РАСЧЕТ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЙ В ФОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ФОКУСИРУЮЩЕЙ ЛИНЗЫ МЕТОДАМИ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Ю.В. Крыленко, Ю.А. Михайлов, А.С. Орехов, Г.В. Склизков, А.М. Чекмарев

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН (ФИАН)

Введение

Фазово-пространственная структура электромагнитного поля в фокальной области линзы имеет важное значение для многих областей физики, в том числе для лазерного термоядерного синтеза. Например, при решении проблемы равномерности абляционного давления на мишени [1,2], что весьма важно для достижения высокой степени сжатия лазерных термоядерных мишеней, для исследования возможностей и эффективности стохастического ускорения электронов в плазме [3,4]. Возможность расчета структуры поля лазерного излучения на поверхности мишени и корреляции этого поля с экспериментальными данными имеет принципиальное значение при экспериментальной реализации ряда диагностических методик исследования плазмы, в частности, методики, основанной на рассеянии высокоэнергичных электронов на спонтанных магнитных полях в плазме [5].

Анализу фазово-пространственной структуры электромагнитного поля в фокальной плоскости линзы посвящено много работ (см., например, [6-8]). Однако специфика конкретной решаемой задачи требует специального рассмотрения. Вывод основных формул расчета поля вблизи фокуса идеальной линзы методом интеграла Дебая для линейно поляризованного излучения дан в [6], где так же показаны пределы применимости метода. Условия применимости метода Кирхгофа указаны в [9].

В данной работе сделан расчет поля вблизи фокуса идеальной линзы двумя методами для различно поляризованного излучения (линейно, радиально и азимутально). Выведены аналитические формулы для напряженности поля вблизи фокуса радиально и азимутально поляризованного излучения при расчете по методу Дебая. Для описания поворота вектора напряженности при преломлении идеальной линзой используется метод кватернионов. Проведено сравнение двух методов (Дебая и Кирхгофа) по результатам расчета и быстродействию.

Постановка задачи

На линзу диаметром 4 см и фокусом 10 см падает излучение от импульсного Nd-лазера (длина волны $\lambda = 1{,}06$ мкм). Рассчитать методом дифракционных интегралов распределение интенсивности вблизи фокальной плоскости двумя способами — методом интеграла Кирхгофа и методом приближения Дебая. Сравнить результаты расчета с экспериментальными данными.

Метод Кирхгофа

Рассмотрим кратко данный метод расчета дифрагирующих полей (вывод, скалярный характер, допущения и область применимости).

Пусть на идеальную линзу падает плоская монохроматическая волна:

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cdot e^{-i \cdot (\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \tag{1}$$

Идеальная линза, по определению, преобразует плоский волновой фронт падающей на нее волны в сферический. Введем две системы координат как показано на (рис. 1).

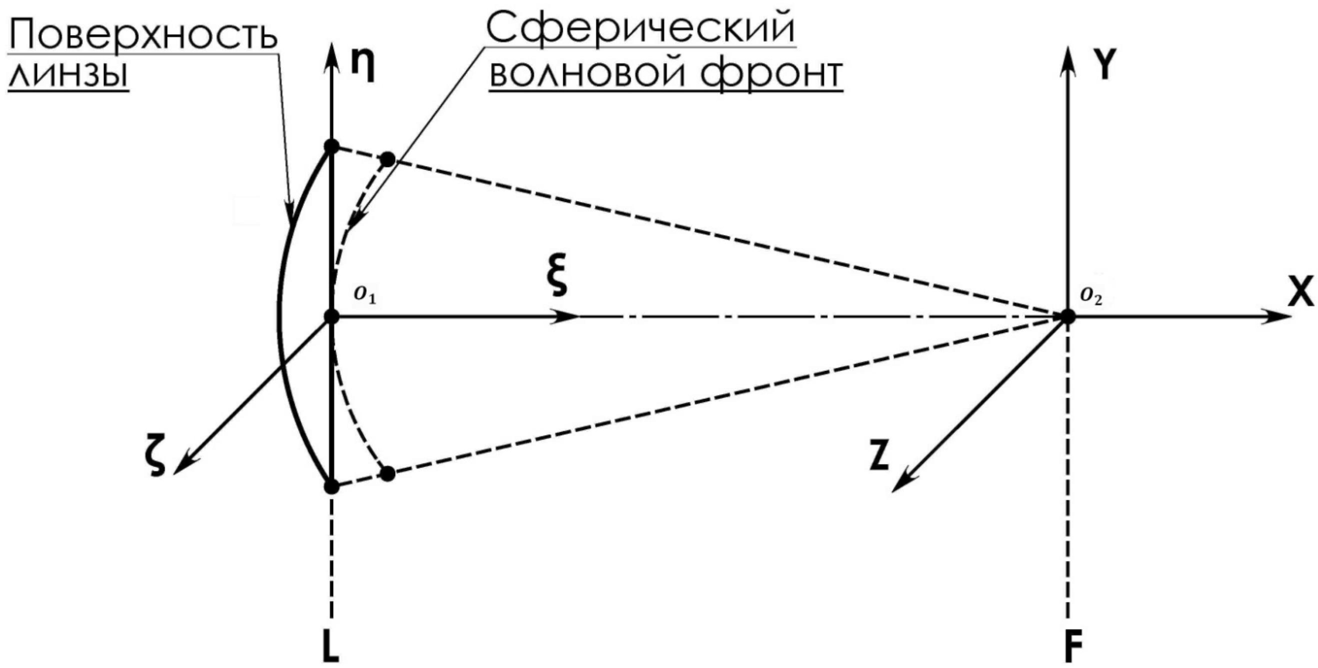


Рис. 1. XYZ: начало O_2 расположено в фокусе линзы, ось O_2X совпадает с оптической осью. $\xi\eta\zeta$: ось $O_1\xi$ совпадает с оптической осью, $O_1O_2 = F$ (фокусному расстоянию линзы). Источники вторичных сферических волн расположены на волновом фронте за линзой (см. рис. 2)

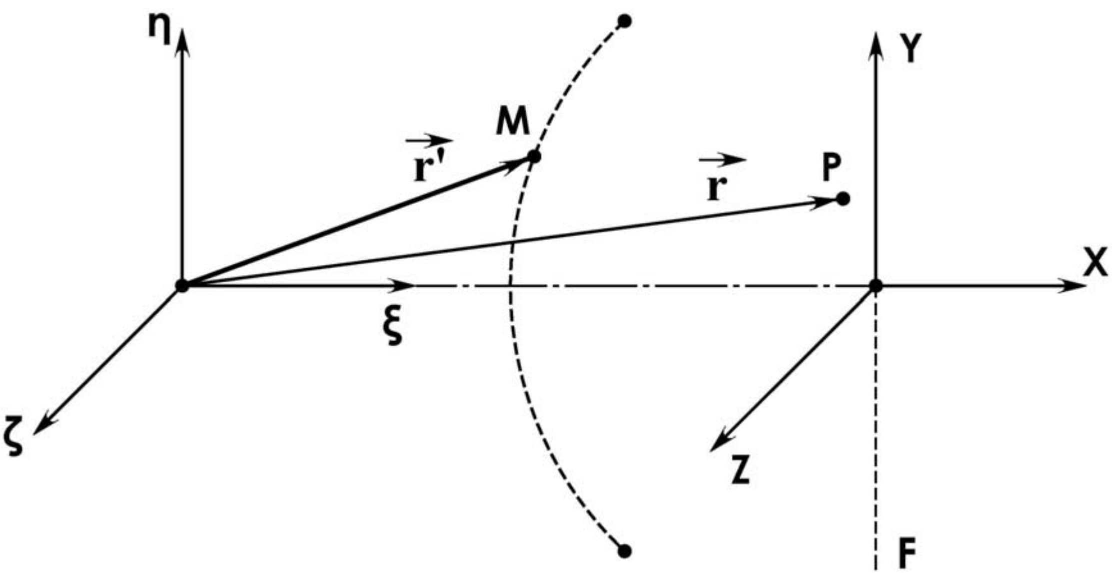


Рис. 2. Расположение источников вторичных сферических волн на волновом фронте: M – точка на волновом фронте (источник вторичных волн); P – точка, в которой рассчитывается поле

$$\begin{Bmatrix} \Delta u + k^2 \cdot u = 0 \\ \Delta G + k^2 \cdot G = -4\pi \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}^*) \\ G(\vec{r}, \vec{r}^*) = \dfrac{e^{i \cdot \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}^*)}}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Используя вторую теорему Грина:

$$\oint_S (f \cdot \nabla\varphi - \varphi \cdot \nabla f)\, d\vec{S}^* = \int_V (f \cdot \Delta\varphi - \varphi \cdot \Delta f) dV^* \tag{3}$$

Берем $f = u(\vec{r})$ и $\varphi = G(\vec{r}, \vec{r}^*)$; с учетом уравнений (1), (2), получаем:

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_S (G(\vec{r}, \vec{r}^*) \cdot \nabla u(\vec{r}^*) - u(\vec{r}^*) \cdot \nabla G(\vec{r}, \vec{r}^*))\, d\vec{S}^* \tag{4}$$

После некоторых математических упрощений (см. приложение В), из (4) получаем окончательную расчетную формулу (см. поясняющие рис. 2 и рис. 3):

$$E_\alpha(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \int_\Sigma E_\alpha(M) \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}^*|}}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} \cdot \frac{(1 + \cos\,\varphi)}{2} d\sigma \tag{5}$$

$$(\alpha = x, y, z)$$

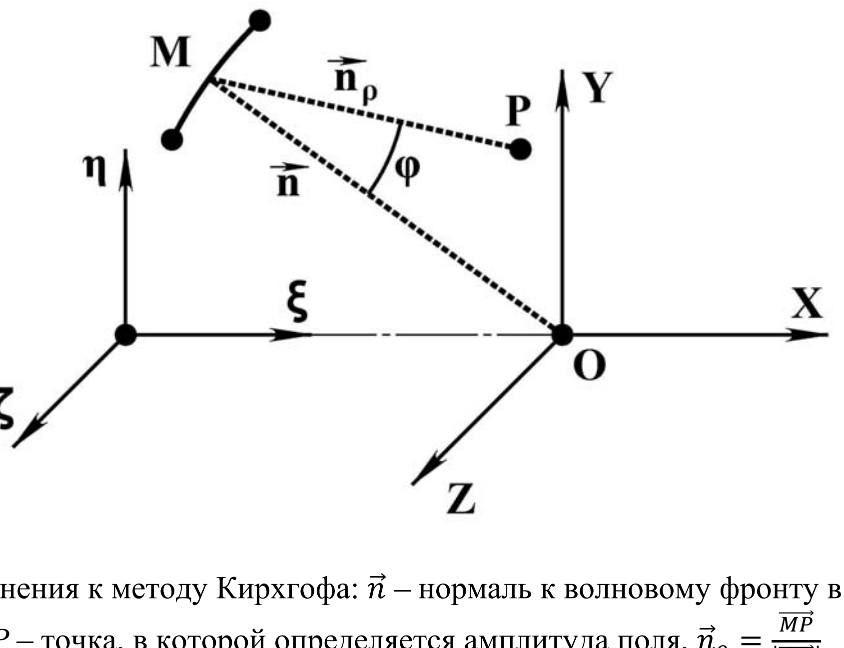


Рис. 3 Пояснения к методу Кирхгофа: $\vec{n}$ – нормаль к волновому фронту в точке M, P – точка, в которой определяется амплитуда поля, $\vec{n}_\rho = \frac{\overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MP}|}$

Расчет проводится для каждой компоненты отдельно, в результате получим результирующий вектор поля $\vec{E}(P) = \begin{pmatrix} E_x(P) \\ E_y(P) \\ E_z(P) \end{pmatrix}$.

Для расчета результирующего поля по формуле (5) необходимо знать ориентацию вектора $\vec{E}(M)$ после преломления линзой. Задача преломления поляризованного света на сферической поверхности является идейно простой, но математически — громоздкой. Под этой задачей понимается следующее (пояснения приводятся для линейно поляризованного падающего излучения):

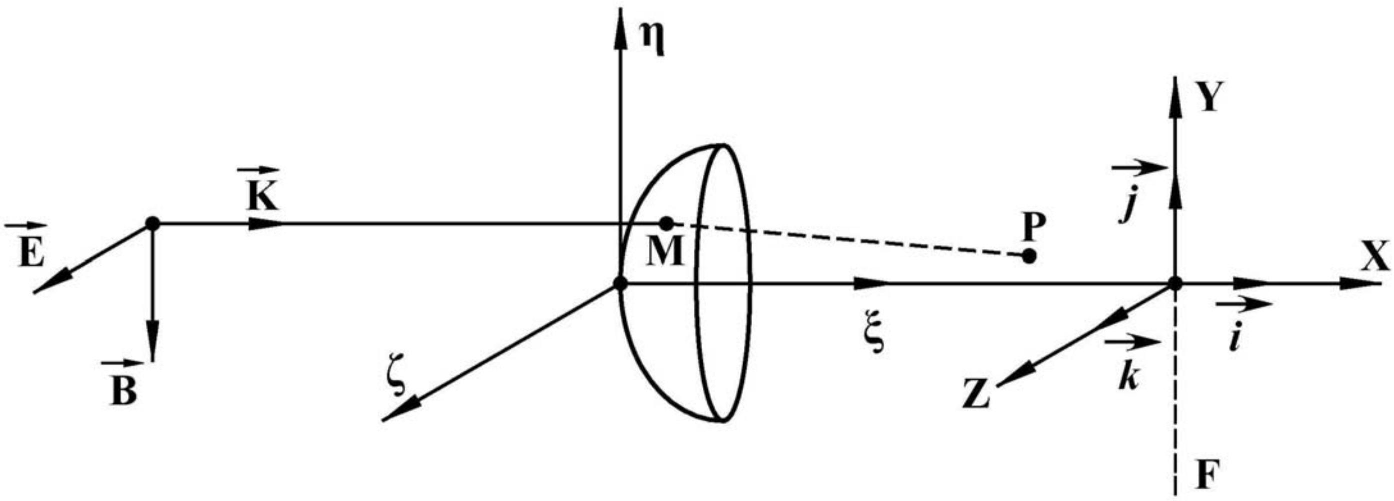


Рис. 4. Преломление света фокусирующей линзой

На линзу падает линейно поляризованная электромагнитная волна:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_\xi = 0 \\ E_\eta = 0 \\ E_\zeta = E_0 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_\xi = 0 \\ B_\eta = -B_0 \\ B_\zeta = 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Цель — вычислить проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ преломленной волны.

Пусть F — фокус линзы, P — точка, в которой определяется поле, M — точка на волновом фронте непосредственно за линзой.

Тогда в точке M плоскость, содержащая векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ падающей волны повернется вокруг оси

$$\vec{e} = \frac{\vec{k} \times \frac{\overrightarrow{MP}}{MP}}{\left| \vec{k} \times \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \right|} \tag{7}$$

на угол

$$\alpha = \arccos\left(\vec{k} \cdot \frac{\overrightarrow{MP}}{MP}\right). \tag{8}$$

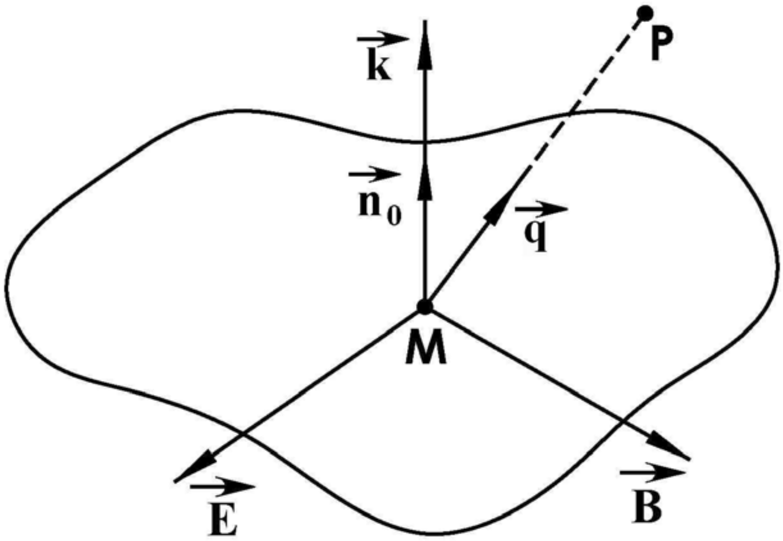


Рис. 5. Пояснения к преломлению векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$

Преобразование базиса при поворотах его как твердого тела вокруг заданной оси $\vec{e}$ на определенный угол α изящнее всего описывать кватернионами. Ниже приводится их краткое описание.

Кватернион — это гиперкомплексное число, элемент четырехмерного векторного пространства над полем вещественных чисел.

$$\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3,$$

где i_k $(k = \overline{0{,}3})$ — какой-либо базис; λ_k $(k = \overline{0{,}3})$ — координаты вектора Λ в заданном базисе.

Геометро – числовая интерпретация:

$i_0 = 1;$

i_k $(k = \overline{1{,}3})$ — орты некоторого базиса трехмерного евклидового пространства.

Таким образом,

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 = \lambda_0 + \vec{\lambda}.$$

Для кватернионов определяют следующие операции (знак «*» означает кватернионное умножение, определение см. ниже):

1. $(\Lambda * \mathrm{M}) * \mathrm{N} = \Lambda * (\mathrm{M} * \mathrm{N});$

2. $(\Lambda + M) * (N + R) = \Lambda * N + M * N + \Lambda * R + M * R$;

3. $(\lambda\Lambda) * (\mu M) = \lambda\mu\Lambda * M \quad (\lambda, \mu$ — действительные числа).

Операция умножения не коммутативна:

$$\Lambda * \mathrm{M} \neq \mathrm{M} * \Lambda.$$

В случае геометро – числовой интерпретации определяют:

$$\vec{\imath}_k * \vec{\imath}_k = -1;$$

$$\vec{\imath}_k * \vec{\imath}_l = \vec{\imath}_k \times \vec{\imath}_l, \qquad (k \neq l).$$

Тогда

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda};$$

$$\mathrm{M} = \mu_0 + \vec{\mu};$$

$$\Lambda * \mathrm{M} = \lambda_0\mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \lambda_0\vec{\mu} + \mu_0\vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}; \tag{9}$$

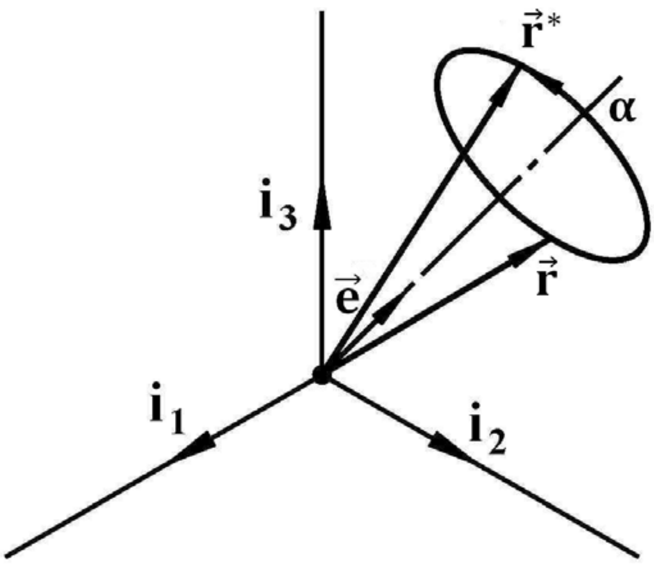


Рис. 6. Поворот вектора $\vec{r}$ вокруг оси $\vec{e}$ на угол α

Пусть вектор $\vec{r}$ поворачивается вокруг оси, заданной единичным вектором $\vec{e}$ на угол α. Требуется вычислить проекции вектора $\vec{r}^*$.

Вот как изящно это получается с помощью кватернионов:

$$\vec{r}^* = \Lambda * \vec{r} * \overline{\Lambda}, \tag{10}$$

где $\Lambda = cos\frac{\alpha}{2} + sin\frac{\alpha}{2}\cdot\vec{e}$ и $\overline{\Lambda} = cos\frac{\alpha}{2} - sin\frac{\alpha}{2}\cdot\vec{e}$, $\overline{\Lambda}$ называется сопряженным кватернионом.

Выполняя в формуле (10) кватернионное умножение, получим окончательную формулу для вектора $\vec{r}^*$.

$$\vec{r}^* = (sin^2\frac{\alpha}{2})\cdot(\vec{e}\cdot\vec{r})\cdot\vec{e} + (cos^2\frac{\alpha}{2})\cdot\vec{r} + (sin\alpha)\cdot(\vec{e}\times\vec{r}) + (sin^2\frac{\alpha}{2})\cdot(\vec{e}\times(\vec{e}\times\vec{r})). \qquad (11)$$

Приведем простейший пример.

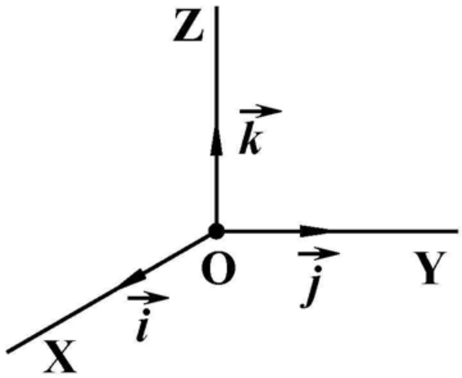


Рис. 7. Простейший пример применения кватернионов

Пусть новый базис ($\vec{\imath}^*, \vec{\jmath}^*, \vec{k}^*$) получается из старого ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) поворотом вокруг оси $\vec{\imath}$ на угол $\frac{\pi}{2}$. Вычислим с помощью аппарата кватернионов, какие проекции имеет орт $\vec{\jmath}^*$ повернутого базиса в старом, неподвижном (ответ очевиден сразу: $\vec{\jmath}^* = \vec{k}$).

