

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ**



*имени
П. Н. Лебедева*

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

17

И.А. БУДАГОВСКИЙ, А.С. ЗОЛОТЬКО,
М.П. СМАЕВ, М.И. БАРНИК

**АБЕРРАЦИОННАЯ КАРТИНА
САМОВОЗДЕЙСТВИЯ СВЕТОВОГО ПУЧКА,
ОБУСЛОВЛЕННОГО ФОТОРЕФРАКТИВНЫМ
ЭФФЕКТОМ В НЖК**

МОСКВА 2009

АБЕРРАЦИОННАЯ КАРТИНА САМОВОЗДЕЙСТВИЯ СВЕТОВОГО ПУЧКА, ОБУСЛОВЛЕННОГО ФОТОРЕФРАКТИВНЫМ ЭФФЕКТОМ В НЖК

И.А. Будаговский¹, А.С. Золотько¹, М.П. Смаев¹, М.И. Барник²

¹Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, 119991,
Ленинский пр. 53

²Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН, Москва, 117333,
Ленинский пр. 59

Представлены основные свойства самовоздействия светового пучка в нематических жидких кристаллах, находящихся под воздействием постоянного электрического поля. Построена теория этого эффекта. Показано, что самовоздействие света в НЖК приводит к генерации оптической катастрофы гиперболическая омбилика. Результаты расчета абберационной картины и каустик в дальней зоне дифракции хорошо описывают экспериментальные данные.

We report the main features of the light self-action in nematic liquid crystals subjected to dc electric field. Theoretical model of this effect is developed. It is shown that light self-action in NLC results in optical hyperbolic umbilic catastrophe generation. The calculated the aberrational pattern and caustics in the far field are in good agreement with experimental results.

ВВЕДЕНИЕ

Внешние поля легко изменяют ориентационную структуру (поле директора) нематических жидких кристаллов (НЖК) [1, 2], а вместе с ней и направление оптической оси (определяющей направления поляризации нормальных волн и показатель преломления необыкновенной волны). Переориентация директора НЖК низкочастотным электрическим полем (переход Фредерикса) лежит в основе большинства применений НЖК для отображения информации.

Поворот директора световым полем приводит к “гигантской” оптической нелинейности, на девять порядков превышающей керровскую нелинейность обычных жидкостей [3]; ориентационная нелинейность, индуцированная поглощающими добавками [4, 5], ещё на два порядка больше. При взаимодействии с НЖК светового пучка наблюдается эффективное самовоздействие (самофокусировка [3, 6-18] или самодефокусировка [5, 19]). Если световой пучок проходит через ориентированный слой НЖК (толщиной $\sim 50\text{--}150$ мкм), то в его поперечном сечении возникает характерная абберационная картина из концентрических колец. Эта картина отвечает колоколообразному поперечному профилю показателя преломления и характерна также для самовоздействия в других средах [20-24].

Абберационная картина несёт весьма подробную информацию о взаимодействии света с НЖК, позволяя определить знак самовоздействия [19], угол поворота директора в объёме НЖК и динамику его изменения [7, 25-27], оценить отношение упругих постоянных [9] и, с помощью эффекта нелинейного вращения плоскости поляризации [28], найти угол ориентации директора на стенках НЖК. Регистрация параметров этой картины является важным и самым простым инструментом экспериментального исследования в нелинейной оптике НЖК.

Приложение к НЖК переменного электрического поля подавляет или усиливает оптическую нелинейность [29, 30], приводит к разным видам оптической бистабильности [31-34]. При этом кольцевая форма абберационной картины сохраняется.

Если же на НЖК воздействует постоянное электрическое поле, то самовоздействие света приобретает качественно иной характер [35, 36]. Аберрационная картина в дальней зоне дифракции становится сильно асимметричной, кольцевая структура исчезает, на границе картины наблюдается излом. Постоянное напряжение ~ 2 В, приложенное к планарному образцу НЖК, увеличивает нелинейность на два порядка, т.е., в такой же степени, как поглощающие свет добавки. В [35, 36] аберрационное самовоздействие в НЖК в присутствии постоянного поля связывалось с поверхностным фоторефрактивным эффектом, т.е. с переориентацией директора при изменении электрического поля, приложенного непосредственно к жидкокристаллическому слою, вследствие воздействия света на электрические заряды, локализованные вблизи границы этого слоя.

В настоящей работе представлены основные свойства самовоздействия света в НЖК в присутствии постоянного электрического поля и развита простая теоретическая модель этого явления.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА САМОВОЗДЕЙСТВИЯ СВЕТОВОГО ПУЧКА В НЖК В ПРИСУТСТВИИ ПОСТОЯННОГО ПОЛЯ

Для наблюдения эффекта самовоздействия света излучение непрерывных аргонового ($\lambda = 515$ нм) или твердотельного ($\lambda = 473$ нм) лазеров (низшая гауссова мода) фокусировалось линзой с фокусным расстоянием 16 см (диаметр светового пучка в перетяжке ~ 100 мкм) в планарно ориентированный образец нематической матрицы ЖКМ-1277 [5] толщиной 100 мкм (схема экспериментальной установки представлена на рис. 1). Постоянное электрическое напряжение прикладывалось к образцу с помощью полупроводниковых (окись индия и олова) электродов, напыленных на стеклянные подложки; планарная ориентация достигалась с помощью натирания слоев полиимида, нанесенных на электроды методом центрифугирования и полимеризованных при высокой температуре.

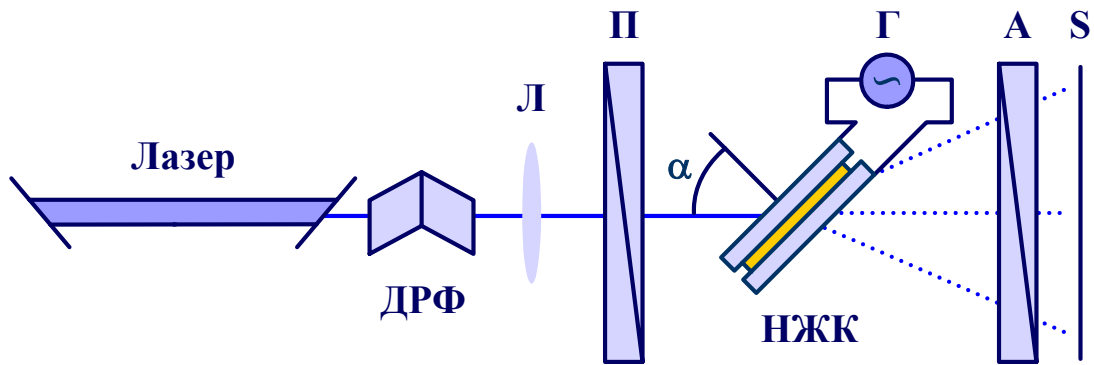


Рис. 1. Схема установки для исследования абберационного самовоздействия. ДРФ – двойной ромб Френеля, Л – фокусирующая линза, П – поляризатор, НЖК – ячейка с нематическим жидким кристаллом, Г – генератор, А – анализатор, S – экран.

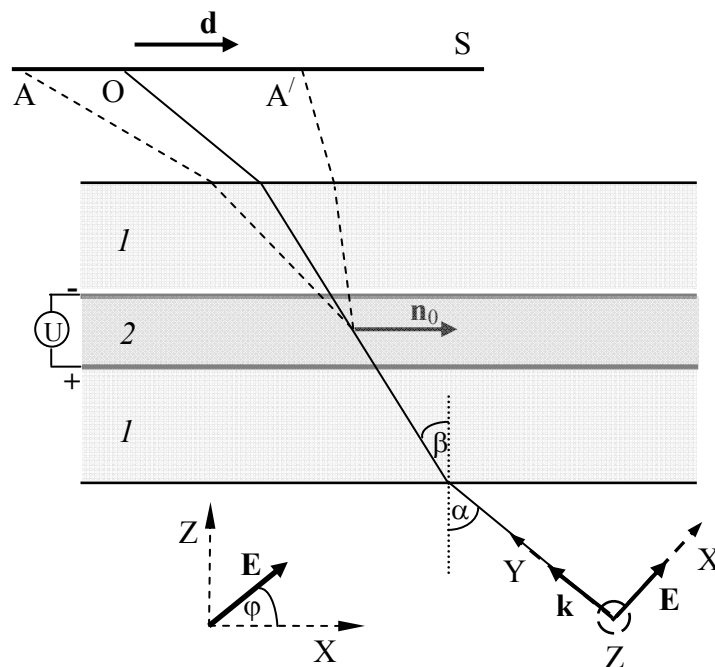


Рис. 2. Геометрия взаимодействия светового поля \mathbf{E} и планарно ориентированного НЖК: 1 – стеклянные подложки жидкокристаллической ячейки; 2 – жидкокристаллический слой, к которому приложено постоянное напряжение U ; \mathbf{k} – волновой вектор падающего светового пучка; φ – угол поворота плоскости падающего на НЖК линейно поляризованного света; \mathbf{n}_0 – невозмущенный директор; α – угол падения светового пучка; β – угол преломления; S – экран; O – центр светового пучка до развития самовоздействия; AA' – абберационная картина. Вектор \mathbf{d} характеризует направление вытянутости абберационной картины.

Жидкокристаллическая ячейка могла поворачиваться на угол α вокруг вертикальной оси (в данной работе угол α считается положительным при повороте НЖК по часовой стрелки), при этом директор НЖК располагался в горизонтальной плоскости XY (геометрия взаимодействия светового поля и директора НЖК представлена на рис. 2). Угол преломления светового пучка β связан с углом падения α законом Снеллиуса. Угол φ , образуемый направлением линейной поляризации светового пучка и осью X мог изменяться от 0° (необыкновенная волна) до 90° (обыкновенная волна). Полярность приложенного постоянного напряжения считалась положительной, когда входная, относительно пучка, подложка являлась анодом.

Стационарная абберационная картина, возникающая при прохождении наклонно падающего ($\alpha = -40^\circ$) светового пучка необыкновенной поляризации через планарно ориентированный НЖК, представлена на рис. 3а. Время формирования стационарной картины составляет десятки секунд, что соответствует характерному времени переориентации директора. Картина асимметрична относительно вертикали. Она вытянута влево, с этой же стороны граница картины содержит излом (в виде острого угла).

Изменение знака угла падения света α или полярности приложенного постоянного напряжения U “отражает” абберационную картину (рис. 3, 4) относительно вертикальной линии, проходящей через точку O (т.е., центра светового пучка до развития самовоздействия; см. рис. 2). При этом, соответственно, изменяется направление вытянутости абберационной картины (направление вектора \mathbf{d} на рис. 2).

Отличительной чертой абберационной картины в НЖК в присутствии постоянного электрического поля (по сравнению с “обычной” кольцевой картиной), является характер её зависимости от поляризации света. Поворот плоскости поляризации на некоторый угол φ от горизонтали (т.е., от направления поляризации необыкновенной волны) уменьшает интенсивность картины, не изменяя распределение интенсивности (за исключением центра картины (точки O на рис. 2), в котором появляется яркое пятно). Поляризация картины остается горизон-

тальной (необыкновенная волна), а поляризация пятна в центре – вертикальна (обыкновенная волна).

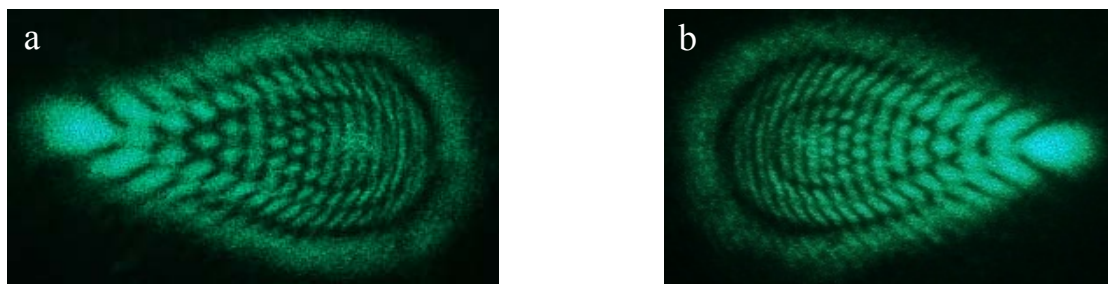


Рис. 3. Абберационные картины для наклонно падающего светового пучка ($\lambda = 515$ нм, $P = 20$ мВт, необыкновенная волна), прошедшего через планарно ориентированный слой НЖК ЖКМ-1277 (толщиной $L = 100$ мкм), находящийся под воздействием постоянного напряжения $U = +3$ В, при разных направлениях поворота НЖК: (a) $\alpha = -40^\circ$, (b) $\alpha = +40^\circ$.

