В печать, в свет

Препринт

Руководитель АКЦ ФИАН,
академик Кардашев Н.С.

Квантовая модель квазифридмановской Вселенной

В.Н. Строков[1]

Астрокосмический центр Учреждения Российской академии наук
Физического института им. П.Н. Лебедева РАН
117997, ул. Профсоюзная, 84/32, Москва, Россия

Москва 2011

[1] strokov@asc.rssi.ru

Аннотация

Найдены геометрические (инвариантные) переменные, описывающие слабонеоднородную Вселенную, и получен непертурбативный вид действия, а также следующие из него неоднородные уравнения Фридмана. Кроме того, проведено каноническое квантование рассмотренной модели и выведено уравнение Уилера--Девитта для слабонеоднородной Вселенной.

1. Введение

Квантовая теория гравитации до сих пор остается Святым Граалем теоретической физики. Естественно ожидать, что она должна проявлять себя там, где в нынешней неполной теории тяготения встречаются физически абсурдные решения, такие, в частности, как сингулярность Большого взрыва и сингулярности различных классов черных дыр. В данной работе предлагаются способ учесть квантово-гравитационные эффекты вблизи сингулярности Большого взрыва (ранняя Вселенная).

Квантовая модель однородной Вселенной исследовалась Девиттом [13]. Кратко напомним его подход. Метрика замкнутой[2] однородной и изотропной Вселенной имеет вид:

(1)

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)dl_3^2,$$

где t -- мировое время, определенное с точностью до функции хода [9], в случае однородной Вселенной не зависящей от пространственных координат, dl_3^2 -- элемент длины поверхности единичной 3-мерной сферы и $a(t)$ -- масштабный фактор. По метрике можно явно вычислить действие для однородной и изотропной Вселенной, в которое вносят вклад гравитация (действие Гильберта--Эйнштейна) и материя, представленная своим лагранжианом:

(2)

$$S[a, N, m] = \frac{\pi}{4G}\int\left(8\pi G a^3 N L_m + 3aN - \frac{3a\dot{a}^2}{N}\right)dt,$$

где под m подразумевается набор материальных полей. Поскольку метрические коэффициенты зависят только от времени, оказывается возможным выполнить интегрирование по пространству до конца, что и сделано в выражении (2). Таким образом, имеем перед собой динамическую систему с заданным лагранжианом

(3)

---

[2] В оригинальной работе Девитта рассматривалась именно замкнутая Вселенная, однако предложенную им схему можно обобщить на Вселенную бесконечного объема. В последнем случае в ней всегда можно выделить достаточно большой, но конечный объем V .

$$L[a,N,m] = \frac{\pi}{4G}\left(8\pi G a^3 N L_m + 3aN - \frac{3a\dot{a}^2}{N}\right),$$

а значит [4], вариацией по динамическим переменным можем получить уравнения движения. Варьируя по N и a и затем полагая $N = 1$, получаем хорошо известные [3] уравнения Фридмана для замкнутой Вселенной[3]:

$$3H^2 = 8\pi G\varepsilon^{(F)} - \frac{3}{a^2}, \tag{4}$$

$$3H^2 + 2\dot{H} + \frac{1}{a^2} + 8\pi G p^{(F)} = 0. \tag{5}$$

Здесь $H = \dot{a}/a$ -- постоянная Хаббла (точка -- производная по времени), а $\varepsilon^{(F)}$ и $p^{(F)}$ -- соответственно плотность энергии и изотропное давление, определяемые по лагранжиану материи:

$$\varepsilon^{(F)} = -\frac{\delta(NL_m)}{\delta N},$$

$$p^{(F)} = \frac{1}{3a^2}\frac{\delta(a^3 L_m)}{\delta a}.$$

Заметим также, что канонический гамильтониан H^c соответствующий лагранжиану (3), выражается через одну из вариаций этого лагранжиана:

$$H^c = -N\frac{\delta L}{\delta N} \equiv N\overline{H}^c, \tag{6}$$

где $\overline{H}^c$ зависит только от динамических переменных и канонически сопряженных им импульсов (множитель $\pi/4G$ опускаем)

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{6a\dot{a}}{N}, \qquad \pi_m = 8\pi G a^3 N \frac{\partial L_m}{\partial \dot{m}}, \tag{7}$$

---

[3] Строго говоря, вторая вариация дает комбинацию первого и второго уравнения Фридмана.