Кватернион поворота в данном случае имеет вид $\Lambda = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\imath}$, где угол поворота $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $\vec{\jmath}^* = \Lambda * \vec{\jmath} * \overline{\Lambda}$

Используя формулу (9), находим произведения сомножителей:

$$\Lambda * \vec{\jmath} = -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\jmath} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(\vec{\imath}\times\vec{\jmath}) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\jmath} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{k}$$

$$(\Lambda * \vec{\jmath}) * \overline{\Lambda} = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\jmath} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\imath}\right) =$$

$$= -\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\jmath} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\imath}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\jmath} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{k}\right)$$
$$+ \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\jmath} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{k}\right)\times\left(-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{k}\right) =$$

$$= cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{\jmath} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\vec{k} - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(\vec{\jmath}\times\vec{\imath}) - sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(\vec{k}\times\vec{\imath}) =$$

$$= \cos(\alpha) \cdot \vec{j} + \sin(\alpha) \cdot \vec{k}.$$

Итак, $\vec{j}^* = \cos(\alpha) \cdot \vec{j} + \sin(\alpha) \cdot \vec{k}$, подставляя угол поворота $\alpha = \frac{\pi}{2}$, получим $\vec{j}^* = \vec{k}$.

МетодДебая

Для упрощения расчетов и получения наглядных аналитических формул рассмотрим следующее приближение на основе интеграла Кирхгофа для вычисления поля вблизи фокуса.

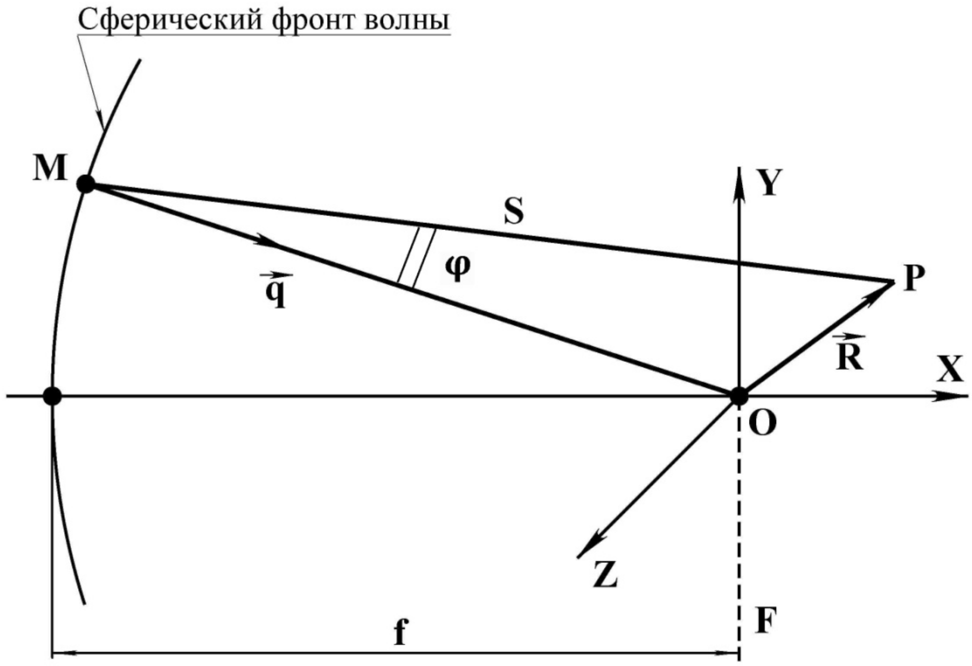


Рис. 8. Пояснения к методу Дебая

Систему координат выберем следующим образом: ось OX — вдоль оптической оси, оси OY и OZ — перпендикулярны оптической оси и образуют с осью OX правую систему координат. Центр O находится в фокусе линзы.

Волновой фронт за линзой предполагаем сферический.

M — точка на волновом фронте.

P — точка, в которой определяются значения векторов напряженности электромагнитного поля.

f — фокусное расстояние линзы.

$\vec{q}$ — единичный вектор (безразмерный), нормаль к волновому фронту в точке *M*.

s — расстояние MP.

$|\vec{R}| = OP.$

Запишем сначала интеграл Кирхгофа для расчета поля в точке *P*:

$$\varepsilon(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \iint_{\Sigma} \varepsilon(M) \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot s}}{s} \cdot \left(\frac{1 + cos\varphi}{2}\right) \cdot d\sigma. \tag{12}$$

Далее, проведем некоторые эквивалентные преобразования под интегралом с целью перейти к интегрированию по телесному углу:

$$\varepsilon(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \iint_{\Sigma} e^{-i \cdot k \cdot f} \cdot e^{i \cdot k \cdot f} \cdot \frac{f}{f} \cdot \varepsilon(M) \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot s}}{s} \cdot \left(\frac{1 + cos\varphi}{2}\right) \cdot d\sigma; \tag{13}$$

$$\varepsilon(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot e^{-i \cdot k \cdot f} \cdot f \cdot \iint_{\Sigma} \varepsilon(M) \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot (s-f)}}{f \cdot s} \cdot \left(\frac{1 + cos\varphi}{2}\right) \cdot d\sigma. \tag{14}$$

Чтобы перейти к интегралу Дебая, примем следующие упрощения:

1) $s \approx f$;
2) $s - f \approx \vec{q} \cdot \vec{R}$;
3) $(\frac{1+cos\varphi}{2}) \approx 1.$

Тогда, с учетом того, что $\frac{d\sigma}{f \cdot s} \approx \frac{d\sigma}{f^2} = d\Omega$ (телесный угол с началом в точке *O*, содержащий элементарную площадку волнового фронта с центром в точке *M*), интеграл Кирхгофа запишется в виде:

$$E_\alpha(P) \cong \frac{i}{\lambda} \cdot f \cdot e^{-i \cdot k \cdot f} \cdot \int_{\Omega} E_\alpha(M) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \vec{q} \cdot \vec{R}} d\Omega, \tag{15}$$

который называется интегралом Дебая. Такое представление поля в точке наблюдения позволяет получить аналитические формулы, удобные для расчета в пределах ограничений, накладываемых на область наблюдения (см. приложение В).

Линейная поляризация.

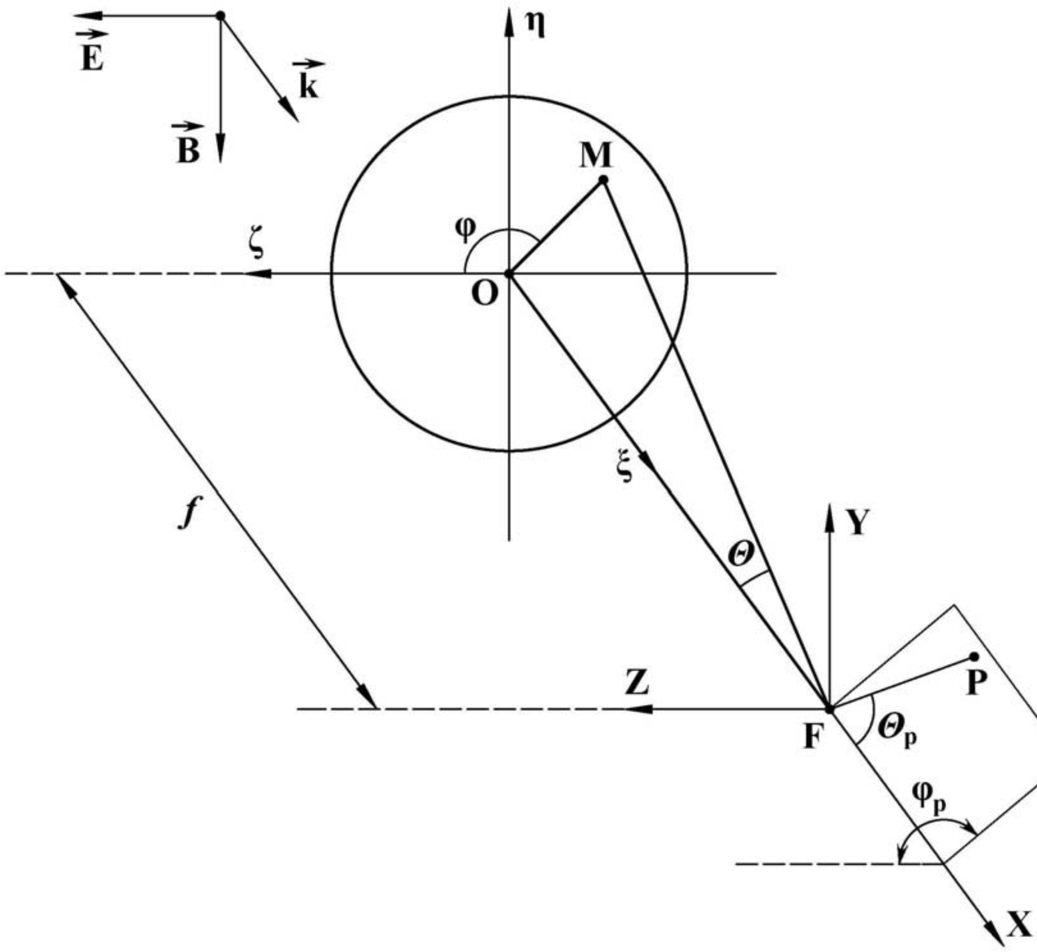


Рис. 9. Пояснение к выводу расчетных формул: точка M на сферическом волновом фронте описывается координатами $(\varphi, \theta, FM = f)$, где f – фокусное расстояние линзы; точка P, в которой рассчитывается поле, описывается координатами $(\varphi_p, \theta_p, r_p = FP)$

Начало системы координат XYZ находится в фокусе линзы, ось FX совпадает с оптической осью, ось FZ сонаправлена с вектором $\vec{E}$ в падающей волне (определяющим направление поляризации падающего излучения), ось FY направлена перпендикулярно осям FX и FZ.

Система координат $\xi\eta\zeta$ расположена непосредственно за линзой. Начало O находится на оптической оси, ось $O\xi$ совпадает с оптической осью, ось $O\zeta$ сонаправлена с вектором $\vec{E}$ в падающей волне, ось $O\eta$ направлена перпендикулярно осям $O\xi$ и $O\zeta$.

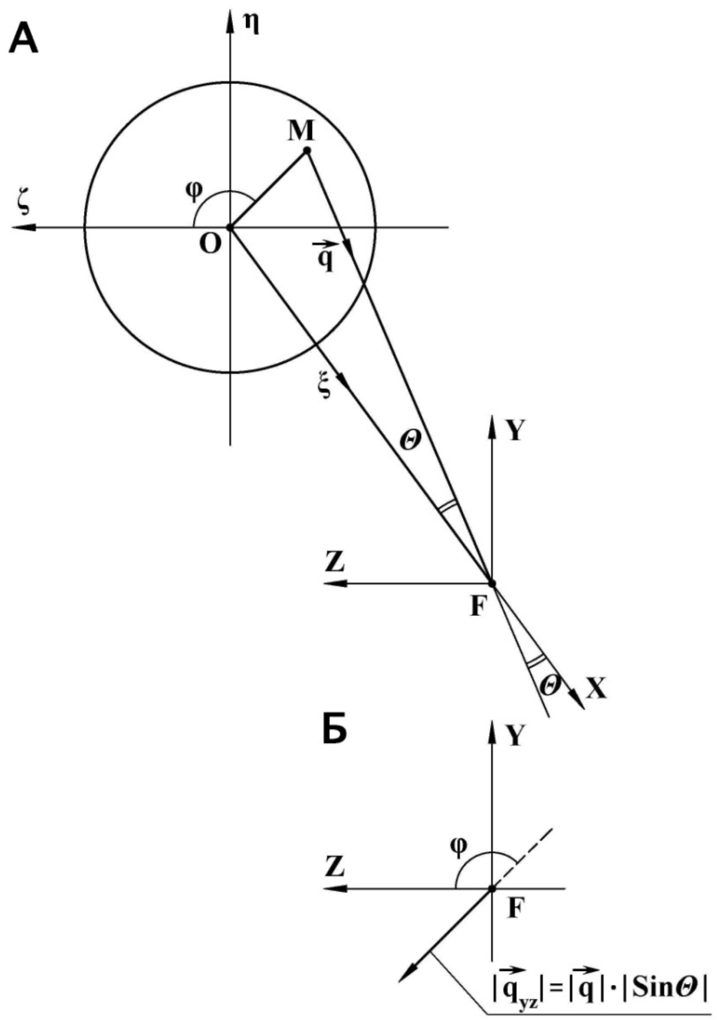


Рис. 10. Пояснение к вычислению проекций единичного безразмерного вектора $\vec{q}$ (нормаль к сферическому волновому фронту). Из А) следует, что $q_x = cos\theta$. На Б) показана векторная проекция $\vec{q}$ на плоскость ZFY. Из Б) следует, что $q_y = -sin\theta \cdot sin\varphi$, $q_z = -sin\theta \cdot cos\varphi$

Для расчета поля вблизи фокуса по формуле Дебая (17) нужно найти проекции преломленного линзой вектора $\vec{E}(M)$ в базисе $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ (рис. 4).При преломлении, плоскость, содержащая векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ повернется в точке M вокруг оси $\frac{(\vec{n}_0 \times \vec{q})}{|(\vec{n}_0 \times \vec{q})|}$ на угол $\arccos(\vec{n}_0 \cdot \vec{q})$ (см. рис. 4 и рис. 5), где $\vec{n}_0$ – единичный вектор, коллинеарный волновому вектору $\vec{k}$ падающей волны; $\vec{q}$ – единичная нормаль к сферическому волновому фронту в точке M. Тогда, после преломления, электрический вектор волны в базисе $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ есть

$$\vec{\mathrm{E}}^{*} = \Lambda * \vec{\mathrm{E}} * \overline{\Lambda}, \tag{16}$$

где $\vec{E}$ – вектор напряженности падающей на линзу волны;

$\Lambda = cos\frac{\alpha}{2} + sin\frac{\alpha}{2} \cdot \vec{e}, \overline{\Lambda} = cos\frac{\alpha}{2} - sin\frac{\alpha}{2} \cdot \vec{e}$ – кватернион поворота и сопряженный ему;

$\alpha = \arccos\,(\vec{n}_0 \cdot \vec{q}), \vec{e} = \frac{\vec{n}_0 \times \vec{q}}{|\vec{n}_0 \times \vec{q}|}$ – угол поворота и орт оси поворота.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{pmatrix}, \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} cos\theta \\ -sin\theta \cdot sin\varphi \\ -sin\theta \cdot cos\varphi \end{pmatrix}, \vec{e} = \frac{\vec{n}_0 \times \vec{q}}{|\vec{n}_0 \times \vec{q}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ cos\varphi \\ -sin\varphi \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \arccos(\vec{n}_0 \cdot \vec{q}) = \arccos(cos\theta) = \theta.$$

См. поясняющие рисунки (рис. 9 и рис. 10).

Чтобы воспользоваться формулой (11), вычислим $\left(\vec{e} \cdot \vec{E}\right)$, $(\vec{e} \times \vec{E})$ и $(\vec{e} \times \left(\vec{e} \times \vec{E}\right))$.

$$\vec{e} \cdot \vec{E} = -E_0 \cdot sin\varphi;$$

$$\vec{e} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cdot cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e} \times \left(\vec{e} \times \vec{E}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 \cdot sin\varphi \cdot cos\varphi \\ -E_0 \cdot cos^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Тогда преломленный вектор напряженности в точке *M* волнового фронта есть

$$\vec{E}^* = \begin{pmatrix} E_0 \cdot sin\theta \cdot cos\varphi \\ E_0 \cdot (cos\theta - 1) \cdot sin\varphi \cdot cos\varphi \\ E_0 \cdot (cos\theta + (1 - cos\theta) \cdot sin^2\varphi) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Далее, для вычисления интеграла Дебая (17) выразим $\vec{R} = \overrightarrow{FP}$ через φ_p, θ_p, r_p (рис. 9), характеризующие положение точки *P*, в которой рассчитывается поле, относительно фокуса *F*.

$$\vec{R} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} r_p \cdot cos\theta_p \\ r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\varphi_p \\ r_p \cdot sin\theta_p \cdot cos\varphi_p \end{pmatrix};$$

$$\vec{q} \cdot \vec{R} = r_p \cdot \left(cos\theta \cdot cos\theta_p - sin\theta_p \cdot sin\theta \cdot \cos\left(\varphi_p - \varphi\right)\right).$$

Теперь все известно для записи интеграла Дебая (15) в более конкретном виде.

$$E_x(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot E_0 \cdot \int\limits_{\Omega} d\Omega \cdot \sqrt{|cos\theta|} \cdot sin\theta \cdot cos\varphi \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot (cos\theta \cdot cos\theta_p - sin\theta_p \cdot sin\theta \cdot \cos\,(\varphi_p - \varphi))}$$

$$E_y(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot E_0 \cdot \int\limits_{\Omega} d\Omega \cdot \sqrt{|cos\theta|} \cdot (cos\theta - 1) \cdot sin\varphi \cdot cos\varphi \cdot$$
$$\cdot\, e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot (cos\theta \cdot cos\theta_p - sin\theta_p \cdot sin\theta \cdot \cos\,(\varphi_p - \varphi))}$$

$$E_z(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot E_0 \cdot \int_\Omega d\Omega \cdot \sqrt{|cos\theta|} \cdot (cos\theta + (1 - cos\theta) \cdot sin^2\varphi)$$
$$\cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot (cos\theta \cdot cos\theta_p - sin\theta_p \cdot sin\theta \cdot \cos(\varphi_p - \varphi))}.$$

Множитель $\sqrt{|cos\theta|}$ выражает закон сохранения энергии излучения при фокусировке.

$d\Omega = sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$, $\theta \in [\pi - \alpha, \pi]$, $\varphi \in [0{,}2\pi]$, α – апертурный угол, равный $\arcsin(\frac{D}{2 \cdot f})$.

Используя тождества $sin\varphi \cdot cos\varphi = \frac{sin2\varphi}{2}$, $sin^2\varphi = \frac{1 - cos2\varphi}{2}$, запишем:

$$E_x(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot E_0 \cdot \int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \sqrt{|cos\theta|} \cdot sin^2\theta$$
$$\cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta_p \cdot cos\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi cos\varphi \cdot e^{i \cdot k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)};$$

$$E_y(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot E_0 \cdot \int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \sqrt{|cos\theta|} \cdot sin\theta \cdot (cos\theta - 1)$$
$$\cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta_p \cdot cos\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot sin2\varphi \cdot e^{i \cdot k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)};$$

$$E_z(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot E_0 \cdot (\int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \sqrt{|cos\theta|} \cdot sin\theta \cdot \frac{(1 + cos\theta)}{2}$$
$$\cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta_p \cdot cos\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot e^{i \cdot k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)} - \int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \sqrt{|cos\theta|} \cdot sin\theta$$
$$\cdot \frac{(1 - cos\theta)}{2} \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta_p \cdot cos\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot cos2\varphi \cdot e^{i \cdot k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)})$$

Используя тождества

$$\int_0^{2\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot e^{i \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \gamma)} d\varphi = 2\pi \cdot i^n \cdot J_n(\rho) \cdot \cos(n \cdot \gamma); \quad (18)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot e^{i \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \gamma)} d\varphi = 2\pi \cdot i^n \cdot J_n(\rho) \cdot \sin(n \cdot \gamma), \quad (19)$$

где $J_n(\rho)$ - функция Бесселя n-го порядка.

Получим окончательные формулы:

$$E_x(P) = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot E_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot I_1(r_p, \theta_p) \cdot cos\varphi_p; \quad (20)$$

$$E_y(P) = -i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot E_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot \frac{I_2(r_p, \theta_p)}{2} \cdot sin2\varphi_p; \quad (21)$$

$$E_z(P) = i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot E_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot \frac{(I_0(r_p, \theta_p) - I_2(r_p, \theta_p) \cdot cos2\varphi_p)}{2}, \quad (22)$$

где

$$I_0(r_p, \theta_p) = \int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \sqrt{|cos\theta|} \cdot sin\theta \cdot (1 + cos\theta) \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta_p \cdot cos\theta} \cdot J_0(k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta); \quad (23)$$

$$I_1(r_p, \theta_p) = \int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \sqrt{|cos\theta|} \cdot sin^2\theta \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta_p \cdot cos\theta} \cdot J_1(k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta); \quad (24)$$

$$I_2(r_p, \theta_p) = \int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \sqrt{|cos\theta|} \cdot sin\theta \cdot (cos\theta - 1) \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta_p \cdot cos\theta} \cdot J_2(k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta). \quad (25)$$

Для магнитного поля вывод формул аналогичен, меняется лишь одно входное данное – вектор индукции магнитного поля в падающей волне:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем:

$$\vec{B}^* = \begin{pmatrix} -B_0 \cdot sin\theta \cdot sin\varphi \\ -B_0 \cdot (cos^2\frac{\theta}{2} + sin^2\frac{\theta}{2} \cdot cos2\varphi) \\ B_0 \cdot sin^2\frac{\theta}{2} \cdot sin2\varphi \end{pmatrix}; \quad (26)$$

$$B_x(P) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot B_0 \cdot I_1(r_p, \theta_p) \cdot sin\varphi_p; \quad (27)$$

$$B_y(P) = -i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot B_0 \cdot \frac{(I_0(r_p, \theta_p) - I_2(r_p, \theta_p) \cdot cos2\varphi_p)}{2}; \quad (28)$$

$$B_z(P) = i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot B_0 \cdot \frac{I_2(r_p, \theta_p)}{2} \cdot sin2\varphi_p, \tag{29}$$

где $I_0(r_p, \theta_p)$, $I_1(r_p, \theta_p)$, $I_2(r_p, \theta_p)$ определены выше (см. формулы (23), (24), (25)).