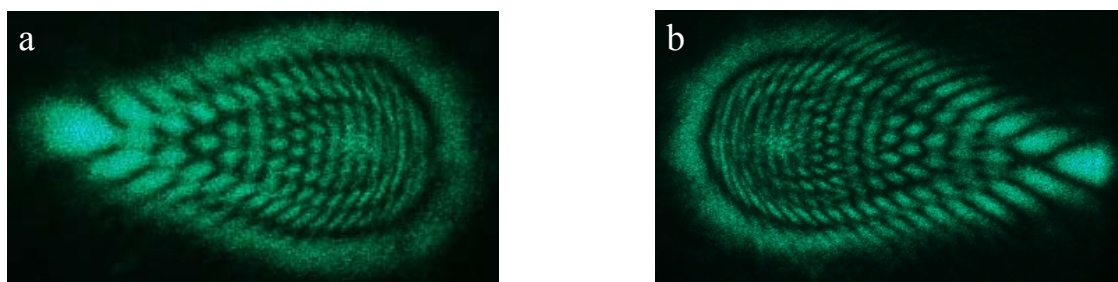


Рис. 4. Абберационные картины для наклонно ($\alpha = -40^\circ$) падающего светового пучка ($\lambda = 515$ нм, $P = 20$ мВт, необыкновенная волна), прошедшего через планарно ориентированный слой НЖК ЖКМ-1277 для разной поляризации постоянного напряжения, приложенного к НЖК: (a) $U = +3$ В, (b) $U = -3$ В.

Независимость вида абберационной картины от поляризации света (за исключением центрального пятна) означает, что от поляризации также не зависит и деформированное поле директора. Поскольку прямое воздействие светового поля существенно зависит от поляризации (например, для планарных образцов светоиндуцированная переориентация под действием обыкновенной волны практически не возникает), то переориентацию директора в рассматриваемом случае следует связать с воздействием постоянного поля. Роль света при этом заключается в снятии экранировки внешнего электрического поля поверхностными зарядами, которые могут быть локализованы на границах НЖК - поли-

имид и полиимид – электрод. Наличие экранировки постоянного электрического поля экспериментально подтверждается четырехкратным возрастанием порога перехода Фредерикса при переходе от переменного (1 кГц) к постоянному полю (значения порогового напряжения для переменного и постоянного полей составляют 0.95 и 4 В). Асимметрия абберационной картины связана с тем, что степень снятия экранировки зависит от полярности приложенного к данной границе раздела напряжения. Это подтверждается изменением направления вытянутости картины при изменении полярности напряжения, подаваемого на электроды. Физический механизм снятия экранировки требует специальных исследований.

Перейдём к построению количественной модели самовоздействия света в НЖК в присутствии постоянного поля.

СВЕТОИНДУЦИРОВАННАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ДИРЕКТОРА НЖК В ПРИСУТСТВИИ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Для расчета деформированного поля директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ исходим из известного выражения для плотности F свободной энергии НЖК, помещенного в электрическое поле \mathbf{G} , в одноконстантном приближении [1, 2, 37]

$$F = \frac{K}{2}(\text{div}^2 \mathbf{n} + \text{rot}^2 \mathbf{n}) - \frac{\Delta\varepsilon(\mathbf{nG})^2}{8\pi}, \quad (1)$$

где K – упругая постоянная Франка, $\Delta\varepsilon$ – анизотропия диэлектрической проницаемости на частоте электрического поля (в случае постоянного поля $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_{\text{dc}}$). При записи плотности свободной энергии в виде (1) мы пренебрегаем членом, описывающим взаимодействие директора НЖК со световым полем. Тем самым мы не учитываем прямое ориентационное воздействие света на НЖК. Варьируя (1) с учетом условия $\mathbf{n}^2 = 1$, получаем

$$\Delta \mathbf{n} + \frac{\Delta\varepsilon_{\text{dc}}(\mathbf{nG})\mathbf{G}}{4\pi K} = -\frac{\lambda(\mathbf{r})}{K}\mathbf{n}, \quad (2)$$

где $\lambda(\mathbf{r})$ - множитель Лагранжа, который можно исключить, домножая (2) векторно на \mathbf{n}

$$[\Delta \mathbf{n} \times \mathbf{n}] + \frac{\Delta \varepsilon_{dc}}{4\pi K} (\mathbf{Gn}) [\mathbf{G} \times \mathbf{n}] = 0. \quad (3)$$

Будем искать деформированное поле директора с помощью метода возмущений, полагая $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta \mathbf{n}$, где \mathbf{n}_0 – невозмущенный директор, а $\delta \mathbf{n}$ – искомая векторная функция, удовлетворяющая условию $(\mathbf{n}_0 \delta \mathbf{n}) = 0$. Из (3) получаем линейное уравнение для $\delta \mathbf{n}$

$$\Delta \delta \mathbf{n} + \frac{\Delta \varepsilon_{dc}}{4\pi K} (\mathbf{Gn}_0) [[\mathbf{n}_0 \times \mathbf{G}] \times \mathbf{n}_0] = 0. \quad (4)$$

Это уравнение в частных производных является достаточно сложным. Его приближенное аналитическое решение возможно только после существенных упрощений. Введем декартову систему координат, ось X которой лежит в горизонтальной плоскости и параллельна стенкам НЖК, ось Y перпендикулярна стенкам, а ось Z вертикальна (рис. 5, ось Z на рисунке не показана). Прежде всего, пренебрежем в (4) вторыми производными по поперечным координатам x и z . При этом исключаются упругие силы, сглаживающие поперечную неоднородность поля директора. Строго говоря, такое упрощение справедливо, только если ширина светового пучка значительно больше толщины НЖК. Тем не менее, решение уравнения (4) и после пренебрежения поперечными упругими силами должно адекватно передавать характер поперечной зависимости поля директора (определяемый, фактически, поперечным профилем электрического поля). Далее, произведем продольное сглаживание электрического поля. Будем считать, что электрическое поле не зависит от поперечной координаты y ; положим его равным значению при $y = L/2$ (т.е., в точках плоскости Σ , равноудаленной от границ НЖК): $\mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{G}(x, L/2, z) = \mathbf{G}_c(x, z)$. В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{n}}{d^2 y} + \frac{\Delta \varepsilon_{dc}}{4\pi K} (\mathbf{G}_c \mathbf{n}_0) [[\mathbf{n}_0 \times \mathbf{G}_c] \times \mathbf{n}_0] = 0 \quad (5)$$

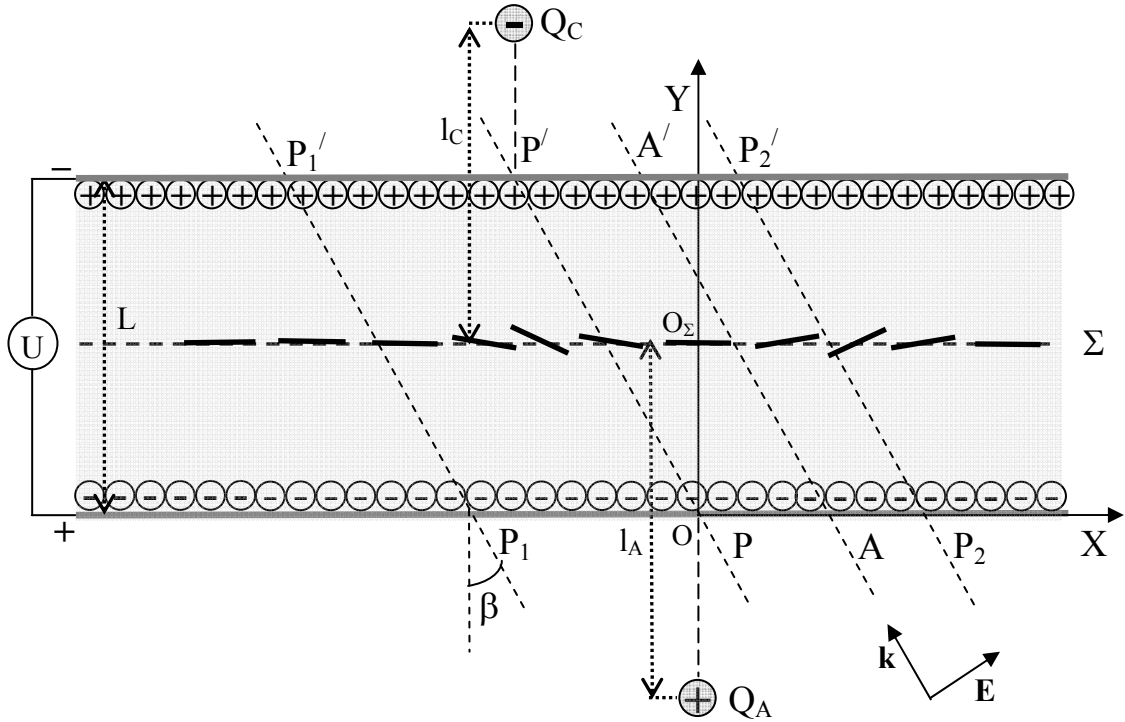


Рис. 5. Светоиндуцированная переориентация директора в НЖК в присутствии постоянного электрического поля: PP' - осевой луч светового пучка; P_1P_1' и P_2P_2' - периферийные лучи (условная граница светового пучка); AA' - произвольный луч светового пучка; Q_A и Q_C - точечные заряды, моделирующие снятие экранировки световым полем; палочки в плоскости Σ , равноудаленной от границ НЖК, показывают ориентацию директора (для случая $Q_C = 0$); l_A , l_C - расстояния от зарядов до плоскости Σ ; L - толщина жидкокристаллического слоя; \mathbf{k} и \mathbf{E} - волновой вектор и электрическое поле световой волны.

Решение уравнения (5) будем искать методом Галёркина, полагая

$$\delta \mathbf{n}(x, y, z) = \delta \mathbf{n}_m(x, z) \sin(\pi y/L), \quad (6)$$

(координаты x и z выступают теперь в роли параметров). Синусоидальная зависимость от координаты y в виде $\sin(\pi y/L)$ выбрана потому, что она удовлетворяет граничным условиям (исчезновение деформации директора на границах жид-

кокристаллического слоя) и совпадает с точным решением задачи о переориентации директора в однородном поле при малых углах поворота директора. Подставляя (6) в (5), домножая полученное выражение на $\sin(\pi y/L)$ и усредняя по объему НЖК, находим выражение для деформации поля директора

$$\delta \mathbf{n}_m = \frac{\Delta \varepsilon_{dc} L^2}{\pi^4 K} (\mathbf{G}_c \mathbf{n}_0) [(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{G}_c) \times \mathbf{n}_0]. \quad (7)$$

Внешнее электрическое поле, приложенное к НЖК, экранируется поверхностными зарядами (рис. 5). Действие света приводит к частичному снятию экранировки. Этот эффект мы будем моделировать полем двух точечных зарядов $Q_A > 0$ и $Q_C < 0$, отстоящих, соответственно, на расстояниях l_A и l_C от плоскости Σ (индексы А и С соответствуют аноду и катоду). Заряды расположены на линиях, перпендикулярных подложкам кристалла и проходящих через точки входа в НЖК и выхода из НЖК осевого луча светового пучка (рис. 5). Соответствующее выражение для электрического поля внутри жидкокристаллического слоя имеет вид

$$\mathbf{G}_c = \frac{Q_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}l_A + \mathbf{k}z)}{\varepsilon_{dc} (x^2 + l_A^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{Q_C (\mathbf{i}(x + L \operatorname{tg} \beta) + \mathbf{j}l_C + \mathbf{k}z)}{\varepsilon_{dc} ((x + L \operatorname{tg} \beta)^2 + l_C^2 + z^2)^{3/2}} + \mathbf{j} \eta G_0, \quad (8)$$

где $G_0 = U/L$, η – параметр, характеризующий степень экранировки внешнего поля поверхностными зарядами в отсутствии светового облучения ($\eta = 0$ соответствует полной экранировке). Подставляя (8) в (7), окончательно находим

$$\delta \mathbf{n}_m = \frac{4}{\pi} \left\{ \gamma_A \frac{l_A^2 x}{[x^2 + l_A^2 + z^2]^{3/2}} + \gamma_C \frac{l_C^2 (x + L \operatorname{tg} \beta)}{[(x + L \operatorname{tg} \beta)^2 + l_C^2 + z^2]^{3/2}} \right\} \times \\ \left\{ \gamma_A \frac{l_A^2 (\mathbf{j}l_A + \mathbf{k}z)}{[x^2 + l_A^2 + z^2]^{3/2}} + \gamma_C \frac{l_C^2 (\mathbf{j}l_C + \mathbf{k}z)}{[(x + L \operatorname{tg} \beta)^2 + l_C^2 + z^2]^{3/2}} + \mathbf{j} \gamma_G \right\}, \quad (9)$$

где $\gamma_A = Q_A / Q_{A,th}$, $\gamma_C = Q_C / Q_{C,th}$, $\gamma_G = \eta G_0 / G_{th}$, $G_{th} = \frac{\pi}{L} \left(\frac{4\pi K}{\Delta \varepsilon_{dc}} \right)^{1/2}$ - пороговое

поле перехода Фредерикса в постоянном поле, $Q_{A,th} = l_A^2 \varepsilon_{dc} G_{th}$, $Q_{C,th} = l_C^2 \varepsilon_{dc} G_{th}$ (заряды $Q_{A,th}$ и $Q_{C,th}$ создают в плоскости Σ (рис. 5) пороговое поле G_{th}).

