

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ**



*имени
П. Н. Лебедева*

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

16

Е. П. ОРЛОВ

**ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-
ВРЕМЕННЫХ ОТНОШЕНИЙ МЕЖДУ
МОДАМИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО
РЕЗОНАТОРА С ПОМОЩЬЮ
КОСОУГОЛЬНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ**

МОСКВА 2009

АННОТАЦИЯ

Показано, что последовательное описание пространственно-временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора, движущимися друг относительно друга, удаётся осуществить, используя косоугольные системы координат в действительном евклидовом пространстве, не используя при этом постулат о постоянстве скорости света и не прибегая к аппарату псевдоевклидовой геометрии. В основу рассмотрения положено лишь то, что образующие эти моды волны в любом месте резонатора и в любом направлении, имеют одну и ту же фазовую скорость, не зависящую от частоты. Обсуждается понятие события в таком резонаторе. В пространствах с косоугольными системами координат, относящимися к движущимся друг относительно друга модам, получены метрические тензоры, связывающие ковариантные и контравариантные координаты события, совместное использование которых оказалось весьма удобным для вывода таких формул, как релятивистские формулы для абберации света, преобразования скорости и т.д. Обсуждается геометрическая интерпретация интервала между событиями при использовании косоугольных систем координат. Обобщение проведённого рассмотрения на случай 4-х мерного резонатора убеждает в естественности и необходимости привлечения, так называемых, дополнительных измерений для обоснования математического описания пространственно-временных отношений реального мира в понятиях псевдоевклидовой геометрии.

ABSTRACT

It is shown that logical description of spatial-temporal ratios between the modes moving relative to each other can be made by using non-orthogonal reference coordinate systems in the real Euclidean space without the use of a principle of constancy of light velocity and avoiding the methods of pseudo Euclidean geometry. The consideration is based on the assumption that the mode forming waves at any place of the cavity and in any direction have the same frequency independent phase velocity. The concept of an event in the cavity is discussed. In the space with oblique coordinates related to the moving modes the metric tensors connecting the covariant and contravariant coordinates have been found. The joint use of such coordinates is very convenient for the derivation of relativistic formulas for light aberration, velocity transformation, etc. The geometrical interpretation of the interval between the events for the case of oblique coordinates is presented. The application of the given consideration to the case of 4-dimensional cavity proves that it is natural and necessary to make extra dimensions for the substantiation of mathematical description of spatial-temporal ratios in the real world within the framework of pseudo Euclidean geometry.

1. Введение

В работе [1] были рассмотрены пространственно временные отношения между модами резонатора, образованного плоскопараллельными бесконечными зеркалами. В основу рассмотрения было положено лишь то, что пространство внутри резонатора однородное, изотропное и не обладает дисперсией, то есть волны любого направления и любой частоты, распространяющиеся в резонаторе в любом месте, имеют одну и ту же фазовую скорость. Этих предположений оказалось достаточно для того, чтобы показать, что между модами резонатора, которые движутся друг относительно друга, имеют место пространственно временные отношения, подчиняющиеся преобразованиям Лоренца. Более того, проведённое в [1] рассмотрение позволяет понять, почему скорость света не зависит от того, из какой инерциальной системы наблюдается световая волна. Было также показано, что описание пространственно-временных отношений между модами резонатора можно проводить в действительном пространстве, особенностью которого является то, что системы отсчета в нем, связанные с движущимися друг относительно друга модами, являются косоугольными. В настоящей работе проанализированы метрические соотношения такого косоугольного пространства и некоторые следствия, которые из них вытекают. Чтобы не отсылать читателя к работе [1] автор посчитал целесообразным разделы 2. – 5. настоящей работы посвятить подробному изложению содержания работы [1].

2. Частота моды резонатора в зависимости от скорости её движения поперек оси резонатора

Пусть имеется резонатор с плоскими параллельными бесконечными зеркалами. Пространство в резонаторе предполагаем однородным, изотропным и не обладающим дисперсией. Обозначим оси координат в плоскости зеркал резонатора, как Ox и Oy , а ось перпендикулярную зеркалам, как Oz . На рис.1. ось Oy перпендикулярна плоскости рисунка и поэтому не видна. Рассмотрим в таком резонаторе моду с определенным продольным индексом q . Будем сначала считать, что она образована плоскими волнами, распространяющимися перпендикулярно к поверхностям зеркал.

Условие резонанса для такой моды, как известно [2, 3], имеет вид

$$k(0)2L = 2\pi q, \quad (1)$$

где $k(0)$ - волновое число, L - расстояние между зеркалами. Итак $k(0) = \pi q/L$.

Рассмотрим теперь моды с таким же продольным индексом, но которые образованы плоскими волнами, одна из которых «прямая» распространяется под некоторым углом α к оси резонатора Os , а другая «обратная» распространяется под углом $\pi - \alpha$ к оси резонатора, рис.1. Для таких мод условие резонанса имеет вид:

$$2Lk(\alpha)\cos\alpha = 2\pi q, \quad (2)$$

где $k(\alpha)$ - волновое число волны, распространяющейся под углом α к оси Os . Следовательно,

$$k(\alpha) = \pi q / L \cos\alpha = \frac{k(0)}{\cos\alpha}. \quad (3)$$

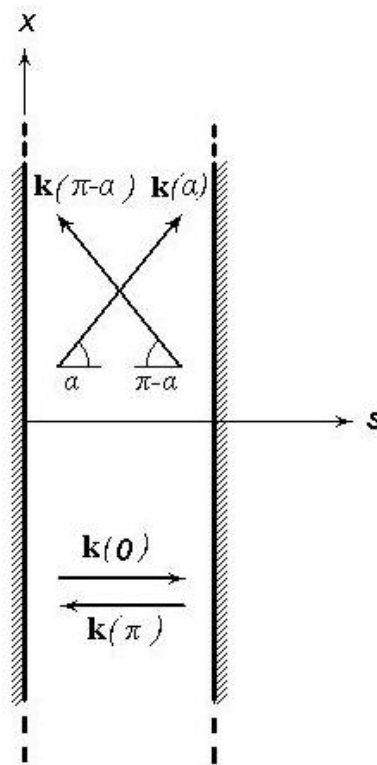


Рис.1.