но не зависит от N . Импульс π_N , сопряженный самой переменной N , как легко видеть, тождественно равен нулю.

В квантовом случае первое уравнение Фридмана $\overline{H}^c \approx 0$ и условие равенства нулю импульса дают уравнения на волновую функцию Вселенной $\Psi(a, N, m)$ (см. [13, 14]):

$$\left(\overline{H}_m^c - 3a - \frac{\pi_a^2}{12a}\right)\Psi = 0\,, \qquad \pi_N \Psi = 0, \tag{8}$$

где $\overline{H}_m^c$ -- гамильтониан материальных степеней свободы. Первое из этих уравнений носит имена Уилера и Девитта и является центральным уравнением квантовой космологии. В этих уравнениях динамические переменные и сопряженные им импульсы уже являются операторами. Например, в координатном представлении

$$\pi_a = -i\hbar\partial/\partial a\,, \qquad \pi_m = -i\hbar\partial/\partial m\,, \qquad \pi_N = -i\hbar\partial/\partial N.$$

Скажем, тот факт, что импульс, сопряженный N , равен нулю, означает с квантовой точки зрения, что волновая функция Вселенной не зависит от N . Физически это вполне понятно: на классическом уровне N определена с точностью до произвольной функции времени.

Заметим, однако, что описанный подход не совсем последователен, поскольку в нем изначально ставятся классические ограничения на метрические функции. В частности, недиагональные компоненты метрики[4] $g_{0i} \approx 0$. При квантовании эти компоненты также могут получать квантовые поправки. В следующем разделе мы получим действие с учетом слабой неоднородности, а затем с помощью него обобщим уравнение Уилера--Девитта на квазифридмановскую Вселенную и выполним каноническое квантование.

2. Неоднородные уравнения Фридмана

Естественной системой отсчета в слабонеоднородной космологии является лагранжева (сопутствующая веществу). Такая система отсчета фиксирована с

[4] Здесь и далее латинские индексы означают пространственные компоненты, а греческие пробегают значения (0,1,2,3).

точностью до преобразований, не затрагивающих время. Поэтому для удобства вычислений выберем такую из лагранжевых систем, в которой 3-мерное пространство локально-эвклидово, и запишем метрику в обозначениях формализма АДМ [9]:

$$ds^2=(N^2-V^iV_i)dt^2-2V_idtdy^i-e^{-2Q}\delta_{ij}dy^idy^j$$

Здесь $e^{-Q}=\bar{a}$ -- неоднородный масштабный фактор, который, как можно показать, является истинным скаляром относительно произвольных малых преобразований систем отсчета.

Подставляя данную метрику в гравитационное действие Гильберта--Эйнштейна, получаем лагранжиан неоднородной Вселенной:

$$L[Q,\varphi|N,V^i]=\int d^3y\left\{e^{-3Q}NL_\varphi-\frac{3e^{-3Q}\dot{Q}^2}{N}+e^{-Q}Q_{,l}(Q_{,l}-2N_{,l})-\frac{2V^i_{|i}\dot{Q}}{N}\right\}$$

где L_φ -- лагранжиан материи.

Варьируя его по N и Q, получаем неоднородные уравнения Фридмана:

$$3\bar{H}^2=\rho(t,x)+\frac{2\Delta\bar{a}}{\bar{a}^3}$$

и

$$-2\dot{\bar{H}}=\rho(t,x)+p(t,x)+\frac{2}{3}\left(\frac{2\Delta\bar{a}}{\bar{a}^3}-\frac{\Delta N}{\bar{a}^2}\right)$$

где $(...)^{\cdot}=u^\mu(...)_{,\mu}$ и $\bar{H}=\frac{1}{3}u^\mu_{;\mu}$.

3. Квантовая Вселенная

Представление гравитационного действия неоднородной Вселенной в виде функционала скалярного масштабного фактора $\bar{a}$ открывает возможность для квантования квазихаббловского потока с помощью метрических полей N, V^i, $\bar{a}$ и материальных степеней свободы m.