ФАЗОВЫЙ ПРОФИЛЬ СВЕТОВОГО ПУЧКА

Показатель преломления необыкновенной волны в одноосной анизотропной среде равен [38]

$$n_e = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} + \Delta\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{m})^2}}, \quad (10)$$

где ε_{\parallel} и ε_{\perp} - главные значения тензора диэлектрической проницаемости на световой частоте, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}/k$, \mathbf{k} - волновой вектор светового пучка, \mathbf{m} - единичный вектор, направленный вдоль оси анизотропной среды. Учитывая малость параметра $\delta n_e = \frac{\varepsilon_{\parallel}^{1/2} \Delta\varepsilon}{2\varepsilon_{\perp}}$ и используя очевидное соотношение

$m = (\mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}) / |\mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}|$, показатель преломления, соответствующий деформированному полю директора, можно представить в виде разложения по степеням $\delta\mathbf{n}$

$$n_e = n_e^{(0)} + n_e^{(1)} + n_e^{(2)}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} n_e^{(0)} &= \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} - \delta n_e (\mathbf{k} \mathbf{n}_0)^2, \\ n_e^{(1)} &= -2\delta n_e (\mathbf{k} \mathbf{n}_0)(\mathbf{k} \delta \mathbf{n}), \\ n_e^{(2)} &= \delta n_e [(\mathbf{k} \mathbf{n}_0)^2 (\delta \mathbf{n} \delta \mathbf{n}) - (\mathbf{k} \delta \mathbf{n})^2]. \end{aligned}$$

Нелинейный набег фазы $S_{NL}(x, z)$ для произвольного луча \mathbf{s} , входящего в жидко-кристаллический слой в точке А с координатами $(x, 0, z)$ и выходящего в точке А' ($x'=x-Ltg\beta, L, z$) (рис. 5), представляется в виде интеграла

$$S_{NL} = \frac{2\pi}{\lambda} \int_A^{A'} (n_e^{(1)}(x, y, z) + n_e^{(2)}(x, y, z)) ds. \quad (12)$$

Разлагая подынтегральное выражение по координате x относительно точки $(x+x')/2$ и ограничиваясь постоянным и линейным членами, находим

$$S_{NL} = S_{NL}^{(1)} + S_{NL}^{(2)}, \quad (13)$$

где

$$S_{NL}^{(1)} = 2S_0 g h \sin\beta, \quad (14)$$

$$S_{NL}^{(2)} = \frac{S_0}{\cos\beta} (-g^2 h^2 \cos 2\beta + g^2 r^2 \sin^2 \beta) \quad (15)$$

– вклады в нелинейный набег фазы, пропорциональные первой и второй степеням деформации поля директора $\delta \mathbf{n}$;

$$g = \frac{\gamma_A u_A}{(1 + u_A^2 + v_A^2)^{3/2}} + \frac{\gamma_C u_C}{(1 + u_C^2 + v_C^2)^{3/2}}, \quad (16)$$

$$h = \frac{\gamma_A}{(1 + u_A^2 + v_A^2)^{3/2}} - \frac{\gamma_C}{(1 + u_C^2 + v_C^2)^{3/2}} + \gamma_G, \quad (17)$$

$$r = \frac{\gamma_A v_A}{(1 + u_A^2 + v_A^2)^{3/2}} - \frac{\gamma_C v_C}{(1 + u_C^2 + v_C^2)^{3/2}}, \quad (18)$$

$S_0 = 16\delta n_e L / \pi\lambda$; $u_A = (x - Ltg\beta/2)/l_A$, $u_C = (x + Ltg\beta/2)/l_C$, $v_A = z/l_A$, $v_C = z/l_C$ - безразмерные координаты. Используя очевидные соотношения

$$u_C = pu_A + s, \quad (19)$$

$$v_C = pv_A \quad (20)$$

(где $p = l_A/l_C$, $s = Ltg\beta/l_C$), функции (16)-(18) можно выразить только через переменные u_A и v_A . Опуская индекс А у этих переменных, для функций (16)-(18) получаем

$$g = \frac{\gamma_A u}{[1 + u^2 + v^2]^{3/2}} + \frac{\gamma_C (pu + s)}{[1 + (pu + s)^2 + p^2 v^2]^{3/2}}, \quad (21)$$

$$h = \frac{\gamma_A}{[1 + u^2 + v^2]^{3/2}} - \frac{\gamma_C}{[1 + (pu + s)^2 + p^2 v^2]^{3/2}} + \gamma_G, \quad (22)$$

$$r = \frac{\gamma_A v}{[1 + u^2 + v^2]^{3/2}} - \frac{\gamma_C v}{[1 + (pu + s)^2 + p^2 v^2]^{3/2}}. \quad (23)$$

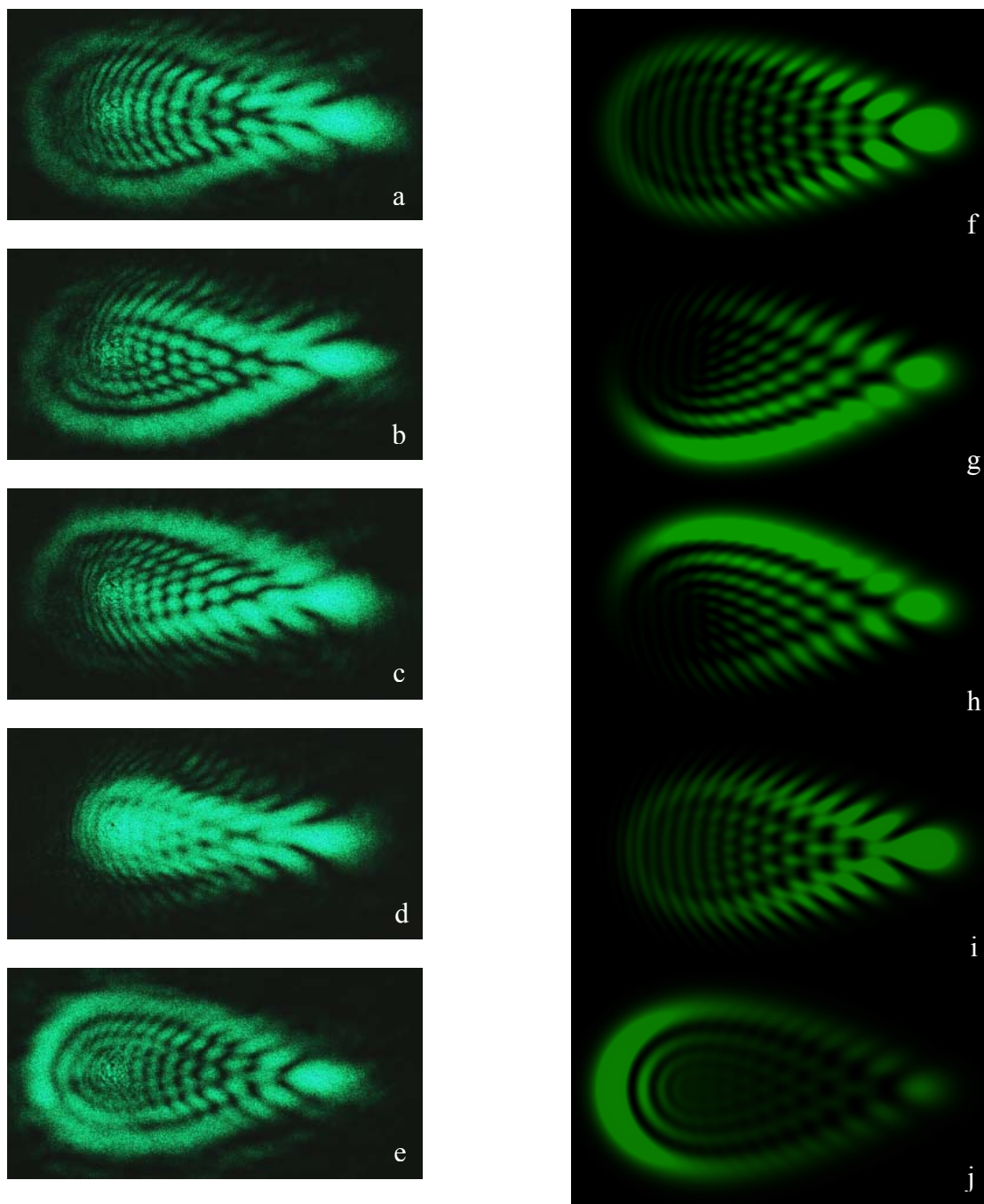


Рис. 6. (а-е) Аберрационные картины, наблюдаемые в дальней зоне дифракции при освещении ячейки с НЖК ЖКМ-1277 (толщиной $L = 100$ мкм) наклонно падающим ($\alpha = + 40^\circ$, разворот кристалла по часовой стрелке) пучком лазера ($\lambda = 515$ нм, $P = 10$ мВт) при дополнительном внешнем постоянном напряжении $U = +2$ В (передняя, относительно пучка, подложка является анодом). (f-j) Результаты численного расчёта при $w_0 = 70$ мкм, $\Delta n = 0.2$, $\gamma_A^2 = 0.6$, $\gamma_C = 0$, $\eta = 0$, $\beta = + 30^\circ$, $l_A = 150$ мкм. (b, g) – сдвиг кристалла относительно пучка вверх, (c, h) – вниз, (d, i) – влево, (e, j) – вправо. При расчете картин 6g-6j сдвиг кристалла относительно пучка полагался равным $0.5w_0$. Горизонтальный и вертикальный размеры всех картин 0.1 и 0.05 рад, соответственно.

Знание фазового набегает позволяет определить распределение интенсивности светового пучка в дальней зоне дифракции с помощью численного интегрирования по формуле Кирхгофа

$$I(\theta_x, \theta_z) = \frac{\kappa^2 l_A^4}{4\pi^2 y^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa l_A (\theta_x u + \theta_z v) + iS_{NL}(u, v)} du dv \right|^2, \quad (24)$$

где θ_x и θ_z - угловые координаты лучей.

Абберационная картина, рассчитанная по формуле (24) для параметров $\gamma_A^2 = 0.6$, $\gamma_C = 0$, $\eta = 0$, $\Delta n = 0.2$, $\beta = +30^\circ$, представлена на рис. 6f. Она хорошо согласуется с картиной, полученной в эксперименте (рис. 6a). При расчете подгонными параметрами являлись γ_A (этот параметр в нашей модели определяет максимальный угол поворота директора) и l_A (этот параметр определяет поперечный размер области деформации директора и влияет на расходимость пучка). Используемый при расчете фазовый набег $S(u, v)$ (13), включающий линейный (14) и квадратичный (15) вклады, показан на рис. 7. Из рисунка видно, что фазовый набег можно, в определенном приближении, рассматривать как сумму двух колоколообразных поверхностей разных знаков – вогнутого (слева) и выпуклого (справа). Вогнутый “колокол” соответствует уменьшению показателя преломления (“самодефокусировке” соответствующей части пучка), а выпуклый “колокол” – увеличению показателя преломления (“самофокусировке”). Подобную структуру фазового набегает легко понять из рис. 5. Действительно, для лучей пересекающих плоскость Σ правее точки O_Σ (например, для луча AA') директор поворачивается параллельно световому полю \mathbf{E} , увеличивая тем самым показатель преломления необыкновенной волны. Для лучей, проходящих левее точки O_Σ , ситуация обратная и показатель преломления уменьшается.