Пусть волновые вектора «прямой» и «обратной» волн, распространяющихся под углом α и $\pi - \alpha$ к оси резонатора, лежат в плоскости Oxs . Тогда проекция волнового вектора на ось Oy равна нулю, а его модуль

$$k(\alpha) = \sqrt{k_x^2(\alpha) + k_s^2(\alpha)}, \quad (4)$$

где $k_x(\alpha)$ и $k_s(\alpha)$ - проекции волновых векторов «прямой» и «обратной» волн на оси Ox и Os , соответственно. Отметим, что проекции волновых векторов

этих волн на ось Oz равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Так как по предположению пространство в резонаторе изотропное и однородное, и не обладает дисперсией, то между частотой и волновым числом должна существовать связь вида:

$$\omega(\alpha) = ck(\alpha), \quad (5)$$

где c - постоянная, имеющая смысл фазовой скорости волны. С учетом этого соотношения можем написать, что

$$\omega(\alpha) = \omega(0)/\cos \alpha. \quad (6)$$

Так как частота моды зависит от поперечной составляющей волнового вектора, то можно найти поперечную групповую скорость прямой или обратной волны данной моды. В рассматриваемом случае имеется только составляющая скорости по оси Ox . Тогда групповая скорость вдоль этой оси

$$u(\alpha) = \frac{\partial \omega}{\partial k_x(\alpha)} = c \frac{\partial k(\alpha)}{\partial k_x(\alpha)} = c \frac{\partial}{\partial k_x(\alpha)} \sqrt{k_x^2(\alpha) + k^2(0)} = c \frac{k_x(\alpha)}{\sqrt{k_x^2(\alpha) + k^2(0)}}. \quad (7)$$

Итак, получили, что

$$u(\alpha) = c \frac{k_x(\alpha)}{k(\alpha)} = c \sin \alpha, \quad (8)$$

или

$$\sin \alpha = \frac{k_x}{k} = \frac{u}{c}. \quad (9)$$

Таким образом, движению вдоль оси Ox со скоростью u могут быть сопоставлены волны, распространяющиеся в резонаторе под углом α и $\pi - \alpha$ к оси резонатора Oz и образующие рассматриваемую моду резонатора. Частота (или же волновое число) этих волн может быть выражено через скорость движения как

$$\omega(\alpha) = \frac{\omega(0)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad k(\alpha) = \frac{k(0)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (10)$$

Если взять стоячую моду, то есть моду, образованную волнами, распространяющимися перпендикулярно зеркалам резонатора, и двигаться поперек резонатора со скоростью u , то такая зависимость частоты моды от скорости движения возникает вследствие поперечного эффекта Доплера [4].

Отметим (несмотря на критические замечания Л.Б.Окуня [5], касающиеся понятия релятивистской массы частицы), что связь частоты моды со скоростью

ее движения такая же, как связь массы m движущегося тела с его массой покоя m_0 и скоростью движения u . Если под $k(0)$ понимать комптоновское волновое число частицы, связанное с её комптоновской длиной волны $\Lambda = 2\pi\hbar / m_0c$ [6] соотношением $k(0) = 2\pi / \Lambda$, а под $k(\alpha)$ понимать импульс частицы, измеренный в единицах \hbar , то связь между массой и скоростью сразу же получается из предыдущего рассмотрения

$$\frac{mc}{\hbar} = \frac{\frac{m_0c}{\hbar}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (11)$$

или же [7]

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (12)$$

3. Время жизни моды в зависимости от скорости её движения

Предположим теперь, что зеркала резонатора не стопроцентные (как будет видно из дальнейшего, это предположение не является необходимым, оно играет хотя и важную, но вспомогательную роль). Тогда мода будет обладать определенным временем жизни. Под временем жизни моды мы будем понимать время, за которое амплитуда волн данной моды уменьшается по сравнению с первоначальным значением в определенное, заданное число раз.

Итак, пусть для покоящейся моды время жизни Δt_0 . Тогда понятно, что мода, образованная волнами, распространяющимися под углом к оси резонатора, то есть движущаяся мода, будет жить в резонаторе дольше, так как волны реже отражаются от зеркал резонатора, поскольку им приходится преодолевать большее расстояние от одного отражения до другого. Предположим далее, что коэффициенты отражения зеркал не зависят от углов падения волн на зеркала.

Для ответа на вопрос во сколько раз увеличится время жизни движущейся моды по сравнению с временем жизни покоящейся моды, то есть моды, образованной волнами с волновыми векторами перпендикулярными плоскостям зеркал резонатора, найдем продольную групповую скорость, то есть скорость волны вдоль оси резонатора:

$$u_s(\alpha) = \frac{\partial \omega}{\partial k(0)} = c \frac{\partial k(\alpha)}{\partial k(0)} = c \frac{\partial}{\partial k(0)} \sqrt{k_x^2(\alpha) + k^2(0)} = c \frac{k(0)}{\sqrt{k_x^2(\alpha) + k^2(0)}}. \quad (13)$$

Итак, видно, что

$$u_s(\alpha) = c \cdot \cos \alpha = c \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (14)$$

Понятно, что время жизни движущейся моды будет

$$\Delta t(\alpha) = \Delta t_0 \frac{u_s(0)}{u_s(\alpha)} = \frac{\Delta t_0}{\cos \alpha} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (15)$$

Из формулы (15) видно, что движущаяся мода живет дольше и тем дольше, чем больше скорость ее движения. С другой стороны понятно, что если двигаться поперек оси резонатора вдоль оси Ox со скоростью движения моды, то волны, образующие моду резонатора будут распространяться перпендикулярно зеркалам и время жизни моды снова уменьшится до величины, равной Δt_0 .