Радиальнаяполяризация

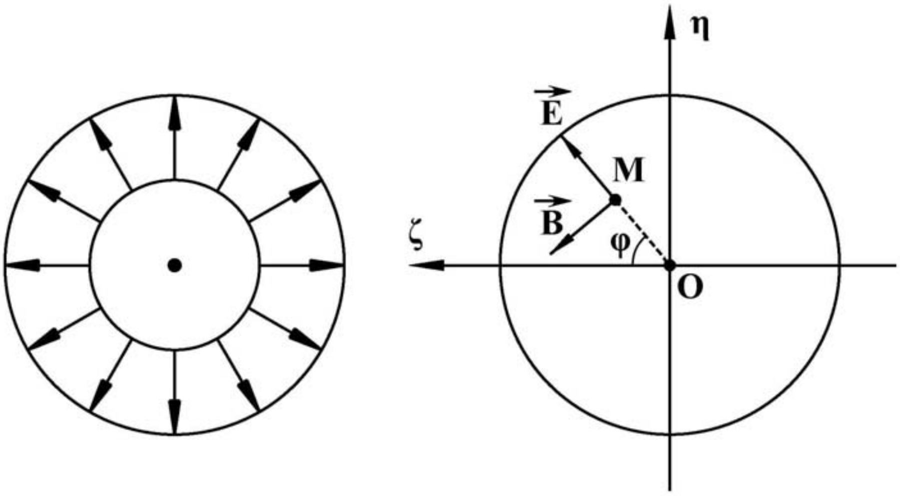


Рис. 11. Радиальная поляризация, направления колебаний вектора $\vec{E}$ в лазерном пучке

Вектор напряженности в падающей волне есть $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cdot sin\varphi \\ E_0 \cdot cos\varphi \end{pmatrix}$ (см. рис. 11.). Вычисляем вектор $\vec{E}^*$ преломленной волны по формуле (16).

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} cos\theta \\ -sin\theta \cdot sin\varphi \\ -sin\theta \cdot cos\varphi \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ cos\varphi \\ -sin\varphi \end{pmatrix};$$

$$\alpha = \arccos(\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1) = \arccos(cos\theta) = \theta;$$

$$\vec{e} \cdot \vec{E} = 0, \vec{e} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e} \times \left(\vec{e} \times \vec{E}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 \cdot sin\varphi \\ -E_0 \cdot cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В результате получим:

$$\vec{E}^* = \begin{pmatrix} E_0 \cdot sin\theta \\ E_0 \cdot cos\theta \cdot sin\varphi \\ E_0 \cdot cos\theta \cdot cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Проводя преобразования интегральной формулы (15), аналогичные случаю линейно поляризованного излучения, получим:

$$E_x(P) = i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot E_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot R_0(r_p, \theta_p); \quad (31)$$

$$E_y(P) = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot E_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot R_1(r_p, \theta_p) \cdot sin\varphi_p; \quad (32)$$

$$E_z(P) = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot E_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot R_1(r_p, \theta_p) \cdot cos\varphi_p, \quad (33)$$

где

$$R_0(r_p, \theta_p) = \int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \sqrt{cos\theta} \cdot sin^2\theta \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta \cdot cos\theta_p} \cdot J_0(k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta)\,; \quad (34)$$

$$R_1(r_p, \theta_p) = \int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \sqrt{cos\theta} \cdot sin\theta \cdot cos\theta \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta \cdot cos\theta_p} \cdot J_1(k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta). \quad (35)$$

Для магнитного поля вывод формул аналогичен, меняется лишь одно входное данное – вектор индукции магнитного поля в падающей волне (см. рис. 11):

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0 \cdot cos\varphi \\ B_0 \cdot sin\varphi \end{pmatrix}.$$

В результате получаем:

$$\vec{B}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0 \cdot cos\varphi \\ B_0 \cdot sin\varphi \end{pmatrix}; \quad (36)$$

$$B_x(P) = 0; \quad (37)$$

$$B_y(P) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot B_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot A(r_p, \theta_p) \cdot cos\varphi_p; \quad (38)$$

$$B_z(P) = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot B_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot A(r_p, \theta_p) \cdot sin\varphi_p, \quad (39)$$

где

$$A(r_p, \theta_p) = \int_{\pi-\alpha}^{\pi} d\theta \cdot \sqrt{|cos\theta|} \cdot sin\theta \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_p \cdot cos\theta_p \cdot cos\theta} \cdot J_1(k \cdot r_p \cdot sin\theta_p \cdot sin\theta). \quad (40)$$

Азимутальная поляризация.

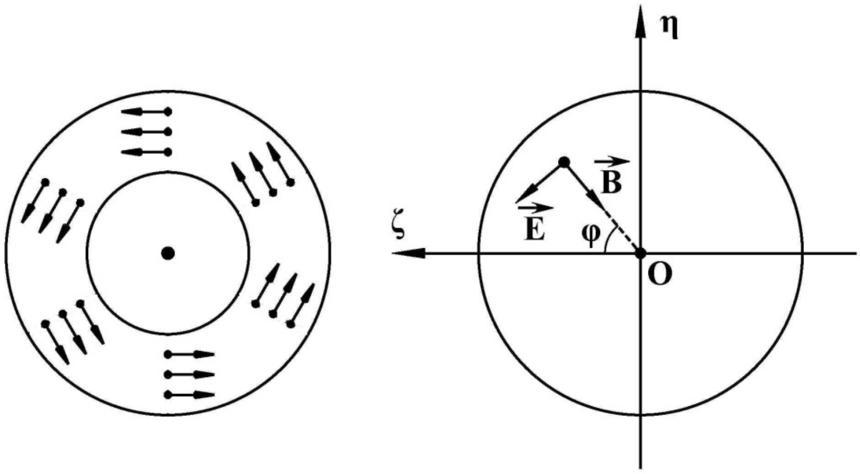


Рис. 12. Азимутальная поляризация, направления колебаний вектора $\vec{E}$ в лазерном пучке

Вектор напряженности в падающей волне есть $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 \cdot cos\varphi \\ E_0 \cdot sin\varphi \end{pmatrix}$ (см. рис. 12). Вычисляем вектор $\vec{E}^*$ преломленной волны по формуле (16).

Величины, необходимые для вычисления:

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} cos\theta \\ -sin\theta \cdot sin\varphi \\ -sin\theta \cdot cos\varphi \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ cos\varphi \\ -sin\varphi \end{pmatrix};$$

$$\alpha = \arccos(\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1) = \arccos(cos\theta) = \theta;$$

$$\vec{e} \cdot \vec{E} = -E_0, \vec{e} \times \vec{E} = 0, \vec{e} \times \left(\vec{e} \times \vec{E}\right) = 0.$$

В результате получим:

$$\vec{E}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 \cdot cos\varphi \\ E_0 \cdot sin\varphi \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Проводя преобразования интегральной формулы (15), аналогичные случаю линейно поляризованного излучения, получим:

$$E_x(P) = 0; \tag{42}$$

$$E_y(P) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot E_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot A\left(r_p, \theta_p\right) \cdot cos\varphi_p; \tag{43}$$

$$E_z(P) = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot E_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot A(r_p, \theta_p) \cdot sin\varphi_p, \tag{44}$$

где $A(r_p, \theta_p)$ определено выше (см. формулу (40)).

Для магнитного поля вывод формул аналогичен, меняется лишь одно входное данное – вектор индукции магнитного поля в падающей волне:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0 \cdot sin\varphi \\ -B_0 \cdot cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В результате получаем:

$$\vec{B}^* = \begin{pmatrix} -B_0 \cdot sin\theta \\ -B_0 \cdot cos\theta \cdot sin\varphi \\ -B_0 \cdot cos\theta \cdot cos\varphi \end{pmatrix}; \tag{45}$$

$$B_x(P) = -i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot B_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot R_0(r_p, \theta_p); \tag{46}$$

$$B_y(P) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot B_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot R_1(r_p, \theta_p) \cdot sin\varphi_p; \tag{47}$$

$$B_z(P) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot B_0 \cdot F \cdot e^{-i \cdot k \cdot F} \cdot R_1(r_p, \theta_p) \cdot cos\varphi_p, \tag{48}$$

где $R_0(r_p, \theta_p)$ и $R_1(r_p, \theta_p)$ (см. формулы (34), (35)).

Результаты расчетов. Электрическое поле.

Для распределений $E_x(x=0,y,z), E_y(x=0,y,z), E_z(x=0,y,z)$ (так же как и для $B_x(x=0,y,z), B_y(x=0,y,z), B_z(x=0,y,z)$) характерно наличие одного, двух или четырех главных максимумов (в зависимости от типа поляризации падающего излучения). Объяснение этому дается в приложениях А и Б. Доля интенсивности, приходящаяся на отдельную компоненту поля $E_\alpha(x,y,z)$ $(\alpha = x,y,z)$ зависит от апертурного угла линзы $\alpha = \arcsin\left(\frac{D}{2 \cdot F}\right)$ и типа поляризации падающего излучения.

Линейная поляризация падающего излучения.

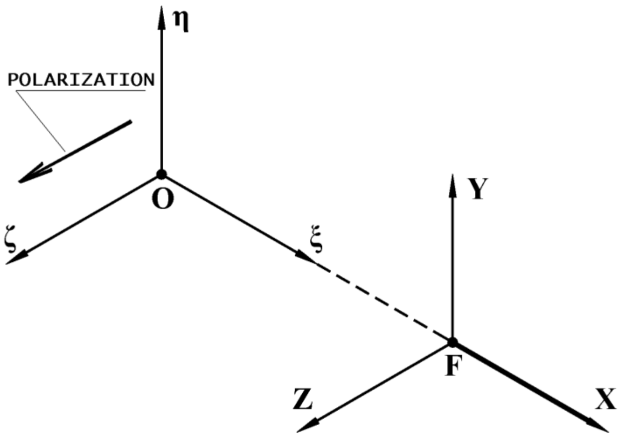


Рис. 13. Направление поляризации в падающей волне совпадает по направлению с осью $O\zeta$ (и FZ)

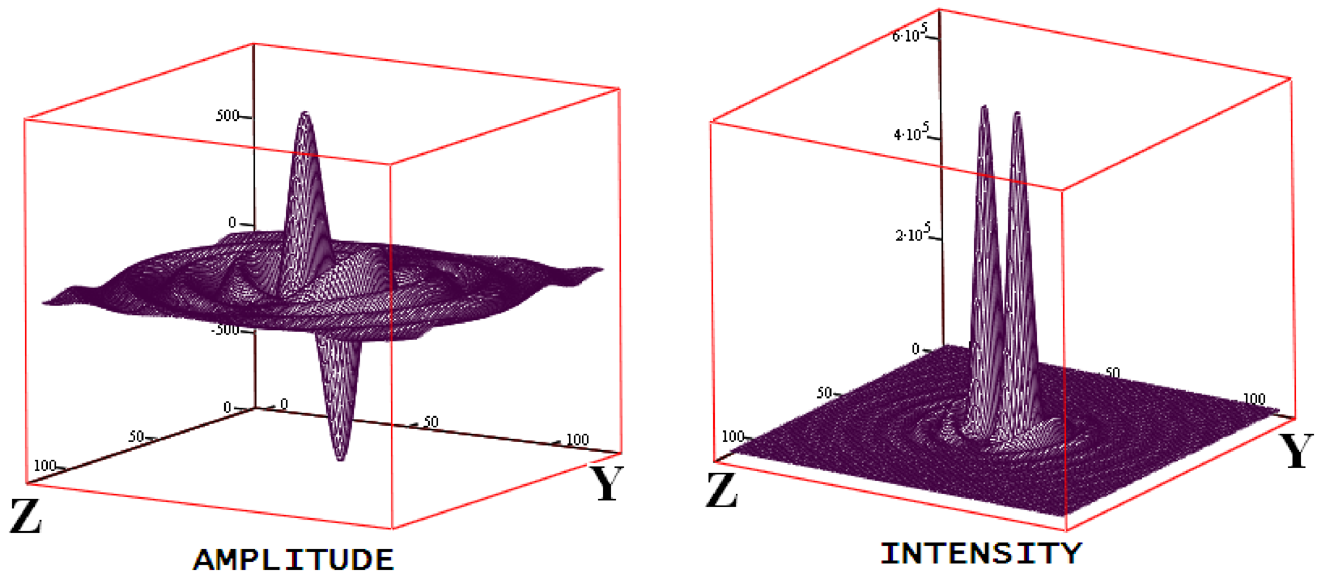


Рис. 14. Продольная компонента OX электрического поля. Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности составляет $\frac{maxI_{ox}}{maxI_{\Sigma}} \cong 10^{-3}$.

Максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong -2\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong +2\lambda \end{pmatrix}$

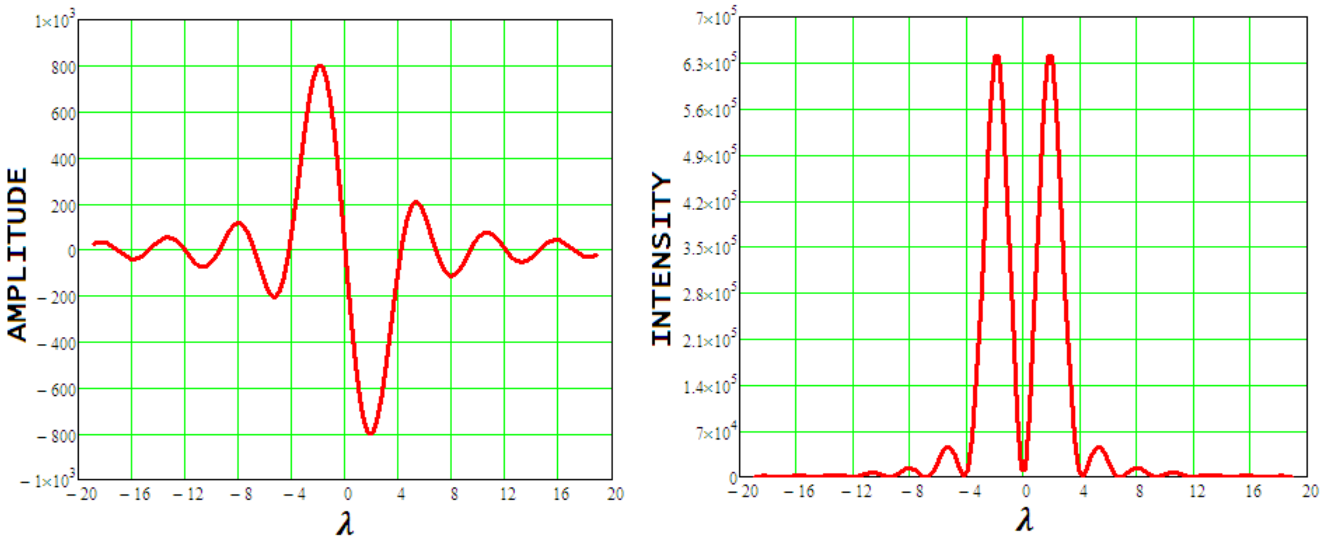


Рис. 15. Продольная компонента OX электрического поля. Сечение в главных максимумах. В фокусе F продольная компонента поля электрического поля равна нулю. Ширина главных максимумов интенсивности $\cong \frac{2\lambda}{D}$

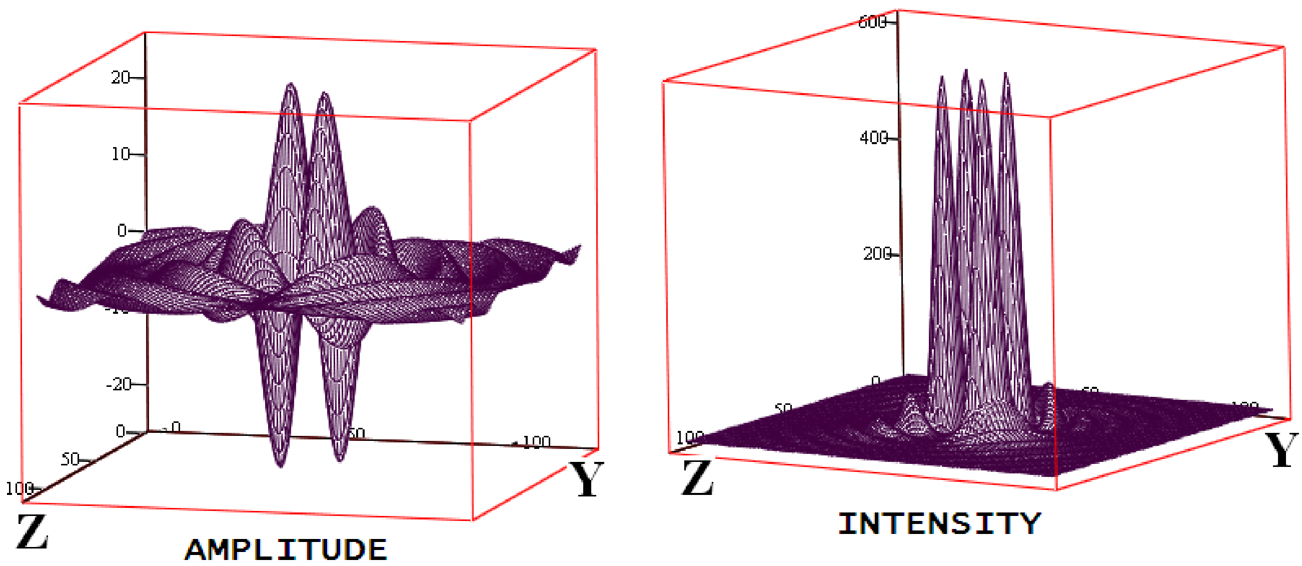


Рис. 16. Поперечная компонента OY электрического поля (перпендикулярна направлению поляризации падающего излучения). Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности составляет $\frac{maxI_{oy}}{maxI_{\Sigma}} \cong 10^{-5}$. Максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong 2 \cdot \lambda \\ z \cong 2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong 2 \cdot \lambda \\ z \cong -2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong -2 \cdot \lambda \\ z \cong 2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong -2 \cdot \lambda \\ z \cong -2 \cdot \lambda \end{pmatrix}$

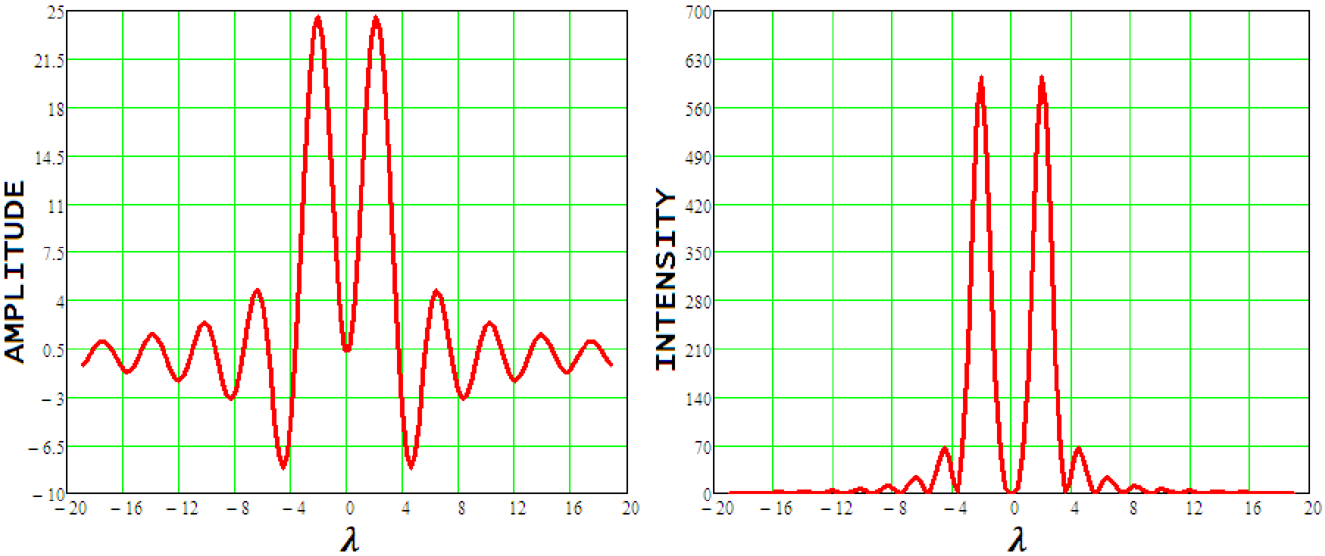


Рис. 17. Поперечная компонента OY электрического поля (диагональное сечение). Ширина главных максимумов интенсивности $\cong \frac{2\cdot\lambda}{D}$, ширина провала между ними $\cong \frac{4\cdot\lambda}{D}$

В распределении $E_y(y,z)$ есть четыре главных максимума: два из них (расположенные на одной диагонали в плоскости YZ) синфазны, а два других (на другой диагонали в плоскости YZ) противофазны им. В фокусе F $E_y(y,z) = 0$.