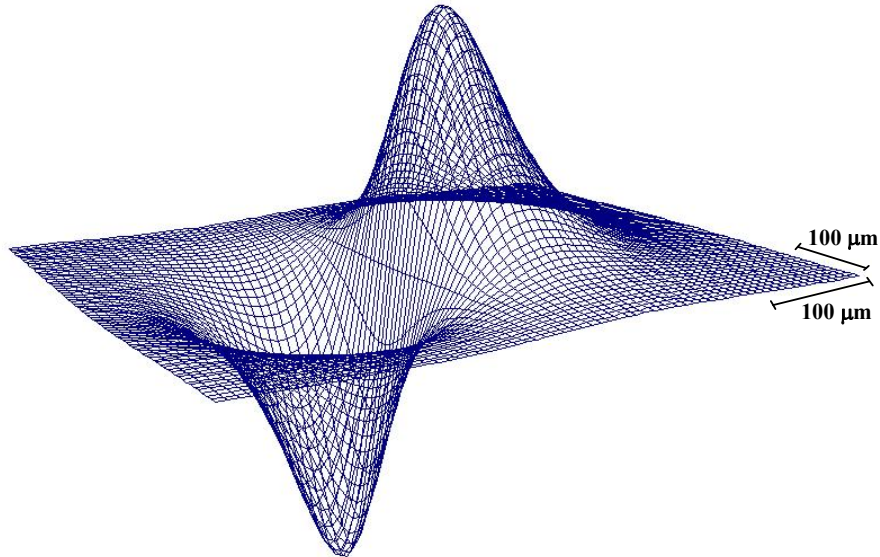


Рис. 7. Фазовый набег (13) светового пучка, прошедшего через НЖК ($L = 100$ мкм, $\gamma_A^2 = 0.6$, $\gamma_C = 0$, $\eta = 0$, $\Delta n = 0.2$, $\beta = +30^\circ$, $\lambda = 515$ нм). Амплитуда левого колокола составляет -36 , правого $+30$.

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КАУСТИК АБЕРРАЦИОННОЙ КАРТИНЫ

Углы θ_x и θ_z горизонтального и вертикального отклонения луча, характеризующегося (в плоскости XZ) координатами x и z (или u и v), равны

$$\theta_x = \frac{1}{k} \frac{\partial S_{NL}}{\partial x} = \frac{1}{kl_A} \frac{\partial S_{NL}}{\partial u}, \quad (25)$$

$$\theta_z = \frac{1}{k} \frac{\partial S_{NL}}{\partial z} = \frac{1}{kl_A} \frac{\partial S_{NL}}{\partial v}, \quad (26)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Соотношения (25) и (26) определяют отображение плоскости (u, v) на плоскость (θ_x, θ_z) . Критические точки этого отображения, т.е., точки в которых обращается в нуль якобиан преобразования

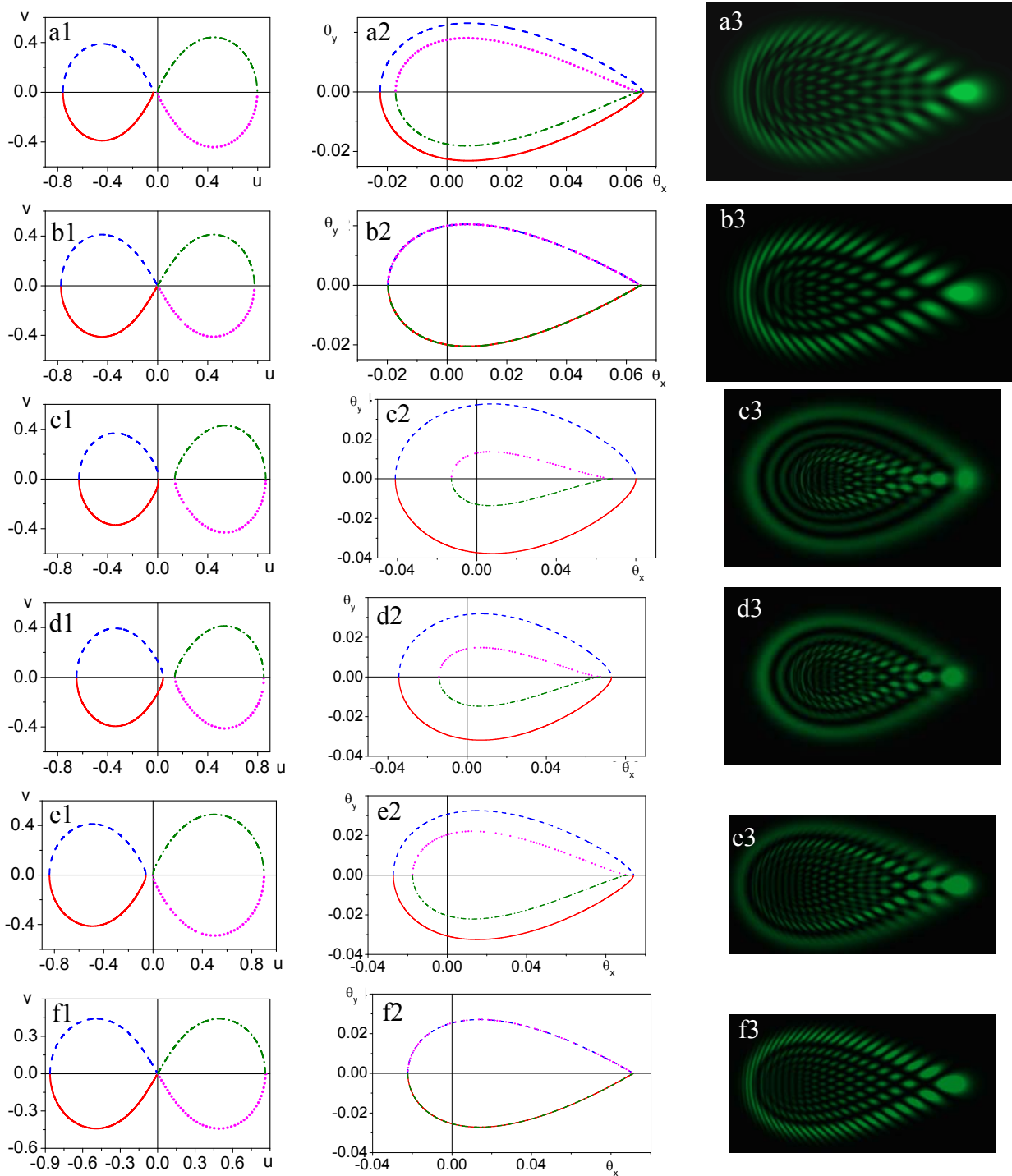


Рис. 8. Рассчитанные (a1-f1) критические точки отображения $(u,v) \rightarrow (\theta_x, \theta_z)$ (25)-(26); (a2-f2) каустики и (a3-f3) абберационные картины ($\lambda = 515$ нм, $\Delta n = 0.2$, $L = 100$ мкм, $\beta = 30^\circ$, $l_A = l_C = 150$ мкм, $w_0 = 100$ мкм, $\gamma_A = 0.6^{1/2}$): (a1-a3) $\gamma_C = 0$, $\eta = 0$, фазовый набег S_{NL} включает члены, квадратичные по углу поворота директора ψ ; (b1-b3) $\gamma_C = 0$, $\eta = 0$, фазовый набег S_{NL} не включает члены, квадратичные по ψ ; (c1-c3) $\gamma_C = -0.1^{1/2}$, $\eta = 0$, с учетом членов, квадратичных по ψ ; (d1-d3) $\gamma_C = -0.1^{1/2}$, $\eta = 0$, без учета членов, квадратичных по ψ ; (e1-e3) $\gamma_C = 0$, $\eta = 0.1^{1/2}$, с учетом членов, квадратичных по ψ ; (f1-f3) $\gamma_C = 0$, $\eta = 0.1^{1/2}$, без учета членов, квадратичных по ψ . Сплошные, штриховые, пунктирные и штрих-пунктирные участки кривых в первом и втором столбце рисунка соответствуют друг другу. Угловые размеры картин (третий столбец) составляют (a, b) 0.1×0.05 и (c - d) 0.15×0.07 радиан.

$$\frac{D(\theta_x, \theta_z)}{D(u, v)} = 0 \quad (27)$$

или, что то же самое, гессиан функции $S_{NL}(u, v)$

$$\frac{\partial^2 S_{NL}}{\partial u^2} \frac{\partial^2 S_{NL}}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 S_{NL}}{\partial u \partial v} \right)^2 = 0, \quad (28)$$

соответствуют каустикам в дальней зоне дифракции (зоне Фраунгофера). Множество критических точек, полученное путем численного решения уравнения (28), и соответствующие каустики, рассчитанные с помощью соотношений (25) и (26), представлены на рис. 8a1 и 8a2. При расчете использовались те же параметры, что и для картины на рис. 6f. Сама картина воспроизведена на рис. 8a3 (распределение интенсивности в этой картине несколько отличается от рис. 6f, так как при расчете использовалось меньшее значение перетяжки $w_0 = 70$ мкм вместо 100 мкм; размеры картины, определяемые исключительно фазовым профилем, от перетяжки не зависят). Как видно из рис. 8a1 и 8a2, множества критических и каустических точек состоят из двух замкнутых кривых. Левая и правая кривые на рис. 8a1 соответствуют внешней и внутренней кривым на рис. 8a2, а также, очевидно, левому и правому “колоколам” на рис. 7.

Как было отмечено ранее, левая и правая части фазового фронта соответствуют самодефокусировке и самофокусировке светового пучка. Чтобы экспериментально проверить знак самовоздействия достаточно сдвинуть НЖК вверх или вниз перпендикулярно направлению распространению светового пучка [19, 39]. Как видно из рис. 6b при сдвиге кристалла вверх подсвечивается нижняя часть границы абберационной картины и ослабляется интенсивность верхней части. Такое перераспределение интенсивности как раз соответствует отрицательному знаку самовоздействия (самодефокусировке) для внешней каустической линии. Этот эффект перераспределения интенсивности, в определенном смысле, аналогичен отклонению вниз светового луча обычной дефокусирующей линзой при ее перемещении вверх. Соответствующее дефокусировке изменение интенсивности границы абберационной картины наблюдалось и при сдвиге кри-

сталла вниз (рис. 6с). На рис. 6b и 6с также можно видеть, что сдвиг кристалла визуализирует и внутреннюю каустическую линию, соответствующую правому “колоколу” самофокусировки на рис. 7. Рис. 6g и 6h демонстрируют хорошее согласие между результатами расчета “сдвиговых” картин и экспериментом. Аналогичное хорошее согласие наблюдается и при сдвиге НЖК влево (рис. 6d и 6i) и влево (рис. 6е и 6j) относительно светового пучка.

При $\gamma_C = 0$ (экранировка снимается только на аноде) наибольшее отклонение в горизонтальном направлении испытывают лучи, проходящие вблизи точки O_Σ (т.е., лучи с координатами близкими к точке $u = v = 0$). Именно эти лучи формируют излом на границе абберационной картины. Проведем аналитическое исследование этой части абберационной картины. Для этого, полагая для простоты $\gamma_G = 0$ (высокая степень экранировки внешнего электрического поля), разложим фазовые набег (14) и (15) вблизи точки $u = v = 0$

$$S_{NL}^{(1)} = 2S_0 \gamma_A^2 \sin\beta [u - 3u(u^2 + v^2)], \quad (29)$$

$$S_{NL}^{(2)} = -\frac{S_0 \cos 2\beta}{\cos\beta} \gamma_A^4 u^2. \quad (30)$$

Их сумму (13) удобно представить в виде

$$S_{NL} = S_0 \{P[u - 3u(u^2 + v^2)] - Qu^2\}, \quad (31)$$

где $P = 2\gamma_A^2 \sin\beta$ и $Q = -\frac{\cos 2\beta}{\cos\beta} \gamma_A^4$.