Отметим, что полученная зависимость времени жизни моды от скорости движения такая же, как и в теории относительности для тел, движущихся со скоростью u вдоль оси Ox . Величина Δt_0 , как известно [4], называется собственным временем движущегося объекта – в данном случае собственным временем жизни моды.

Если моду резонатора не делить на «прямую» и «обратную» волны, а рассматривать как одну волну, претерпевающую ряд последовательных отражений от зеркал резонатора, то можно сказать, что время жизни моды зависит от числа отражений волны, образующей данную моду, от зеркал резонатора. Для того чтобы амплитуда волны, образующей движущую моду, упала в такое же число раз, что и амплитуда волны, образующей покоящуюся моду, число отражений от зеркал резонатора должно быть одинаковым для обеих волн. Но для волны, распространяющейся под углом к оси резонатора, чем больше угол α , то есть чем больше скорость движения моды поперек оси резонатора, тем больший путь требуется пройти волне при движении от зеркала к зеркалу, чтобы набрать такое же число отражений, что и волна, которая распространяется вдоль оси резонатора. Таким образом, время жизни моды пропорционально пути, который проходит волна при многократном отражении от зеркал до того момента пока ее амплитуда не упадет до заданного уровня по отношению к первоначальному значению амплитуды.

Сделанное утверждение можно наглядно изобразить следующим образом. Для этого рассмотрим две моды – покоящуюся и движущуюся. Если зеркала резонатора заменить поглощающими перегородками, расположенными на расстоянии L друг от друга как это, обычно, делается в оптике, то для каждой из рассматриваемых мод можно вместо волны, претерпевающей многократные от-

ражения от зеркал резонатора, рассматривать волну, распространяющуюся, например, в положительном направлении оси Os и претерпевающую поглощение при прохождении каждой из перегородок.

Выберем у каждой из волн, отвечающих покоящейся и движущейся модам резонатора, некоторую фазовую поверхность. Эти две фазовые поверхности представляют собой две пересекающиеся плоскости, рис.2,а. Угол между этими плоскостями равен углу α . Свяжем с каждой из этих фазовых поверхностей систему координат. С той, которая отвечает покоящейся моде - $Oxys$, а с поверхностью, которая отвечает движущейся моде - $O^*x^*y^*s^*$. Совместим начала координат этих систем отсчета, а оси Oy и O^*y^* направим вдоль линии пересечения поверхностей, рис.2,б. При этом координата y^* любой точки в «развернутом» пространстве резонатора будет равна координате y этой точки. Начало координат обозначим как O^* .

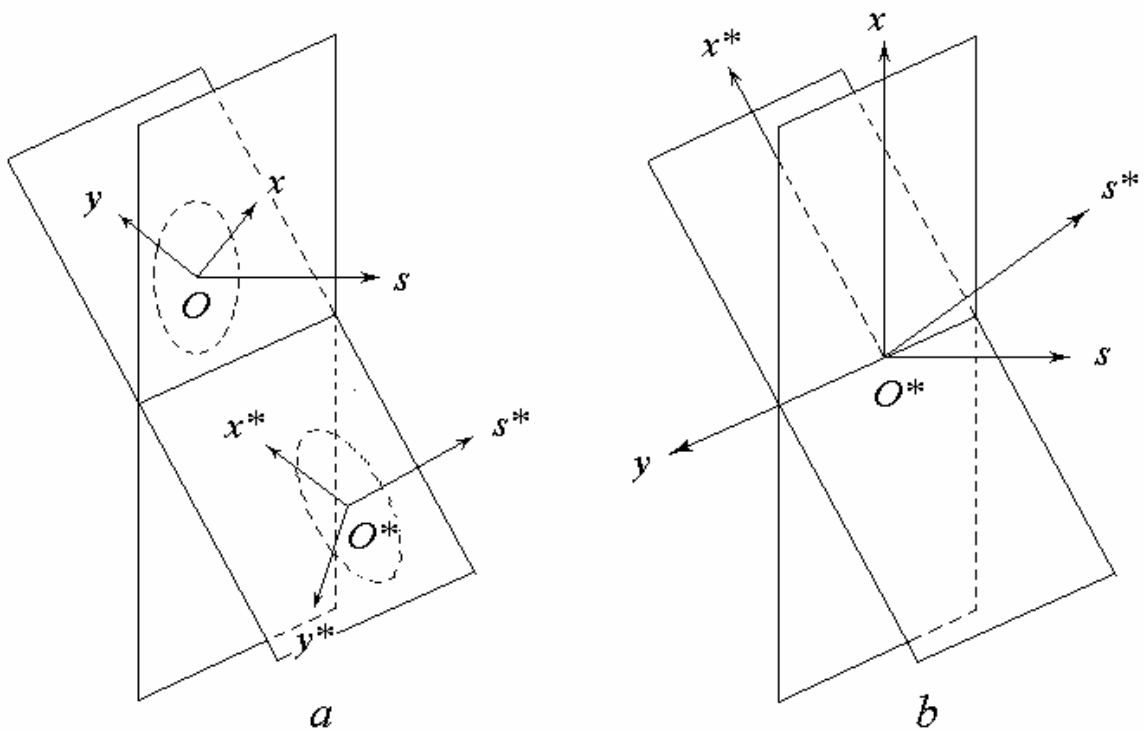


Рис.2.