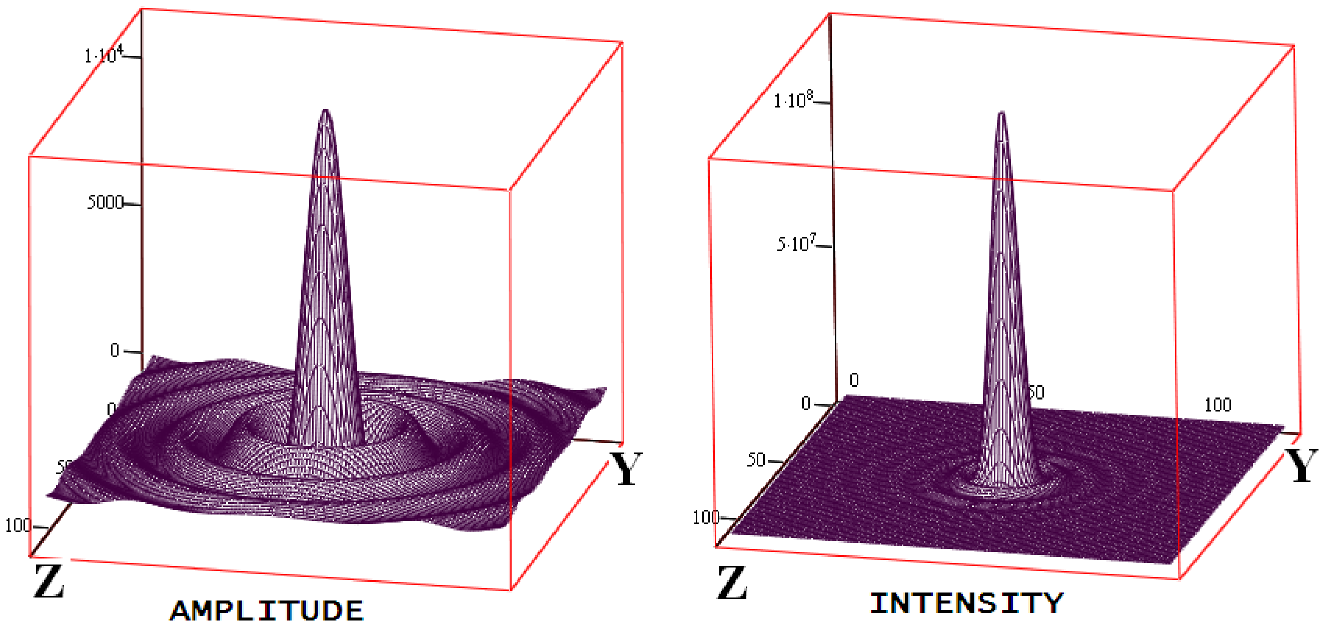


Рис. 18. Поперечная компонента OZ электрического поля (совпадает с направлением поляризации падающего излучения). Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности составляет $\frac{maxI_{oz}}{maxI_{\Sigma}} \cong 1$.

Главный максимум интенсивности расположен в точке $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix}$

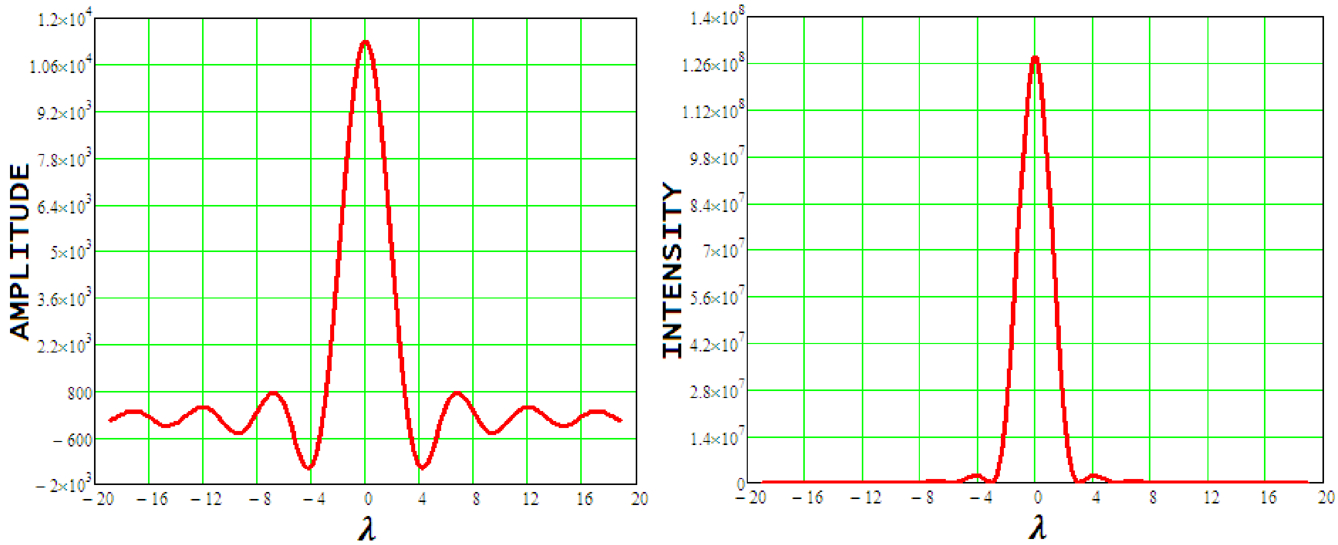


Рис. 19. Поперечная компонента OZ электрического поля. Сечение в главном максимуме

В распределении $E_z(y,z)$ есть один центральный максимум. Ширина главного максимума интенсивности составляет $\frac{4\lambda}{D}$.

Радиальная поляризация.

В распределении интенсивности $I_{ox} = E_x^2(x=0,y,z)$, приходящейся на продольную компоненту поля – один главный максимум, расположенный в фокусе. Структура распределений интенсивностей $I_{oy} = E_y^2(x=0,y,z)$ и $I_{oz} = E_z^2(x=0,y,z)$, приходящихся на поперечные компоненты поля, одинакова (в фокусе поле равно нулю, угловая ширина провала $\cong \frac{2\cdot\lambda}{D}$) , но картины распределений «повернуты» на $\frac{\pi}{2}$ друг относительно друга.

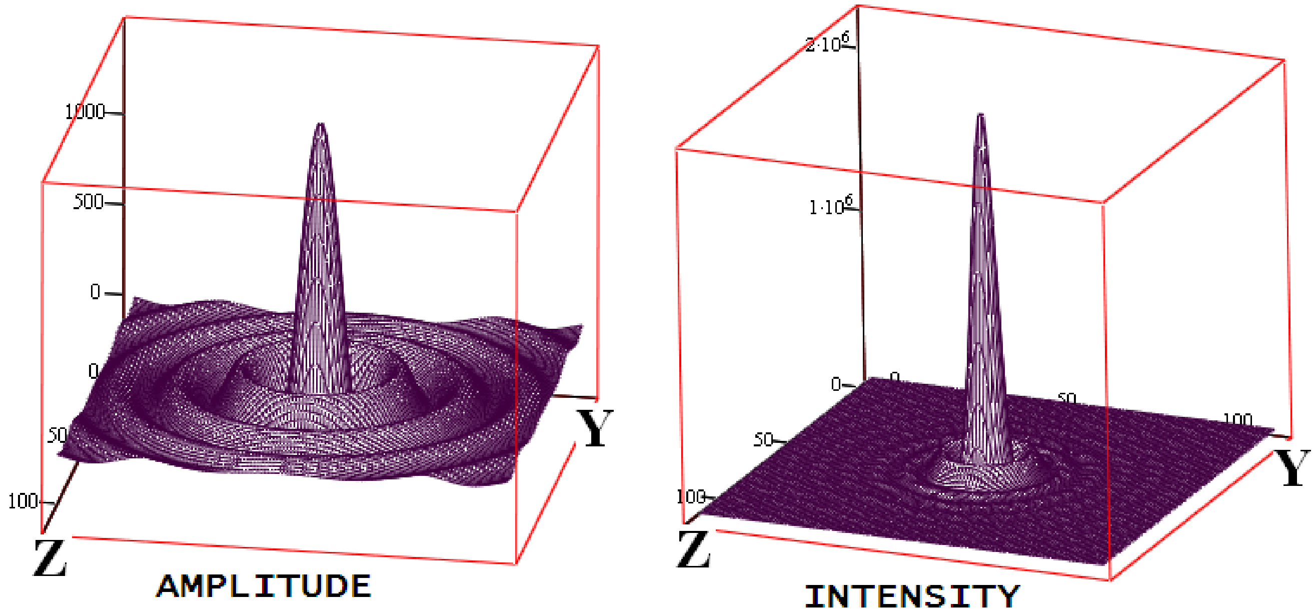


Рис. 20. Продольная компонента OX электрического поля. Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности составляет $\frac{maxI_{ox}}{maxI_{\Sigma}} \cong 10^{-1}$.

Главный максимум интенсивности расположен в точке $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix}$

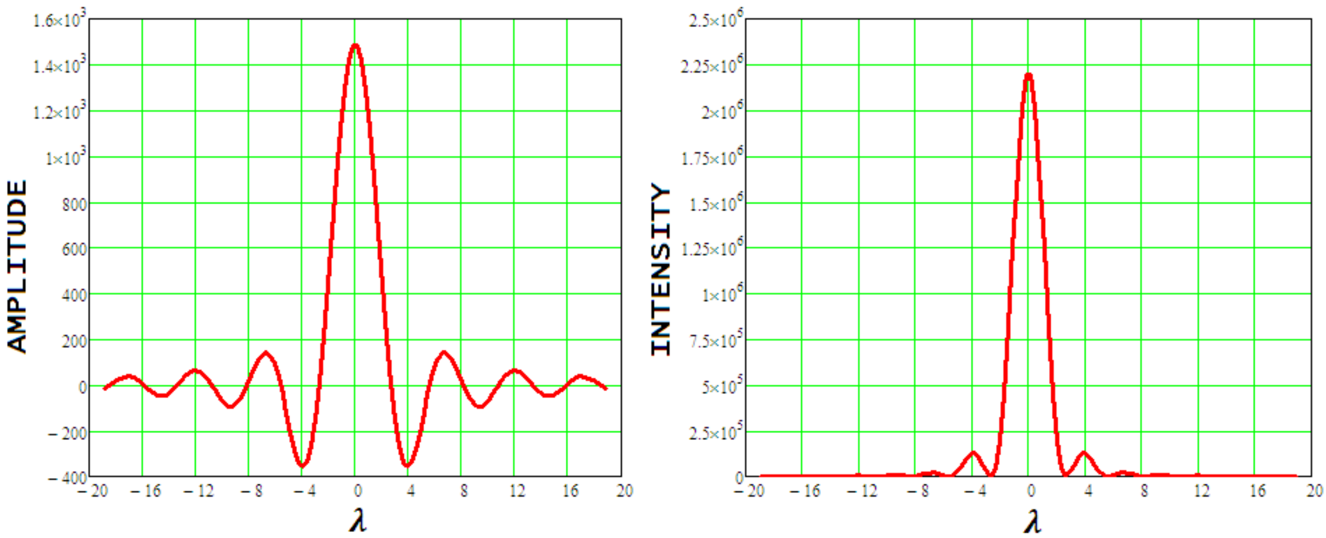


Рис. 21. Продольная компонента OX электрического поля. Сечение в главном максимуме.

Ширина главного максимума интенсивности составляет $\cong \frac{4 \cdot \lambda}{D}$

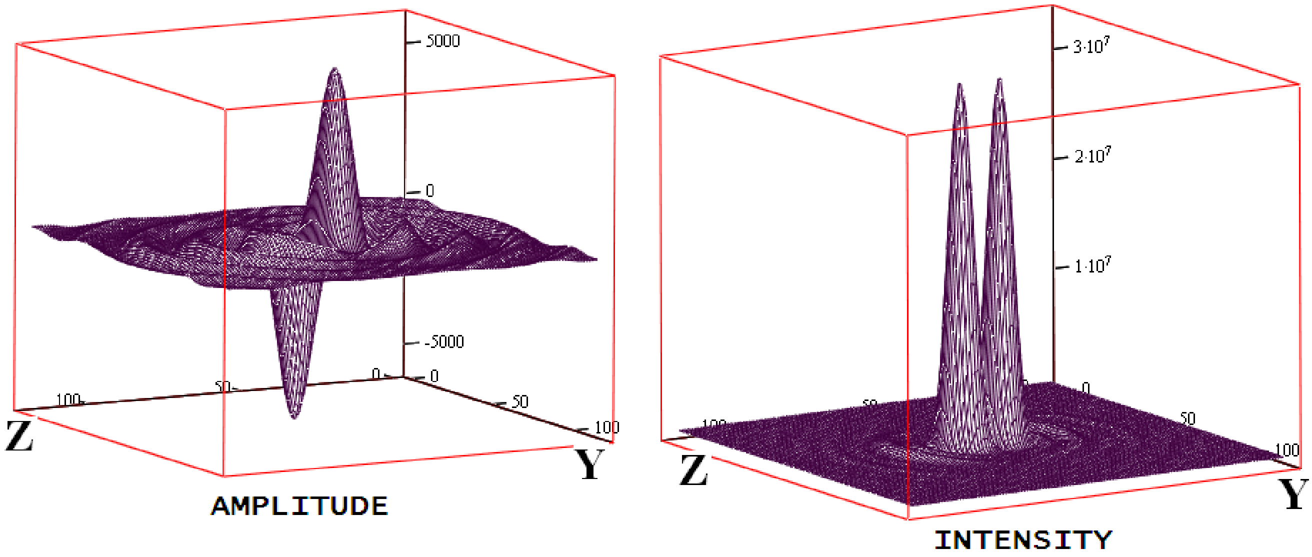


Рис. 22. Поперечная компонента OY электрического поля. Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности составляет $\frac{maxI_{oy}}{maxI_{\Sigma}} \cong 1$.

Главные максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong -2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong 2 \cdot \lambda \end{pmatrix}$

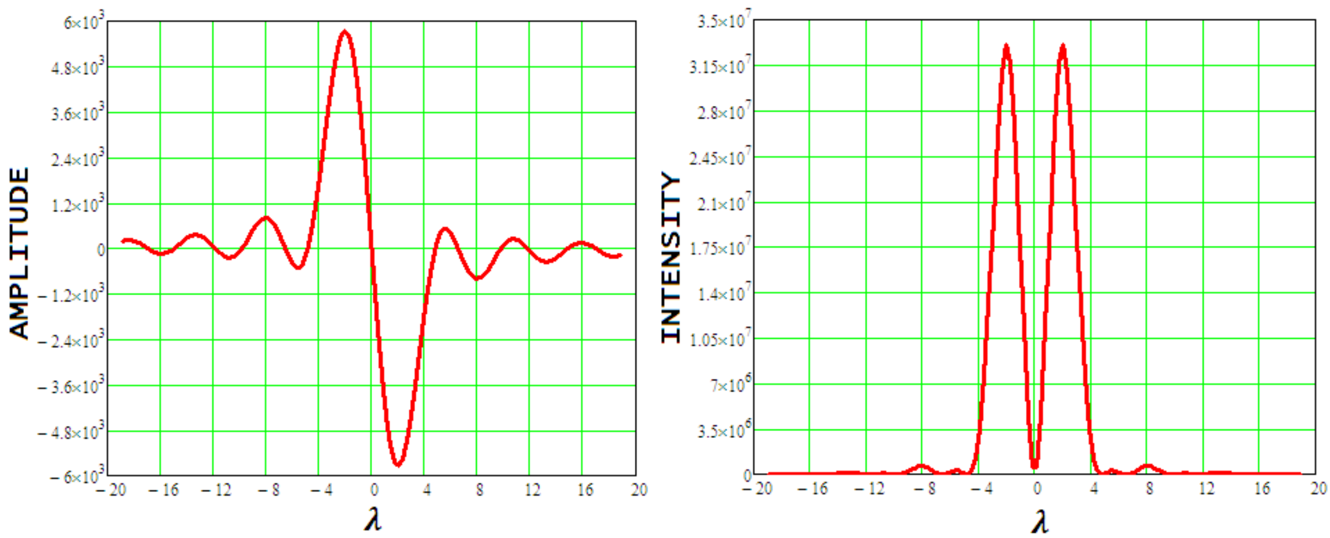


Рис. 23. Поперечная компонента OY электрического поля. Сечение в главных максимумах.

Ширина главных максимумов интенсивности составляет $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$

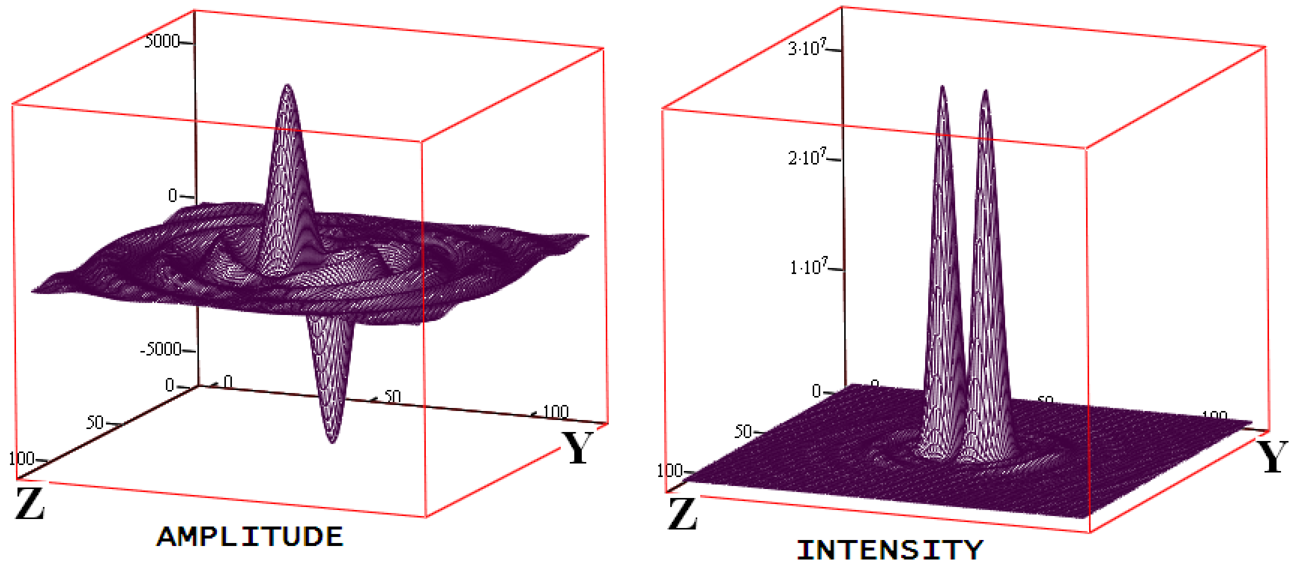


Рис. 24. Поперечная компонента OZ электрического поля. Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности составляет $\frac{maxI_{oz}}{maxI_{\Sigma}} \cong 1$.

Главные максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong -2 \cdot \lambda \\ z = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong 2 \cdot \lambda \\ z = 0 \end{pmatrix}$

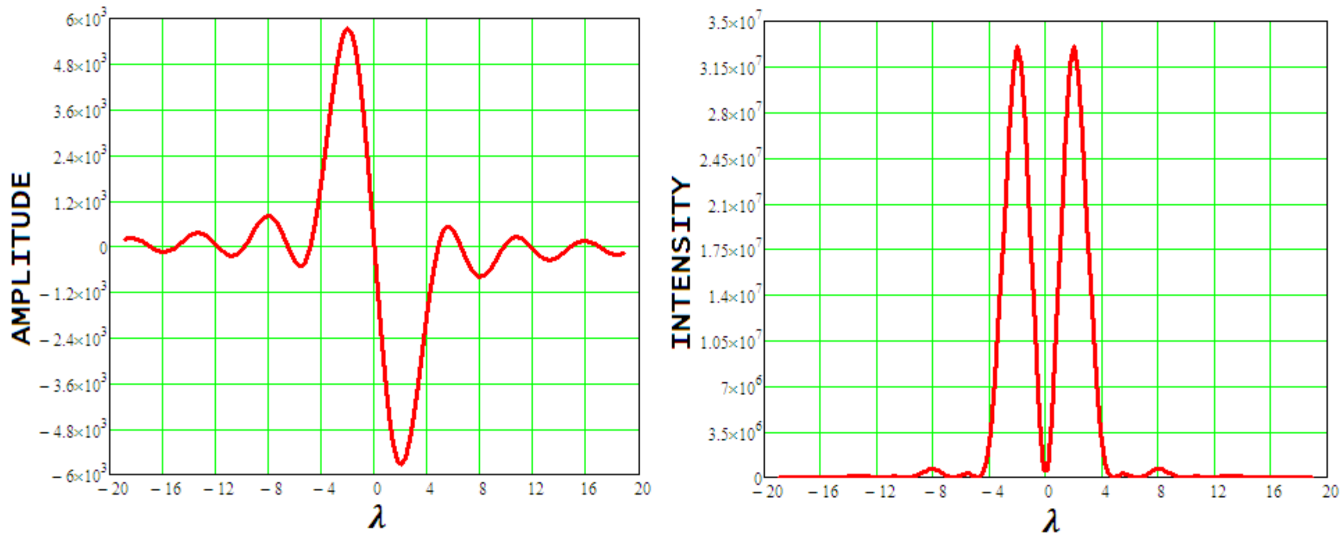


Рис. 25. Поперечная компонента OZ электрического поля. Сечение в главных максимумах. Ширина главных максимумов интенсивности составляет $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$

Азимутальная поляризация излучения.

Вблизи фокуса продольная компонента поля $E_x(x=0,y,z)=0$. Структура распределений интенсивностей $I_{oy}=E_y^2(x=0,y,z)$ и $I_{oz}=E_z^2(x=0,y,z)$, приходящихся на поперечные компоненты поля, одинакова (в фокусе поле равно нулю, угловая ширина провала $\cong \frac{2\cdot\lambda}{D}$) , но картины распределений «повернуты» на $\frac{\pi}{2}$ друг относительно друга.