Согласно теории особенностей гладких отображений [40-44], называемой также теорией катастроф, функция $S_{NL}(u,v)$ в окрестности критических точек отображения может быть, с помощью подходящей замены переменных, приведена к одной из пяти [45] нормальных форм (“элементарных катастроф”). Этот результат означает возможность существования только ограниченного числа возможных форм каустик. Выражение (31), полученное нами с помощью разложения фазового набег в ряд Тейлора, совпадает с элементарной катастрофой гиперболическая омбилика (или “кошелёк”).

Подставляя (31) в (25) и (26) и (27) получаем

$$\theta_x = \theta_0 P(1 - 9u^2 - 3v^2 - 36\Delta u), \quad (32)$$

$$\theta_z = -6\theta_0 Puv, \quad (33)$$

$$(u + \Delta)^2 - \frac{v^2}{3} = \Delta^2, \quad (34)$$

где $\theta_0 = \frac{S_0}{\kappa l_A} = \frac{8\delta n_e L}{\pi^2 l_A}$, $\Delta = \frac{Q}{18P}$. Решение уравнения (34), как было указано выше,

является множеством точек на плоскости (u, v) , соответствующих лучам, образующим каустики. Это множество, очевидно, есть гипербола, параметрические уравнения которой имеют вид

$$u_{L,R} = -\Delta + \gamma\Delta \operatorname{ch}\tau, \quad v_{L,R} = \sqrt{3}\Delta \operatorname{sh}\tau. \quad (35)$$

Здесь значения $\gamma = -1$ и $+1$ соответствуют левой и правой ветвям (см. рис. 9а и 9b). Значение параметра $\tau = 0$ отвечает точкам A_L (на левой ветви) и A_R (на правой ветви). Асимптоты гиперболы имеют вид

$$v_a^{(\pm)} = \pm\sqrt{3}(u + \Delta). \quad (36)$$

Подставляя (35) в (32) и (33), получаем параметрические уравнения каустик

$$(\theta_x)_{L,R} = \theta_0 P[1 + 18\Delta^2(1 - \gamma - \operatorname{sh}^2\tau - 2\gamma \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2})], \quad (37)$$

$$(\theta_z)_{L,R} = 6\sqrt{3}\theta_0 P\Delta^2 \operatorname{sh}\tau(1 - \gamma - 2\gamma \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2}). \quad (38)$$

Зависимости (37) и (38) графически представлены на рис. 9с и 9d. Из рис. 9 видно, что аналитические решения (34) и (36)-(37), полученные на основе элементарной катастрофы (31), хорошо соответствуют точным решениям, полученным численно для фазового набегга (13), в окрестности точек $(u = 0, v = 0)$ и $(\theta_x = \theta_0 P, \theta_y = 0)$.

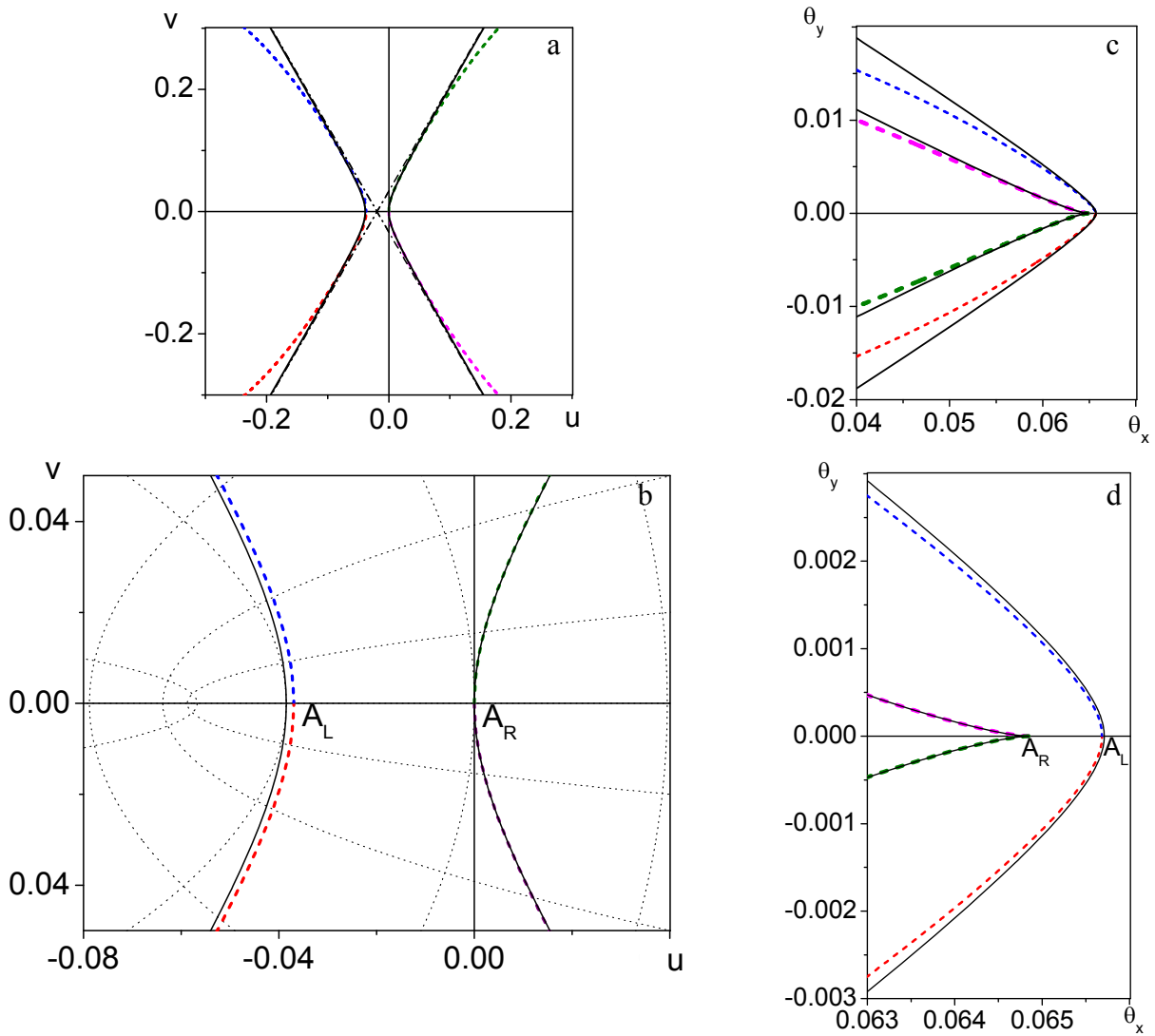


Рис. 9. (a, b) Критические точки отображения $(u, v) \rightarrow (\theta_x, \theta_z)$ (25)-(26) вблизи точки $(u = 0, v = 0)$ и (c, d) каустики абберационной картины ($\lambda = 515$ нм, $\Delta n = 0.2$, $L = 100$ мкм, $\beta = 30^\circ$, $l_A = 150$ мкм, $\gamma_A = 0.6^{1/2}$), рассчитанные для фазового набега с учетом членов, квадратичных по углу поворота директора ψ , и представленные в разных масштабах. Штриховые линии изображают численные решения уравнения (28) (a, b) и образы этих решений (25)-(26) (c, d). Сплошные линии соответствуют левой и правой ветвям гиперболы (34) (a, b) и их образам (37)-(38) (c, d). Штриховые прямые на рис. 9а изображают асимптоты гиперболы (36); тонкие пунктирные линии на рис. 9b – линии кривизны волнового фронта (68).

При малых значениях τ параметрические уравнения для каустик, соответствующих левой и правой ветвям, имеют вид

$$(\theta_x)_L = \theta_0 P(1 + 36\Delta^2 - 9\Delta^2 \tau^2), \quad (39)$$

$$(\theta_z)_L = 12\sqrt{3}\theta_0 P\Delta^2 \tau, \quad (40)$$

и

$$(\theta_x)_R = \theta_0 P(1 - 27\Delta^2 \tau^2), \quad (41)$$

$$(\theta_z)_R = 3\sqrt{3}\theta_0 P\Delta^2 \tau^3. \quad (42)$$

Исключив параметр τ , можно получить уравнения каустик в виде

$$(\theta_x)_L = \theta_0 P(1 + 36\Delta^2) - \frac{(\theta_z)_L^2}{48\theta_0 P\Delta^2}, \quad (43)$$

$$(\theta_x)_R = \theta_0 P - 9(\theta_0 P\Delta^2)^{1/3} (\theta_z)_R^{2/3}. \quad (44)$$

Как следует из этих соотношений, угловое расстояние между каустиками по оси x вблизи точки излома

$$\delta\theta_x = (\theta_x)_L - (\theta_x)_R \quad (45)$$

равно

$$\delta\theta_x = 36\theta_0 P\Delta^2. \quad (46)$$

Эта величина для параметров, использованных при расчете рис. 6, 7 и 8а, равна $7.5 \cdot 10^{-4}$ рад, т.е., составляет менее 1% общей расходимости картины. Более существенное различие между внешней и внутренней каустиками проявляется в суммарных горизонтальной и вертикальной расходимостях (рис. 8а2) (для вертикальной расходимости это различие, как было пояснено выше, наблюдается экспериментально (см. рис. 6b и 6c)).

Если в разложениях (11) и (13) пренебречь слагаемыми $n_e^{(2)}$ и $S_{NL}^{(2)}$, то в уравнении (31) следует положить $Q = 0$, а в уравнениях (32) и (34) – $\Delta = 0$. Тогда множество критических точек состоит из двух прямых

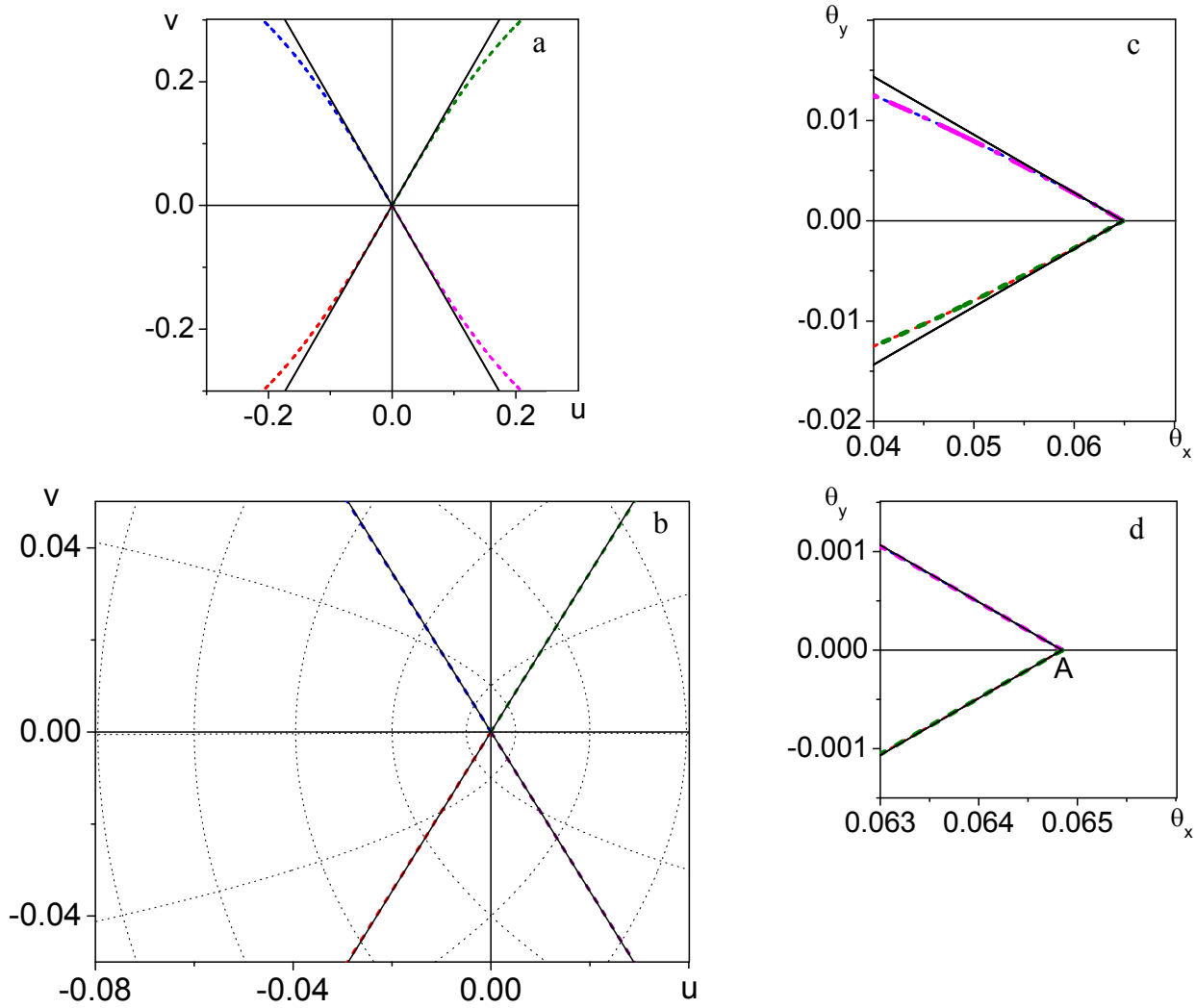


Рис. 10. (a, b) Критические точки отображения $(u, v) \rightarrow (\theta_x, \theta_z)$ (25)-(26) вблизи точки $(u = 0, v = 0)$ и (c, d) каустики абберационной картины ($\lambda = 515$ нм, $\Delta n = 0.2$, $L = 100$ мкм, $\beta = 30^\circ$, $l_A = 150$ мкм, $\gamma_A = 0.6^{1/2}$), рассчитанные для фазового набега без учета членов, квадратичных по углу поворота директора ψ , и представленные в разных масштабах. Штриховые линии изображают численные решения уравнения (28) (a, b) и образы этих решений (25)-(26) (c, d). Сплошные линии соответствуют прямым (47) (a, b) и их образам (52) (c, d)). Тонкие пунктирные линии на рис. 10b изображают линии кривизны волнового фронта (68).