Выберем на рис.2,б плоскость, совпадающую с плоскостью, в которой лежат оси O^*s , Os^* , O^*x , Ox^* . Изображение на рис.3 построено в этой плоскости. Отложим вдоль оси O^*s отрезок прямой O^*A , кратный длине резонатора с

кратностью равной числу отражений (или, что то же самое пересечений поглощающих перегородок) волны, образующей покоящуюся моду, от зеркал резонатора. Вдоль оси O^*s^* также отложим отрезок такой длины, чтобы число отражений от зеркал волны, образующей движущуюся моду было таким же, как и в случае неподвижной моды. Это отрезок O^*M . Он отвечает точке фазовой поверхности с координатой $x^* = 0$. Из рисунка видно, что время жизни движущейся моды, пропорциональное длине этого отрезка l , выражается через длину отрезка $O^*A = l_0$, которая отвечает собственному времени жизни моды, по формуле

$$l = \frac{l_0}{\cos \alpha} = \frac{l_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (16)$$

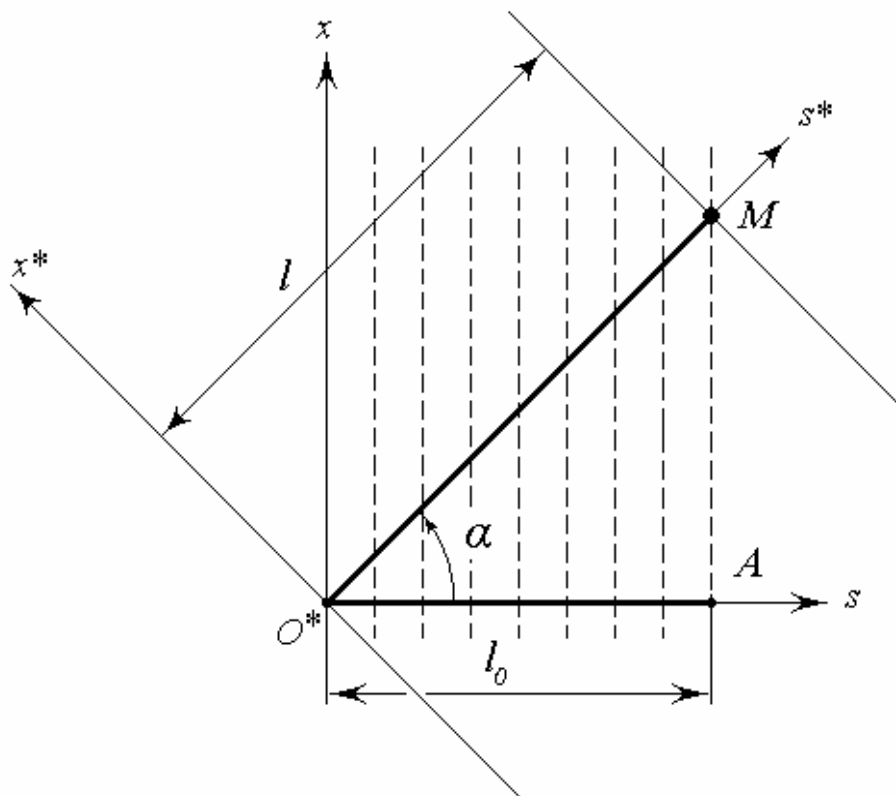


Рис.3.

4. Понятие события в пространстве резонатора, его пространственные и временные координаты

Отвлечемся теперь от числа отражений волн от зеркал резонатора, и будем называть систему отсчета, связанную с покоящейся модой неподвижной системой отсчета. Систему отсчета, связанную с движущейся модой будем называть

движущейся системой отсчета. В неподвижной системе отсчета отложим по оси O^*s отрезок прямой O^*A длиной равной расстоянию l_0 , которое волна проходит до тех пор, пока ее амплитуда не уменьшится в заданное число раз, рис.4.

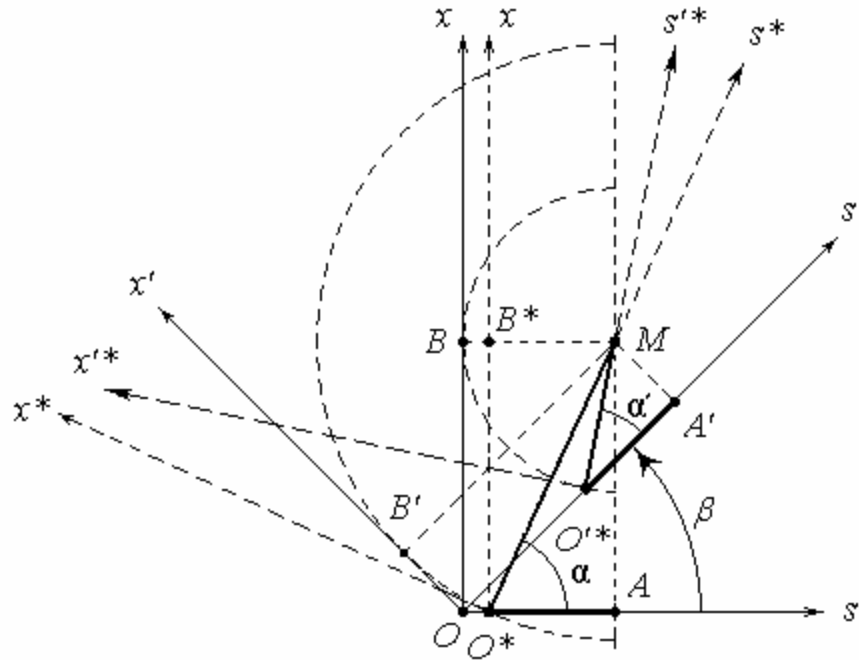


Рис.4.

Затем из точки A восстановим перпендикуляр до пересечения с осью O^*s' в точке M . При этом амплитуда волны, отвечающей движущейся моде, при распространении от начала координат до этой точки уменьшается в такое же число раз, что и амплитуда волны, отвечающей покоящейся моде. Этот факт, как мы видели, позволяет определить время жизни движущейся моды, если известно время жизни покоящейся моды, что в свою очередь позволяет охарактеризовать точку M не только пространственными, но и временными координатами.

Действительно, её пространственную координату x в неподвижной системе отсчета можно определить как проекцию точки M на ось Ox . Временная же координата определяется по расстоянию l , которое проходит волна, отвечающая движущейся моде, от начала координат до точки M .

В движущейся системе отсчета её пространственная координата равна нулю, а временная координата определяется по расстоянию l_0 , которое проходит волна, отвечающая неподвижной моде, от начала координат до точки M . Видно, что l и l_0 , а, следовательно, t и t_0 будут связаны друг с другом по приведенной

выше формуле. Таким образом, рассматриваемую точку M в «развернутом» пространстве резонатора можно трактовать как событие.