Прежде чем перейти к процедуре канонического квантования, заметим, что, хотя классические неоднородные уравнения Фридмана, выраженные с помощью скаляра Q, выглядят более компактно, с точки зрения квантовой теории наличие в гамильтониане экспоненциальных операторов типа $e^{\square Q}$ может вызвать в дальнейшем дополнительные трудности с приданием смысла написанным математическим выражениям. Имея это в виду, представим лагранжиан слабонеоднородной Вселенной через скалярный масштабный фактор $\overline{a}$. Кроме того, поскольку нас интересует прежде всего квантование гравитационной части действия, для наглядности в качестве материи (см. (2)) возьмем минимально связанное с гравитацией скалярное поле с потенциалом. Итак, действие приобретает вид[5]:

(9)

$$S[\overline{a}, \varphi, N, V^i, \phi] = \int \overline{a}^3 dt d\vec{y} \left(N L_m[\phi] + \frac{(\nabla \overline{a})^2}{\overline{a}^4} + \frac{2\nabla N \nabla \overline{a}}{\overline{a}^3} - \frac{3\mathcal{H}^2}{N} + \frac{2\mathcal{H}(\overline{a}^3 V^i)_{,i}}{N \overline{a}^3} \right),$$

где

(10)

$$L_m[\phi] = \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} - V(\phi).$$

Поскольку рассматривается лагранжева система отсчета, то по определению $V^i_{,i} = 0$ и

(11)

$$L_m[\phi] = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - V(\phi),$$

а лагранжиан рассматриваемой теории поля равен

(12)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Uni}} = \int d\vec{y} \left(\overline{a}^3 N \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} - V(\phi) \right) + \frac{(\nabla \overline{a})^2}{\overline{a}} + 2\nabla N \nabla \overline{a} - \frac{3\overline{a}\dot{\overline{a}}^2}{N} + \frac{2\dot{\overline{a}}(\overline{a}^3 V^i)_{,i}}{\overline{a} N} \right).$$

[5] В данном разделе полагаем $8\pi G = c = 1$.

В соответствии со схемой Девитта [13], чтобы получить уравнение на волновую функцию Вселенной, необходимо в каноническом гамильтониане H_{Uni}^{c} выделить слагаемое вида $N\overline{H}_{Uni}^{c}$, где $\overline{H}_{Uni}^{c}$ содержит лишь $\overline{a}$ и его импульс ✓, а также материальное поле ≮ с его импульсом ⑦≮.

1. Импульсы. Стандартным образом находим канонические импульсы:

$$\pi_N = \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{Uni}}}{\delta \dot{N}} = 0\,, \qquad \pi_i = \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{Uni}}}{\delta \dot{V}^i} = 0, \tag{13}$$

$$\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{Uni}}}{\delta \dot{\overline{a}}} = -\frac{6\overline{a}\dot{\overline{a}}}{N} + \frac{2\overline{a}^2 V^i{}_{|i}}{N}\,, \qquad \pi_\phi = \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{Uni}}}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\overline{a}^3}{N}\dot{\phi}. \tag{14}$$

2. Гамильтониан. Строим канонический гамильтониан:

$$H_{\mathrm{Uni}}^{c} = \int d\vec{y}(\pi_N \dot{N} + \pi_i \dot{V}^i + \Pi\dot{\overline{a}} + \pi_\phi \dot{\phi}) - \mathcal{L}_{\mathrm{Uni}}. \tag{15}$$

Выражая все производные по времени через поля и их импульсы, получаем:

$$H_{\mathrm{Uni}}^{c} = \int d\vec{y}\left(\pi_N \dot{N} + \pi_i \dot{V}^i + N\overline{H}_{\mathrm{Uni}}^{c} + \frac{1}{3}\overline{a}V^i{}_{|i}\left(\Pi - \frac{\overline{a}^2 V^i{}_{|i}}{N}\right) - \frac{(\nabla \overline{a})^2}{\overline{a}}\right), \tag{16}$$

где

$$\overline{H}_{\mathrm{Uni}}^{c} = \frac{\pi_\phi^2}{2\overline{a}^3} + \overline{a}V(\phi) + 2\Delta\overline{a} - \frac{\Pi^2}{12\overline{a}}. \tag{17}$$