$$v_a^{(\pm)} = \pm\sqrt{3}u_a^{(\pm)}. \quad (47)$$

Параметрические уравнения этих прямых и соответствующих им каустик можно записать в виде

$$v_a^{(\pm)} = \pm\sqrt{3}\tau, \quad (48)$$

$$u_a^{(\pm)} = \tau, \quad (49)$$

и

$$\theta_x^{(\pm)} = \theta_0 P(1 - 18\tau^2), \quad (50)$$

$$\theta_z^{(\pm)} = \mp 6\sqrt{3}\theta_0 P\tau^2. \quad (51)$$

Исключив параметр τ , уравнения каустик можно представить в виде

$$\theta_x^{(\pm)} = \theta_0 P \pm \sqrt{3}\theta_z^{(\pm)}, \quad (52)$$

при этом $\theta_z^{(+)} \geq 0$, а $\theta_z^{(-)} \leq 0$.

Зависимости (47) и (52) представлены на рис. 10а-10d. Из рис. 10 видно, что аналитические решения, как и в рассмотренном ранее случае $\Delta \neq 0$, хорошо соответствуют точным решениям.

С точки зрения теории катастроф Δ является управляющим параметром, от которого зависит характер критического множества и каустик. Обращение параметра Δ в нуль происходит, как было указано выше, при пренебрежении квадратичным членом в разложении (11). В этом приближении нелинейный фазовый набег антисимметричен (меняет знак) при замене $u \rightarrow -u$, что, в свою очередь, отражает антисимметрию деформации поля директора – последнее симметрично относительно отражения в плоскости yz (согласно (9) $n_y \rightarrow -n_y$ при $x \rightarrow -x$ в случае $\gamma_C = \gamma_G = 0$). В результате две каустические кривые полностью сливаются (рис. 8b2, 10с, 10d), а в окрестности точки $(\theta_x = \theta_0, \theta_z = 0)$ появляется каустический угол.

Упомянутая выше антисимметрия поля директора нарушается также, если $\gamma_C \neq 0$ (светоиндуцированное снятие экранировки происходит не только на аноде, но и на катоде), что должно само по себе приводить к образованию каустического клюва. Результаты расчета множества критических точек, каустик и абберационных картин для $\gamma_C = -0.1^{1/2}$ представлены на рис. 8с и 8d. Из рисунка видно, что возможное снятие экранировки на катоде приводит к значительному увеличению разницы между двумя каустическими кривыми.

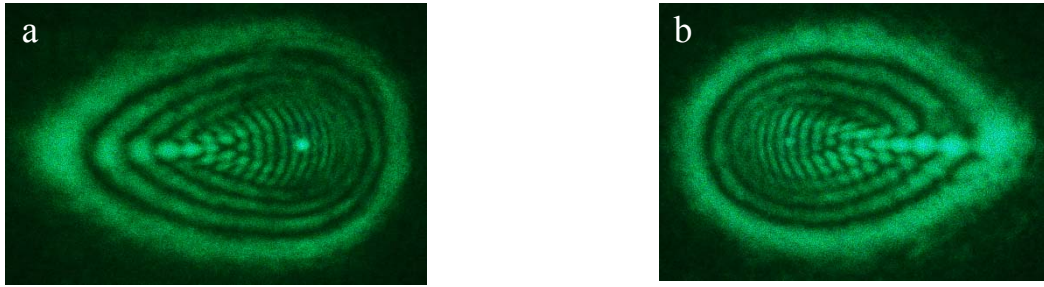


Рис. 11. Абберационные картины для наклонно падающего светового пучка ($\lambda = 515$ нм, $P = 5$ мВт, обыкновенная волна), прошедшего через планарно ориентированный слой НЖК ЖКМ-1277+0.1% метиловый красный ($L = 100$ мкм), находящийся под воздействием постоянного напряжения $U = +3$ В, при разных направлениях поворота НЖК: (a) $\alpha = -60^\circ$, (b) $\alpha = +60^\circ$.

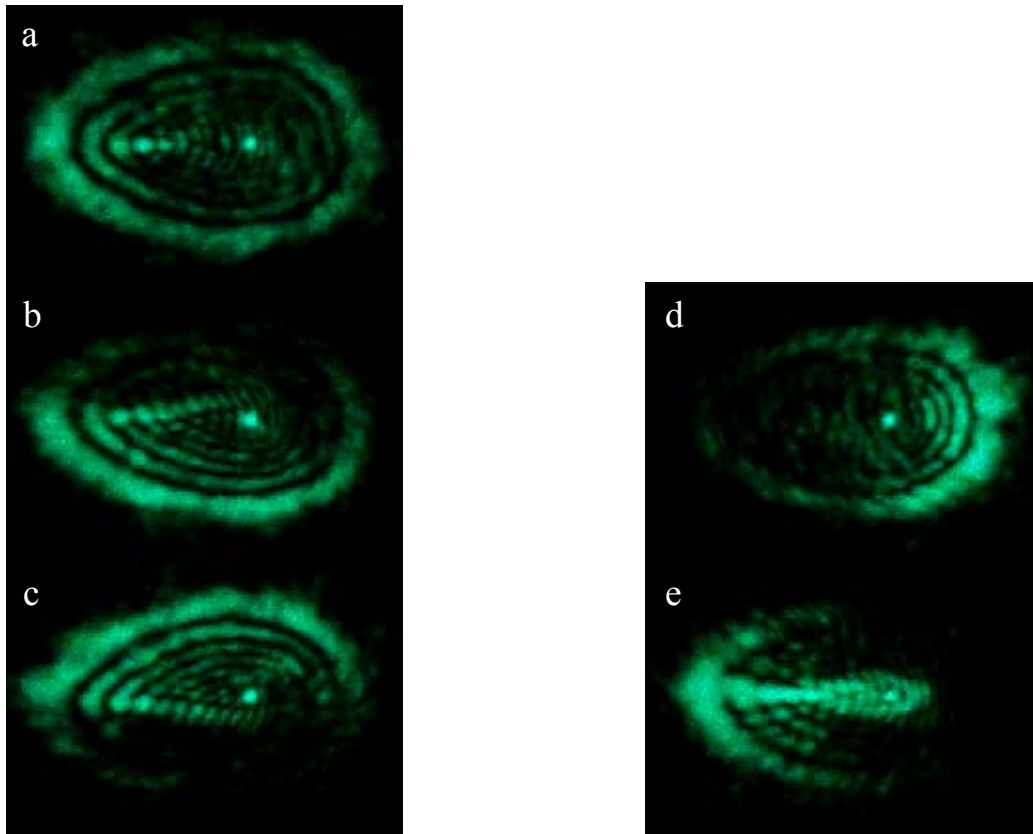


Рис. 12. (a-e) Абберационные картины, наблюдаемые в дальней зоне дифракции при освещении ячейки с НЖК-1277+0.1% метиловый красный (толщиной $L = 100$ мкм) наклонно падающим ($\alpha = -60^\circ$, разворот кристалла против часовой стрелки) пучком лазера ($\lambda = 515$ нм, $P = 5$ мВт) при дополнительном внешнем постоянном напряжении $U = +2$ В (передняя относительно пучка подложка является анодом). (b) – сдвиг кристалла относительно пучка вверх, (c) – вниз, (d) – влево, (e) – вправо. Горизонтальный и вертикальный размеры всех картин 0.12 и 0.07 рад, соответственно.

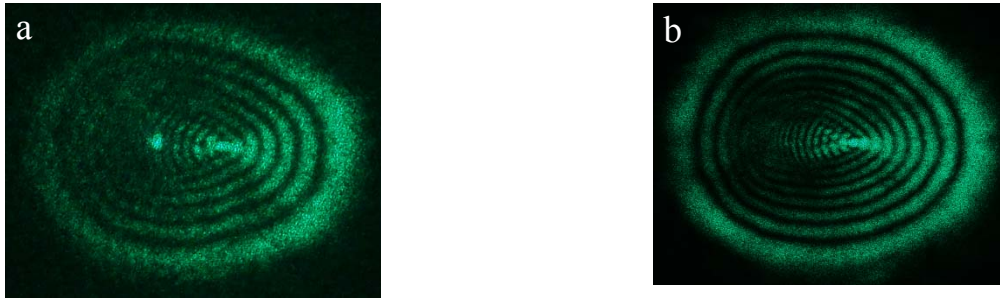


Рис. 13. Абберационные картины для наклонно падающего светового пучка ($\lambda = 515$ нм, $P = 5$ мВт, $\alpha = +40^\circ$), прошедшего через планарно ориентированный слой НЖК ЖКМ-1277+0.1% метиловый красный ($L = 100$ мкм), находящийся под воздействием постоянного напряжения $U = +4$ В, при различной поляризации света: (а) обыкновенная волна (направление поляризации падающего света отличалось от точного направления поляризации обыкновенной волны (вертикального направления) на 10°), (б) необыкновенная волна. Фотографии получены при использовании анализатора, убравшего обыкновенную составляющую пучка, для варианта (б) перед экраном устанавливались ослабляющие светофильтры (НС-2 и НС-9).

В эксперименте такая ситуация, по-видимому, имеет место в случае НЖК, легированных красителем метиловый красный (МК) [36] и дендримерами [46]. Абберационные картины, полученные для НЖК с примесью МК и характеризующиеся двумя сильно отличающимися по угловому размеру каустиками, представлены на рис. 11-13. Физической причиной различия в поведении чистых и легированных красителями образцов может быть осаждение красителей на стенках жидкокристаллической ячейки [47, 48].

Однородное поле, проникающее в объем НЖК ($\gamma_G \neq 0$), увеличивает расходимость абберационной картины (как видно из сравнения рис. 8е и 8а). Однако оно не нарушает антисимметрию поля директора и, в отсутствие квадратичного члена (15), не приводит к разделению каустик (рис. 8f).

Расходимость абберационной картины, естественно, возрастает и с увеличением параметра γ_A , т.е., степени снятия экранировки внешнего постоянного поля световым пучком. Соответствующие результаты расчетов показаны на рис. 14. На этом же рисунке приведены экспериментальные абберационные картины, полученные в процессе развития самовоздействия, и стационарные абберационные картины при различных мощностях светового пучка. Из рисунка видно, что

результаты расчетов соответствуют эксперименту. При этом динамику формирования абберационной картины можно формально описывать возрастанием параметра γ_A , хотя, на самом деле, экспериментальные картины соответствуют нестационарным состояниям, не рассмотренным в нашей модели.