Подчеркнём, что понятие события в проводимом рассмотрении неотъемлемо связано с теми изменениями, которые претерпевают распространяющиеся в резонаторе волны. В отсутствие волн трактовать точку развернутого пространства резонатора как событие не представляется возможным. Так в данном примере, говоря о точке M как о событии, мы видим, что в выбранной на рис.2,b плоскости она является точкой пересечения фазовых поверхностей двух волн, каждая из которых при распространении от начала координат до точки пересечения испытывает одинаковое уменьшение амплитуды.

Зададимся теперь вопросом, как определить пространственные и временные координаты произвольно взятого события, то есть точки M , выбранной в «развернутом» пространстве резонатора произвольным образом? Заметим, что для ответа на этот вопрос мы можем рассмотреть ту же точку M на рис.4, но определять её координаты по отношению к системе координат, связанной с некоторой третьей волной.

Итак, пусть теперь в «развернутом» пространстве резонатора распространяется третья волна под углом β к оси резонатора и пусть ее волновой вектор лежит в той же плоскости, что и волновые вектора уже рассмотренных волн. Ниже для краткости волну, распространяющуюся под углом α к оси резонатора, будем называть второй волной, а волну покоящейся моды – первой волной. Третья волна отвечает моде, движущейся со скоростью $V = c \sin \beta$, причем, вектор скорости \mathbf{V} направлен вдоль оси O^*x либо в ее положительном, либо отрицательном направлении. Будем обозначать координатные оси системы отсчета, связанной с этой модой, как $O'x', O'y', O's'$. Эти оси ориентированы так, что плоскость $O'x's'$ совпадает с плоскостями O^*xs и $O^*x^*s^*$, а угол между осями $O's'$ и O^*s равен углу β . По отношению к этой новой системе отсчета вторая волна распространяется под углом $\alpha' \neq \alpha$.

Поставленный вопрос будет теперь звучать так. Как определить пространственную координату x' точки M и временную координату $t' = l'/c$, которая в неподвижной системе отсчёта имеет координаты x и $t = l/c$? Чтобы ответить на этот вопрос необходимо определить единое начало отсчета для систем координат $O'x's'$ и O^*xs . Чтобы значения x и l не поменялись, единое начало систем координат O должно быть выбрано так, как показано на рис.4. То есть, во-

первых, расстояние между точками B' и M должно равняться l . Это условие совместно с условием, что угол между осями $O'x'$ и O^*s равен β , задает направление и положение оси $O'x'$. Во-вторых, чтобы не поменялось значение x единое начало отсчета O должно лежать на пересечении оси $O'x'$ и продолжения оси O^*s .

Расстояние, которое проходит вторая волна при наблюдении из системы отсчета, связанной с третьей волной, как видно из рисунка, определяется длиной отрезка O^*M , которая равна длине отрезка $BM = l'$. При этом уменьшение её амплитуды останется прежним, что следует из равенства отрезков O^*A и O'^*A' , которое доказывается следующим образом: во-первых, из треугольников O^*MA , O'^*MA' видно, что $(O^*A)^2 = (O^*M)^2 - (OB)^2$ и $(O'^*A')^2 = (O'^*M)^2 - (OB')^2$; во-вторых, из треугольников OMA , OMA' и равенств $O^*M = OA'$, $O'^*M = OA$ имеем $(O'^*M)^2 + (OB)^2 = (O^*M)^2 + (OB')^2$ или $(O^*M)^2 - (OB)^2 = (O'^*M)^2 - (OB')^2$, откуда и следует равенство $O^*A = O'^*A'$.

Приведём ещё один рисунок, иллюстрирующий преобразование координат события M в случае, когда вектор скорости относительного движения \mathbf{V} направлен в отрицательном направлении оси Ox , рис.5. Это соответствует отрицательному значению угла β . Отметим ещё раз равенство отрезков O^*A и O'^*A' . Ниже в разделе 10 будет показано также, что связь углов α и α' описывается релятивистскими формулами для аберрации света. Из рис.3, рис.4 и рис.5 мы видим, что при переходе к системе координат, связанной с движущейся модой меняется как пространственная, так и временная координата точки M .

В рафинированном виде приведенные выше рассуждения можно наглядно представить следующим образом (соответствующие им построения представлены на рис.6). Возьмем две системы координат $Oxys$ и $Ox'y's'$ с единым началом в точке O с совпадающими осями Oy и Oy' , и, повернутые друг относительно друга на угол β вокруг этих совпадающих осей. Эти системы координат будем характеризовать единичными базисными векторами $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_s$ и $\mathbf{i}'_x, \mathbf{i}'_y, \mathbf{i}'_s$, соответственно, причём $\mathbf{i}'_y = \mathbf{i}_y$.

Возьмем некоторую точку M и опустим из нее перпендикуляры на координатные оси систем отсчета. Нас в первую очередь будут интересовать проекции этих перпендикуляров на плоскость, проходящую через оси Os, Os' (они

Таким образом, пространственными координатами x, y произвольного события при наблюдении из неподвижной системы координат являются проекции точки M , на плоскость волнового фронта волны, образующей неподвижную моду. Временная координата определяется расстоянием l , которое волна движущейся моды проходит до этой точки. И, наоборот, пространственными координатами x', y' этого события при наблюдении из движущейся системы координат являются проекции точки M , на плоскость волнового фронта движущейся моды. Временная координата определяется расстоянием l' , которое волна покоящейся моды проходит до этой точки. Точка O отвечает событию с координатами $x = x' = l = l' = 0$.

