направлении несомненна. Очень важна доработка критерия «полихромности» спектра, поскольку, например, из рис.38-39 видно, что явно трехгорбый спектр может плохо описываться функциями (39-41) с $n=3$, а явно не трехгорбый, наоборот, хорошо. Нередко внешний вид спектра более важен при выборе n в (39-41), чем формальные условия на части, и может снизить жесткость критериев на параметры этих частей. В то же время, если части спектра явно не выражены и произвол неизбежен, то критерии необходимы для определения параметров универсальных функций.

Литература

1. Орлов Е.П., Сизова И.М. О подобии статистических характеристик спонтанного излучения квантового усилителя при различных коэффициентах усиления. *Препринт ФИАН № 28*. Москва, 2001. 44 с.
2. Orlov E.P., Sizova I.M. On the similarity of the statistical characteristics of spontaneous radiation of a quantum amplifier at different gain factor. *Journal of Russian Laser research*. 2002, V. 23, N. 4, P. 299 – 331.
3. Орлов Е.П., Сизова И.М. О времени корреляции квантового шума оптического усилителя с точки зрения свойства подобия его статистических характеристик. *Препринт ФИАН № 29*. Москва, 2002. 112 с.
4. Орлов Е.П., Сизова И.М. О подобии статистических характеристик квантового шума оптического усилителя с двугорбым контуром линии усиления. *Препринт ФИАН № 20*. Москва, 2004. 98 с.
5. Орлов Е.П., Сизова И.М. О подобии и универсальных функциях статистических характеристик случайных процессов. *Препринт ФИАН № 21*. Москва, 2008. 50 с.
6. Орлов Е.П., Сизова И.М. Подобие статистических характеристик узкополосных случайных процессов с произвольными спектрами. Часть I. Компактные спектры. *Препринт ФИАН № 14*. Москва, 2010. 40 с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. М.:Наука, 1081. 800 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.:Наука, 1071. 1108 с.