Обратимся теперь к вопросу о том, какие лучи формируют заданную точку абберационной картины. Ограничимся случаем горизонтальной линии ($\theta_x \neq 0$, $\theta_z = 0$) и $\gamma_C = \gamma_G = 0$, допускающим простое аналитическое решение. Из соотношений (32)-(33) легко получить, что в области $\theta_x > 1 + 36\Delta^2$ лучей нет; в области $1 < \theta_x < 1 + 36\Delta^2$ имеются два луча с углом отклонения

$$\theta_x = \theta_0 P[1 - 9(u + 2\Delta)^2 + 36\Delta^2], \theta_z = 0, \quad (53)$$

соответствующие точкам на оси x с нормированными координатами

$$u_{1,2} = -2\Delta \pm \frac{\sqrt{1 + 36\Delta^2 - \theta_x}}{3}, v_{1,2} = 0; \quad (54)$$

а в области $\theta_x < 1$ добавляются еще два луча, соответствующие точкам на оси z

$$u_{3,4} = 0, v_{3,4} = \sqrt{\frac{1 - \theta_x}{3}}. \quad (55)$$

Таким образом, при переходе через каждую из двух каустических точек появляются два интерферирующих луча. В случае $\Delta = 0$ при переходе через каустику появляются четыре луча.

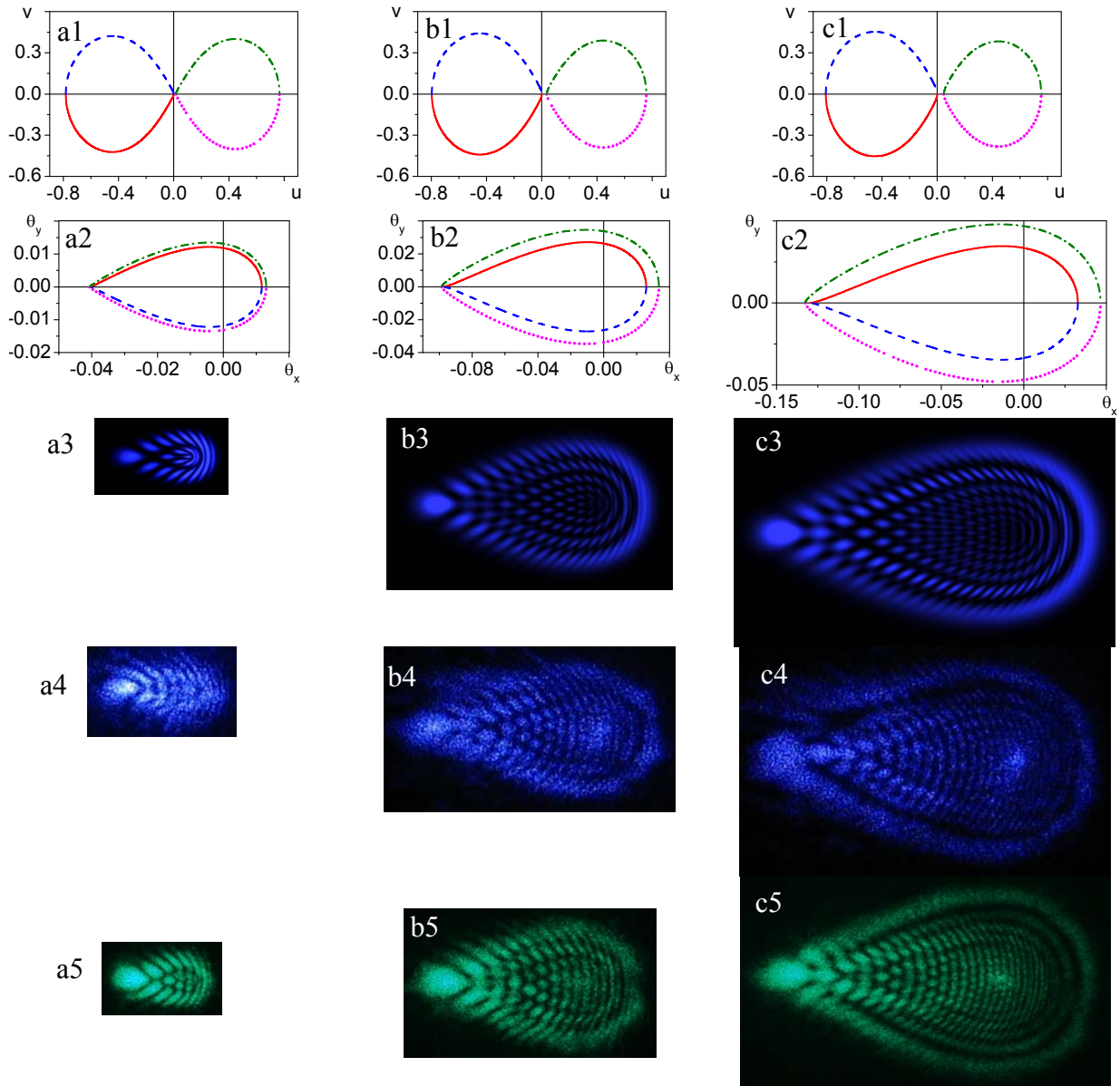


Рис. 14. Рассчитанные (a1 - c1) критические точки отображения $(u, v) \rightarrow (\theta_x, \theta_y)$, (a2 - c2) каустики и (a3 - c3) абберрационные картины ($\lambda = 473$ нм, $\Delta n = 0.2$, $L = 100$ мкм, $\beta = -30^\circ$, $l_A = 100$ мкм, $w_0 = 100$ мкм, $\gamma_C = 0$): $\gamma_A =$ (a) $0.25^{1/2}$, (b) $0.6^{1/2}$, (c) $0.8^{1/2}$. Размеры кадров в третьей строке составляют (a3) 0.08×0.05 , (b3) 0.15×0.09 , (c3) 0.2×0.12 рад. (a4 - c4) Фотографии абберрационной картины в разные моменты времени в процессе ее развития ($\lambda = 473$ нм, необыкновенная волна, $P = 5$ мВт, $U = +2$ В, $\alpha = -40^\circ$). (a5 - c5) Фотографии стационарной абберрационной картины для разных значений мощности пучка ($\lambda = 515$ нм, необыкновенная волна, $U = +3$ В, $\alpha = -40^\circ$): (a5) $P = 3$ мВт, (b5) $P = 10$ мВт, (c5) $P = 20$ мВт.

КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Рассмотрим свойства поверхности волнового фронта. Её уравнение в безразмерных координатах u, v , $\psi = y/l_A$ имеет вид

$$\psi(u, v) = -\frac{1}{kl_A} S_{NL}(u, v). \quad (56)$$

Радиус кривизны ρ (нормированный на l_A) равен отношению второй и первой дифференциальных форм Гаусса [49]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}, \quad (57)$$

где $E = 1 + a^2$, $F = ab$, $G = 1 + b^2$, $L = c \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$, $M = c \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$, $N = c \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$, $a = \frac{\partial \psi}{\partial u}$,

$b = \frac{\partial \psi}{\partial v}$, $c = (1 + a^2 + b^2)^{-1/2}$. Подставляя (56) в (57), получаем

$$\frac{1}{\rho} = 6\theta_0 P \frac{3(u + 2\Delta) + 2v \frac{dv}{du} + u \left(\frac{dv}{du}\right)^2}{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2}, \quad (58)$$

Производная $\frac{dv}{du}$, очевидно, равна

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (59)$$

где φ - угол (отсчитываемый от оси x), характеризующий направление касательной к кривым, для которых определяется радиус кривизны. Подставляя (59) в (58), получим

$$\frac{1}{\rho} = \theta_0 P [(12u + \Delta) + 6v \sin 2\varphi + (6u + \Delta) \cos 2\varphi]. \quad (60)$$

Поворотом системы координат XZ на угол ξ ($\varphi' = \varphi - \xi$), определяемый соотношением

$$\operatorname{tg}2\xi = \frac{v}{u + 3\Delta}, \quad (61)$$

уравнение (60) приводится к виду

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi'}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi'}{\rho_2}, \quad (62)$$

где ρ_1 и ρ_2 - главные радиусы кривизны, определяемые соотношениями

$$\frac{1}{\rho_{1,2}} = 6\theta_0 P [2u + 3\Delta \pm \sqrt{(u + 3\Delta)^2 + v^2}]. \quad (63)$$

Если $\Delta = 0$, то в точке $(u = 0, v = 0)$ $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = 0$, т.е. эта точка является омбилической (точкой с одинаковыми значениями главных радиусов кривизны, равными в данном случае бесконечности).

Найдем угол φ и радиусы ρ_1 и ρ_2 в точках пересечения гипербол (35) с осью x . Для левой гиперболы координаты точки пересечения A_L ($u_L^0 = -2\Delta, v_L^0 = 0$); для правой гиперболы - A_R ($u_R^0 = 0, v_R^0 = 0$). Согласно (61)-(63) в точке A_L $\varphi = 0, \frac{1}{\rho_1} = 0, \frac{1}{\rho_2} = -12\theta_0 P\Delta$; в точке A_R $\varphi = 0, \frac{1}{\rho_1} = 18\theta_0 P\Delta,$

$$\frac{1}{\rho_2} = 0.$$

Линии кривизны определяются из уравнений

$$\frac{dv_{1,2}}{du} = f_{1,2}(v_{1,2}, u), \quad (64)$$

где функции $f_{1,2}(v, u)$ есть решения уравнения

$$(FN - GM)f^2 + (EN - GL)f + (EM - FL) = 0. \quad (65)$$

Подставляя в (65) коэффициенты Гауссовых форм, находим

$$\frac{dv_{1,2}}{du} = -\frac{u + 3\Delta}{v_{1,2}} \pm \sqrt{\left(\frac{u + 3\Delta}{v_{1,2}}\right)^2 + 1}. \quad (66)$$

Это уравнение можно также получить менее формальным способом, исходя из соотношения (59). Используя известное тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}, \quad (67)$$

опять приходим к уравнению (66).

Решения (66), проходящие через заданную точку (u_0, v_0) , имеют вид

$$v_{1,2}^2 = v_0^2 + 2(u_0 - u)(u_0 + 3\Delta \mp \sqrt{(u_0 + 3\Delta)^2 + v_0^2}). \quad (68)$$

Они представлены графически на рис. 9 и 10. Как видно из рис. 9b линии кривизны касаются гипербол (35), представляющих собой множество критических точек отображения (25)-(26) в точках A_L и A_R . При этом в точке A_R гипербола касается той линии кривизны, для которой радиус кривизны обращается в бесконечность (в отличие от точки A_L , для которой направление общей касательной перпендикулярно линии кривизны с бесконечным радиусом). Как показано в [45], именно такая геометрия необходима для образования каустического клюва.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлены основные свойства самовоздействия светового пучка в нематических жидких кристаллах, находящихся под воздействием постоянного электрического поля.

На основе предложенного ранее механизма поверхностного фоторефрактивного эффекта, заключающегося в переориентации директора под действием постоянного электрического поля, возникающего в результате светового воздействия на поверхностные заряды, построена теория самовоздействия световых пучков в НЖК. Воздействие света моделировалось полем точечных зарядов.

Показано, что самовоздействие света в НЖК приводит к генерации оптической катастрофы “гиперболическая омбилика”. Рассчитана абберрационная картина и проанализированы каустики светового поля. Результаты расчетов хорошо описывают экспериментальные данные.

Отметим, что в нелинейной оптике самовоздействие световых пучков обычно приводит к кольцевой картине, соответствующей простейшей особенности (катастрофе) “сборка”. В [50] сообщалось о генерации катастрофы “складка” на тепловой нелинейности световым пучком, не являющимся аксиально симметричным. Катастрофа гиперболическая омбилика наблюдалась ранее на ориентационных нелинейностях нематического жидкого кристалла при взаимодействии двух световых пучков [51], а также, в частном случае такой геометрии [52] при отражении светового пучка от границы НЖК и повторного прохождения через жидкокристаллический слой (при этом слабый отраженный пучок не влиял на ориентацию директора). Генерация высшей катастрофы при однократном прохождении аксиально симметричного светового пучка через нелинейную среду, по-видимому, наблюдалась впервые в рассмотренном нами случае взаимодействия света с НЖК в постоянном электрическом поле.

Обращаясь к примерам в линейной оптике, заметим, что наблюдаемая нами асимметричная картина в дальней зоне дифракции схожа с распределением интенсивности в изображении точечного источника линзой с абберрацией типа кома [38] (подобно тому, что обычная кольцевая картина аналогична сфериче-

ской абберации линз). Упомянем также реализацию катастрофы гиперболическая омбилика при рассеянии света на каплях [53, 54].