Возвращаясь к рис.4 и рис.5 и, учитывая, что $O^*M = l = ct$, $OB = x$, $O^*M = l' = ct'$, $OB' = x'$ видим, что равенство квадратов длин отрезков прямых O^*A и O'^*A' можно записать теперь в виде $l^2 - x^2 = l'^2 - x'^2$ или $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$. Таким образом, длина, как отрезка O^*A , так и отрезка O'^*A' представляет собой величину, которая, как известно [4], называется интервалом между событиями (в данном случае между событиями O и M), а сами эти отрезки прямых можно рассматривать как геометрическую интерпретацию интервала между этими событиями. Из всего предыдущего рассмотрения понятно, что инвариантность интервала тесно связана с резонансным условием (1), то есть с инвариантностью проекции векторов рассматриваемого пространства на ось резонатора.

Отметим, что временные координаты события, определённые описанным выше способом, не зависят от коэффициентов отражения зеркал резонатора и, следовательно, предположение о том, что они не стопроцентные не является необходимым.

5. Формулы преобразования координат события

Выясним, как связаны между собой координаты x, l, x', l' . Из рис.6,b видно, что

$$x' = OB' = OC' - C'B' = \frac{OB}{\cos \beta} - B'M \operatorname{tg} \beta = \frac{x}{\cos \beta} - l \operatorname{tg} \beta.$$

Аналогично

$$l' = BM = C'M - C'B = \frac{B'M}{\cos \beta} - OB \operatorname{tg} \beta = \frac{l}{\cos \beta} - x \operatorname{tg} \beta.$$

Таким образом,

$$x' = \frac{x - l \sin \beta}{\cos \beta}; \quad l' = \frac{l - x \sin \beta}{\cos \beta}. \quad (17)$$

Нетрудно видеть с учетом формул $\sin \beta = V/c$, $\cos \beta = \sqrt{1 - V^2/c^2}$, $l = ct$, $l' = ct'$, что формулы (17) являются формулами преобразованиями Лоренца

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (17a)$$

Обратные преобразования получаются таким же образом, что и прямые. Действительно $x = OB = OC + CB$. Так как $OC = OB'/\cos \beta = x'/\cos \beta$, а

$CB = BM \operatorname{tg} \beta = l' \operatorname{tg} \beta$, то $x = \frac{x'}{\cos \beta} + l' \operatorname{tg} \beta$. Далее, $l = B'M = B'C + CM$. Так

как $B'C = OB' \operatorname{tg} \beta = x' \operatorname{tg} \beta$, а $CM = BM/\cos \beta = l'/\cos \beta$, то $l = \frac{l'}{\cos \beta} + x' \sin \beta$.

В результате имеем формулы выражающие x, l через x', l' :

$$x = \frac{x' + l' \sin \beta}{\cos \beta}; \quad l = \frac{l' + x' \sin \beta}{\cos \beta}. \quad (18)$$

Это обратное преобразование. Оно также совпадает с обратным преобразованием Лоренца.

6. Ковариантные и контравариантные координаты события

Итак, мы видим, что проекция точки M на ось Os' определяет время события, отвечающего этой точке, в системе координат, связанной с неподвижной модой. И, наоборот, проекция точки M на ось Os определяет время рассматриваемого события в системе координат, связанной с движущейся модой. Поэтому ось Os' будем обозначать также как Ol , а Os - как Ol' . В зависимости от рассматриваемой задачи мы будем пользоваться либо системами Oxs' , $Ox's$, либо Oxl , $Ox'l'$. Если использовать последние две системы, то рис.6,b принимает вид, представленный на рис.7, из которого видно, что системы отсчёта Oxl и $Ox'l'$ являются косоугольными системами координат. Таким образом, пространственные и временные координаты события (точки M) определяются в косоугольных системах координат Oxl и $Ox'l'$. Будем характеризовать их базисными векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_l$ и $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_l$, соответственно, ($\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}_y$).

Проведём из начала координат в точку M радиус-вектор \mathbf{R} . Рассмотренные выше координаты точки M в системах Ox^l и Ox'^l , как будет показано ниже, можно рассматривать как ковариантные. В дальнейшем ковариантные координаты будем обозначать подчеркиванием снизу. Контравариантными компонентами радиус-вектора \mathbf{R} (контравариантными координатами события M), которые будем обозначать чертой сверху, являются параллельные проекции отрезка OM на координатные оси.

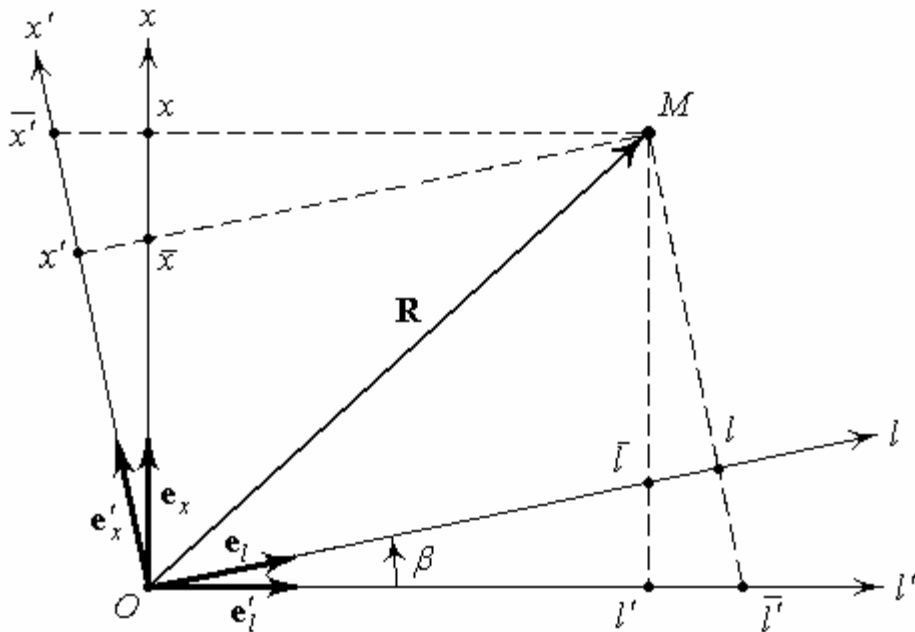


Рис.7.