3. Квантование. Накладываем коммутационные соотношения:

$$[\pi_N(\vec{x}), N(\vec{x}')] = -i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad [\pi_i(\vec{x}), V^j(\vec{x}')] = -i\delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{18}$$

$$[\Pi(\vec{x}), \overline{a}(\vec{x}')] = -i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad [\pi_\phi, \phi] = -i. \tag{19}$$

В так называемом метрическом представлении эти коммутационные соотношения можно реализовать, представляя операторы импульса через функциональные и обычные производные по соответствующим переменным (см. также [1, 11]):

(20)

$$\pi_N = -i\frac{\delta}{\delta N(\vec{x})}, \quad \pi_i = -i\frac{\delta}{\delta V^i(\vec{x})},$$

$$\Pi = -i\frac{\delta}{\delta \overline{a}(\vec{x})}, \qquad \pi_\phi = -i\frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Операторы самих полей в таком случае представляют собой просто умножение на поле.

Таким образом, придавая операторам в (17) явный вид посредством соотношений (20), получаем **уравнение Уилера--Девитта для слабонеоднородной Вселенной** на волновой функционал $\Psi[\overline{a}, \phi]$:

(21)

$$\int d\vec{y}\,(H^{c}_{\mathrm{Uni}}\Psi[\overline{a}, \phi]) = 0.$$

Поскольку импульсы, соответствующие полям N и V^i, отсутствуют, мы сразу опустили в $\Psi[\overline{a}, \phi]$ зависимость от этих полей. Действительно, квантовое выражение этого факта можно записать как:

$$\pi_N \Psi = 0\,, \qquad \pi_i \Psi = 0.$$

С учетом (20) это и означает независимость волнового функционала от N и V^i.

4. Заключение

Сделаем несколько комментариев по поводу полученного уравнения. В связи с ним, так же, как с уравнением Уилера--Девитта для однородной и изотропной Вселенной, возникают несколько вопросов, предполагающих дальнейшие исследования. Например, нахождение решений, хотя бы в ВКБ-приближении, интерпретация этих решений, упорядочивание операторов, проблема времени, проблема граничных условий и т.д. (Обширную литературу по каждому из них можно найти в обзоре [14]). Однако на некоторые из них можно наметить ответ уже сейчас. В частности, решение проблемы времени представляется довольно ясным: вид волнового функционала указывает на то, что при выходе в классическую область роль времени, по-видимому, должно играть материальное поле ϕ, что находится в соответствии с выводами самого Девитта относительно однородного случая. Во-вторых, несмотря на то, что при выводе этого уравнения использовался класс лагранжевых систем отсчета, его решения имеют инвариантный вид, так как зависят от двух истинных скаляров $\bar{a}$ и ϕ (первый является скаляром при малых калибровочных преобразованиях).

Список литературы

[1] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Москва: Наука, 1984.

[2] Л.П. Грищук, ЖЭТФ 67, 825 (1974).

[3] Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков, Строение и эволюция Вселенной, Москва: Наука, 1975.

[4] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Механика, Москва: Наука, 1988.

[5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, Москва: Наука, 1988.

[6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Квантовая механика (нерелятивистская теория), Москва: Физматлит, 2002.

[7] В.Н. Лукаш, ЖЭТФ 79, 1601 (1980).

[8] В.Н. Лукаш, Е.В. Михеева, Физическая космология, Москва: Физматлит, 2010.

[9] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, т. 2, Москва: Мир, 1977.

[10] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, т. 3, Москва: Мир, 1977.

[11] М. Пескин, Д. Шредер, Введение в квантовую теорию поля, Москва: РХД, 2001.

[12] В.Н. Строков, Астрономический журнал 84, 483 (2007).

[13] B.S. DeWitt, Phys.Rev. 160, 1113 (1967).

[14] J.J. Halliwell, Introductory Lectures on Quantum Cosmology in: Proceedings of the Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes, edited by S.Coleman, J.B.Hartle, T.Piran and S.Weinberg, World Scientific: Singapore, 1991.

[15] J.A. Wheeler, Phys. Rev. 97, 511 (1955).