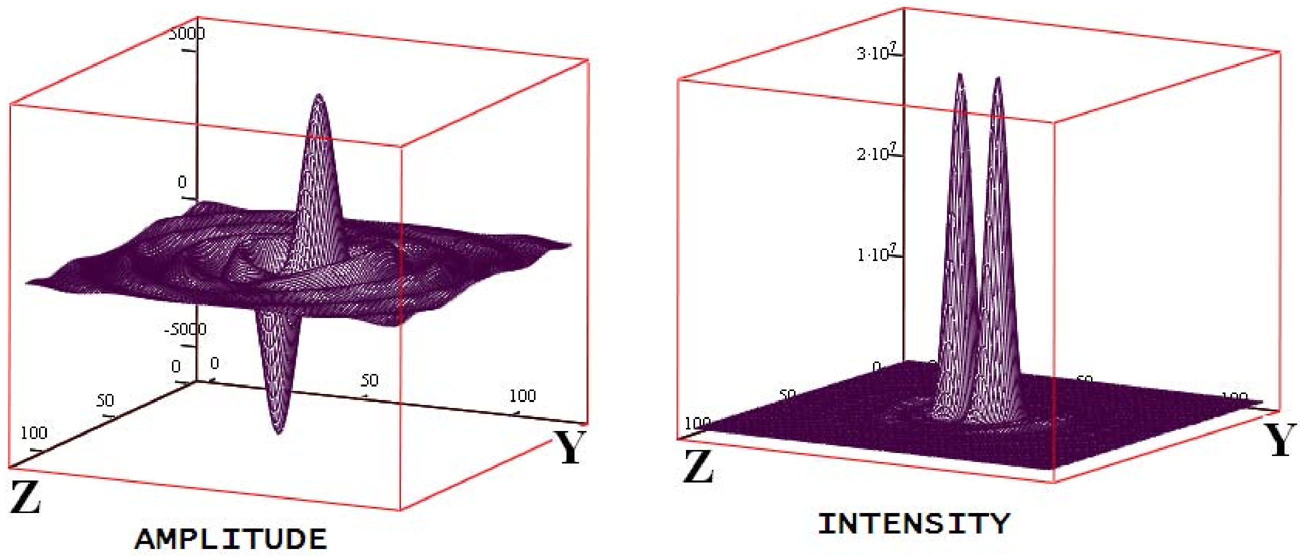


Рис. 26. Поперечная компонента OY электрического поля. Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности составляет $\frac{maxI_{oy}}{maxI_{\Sigma}} \cong 1$.

Главные максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x=0 \\ y\cong -2\cdot\lambda \\ z=0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x=0 \\ y\cong 2\cdot\lambda \\ z=0 \end{pmatrix}$

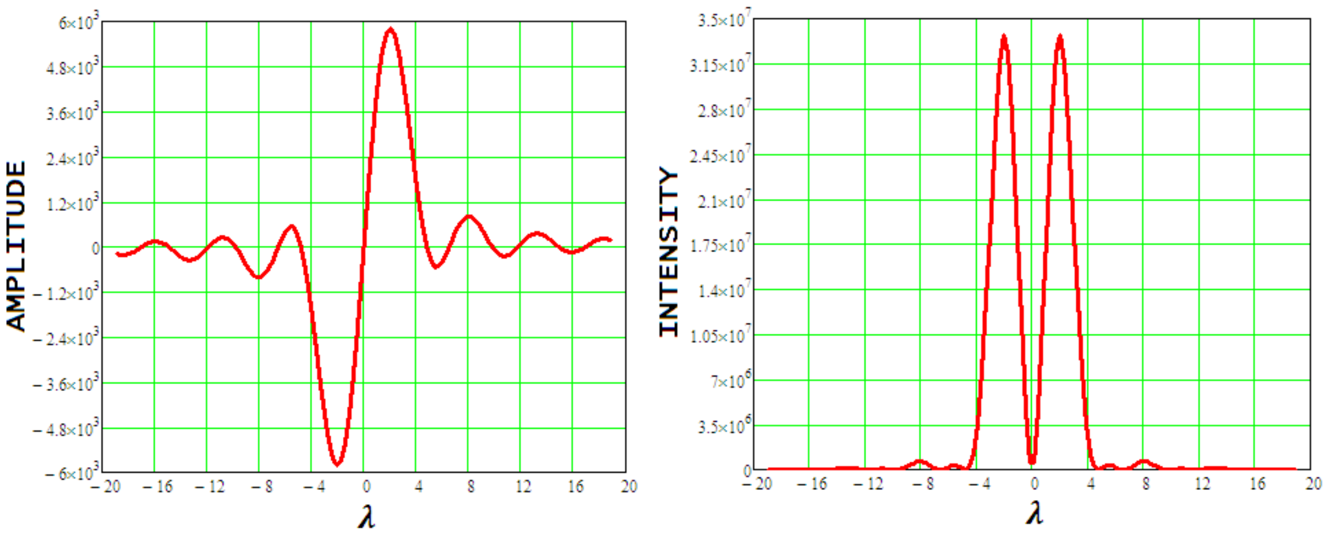


Рис. 27. Поперечная компонента OY электрического поля. Сечение в главных максимумах. Ширина главных максимумов интенсивности составляет $\cong \frac{2\cdot\lambda}{D}$. Ширина провала в фокусе $\cong \frac{2\cdot\lambda}{D}$

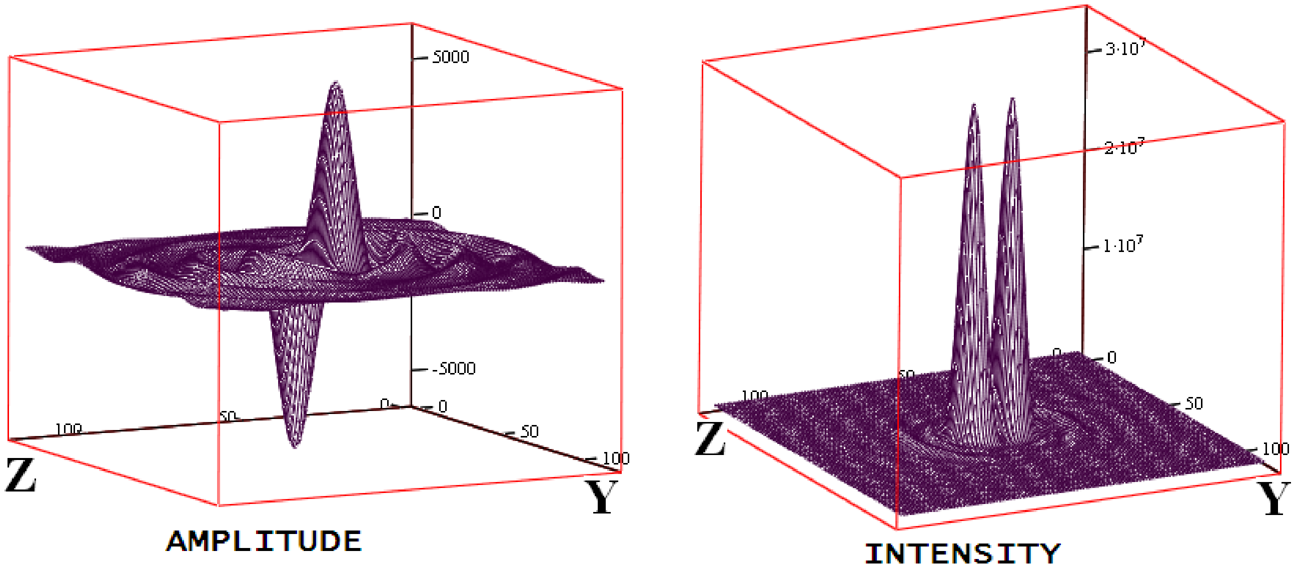


Рис. 28. Поперечная компонента OZ электрического поля. Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности составляет $\frac{maxI_{oz}}{maxI_{\Sigma}} \cong 1$.

Главные максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong -2\cdot\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong 2\cdot\lambda \end{pmatrix}$

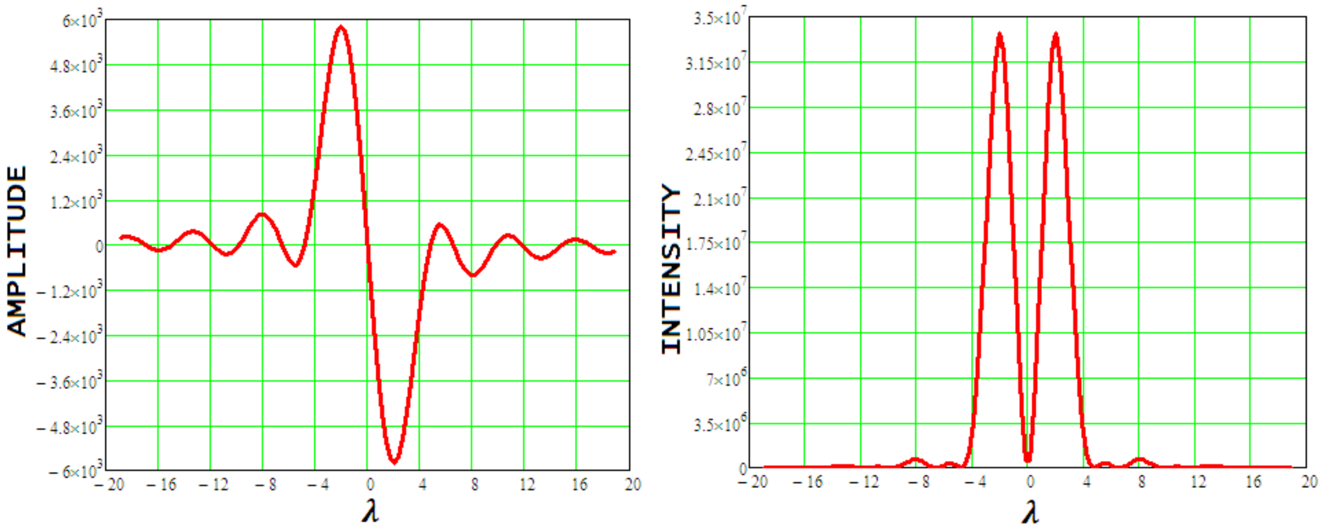


Рис. 29. Поперечная компонента OZ электрического поля. Сечение в главных максимумах. Ширина главных максимумов интенсивности составляет $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$. Ширина провала в фокусе $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$

Результаты расчетов. Магнитное поле.

Так как в электромагнитной волне вектор $\vec{B}$ «повернут» относительно вектора $\vec{E}$ на $\frac{\pi}{2}$ вокруг волнового вектора $\vec{k}$, то структура распределений $B_\alpha(x, y, z)$ ($\alpha = x, y, z$) такая же, как и у $E_\beta(x, y, z)$ ($\beta = x, y, z$). Например, для линейно поляризованного падающего излучения: распределение $B_x(x = 0, y, z)$ имеет такую же структуру, как и $E_x(x = 0, y, z)$, только картины распределений «повернуты» на $\frac{\pi}{2}$ друг относительно друга; $B_y(x = 0, y, z)$ имеет такую же структуру, как и $E_z(x = 0, y, z)$; $B_z(x = 0, y, z)$ имеет такую же структуру, как и $E_y(x = 0, y, z)$.

Линейная поляризация падающего излучения.

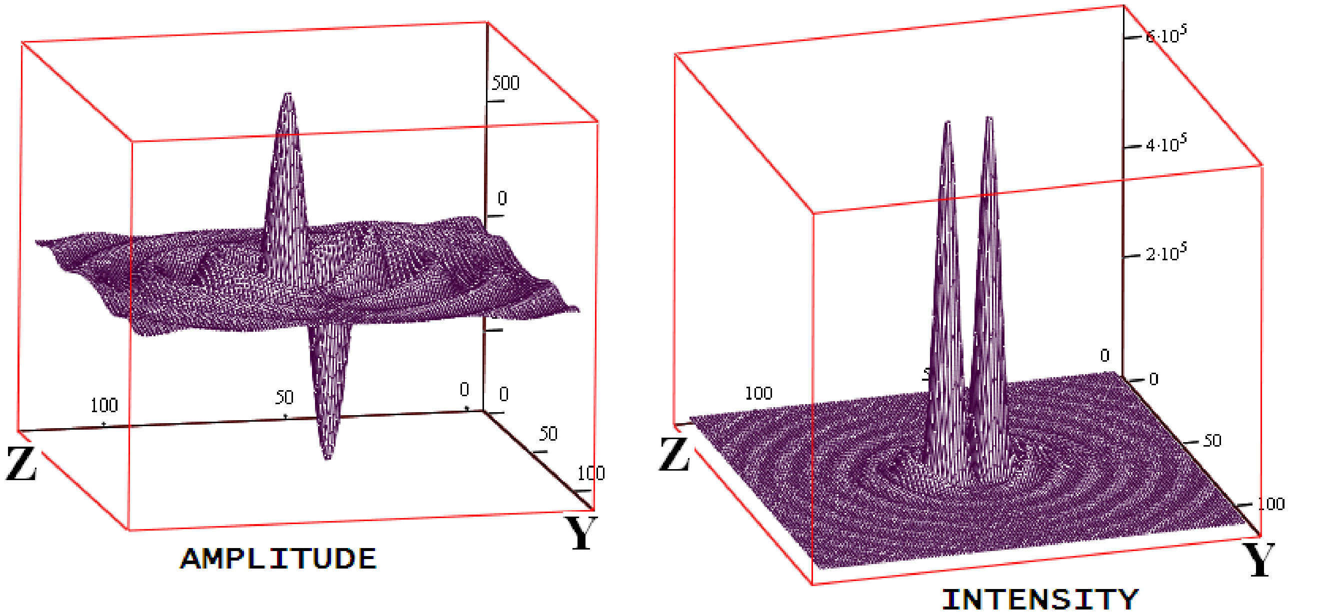


Рис. 30. Продольная компонента OX магнитного поля. Отношение значения интенсивности в главных максимумах к максимуму суммарной интенсивности: $\frac{I_{ox}}{I_\Sigma} \cong 10^{-3}$.

Максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong -2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong 2 \cdot \lambda \end{pmatrix}$

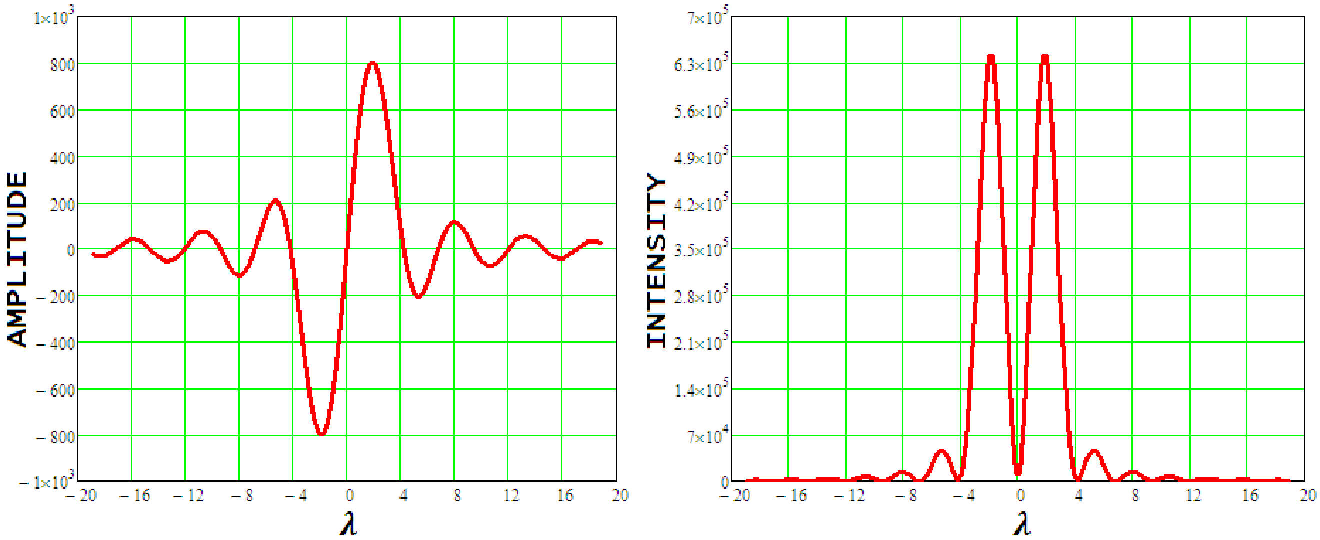


Рис. 31. Продольная компонента OX магнитного поля. Сечения в главных максимумах. В фокусе F продольная компонента магнитного поля равна нулю. Ширина главных максимумов интенсивности $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$, ширина провала в фокусе $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$

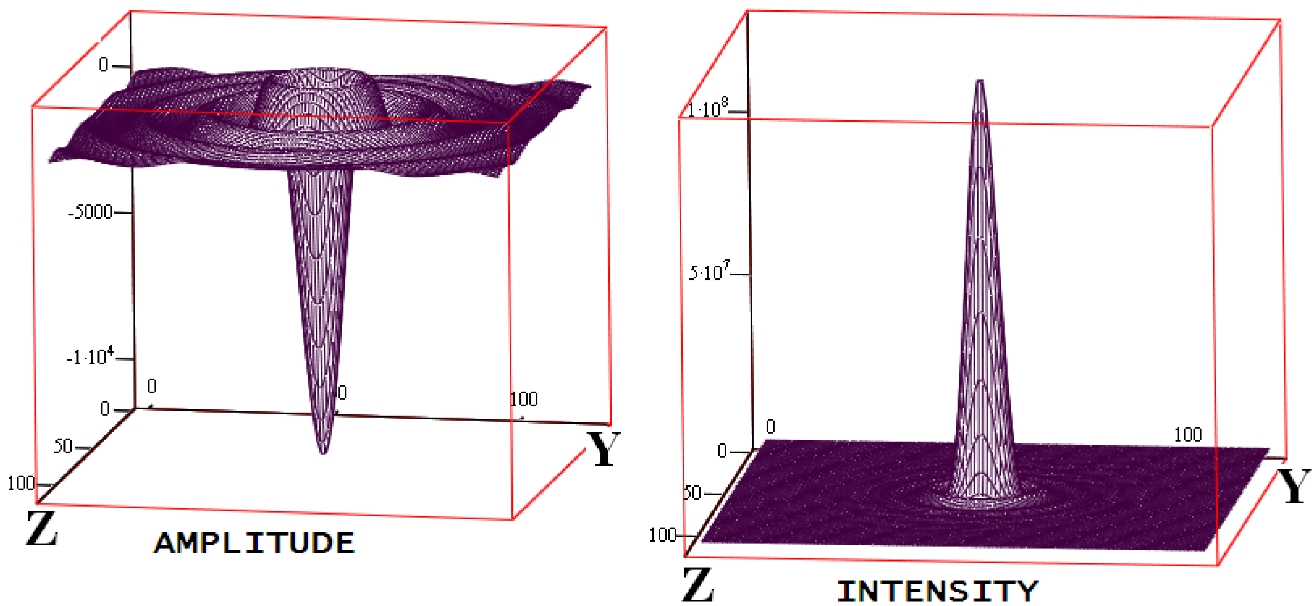
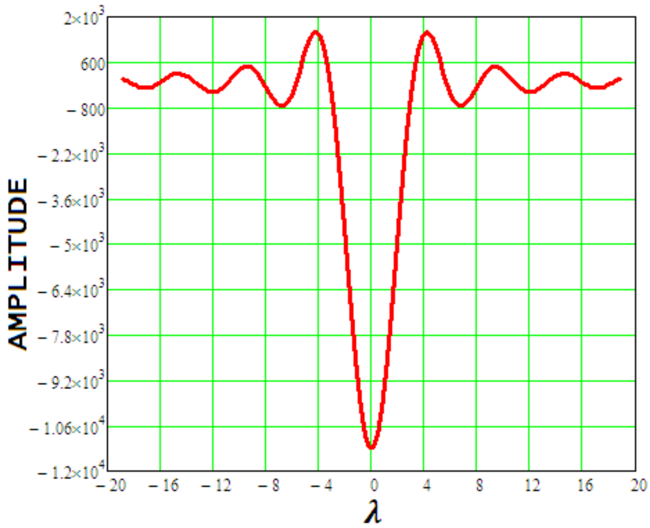


Рис. 32. Поперечная компонента OY магнитного поля. Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности: $\frac{I_{oy}}{I_{\Sigma}} \cong 1$.

Максимум интенсивности расположен в точке $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix}$



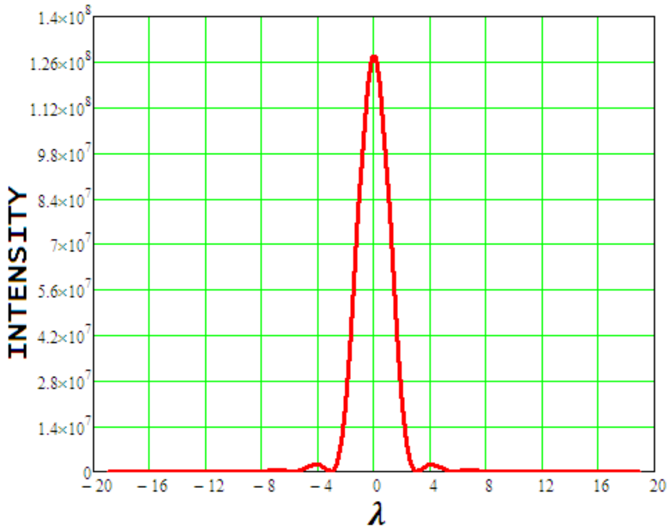
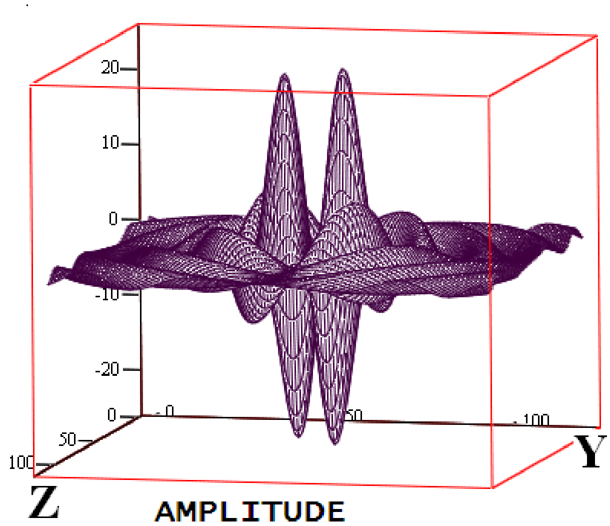


Рис. 33. Поперечная компонента OY магнитного поля. Сечение в главном максимуме.