Мы покажем сейчас, что в рассматриваемых косоугольных системах ортогональные проекции радиус-вектора \mathbf{R} на координатные оси численно совпадают с ковариантными координатами, определяемыми как параллельные проекции этого вектора на, так называемые, взаимные оси, которые определяются векторами $\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^y, \mathbf{e}^l$, связанными с векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_l$ следующим образом:

$$\mathbf{e}^x = \frac{\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_l}{[\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_l]}; \quad \mathbf{e}^y = \frac{\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_x}{[\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_l]}; \quad \mathbf{e}^l = \frac{\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y}{[\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_l]}, \quad (19)$$

где $[\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_l] \equiv \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_l)$ - смешанное (векторно-скалярное) произведение.

Контравариантные координаты векторов $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_l$ в рассматриваемой системе равны: $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_l = (0, 0, 1)$. Важно отметить, что их

длины в общем случае отличны от единицы. Как разъясняет Паули [8], хотя длина вектора измеряется единым масштабом во всех координатных системах, проекции его на оси, вообще говоря, даже для разных осей одной и той же системы координат будут измеряться различными масштабами.

Чтобы показать это найдём связь базисных векторов $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_l$ с базисными векторами $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_s$. Для этого надо определить компоненты метрического тензора пространства неподвижной моды. Выразим координаты точки M , определенные в декартовой прямоугольной системе координат $Oxys$, через контравариантные координаты этой точки в системе $Oxyl$. Из рис.8 видно, что

$$\bar{x} = x - s \operatorname{tg} \beta, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{l} = s / \cos \beta. \quad (20)$$

Обратно,

$$x = \bar{x} + \bar{l} \sin \beta, \quad y = \bar{y}, \quad s = \bar{l} \cos \beta. \quad (21)$$

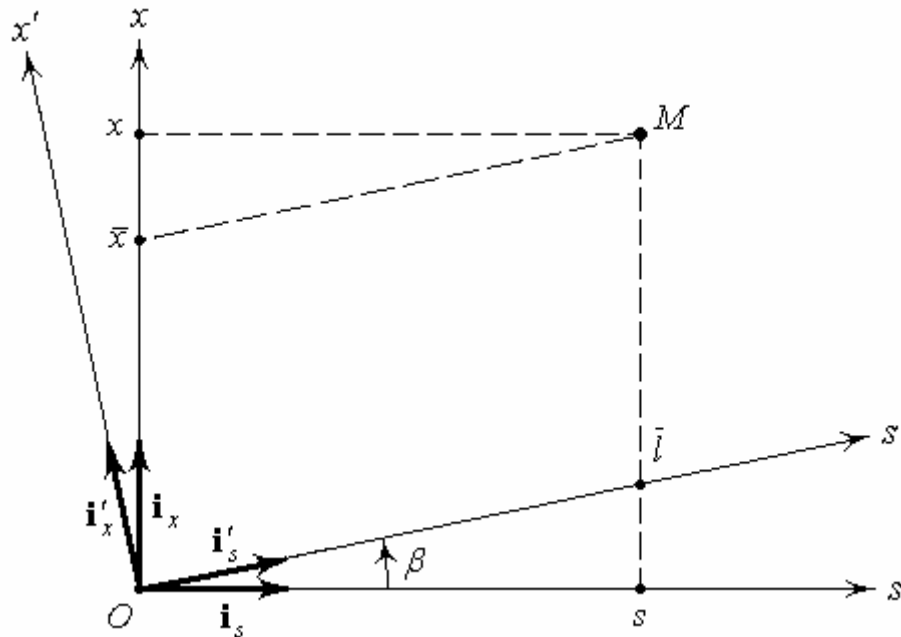


Рис.8.

Как известно [9], компоненты метрического тензора в этом случае находятся следующим образом

$$g_{xx} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} = 1, \quad (22)$$

$$g_{xl} = g_{lx} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial l} = \sin \beta, \quad (23)$$

$$g_{ll} = \frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial s}{\partial l} \frac{\partial s}{\partial l} = 1, \quad (24)$$

$$g_{xy} = g_{yx} = g_{yl} = g_{ly} \equiv 0, \quad g_{yy} = 1. \quad (25)$$

Поскольку вращение системы координат осуществляется вокруг оси Oy , то в дальнейшем будет достаточно рассматривать только первые его четыре компоненты, и, говоря о метрическом тензоре, будем подразумевать тензор, составленный из этих четырёх компонент.

Итак, поскольку $g_{xx} = g_{ll} = 1$, $\mathbf{e}_x \equiv \sqrt{g_{xx}} \mathbf{i}_x \equiv \mathbf{i}_x$, $\mathbf{e}_l \equiv \sqrt{g_{ll}} \mathbf{i}'_s \equiv \mathbf{i}'_s$, $\mathbf{e}_y \equiv \mathbf{i}_y$.

Детерминант метрического тензора $g = \cos^2 \beta$. Поэтому $[\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_l] = \sqrt{|g|} = \cos \beta$

и

$$\mathbf{e}^x = \frac{\mathbf{i}_y \times \mathbf{i}'_s}{\cos \beta}; \quad \mathbf{e}^y = \frac{\mathbf{i}'_s \times \mathbf{i}_x}{\cos \beta}; \quad \mathbf{e}^l = \frac{\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y}{\cos \beta}. \quad (26)$$

Эти базисные векторы и определяемые ими оси, как уже говорилось, называются взаимными к векторам \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_l и определяемым ими осям. Эти вектора показаны на рис.9. Видно, что они задают на соответствующих осях координат другой по сравнению с векторами \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_l масштаб измерения.