Отметим, что полученные в данной работе аналитические выражения для нелинейного фазового набега могут быть использованы для описания интенсивности света на каустиках абберационной картины.

Авторы благодарны В.Н. Очкину за интерес к работе и полезные обсуждения.

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 08-02-01382-а и 09-02-12216-офи_м). И.А.Б и М.П.С. благодарны за поддержку Российской академии наук (Программа “Поддержка молодых ученых”). М.П.С. также благодарен Фонду содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. де Жен, *Физика жидких кристаллов*, М., Мир, 1977.
2. Л.М. Блинов, *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов*, М., Наука, 1978.
3. Б.Я. Зельдович, Н.Ф. Пилипецкий, А.В. Сухов, Н.В. Табирян, *Гигантская оптическая нелинейность в мезофазе НЖК*, Письма в ЖЭТФ, **31**(5), 287-292 (1980).
4. I. Janossy, L. Csillag and A.D. Lloyd, *Temperature dependence of the optical Freedericksz transition in dyed nematic liquid crystals*, Phys. Rev. A, **44**(12), 8410-8413 (1991).
5. И.А. Будаговский, А.С. Золотько, В.Н. Очкин, М.П. Смаев, А.Ю. Бобровский, В.П. Шibaев, М.И. Барник, *Ориентационная оптическая нелинейность, индуцированная гребнеобразными полимерами в нематическом жидком кристалле*, ЖЭТФ, **133**(1), 204-214 (2008).
6. А.С. Золотько, В.Ф. Китаева, Н. Кроо, Н.Н. Соболев, Л. Чиллаг, *Влияние поля световой волны на нематическую фазу жидкого кристалла ОЦБФ*, Письма в ЖЭТФ, **32**(2), 170-174 (1980).
7. А.С. Золотько, В.Ф. Китаева, Н.Н. Соболев, А.П. Сухоруков, *Самофокусировка лазерного излучения при переходе Фредерикса в нематической фазе жидкого кристалла*, ЖЭТФ, **81**(3), 933-941 (1981).
8. S.D. Durbin, S.M. Arakelian, Y.R. Shen, *Laser induced diffraction rings from a nematic-liquid-crystal film*, Opt. Lett., **6**(9), 411-413 (1981).
9. А.С. Золотько, В.Ф. Китаева, Н. Кроо, Н.Н. Соболев, А.П. Сухоруков, Л. Чиллаг, *Характер абберационной картины при самофокусировке светового пучка, вызванной переориентацией директора в жидких кристаллах*, ЖЭТФ, **83**(4), 1368-1375 (1982).
10. I.C. Khoo, S.L. Zhuang, S. Shepard, *Self-focusing of a lower-power CW laser beam via optically induced birefringence in a nematic liquid-crystal film*, Appl. Phys. Lett., **39**(12), 937-940 (1981).

11. E. Santamato and Y.R. Shen, *Field-curvature effect on the diffraction ring pattern of a laser beam dressed by spatial self-phase modulation in a nematic film*, Opt. Lett., **9**(12) 564-566 (1984).
12. C. Conti, M. Peccianti, and G. Assanto, *Observation of optical spatial solitons in a highly nonlocal medium*, Phys. Rev. Lett., **92**(11), 113902 (2004).
13. M. Peccianti and G. Assanto, *Nematic liquid crystals: A suitable medium for self-confinement of coherent and incoherent light*, Phys. Rev. E, **65**(3), 035603 (2002).
14. A. Alberucci, M. Peccianti, G. Assanto, A. Dyadyusha, and M. Kaczmarek, *Two-color vector solitons in nonlocal media*, Phys. Rev. Lett., **97**(15), 153903 (2006).
15. M. Peccianti, A. Dyadyusha, M. Kaczmarek, and G. Assanto, *Escaping solitons from a trapping potential*, Phys. Rev. Lett., **101**(15), 153902 (2008)
16. J. Beeckman, K. Neyts, X. Hutsebaut, C. Cambournac, M. Haelterman, *Simulations and experiments on self-focusing conditions in nematic liquid-crystal planar cells*, Opt. Express, **12**(6), 1011-1018 (2004).
17. J. Beeckman, K. Neyts, X. Hutsebaut, C. Cambournac, M. Haelterman, *Time dependence of soliton formation in planar cells of nematic liquid crystals*, IEEE J. Quant. Electron., **41**(5), 735-740 (2005).
18. J. F. Henninot, J. F. Blach, M. Warenghem, *The investigation of an electrically stabilized optical spatial soliton induced in a nematic liquid crystal*, J. Opt. A, **10**(8), 085104 (2008).
19. V.F. Kitaeva, A.S. Zolot'ko, and M.I. Barnik, *Orientational optical nonlinearity of absorbing nematics liquid crystals*, Mol. Materials, **12**, 271-293 (2000).
20. С.А. Ахманов, Ю.А. Горохов, Д.П. Криндач, А.П. Сухоруков, Р.В. Хохлов, *Самофокусировка излучения газового лазера непрерывного действия*, ЖЭТФ, **57**, 16 (1969).
21. F.W. Dabby, T.K. Gustafson, J.R. Whinnery, Y. Kohanzadeh, *Thermally self-induced phase modulation of laser beams*, Appl. Phys. Lett., **16**(9), 362-365 (1970).

22. S.A. Akhmanov, R. Khokhlov, A.P. Sukhorukov, *Self-focusing, self-defocusing and self-modulation of laser beams*, In: LaserHandbook, F.T. Arecchi, E.O. Schulz-Dubois, (Eds.), North-Holland, Amsterdam, vol. 2, 1152-1228 (1972).
23. L. N. Binh, X. Dai, and Y. H. Ja, *Laser-induced self-phase modulation in polymeric films*, Appl. Phys. B, **49**, 393-396 (1989).
24. S. Prusty, H. S. Mavi, and A. K. Shukla, *Optical nonlinearity in silicon nanoparticles: Effect of size and probing intensity*, Phys. Rev. B, **71**(11), 113313 (2005)
25. А.С. Золотыко, В.Ф. Китаева, В.А. Куюмчян, Н.Н. Соболев, А.П. Сухоруков, *Светоиндуцированный фазовый переход второго рода в пространственно-ограниченной области НЖК*, Письма в ЖЭТФ, **36**(3), 66-69 (1982).
26. G. Cipparrone, D. Duca, C. Umeton, and N. V. Tabiryan, *Observation of Doppler-like redshift due to light interaction with matter*, Phys. Rev. Lett., **71**(24), 3955-3958 (1993).
27. А.С. Золотыко, В.Ф. Китаева, Н. Кроо, Н.Н. Соболев, А.П. Сухоруков, В.А. Трошкин, Л. Чиллаг, *Незатухающие осцилляции директора НЖК в поле световой волны необыкновенного типа*, ЖЭТФ, **87**(3), 859-864 (1984).
28. А.С. Золотыко, В.Ф. Китаева, *Поляризационные эффекты при ориентационной абберационной самофокусировке в нематических жидких кристаллах*, ЖЭТФ, **91**(1), 131-139 (1986).
29. L. Csillag, N. Eber, I. Janossy, N. Kroo, V.F. Kitaeva, N.N. Sobolev, *Reorientation of liquid crystals by superposed optical and quasistatic electric fields*, Mol. Cryst. Liq. Cryst., **89**, 287-293 (1982).
30. М.А. Barnik, S.A. Kharchenko, V.F. Kitaeva, A.S. Zolot'ko, *Reorientation of director of nematic liquid crystals, doped with azodyes, under light and low-frequency fields*, Mol. Cryst. Liq. Cryst., **375**, 363-372 (2002).
31. S.H. Chen, J.J. Wu, *Observation of first-order Fredericksz transition in a nematic film induced by electric and optical fields*, Appl. Phys. Lett., **52**(23), 1998-2000 (1988).
32. J.J. Wu, G.S. Ong, S.H. Chen, *Observation of optical field induced first-order electric Fredericksz transition and electric bistability in a parallel aligned nematic liquid-crystal film*, Appl. Phys. Lett., **53**(21), 1999-2001 (1988).

33. J.J. Wu, Sh.-H. Chen, *Electric-controlled intrinsic optical bistability in nematic liquid crystals*, J. Appl. Phys., **66**(3), 1065-1070 (1989).
34. А.С. Золотько, М.П. Смаев, В.Ф. Китаева, М.И. Барник, *Обратимые ориентационные переходы первого рода, индуцированные в нематическом жидком кристалле пространственно ограниченным световым пучком и низкочастотным электрическим полем*, Квантовая электроника, **34**(12), 1151-1156 (2004).
35. И.А. Будаговский, А.С. Золотько, В.Ф. Китаева, В.Н. Очкин, М.П. Смаев, М.И. Барник, *Самовоздействие светового пучка в нематических жидких кристаллах в постоянном электрическом поле*, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 24-34 (2006).
36. A.S. Zolot'ko, I.A. Budagovsky, V.F. Kitaeva, V.N. Ochkin, A.V. Shakun, M.P. Smayev, *Orientational interaction of a light beam and NLCs subjected to external DC field*, Mol. Cryst. Liq. Cryst., **454**, 407-414 (2006)
37. Л.Д. Ландау, *Теория упругости*, М., Наука, 1987.
38. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, М., Наука, 1973.
39. A.S. Zolot'ko, I.A. Budagovsky, V.N. Ochkin, M.P. Smayev, A. Yu. Bobrovsky, V.P. Shibaev, N.I. Boiko, A.I. Lysachkov, M.I. Barnik, *Light-induced director reorientation in nematic liquid crystals doped with azobenzene-containing macromolecules of different architecture*, Mol. Cryst. Liq. Cryst., **488**, 265-278 (2008).
40. В.И. Арнольд, *Особенности, бифуркации и катастрофы*, УФН, **141**(4), 569-590 (1983).
41. Ю.А. Кравцов, Ю.И. Орлов, *Каустики, катастрофы и волновые поля*, УФН, **141**(4), 591-627 (1983).
42. Р. Гилмор, *Прикладная теория катастроф*, т. 1, М., Мир, 1984.
43. Т. Постон, И.Стюарт, *Теория катастроф и ее приложения*, М., Мир, 1980.
44. M.V. Berry and C. Upstill, *Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns*, Progress in Optics, vol. XVII, Ed. by E. Wolf, 257-346 (1980).
45. M.V. Berry, *Waves and Thom's theorem*, Adv. Phys., **25**(1), 1-26 (1976).

46. I.A. Budagovsky, V.N. Ochkin, M.P. Smayev, A.S. Zolot'ko, A. Yu. Bobrovsky, N.I. Boiko, A.I. Lysachkov, V.P. Shibaev, and M.I. Barnik, *Interaction of light with a NLC-dendrimer system*, *Liq. Cryst.*, **36**(1), 101-107 (2009).
47. M.I. Barnik, V.F. Kitaeva, A.S. Zolot'ko, *Peculiarities of light-induced memory in NLCs*, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, **391**, 111-122 (2003).
48. E. Ouskova, Yu. Reznikov, S.V. Shiyanovskii, L. Su, J.L. West, O.V. Kuksenok, O. Francescangeli, and F. Simoni, *Photo-orientation of liquid crystals due to light-induced desorption and adsorption of dye molecules on an aligning surface*, *Phys. Rev. E*, **64**(5), 051709 (2001).
49. В.И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. 2, М., Наука, 1974.
50. A.M. Deykoon, M.S. Soskin, G.A. Swartzlander, Jr., *Nonlinear optical catastrophe from a smooth initial beam*, *Opt. Lett.*, **24**(17), 1224-1226 (1999).
51. N.V. Tabiryan, B.Ya. Zel'dovich, M. Kreuzer, T. Vogeler, *Higher-dimensionality caustics owing to competing reorientation of a liquid crystal by laser beams*, *J. Opt. Soc. Am. B*, **13**(7), 1426-1430 (1996).
52. I.A. Budagovsky, A.S. Zolot'ko, V.F. Kitaeva, M.P. Smayev, *Light self-action in NLCs with orientational and thermal nonlinearities*, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, **453**, 71-82 (2006).
53. J.F. Nye, *Rainbow scattering from spheroidal drops—an explanation of the hyperbolic umbilic foci*, *Nature*, **312**, 531-532 (1984).
54. G. Kaduchak, P.L. Marston, *Hyperbolic umbilic and E_6 diffraction catastrophes associated with the secondary rainbow of oblate water drops: observations with laser illumination*, *Appl. Opt.*, **33**(21), 4697-4701 (1994).