Ширина максимума интенсивности $\cong \frac{4 \cdot \lambda}{D}$



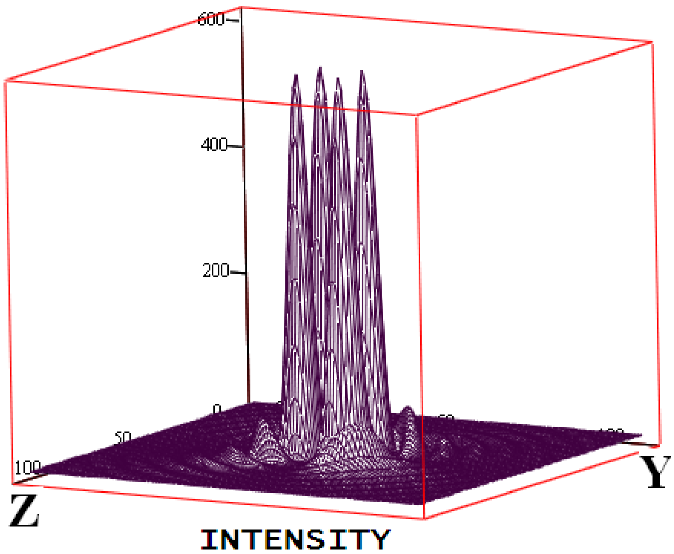


Рис. 34. Поперечная компонента OZ магнитного поля. Отношение значения интенсивности в главных максимумах к максимуму суммарной интенсивности: $\frac{I_{oz}}{I_{\Sigma}} \cong 10^{-5}$. Максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong 2 \cdot \lambda \\ z \cong 2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong 2 \cdot \lambda \\ z \cong -2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong -2 \cdot \lambda \\ z \cong 2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong -2 \cdot \lambda \\ z \cong -2 \cdot \lambda \end{pmatrix}$

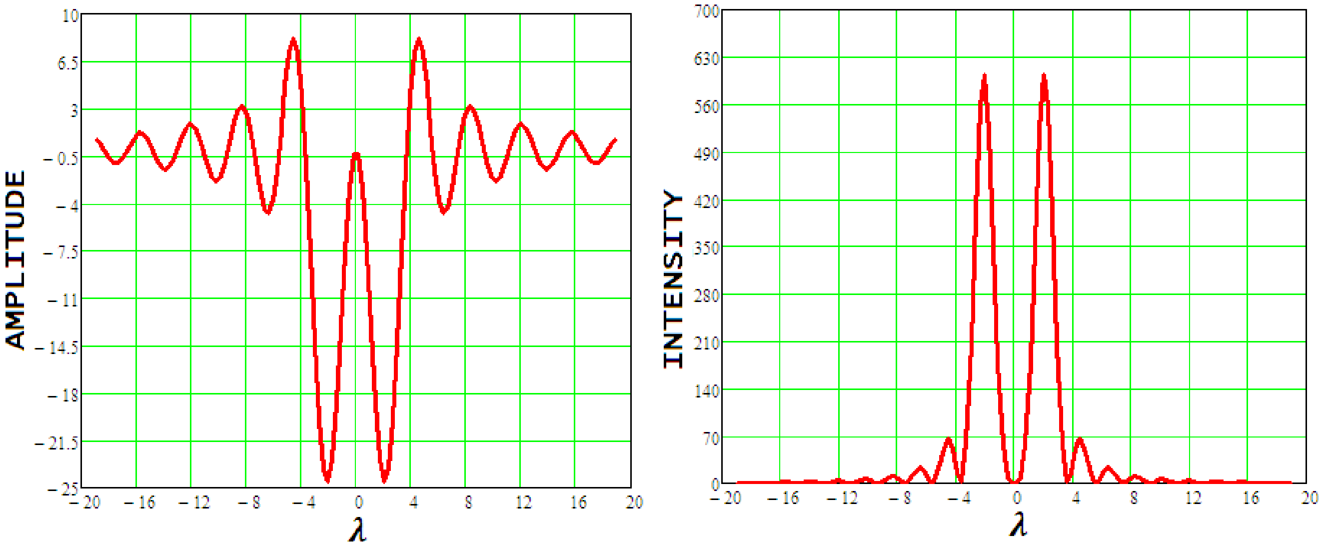


Рис. 35. Поперечная компонента OZ магнитного поля. Диагональное сечение в главных максимумах. В фокусе F $B_z = 0$, ширина провала $\cong \frac{4 \cdot \lambda}{D}$; ширина максимумов интенсивности $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$

Радиальная поляризация падающего излучения.

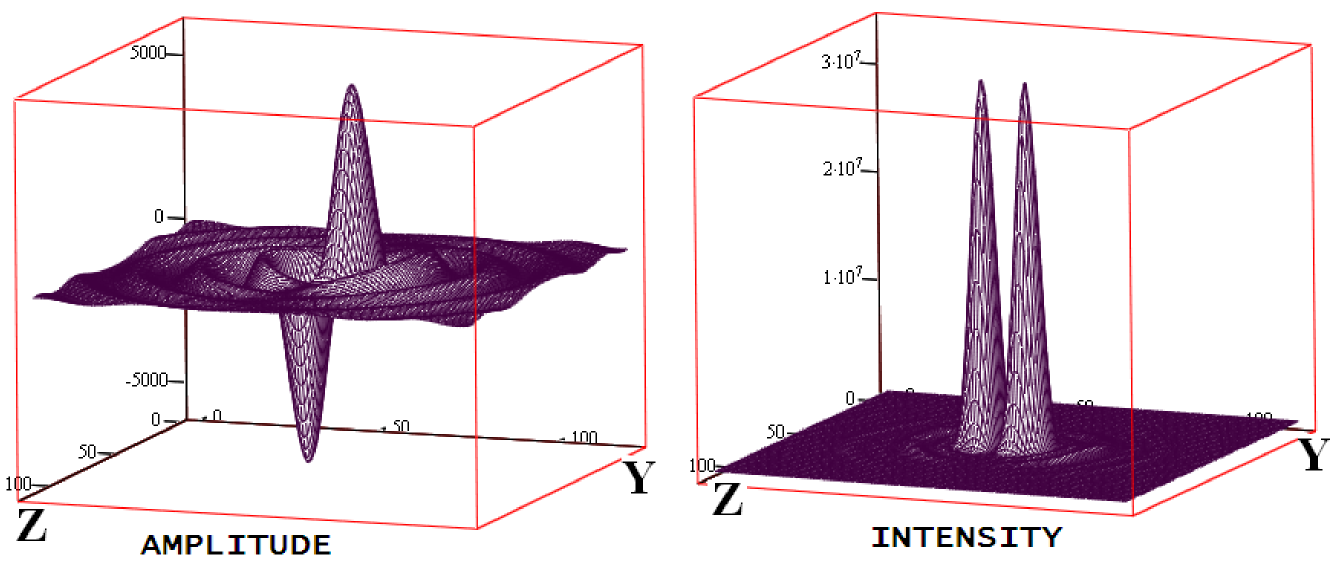


Рис. 36. Поперечная компонента OY магнитного поля. Отношение значения интенсивности в главных максимумах к максимуму суммарной интенсивности: $\frac{I_{oy}}{I_{\Sigma}} \cong 1$.

Максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong -2 \cdot \lambda \\ z = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong 2 \cdot \lambda \\ z = 0 \end{pmatrix}$

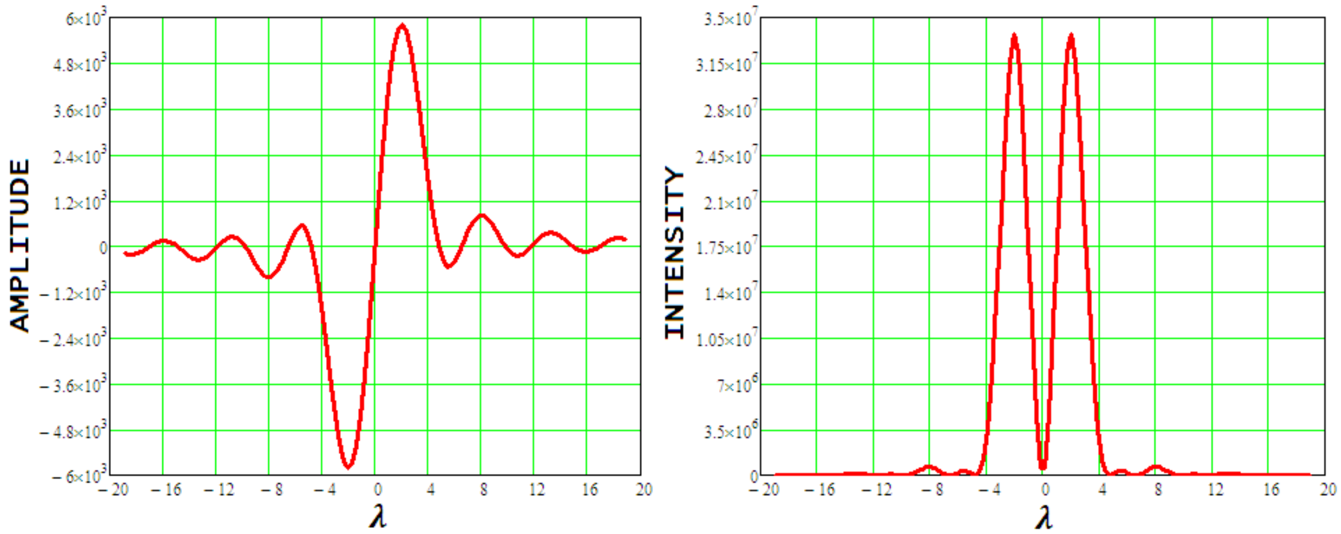


Рис. 37. Поперечная компонента OY магнитного поля. Сечение в главном максимуме.

В фокусе F $B_y = 0$, ширина провала $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$; ширина максимумов интенсивности $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$

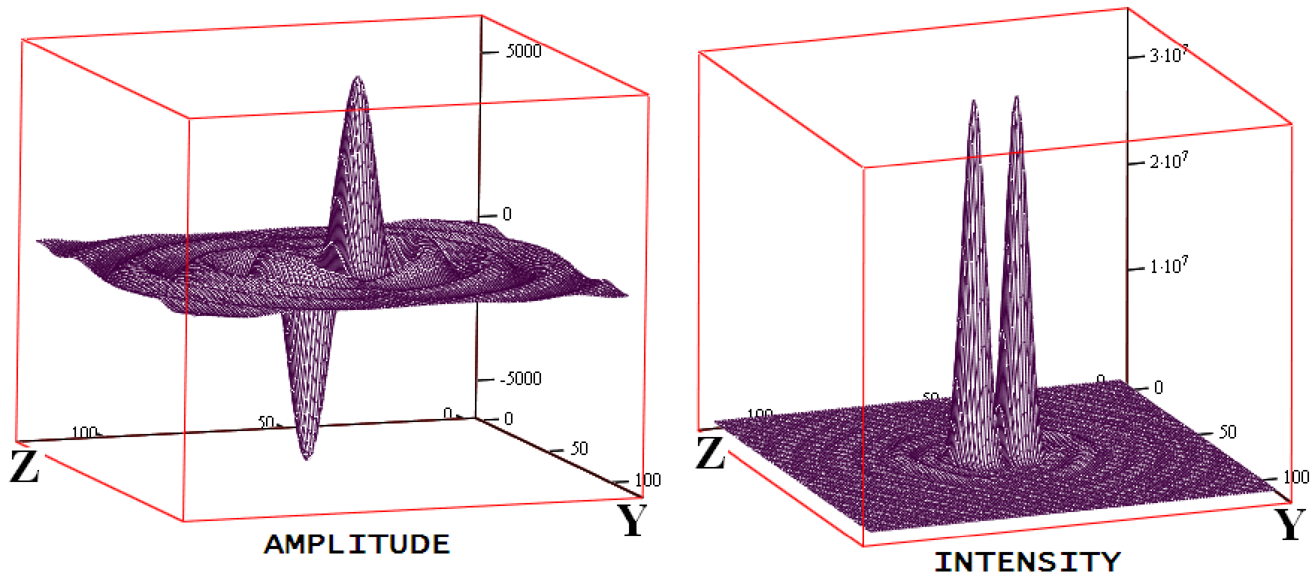


Рис. 38. Поперечная компонента OZ магнитного поля. Отношение значения интенсивности в главных максимумах к максимуму суммарной интенсивности: $\frac{I_{oz}}{I_{\Sigma}} \cong 1$.

Максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong -2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong 2 \cdot \lambda \end{pmatrix}$

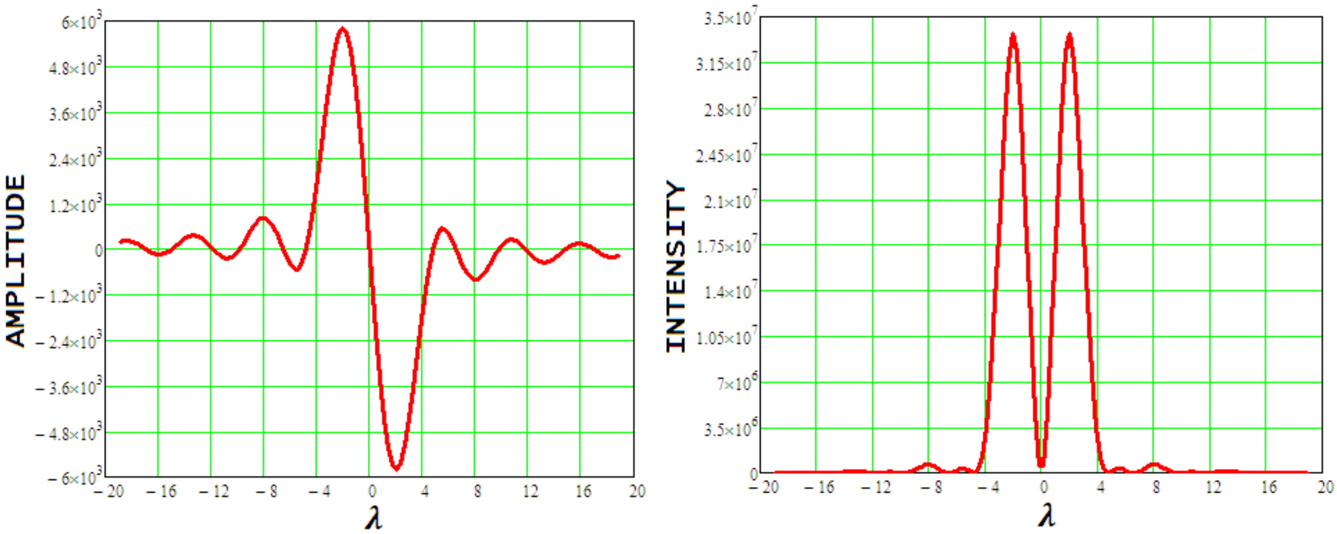


Рис. 39. Поперечная компонента OZ магнитного поля. Сечения в главных максимумах.

В фокусе F $B_z = 0$, ширина провала $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$; ширина максимумов интенсивности $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$

Азимутальная поляризация падающего излучения.

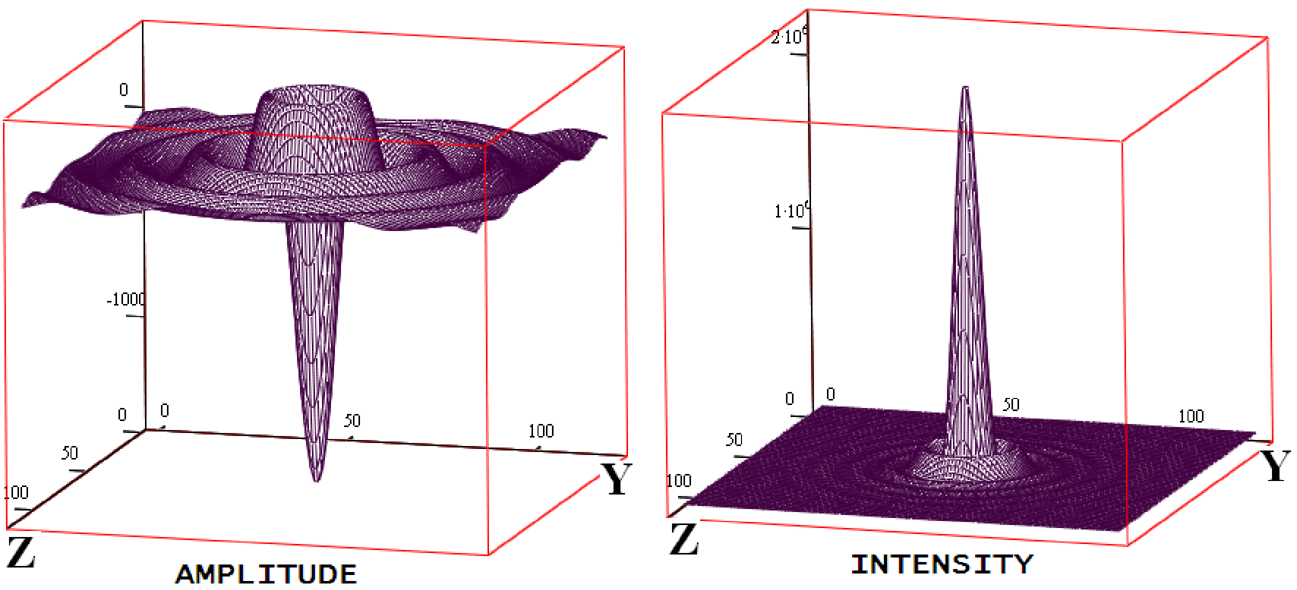


Рис. 40. Продольная компонента OX магнитного поля. Отношение значения интенсивности в главном максимуме к максимуму суммарной интенсивности: $\frac{I_{ox}}{I_{\Sigma}} \cong 10^{-1}$.

Максимум интенсивности расположен в точке $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix}$

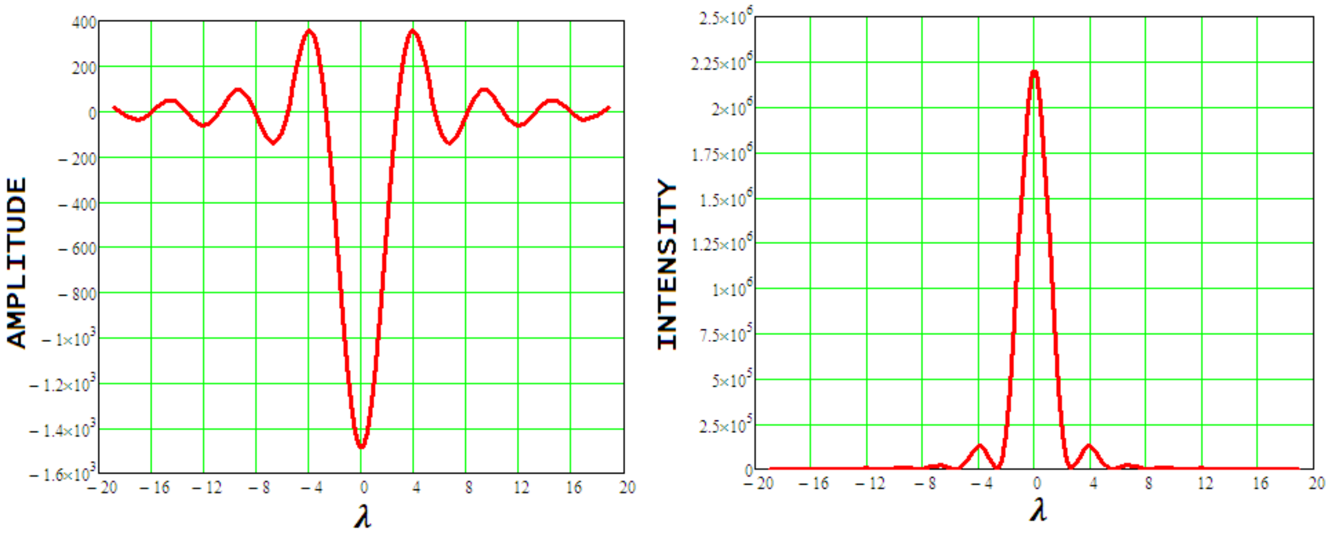


Рис. 41. Продольная компонента OX магнитного поля. Сечение в главном максимуме.

Ширина максимума интенсивности $\cong \frac{4 \cdot \lambda}{D}$

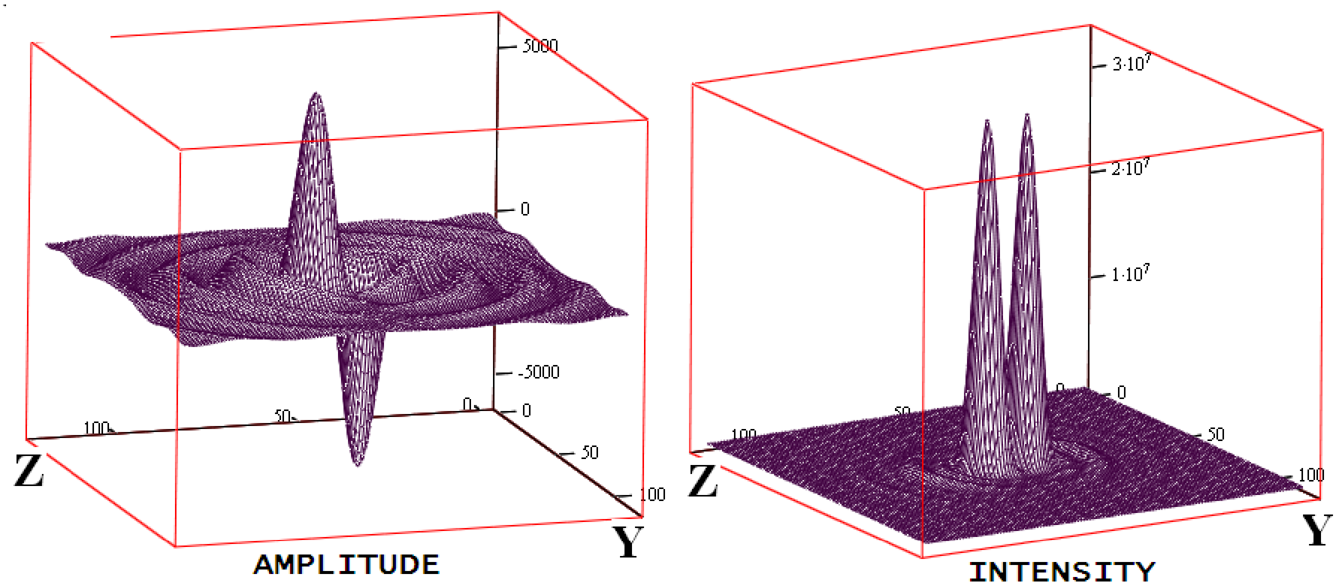


Рис. 42. Поперечная компонента OY магнитного поля. Отношение значения интенсивности в главных максимумах к максимуму суммарной интенсивности: $\frac{I_{oy}}{I_{\Sigma}} \cong 1$.

Максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong -2 \cdot \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \cong 2 \cdot \lambda \end{pmatrix}$

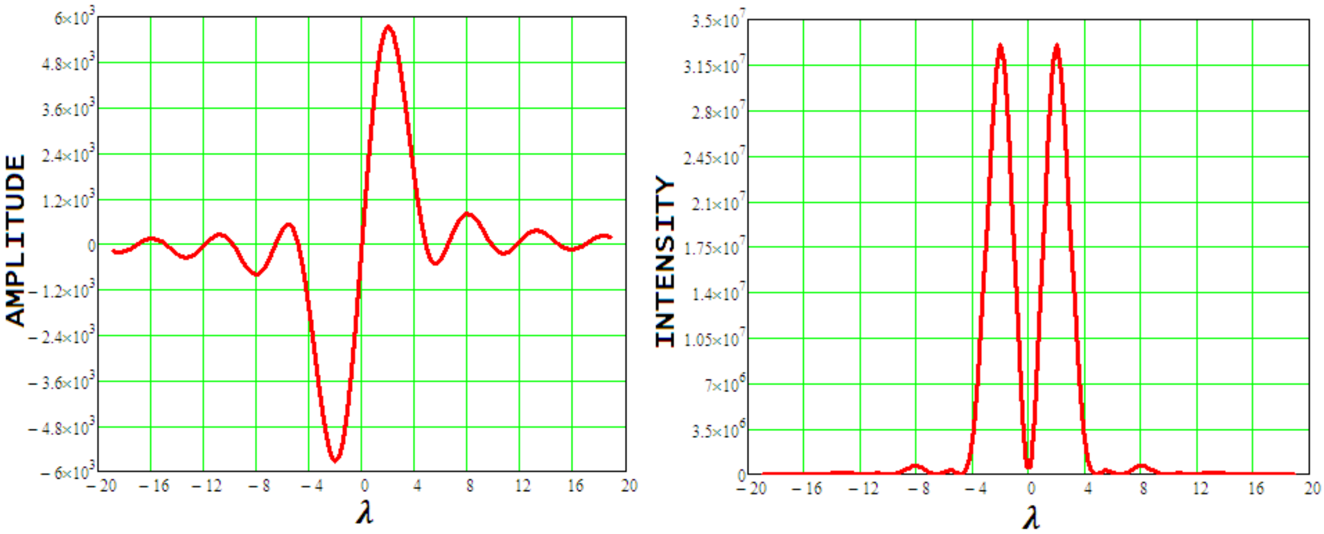


Рис. 43. Поперечная компонента OY магнитного поля. Сечение в главных максимумах.

В фокусе F $B_y = 0$, ширина провала $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$; ширина максимумов интенсивности $\cong \frac{2 \cdot \lambda}{D}$

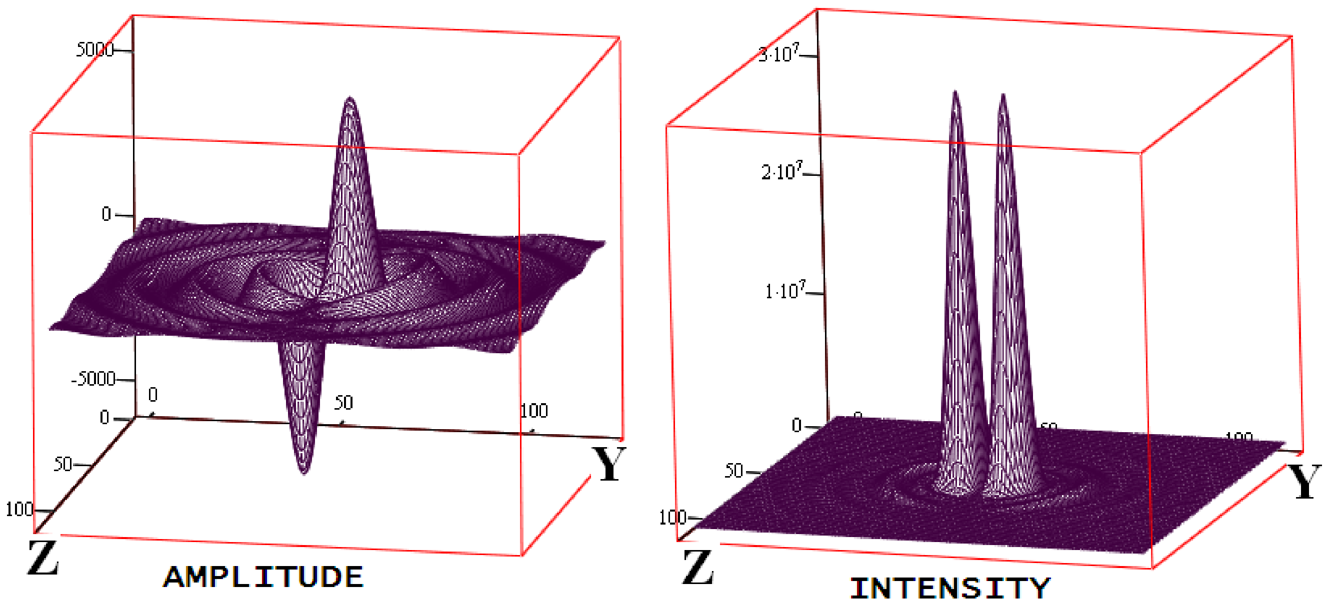
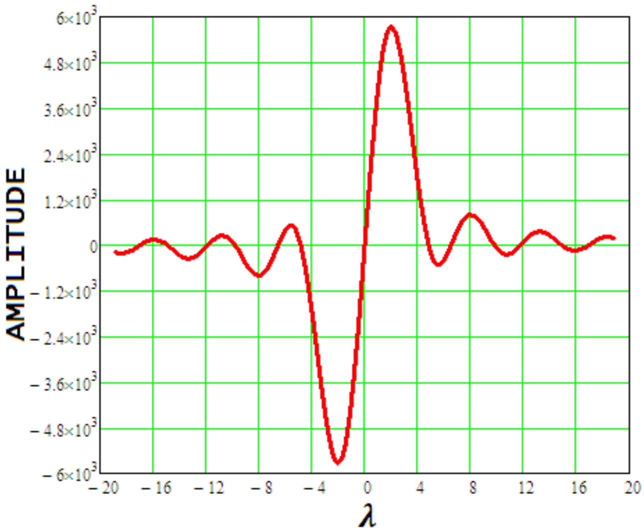


Рис. 44. Поперечная компонента OZ магнитного поля. Отношение значения интенсивности в главных максимумах к максимуму суммарной интенсивности: $\frac{I_{oz}}{I_{\Sigma}} \cong 1$.

Максимумы интенсивности расположены в точках $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong -2 \cdot \lambda \\ z = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \cong 2 \cdot \lambda \\ z = 0 \end{pmatrix}$



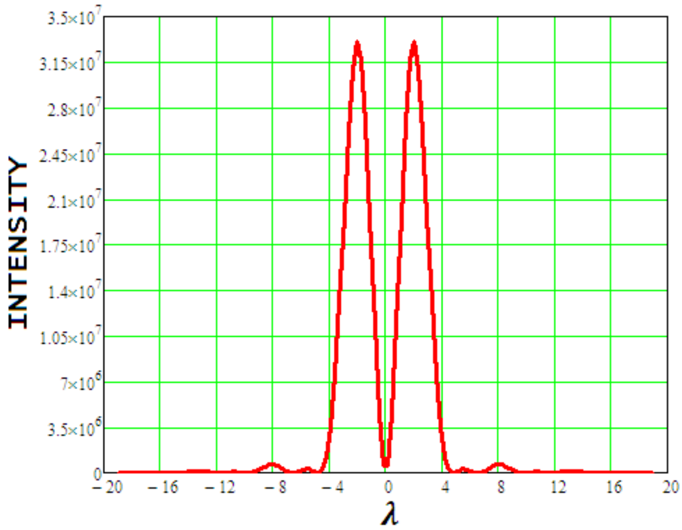


Рис. 45. Поперечная компонента OZ магнитного поля. Сечение в главных максимумах.

В фокусе F $B_z = 0$, ширина провала $\cong \frac{2\cdot\lambda}{D}$; ширина максимумов интенсивности $\cong \frac{2\cdot\lambda}{D}$

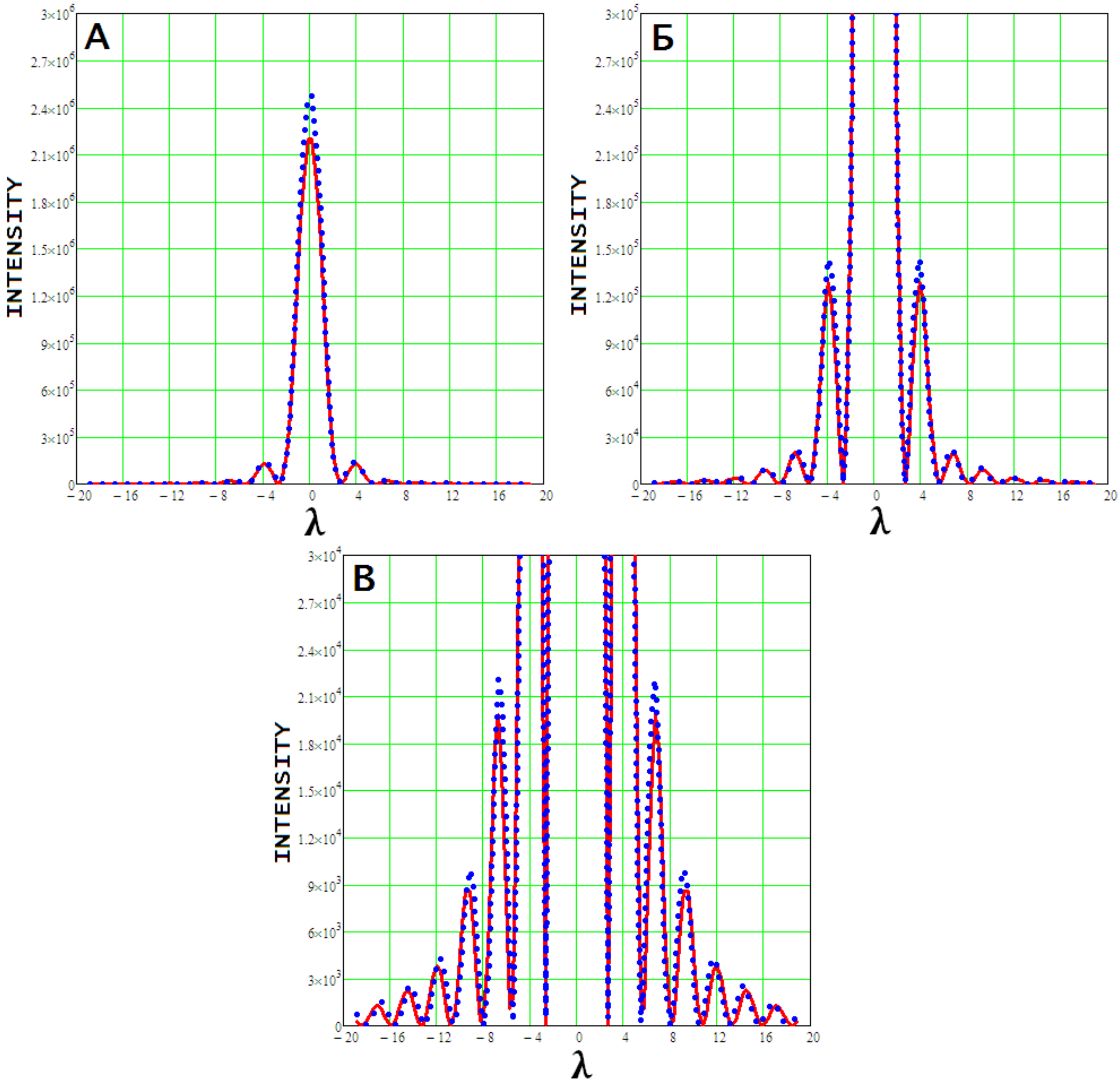


Рис. 46. Распределение интенсивности, приходящейся на продольную компоненту E_x поля в фокальной плоскости. Падающее излучение радиально поляризовано. Сплошная линия – расчет по Кирхгофу, точки – расчет по Дебаю. А), Б), В) – одно и то же распределение, но в разных интервалах изменения интенсивности.

На рис. 46 приведено сравнение результатов расчета интенсивности, приходящейся на продольную компоненту E_x поля в фокальной плоскости (радиальная поляризация падающего излучения). Присутствуют небольшие относительные различия в максимумах распределения.

В целом, результаты, полученные двумя методами расчета, структурно практически совпадают в пределах десятков длин волн (размер области, в которой производится расчет).

Расчет по методу Кирхгофа даже для областей наблюдения малых размеров (единицы длины волны) требует значительного машинного времени, примерно в 60 раз больше, чем по методу Дебая (для всех трех типов поляризации).

$$\frac{T_{Debye}}{T_{Kirchoff}} \cong \frac{1}{60}.$$

Модель многомодового поля. Сравнение расчетов с экспериментом.

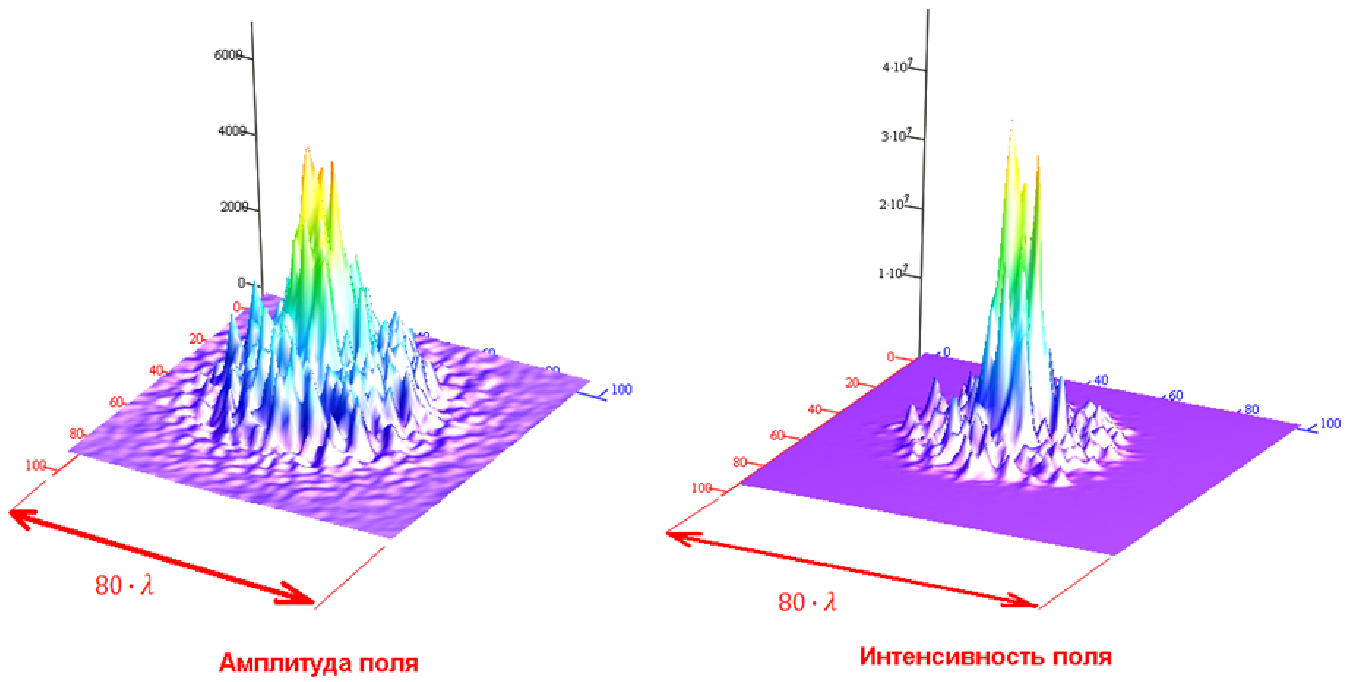


Рис. 47. Распределение многомодового поля в фокусе линзы. Расчет по методу Кирхгофа

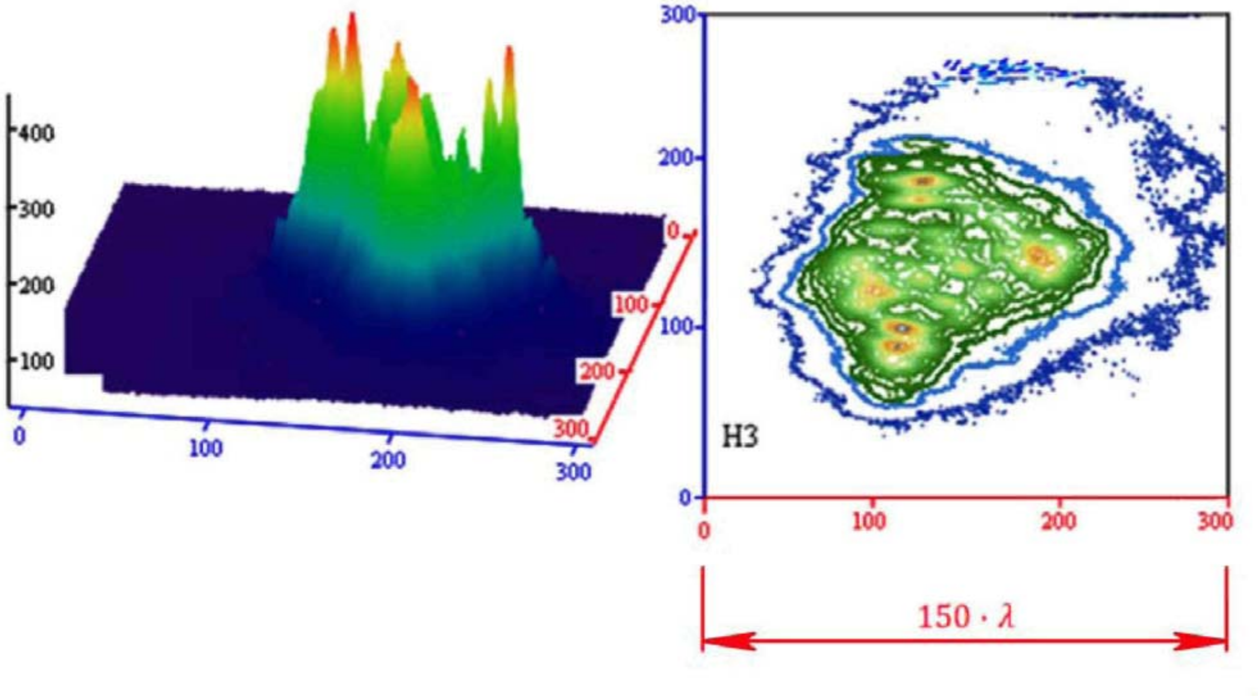


Рис. 48. Распределение поля Nd – лазера в фокусе линзы. Экспериментальные данные

На (Рис. 47.) приведен результат расчета по методу Кирхгофу дифракционной картины в фокусе линзы. Модель падающего на линзу лазерного импульса (данная модель поля описана в работе [8]): поле представляет собой 90 плоских волн со случайным углом между волновыми векторами $\vec{k}$ (в пределах от 0 до $4 \cdot \frac{\lambda}{D}$, где $\lambda = 1.06$ мкм, $D = 4$см.); падающее излучение состоит из нескольких частотных компонент. Временная форма лазерного импульса описывается огибающей:

$$\delta(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cdot \frac{t}{\tau} \tag{49}$$

где τ - длительность импульса.

Многокомпонентный спектр лазерного импульса апроксимируется функцией:

$$f(j) = \left(1 - \frac{j}{N_L}\right) \cdot \frac{j}{N_L} \tag{50}$$

где j – номер компоненты, N_L - количество компонент.

К примеру, излучение Nd – лазера обычно состоит из 12 компонент. Однако в данной работе рассматриваются только 4 компоненты с целью упрощения и ускорения расчетов. Фазовый множитель каждой компоненты имеет вид:

$$f_e(j,t) = \exp\left\{\mathrm{i} \cdot \left[\omega_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta \mathrm{n}_\lambda}{\mathrm{n}_\lambda}\right) \cdot \left(\mathrm{j} - \frac{\mathrm{N_L}}{2}\right) \cdot \left(\mathrm{t} - \frac{\tau}{2}\right) - \Phi_\mathrm{j}\right)\right]\right\} \cdot f(j) \tag{51}$$

где ω_0 - частота в максимуме спектральной линии, n_λ - число периодов в импульсе длительностью τ, Δn_λ - выраженный в количестве периодов частотный интервал между соседними эквидистантными компонентами, Φ_j - случайная фаза.

Таким образом, получаем следующие выражения для напряженностей поля:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{A_0}(\vec{r}) \cdot \sum_{q}^{N} \left[\left(\sum_{j=0}^{N_L} f_e(j,t) \right) \cdot e^{-i \cdot \overrightarrow{k_q} \cdot \vec{r}} \right] \cdot \delta(t) \cdot e^{i \cdot \psi(t)} \tag{52}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \overrightarrow{A_0}(\vec{r}) \cdot \sum_{q}^{N} \left[\left(\sum_{j=0}^{N_L} f_e(j,t) \right) \cdot e^{-i \cdot \overrightarrow{k_q} \cdot \vec{r}} \right] \cdot \delta(t) \cdot e^{i \cdot \psi(t)} \tag{53}$$

где N — число угловых мод со случайным направлением волнового вектора $\overrightarrow{k_q}$, $\overrightarrow{A_0}(\vec{r})$ — нормированная амплитуда поля согласно формуле (15); $\psi(t)$ - случайная функция.

На (Рис. 47) приведен пример распределения интенсивности в фокусе, рассчитанного с использованием приведенного в предыдущих разделах аппарата скалярной теории. Экспериментальные данные распределения интенсивности в фокусе приведены на (Рис. 48). Характерно то же наличие множества пиков в распределении интенсивности, что свидетельствует о правильном представлении об излучении Nd – лазера как о поле, модель которого описана выше. Для распределения поля в фокусе характерно наличие множества пиков интенсивности. На основании статистического сравнения экспериментальных распределений с расчетными выведены формулы (52) и (53) для распределения полей и сконструирована модель волнового пакета. Рассмотренная модель распределения электромагнитного поля в волновом пакете фокусируемого импульсного лазерного излучения многомодового неодимового лазера полезна для анализа процессов нагрева и ускорения электронов в корональной области лазерной плазмы, образующейся при нагреве твердотельной мишени. Полученные в данной работе аналитические выражения для структуры полей в фокальной области использовались в работе [12] для расчета функции распределения релятивистских электронов в лазерной плазме при стохастическом нагреве.

Приложение А.

Объяснение структуры распределения $E_x(x=0, y, z)$ продольной компоненты поля в случае линейной поляризации падающего излучения.

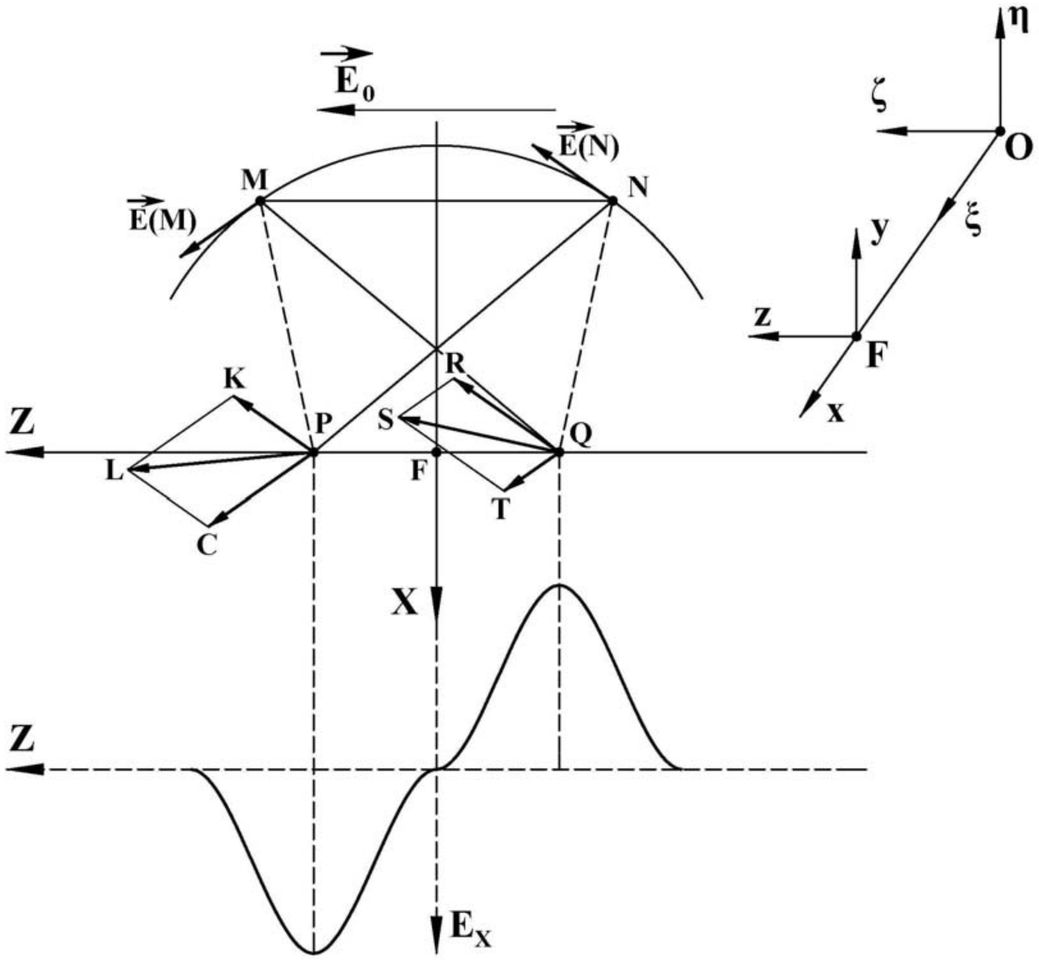


Рис. А-1. Сечение сферического волнового фронта, сформированного линзой, плоскостью $\zeta O\xi$

Рассмотрим сечение сферического волнового фронта, сформированного линзой, плоскостью $\zeta O\xi$ (рис. А-1). Выберем на волновом фронте точки M и N, симметричные относительно оси $O\xi$. Падающее излучение поляризовано вдоль оси $O\zeta$: вектор $\vec{E}_0$ на рис. А-1. Идеальная линза преобразует (поворачивает) вектор $\vec{E}_0$ так, что в точках M и N он будет направлен по касательной к окружности Σ.

Далее, выберем в фокальной плоскости ZY две точки, симметричные относительно оси OX, которые принадлежат оси OZ: $P(x=0, y=0, +z_0)$ и $Q(x=0, y=0, -z_0)$, где $z_0 \cong \lambda$. Найдем результирующий вектор электрического поля $\vec{E}$ в точках P и Q. Для этого найдем векторную сумму напряженностей от вторичных источников M и N в выбранных точках фокальной плоскости.

В точке P: поле от вторичного источника N обозначим $\overrightarrow{PK}$. $\overrightarrow{PK} || \vec{E}(N)$, $|\overrightarrow{PK}| < |\vec{E}(N)|$ (т.к. рассматриваются сферические волны от вторичных источников, амплитуда которых убывает как $\frac{1}{r}$). Поле от вторичного источника М обозначим $\overrightarrow{PC}$. $\overrightarrow{PC} || \vec{E}(M)$, $|\overrightarrow{PC}| < |\vec{E}(M)|$ и, кроме того, $|\overrightarrow{PC}| > |\overrightarrow{PK}|$, т.к. $MD < NP$. Результирующий вектор напряженности поля $\overrightarrow{PL}$ будет иметь положительную проекцию на ось ОХ (см. рис. А-1).

Совершенно аналогичные рассуждения для точки Q приводят к выводу о том, что проекция результирующего вектора напряженности поля $\overrightarrow{QS}$ на ось ОХ будет отрицательной.

В точке F проекция результирующего вектора электрического поля на ось ОХ будет равна нулю, т.к. $MF = NF$. Структура распределения $E_x(z)$ показана на рис. А-1 внизу.

Приложение Б.

Объяснение структуры распределения $E_y(x=0,y,z)$ (компонента поля, перпендикулярная направлению поляризации) в случае линейной поляризации падающего излучения.

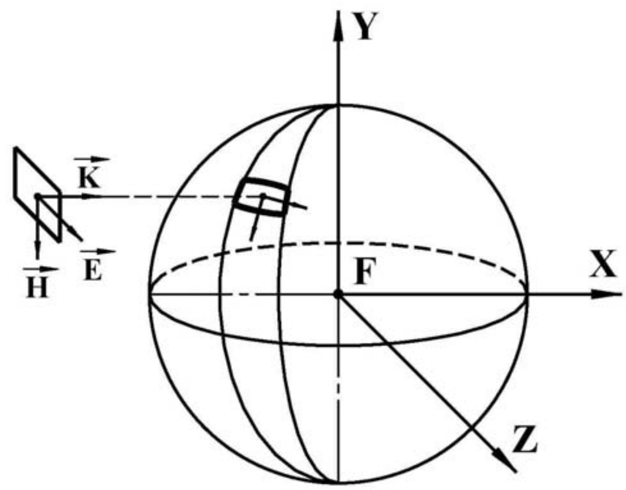


Рис. Б-1. Преломление электромагнитной волны на линзе

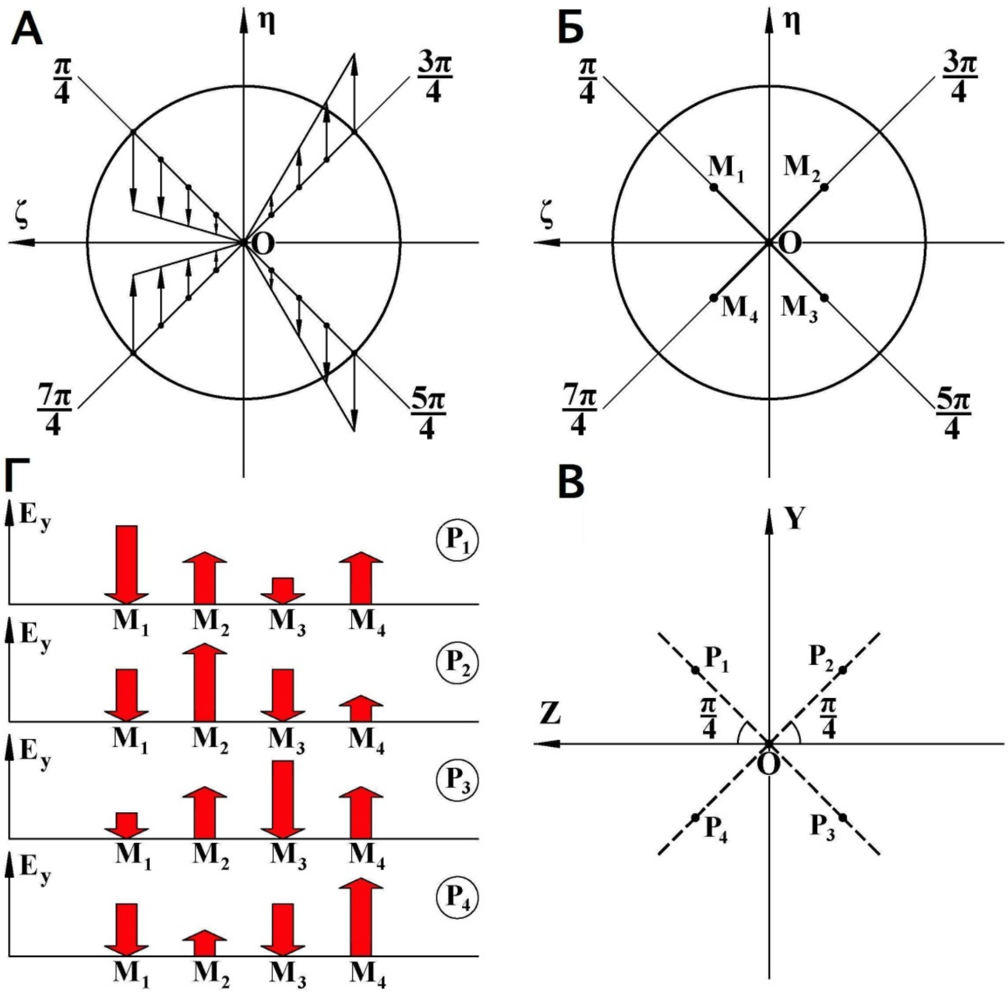


Рис. Б-2. К объяснению наличия четырех пиков в распределении поля

Идеальная линза преобразует плоский фронт падающего излучения в сферический, в каждой точке которого вектор напряженности $\vec{E}$ имеет различные проекции на оси X, Y и Z (Рис. Б-1.). Выясним, в каких точках сферического волнового фронта проекция E_y имеет максимальное и минимальное значения.

После преломления линзой вектор $\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{pmatrix}$ преобразуется в $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cdot sin\theta \cdot cos\varphi \\ E_0 \cdot (cos\theta - 1) \cdot \frac{sin2\varphi}{2} \\ E_0 \cdot (cos\theta + (1 - cos\theta) \cdot sin^2\varphi) \end{pmatrix}$. Исследуем функцию $E_y(\varphi, \theta) = E_0 \cdot (cos\theta - 1) \cdot \frac{sin2\varphi}{2}$ на экстремум. $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$, где $\theta_{min} = 0, \theta_{max} = arcsin\frac{D}{2F}$ (D, F – диаметр и фокус линзы соответственно); $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial E_y(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} = 0 \\ \dfrac{\partial E_y(\varphi, \theta)}{\partial \theta} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} E_0 \cdot (cos\theta - 1) \cdot cos2\varphi = 0 \\ E_0 \cdot (-sin\theta) \cdot \dfrac{sin2\varphi}{2} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi \cdot n}{2}, n \in Z \\ \theta = 2\pi \cdot k, k \in Z \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, экстремальные значения φ суть $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. В точках $[\varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = \theta_{max}]$ и $[\varphi = \frac{5\pi}{4}, \theta = \theta_{max}]$ E_y принимает минимальные значения, а в точках $[\varphi = \frac{3\pi}{4}, \theta = \theta_{max}]$ и $[\varphi = \frac{7\pi}{4}, \theta = \theta_{max}]$ – минимальные (рис. Б-2 *а*).

Выберем на сферическом волновом фронте точки M_1, M_2, M_3, M_4 так, чтобы они принадлежали, соответственно, прямым $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}, \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}, \varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$ и были равноудалены от начала системы координат $\zeta O \eta$ (рис. Б-2 *б*). В фокальной плоскости YFZ также выберем четыре точки P_1, P_2, P_3, P_4, принадлежащие, соответственно, прямым $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}, \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}, \varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$ и равноудаленных от точки F (рис. Б-2 *в*). Найдем результирующее поле в каждой из точек P_1, P_2, P_3, P_4 от источников вторичных волн M_1, M_2, M_3, M_4.

В точках M_1, M_2, M_3, M_4 для проекции поля E_y справедливы соотношения (рис. Б-2 *а*):

$$E_y(M_1) < 0;\ E_y(M_2) < 0;\ E_y(M_3) > 0;\ E_y(M_4) > 0;$$

$$|E_y(M_1)| = |E_y(M_2)| = |E_y(M_3)| = |E_y(M_4)|.$$

Учитывая, что амплитуда сферической волны убывает как $\frac{1}{r}$ и устанавливая для каждой расчетной точки P соотношения между расстояниями M_iP_k ($i = \overline{1,4}, k = \overline{1,4}$) (например, для P_1:

$M_1P_1 << M_2P_1 = M_3P_1 < M_4P_1$ (Рис. Б-2-б, в)), находим в точках P_k значения $(E_y)_i$ ($i = \overline{1,4}$), создаваемые каждым источником вторичных волн M_i. На (Рис. ZZ-г) условно показаны соотношения между $(E_y)_i$ от каждой из точек M_i.

Из результатов, изображенных на рис. Б-2 *г*, следует, что в точках P_1 и P_3 значение E_y (суммарной, от всех источников M_i) одинаковы. То же справедливо для точек P_2 и P_4. Таким образом, максимумы в распределении $E_y(x = 0, y, z)$, расположенные вдоль прямых $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_3 = \frac{5\pi}{4}$ будут синфазны; максимумы, расположенные вдоль прямых $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ и $\varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$ также будут синфазны. Причем максимумы, расположенные вдоль прямых $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_3 = \frac{5\pi}{4}$ противофазны максимумам, расположенным вдоль прямых $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ и $\varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$.

Приложение В.

Пределы применимости и ограничения методов расчета.

Метод Кирхгофа.

1. Скалярный характер метода: компоненты вектора напряженности поля считаются независимыми (не принимается во внимание условие $div\vec{E} = 0$), рассчитываются по отдельности, затем из них составляется вектор напряженности поля.

2. Математические допущения, сделанные при выводе окончательной формулы: $k \cdot R \gg 1$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, R – расстояние от точки *M* на волновом фронте до расчетной точки *P*. Кроме того, интегрирование проводится не по замкнутой поверхности (как того требует вторая теорема Грина, из которой выводится окончательная формула Кирхгофа), а по волновому фронту падающей волны.

3. Физические допущения: излучение монохроматично, граничные условия на апертуре имеют вид: $\vec{U}(\vec{R}) = \begin{cases} \vec{U}(M) \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot r}}{r}\ , & \textit{в пределах отверстия} \\ 0\ , & \textit{за пределами отверстия} \end{cases}$, т.е. предполагается, что поле не возмущено токами, индуцированными полем на экране, что справедливо при $k \cdot \text{а} \gg 1$, где а – линейный размер апертуры.

Метод Дебая.

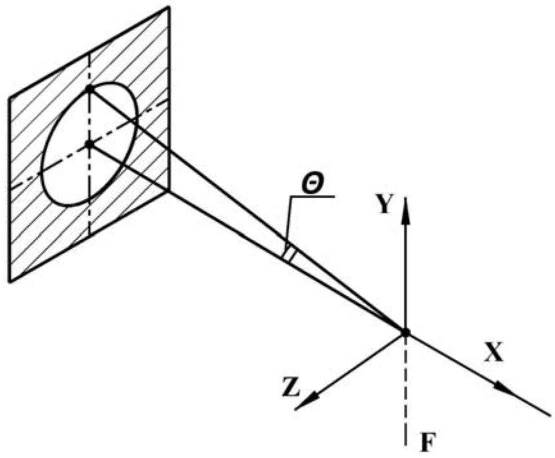


Рис. В-1. Пояснения к пределу применимости метода Дебая

В работе [3] показано, что при условии $k \cdot f \gg \frac{\pi}{sin^2(\frac{\theta}{2})}$, (где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, θ – апертурный угол) интеграл Дебая (17) является решением уравнения Гельмгольца $\nabla^2 U(\vec{R}) + k^2 \cdot U(\vec{R}) = 0$ и удовлетворяет на апертуре граничным условиям вида $\vec{U}(\vec{R}) = \begin{Bmatrix} \vec{U}(M) \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot r}}{r}\ , \ \textit{в пределах отверстия} \\ 0\ , \ \textit{за пределами отверстия} \end{Bmatrix}$. Решение представляет собой расходящуюся сферическую волну на бесконечности в полупространстве $x > 0$ (рис. В-1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №08-02-00913-а)

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu.A. Mikhailov, M.A. Grechko, O.A. Zhitkova, M.A. Zhurivich, A.V. Koutsenko, I.G. Lebo, J. Limpouch, A.A. Matsveiko, V.B. Rozanov, G.V. Sklizkov, A.N. Starodub, V.F. Tishkin, and A.M. Chekmarev, Effect of a prepulse on ablation-pressure smoothing in laser heating of thin foils // Journal of Russian Laser Research. - 2007. – V.28. N.4. P.310-319.

2. М.А. Журович, О.А. Житкова, И.Г. Лебо, Ю.А. Михайлов, Г.В. Склизков, А.Н. Стародуб, В.Ф. Тишкин Выравнивание абляционного давления в короне лазерной плазмы при нагреве мишеней для ЛТС // Квантовая электроника. – 2009. – Т. 39. №6. – С. 531-536.

3. Yu.A. Mikhailov, L.A. Nikitina, G.V. Sklizkov, A.N. Starodub, and M.A. Zhurovich Stochastic heating of electrons in focused multimode laser fields // Journal of Russian Laser Research. – 2007. – V.28. N.4. – P. 344-355.

4. Yu.A. Mikhailov, L.A. Nikitina, G.V. Sklizkov, A.N. Starodub, and M.A. Zhurovich Relativistic electron heating in focused multimode laser fields with stochastic phase perturbations. // Laser and Particle Beams. – 2008. V.26. – P. 525-536.

5. П.В. Конаш, И.Г. Лебо Моделирование рассеяния пучка электронов на спонтанных магнитных полях в лазерной плазме. // Квантовая электроника. – 2006. - №36. – С. 767-772.

6. Wolf E., Richards B. Electromagnetic diffraction in optical systems II. Structure of the image field in an aplanatic system // Proc. R. Soc. Ser. A. – 1959. – P. 358 – 379.

7. Boivin A., Wolf E., Electromagnetic field in the neighborhood of the of the focus of a coherent beam // Physical Review – 1965. - V. 138. N. 6B. – P. 1561 – 1565.

8. Wolf E., Li Y. Conditions for the validity of the Debye integral representation of focused fields // Optics Communications. – 1981. – V. 39. N. 4. – P. 205 – 210.

9. Низьев В.Г. Дипольно волновая теория дифракции электромагнитного излучения // УФН. – 2002. – Т. 172, № 5. - С. 601 – 607.

10. М. Борн, Э. Вольф Основы оптики. Издательство "НАУКА", главная редакция физико-математической литературы, М.:1973 г.

11. Л. Мандель, Э. Вольф Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Наука. Физматлит, 2000.

12. Ю.В. Крыленко, Ю.А. Михайлов, А.С. Орехов, Г.В. Склизков, А.А. Филиппов Зависимость температуры стохастически нагреваемых электронов от плотности потока импульсного лазерного излучения на мишени // Краткие сообщения по физике ФИАН. – 2010. - №28. – С. 6-7.