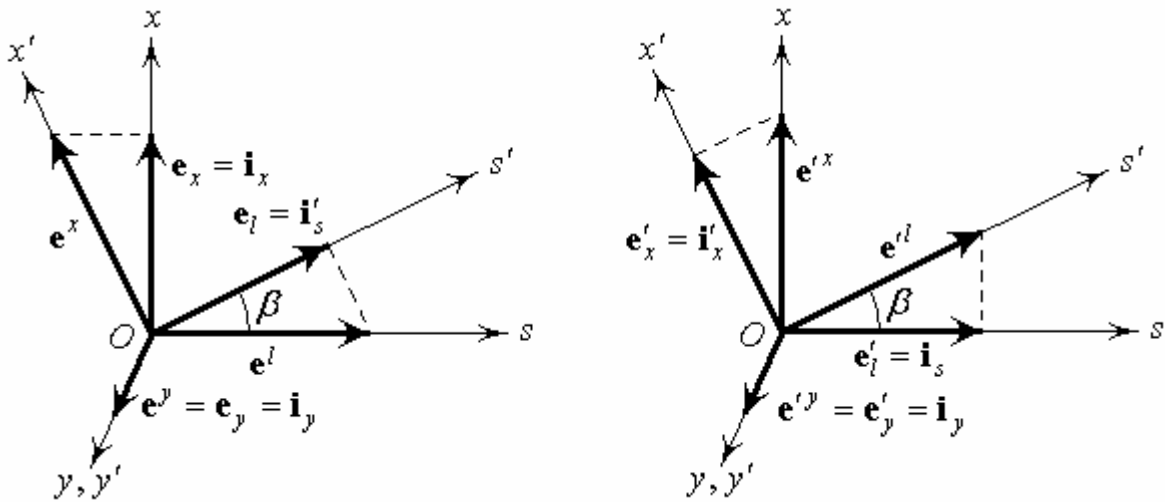


Рис.9.

Метрический тензор позволяет выразить ковариантные координаты через контравариантные координаты

$$\underline{x} = \bar{x}g_{xx} + \bar{l}g_{lx}, \quad \underline{l} = \bar{x}g_{xl} + \bar{l}g_{ll} \quad (27)$$

или

$$\underline{x} = \bar{x} + \bar{l} \sin \beta, \quad \underline{l} = \bar{x} \sin \beta + \bar{l}. \quad (27a)$$

Подставляя в (27a) \bar{x} и \bar{l} из (20), получаем, что $\underline{x} = x$. Из второй же формулы (27a) и рис.7 видно, что $\underline{l} = l$. Таким образом, ковариантные координаты точки M численно равны ортогональным проекциям радиус-вектора \mathbf{R} на оси Ox и Ol . Это, как уже говорилось, связано с тем, что масштаб по осям, определяемым взаимными базисными векторами $\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^y, \mathbf{e}^l$ в $1/\cos \beta$ раз крупнее, чем по осям, определяемым базисными векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_l$.

Это видно также из выражений для компонент контравариантного метрического тензора, которые теперь легко получить из (22) – (25) по известному правилу [9]. Они равны

$$g^{xx} = \frac{1}{\cos^2 \beta}, \quad g^{xl} \equiv g^{lx} = -\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad g^{ll} = \frac{1}{\cos^2 \beta}. \quad (28)$$

Как и положено произведение ковариантного и контравариантного тензоров дает единичный тензор. С помощью контравариантного тензора контравариантные координаты точки M можно выразить через ковариантные компоненты

$$\bar{x} = \underline{x}g^{xx} + \underline{l}g^{lx}, \quad \bar{l} = \underline{x}g^{xl} + \underline{l}g^{ll} \quad (29)$$

или

$$\bar{x} = \frac{\underline{x} - \underline{l} \sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad \bar{l} = \frac{\underline{l} - \underline{x} \sin \beta}{\cos^2 \beta}. \quad (29a)$$

Рассмотрим теперь метрический тензор пространства движущейся моды. Для определения его компонент можно взять либо декартову систему $Oxys$, либо $Ox'y's'$. В первой системе

$$x = \bar{x}' \cos \beta; \quad s = \bar{l}' - \bar{x}' \sin \beta, \quad (30)$$

и компоненты метрического тензора будут такими

$$g'_{xx} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial s}{\partial x'} = 1; \quad (31)$$

$$g'_{xl} = g'_{lx} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial l'} + \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial s}{\partial l'} = -\sin \beta, \quad (32)$$

$$g'_{ll} = \frac{\partial x}{\partial l'} \frac{\partial x}{\partial l'} + \frac{\partial s}{\partial l'} \frac{\partial s}{\partial l'} = 1. \quad (33)$$

Мы видим, что в штрихованной системе координат диагональные компоненты метрического тензора противоположны по знаку диагональным компонентам метрического тензора в не штрихованной системе координат.

Во второй системе координат

$$\underline{x}' = \bar{x}' - \bar{l}' \sin \beta; \quad \underline{s}' = \bar{l}' \cos \beta \quad (34)$$

и компоненты метрического тензора

$$\begin{aligned} g'_{xx} &= \frac{\partial \underline{x}'}{\partial \bar{x}'} \frac{\partial \underline{x}'}{\partial \bar{x}'} + \frac{\partial \underline{s}'}{\partial \bar{x}'} \frac{\partial \underline{s}'}{\partial \bar{x}'} = 1; \\ g'_{xl} &= g'_{lx} = \frac{\partial \underline{x}'}{\partial \bar{x}'} \frac{\partial \underline{x}'}{\partial \bar{l}'} + \frac{\partial \underline{s}'}{\partial \bar{x}'} \frac{\partial \underline{s}'}{\partial \bar{l}'} = -\sin \beta, \\ g'_{ll} &= \frac{\partial \underline{x}'}{\partial \bar{l}'} \frac{\partial \underline{x}'}{\partial \bar{l}'} + \frac{\partial \underline{s}'}{\partial \bar{l}'} \frac{\partial \underline{s}'}{\partial \bar{l}'} = 1 \end{aligned}$$

в точности такие же, как и в первой декартовой системе координат.

Компоненты контравариантного метрического тензора в штрихованной системе координат, соответственно, будут иметь вид

$$g'^{xx} = \frac{1}{\cos^2 \beta}, \quad g'^{xl} \equiv g'^{lx} = \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad g'^{ll} = \frac{1}{\cos^2 \beta}. \quad (35)$$

Ковариантные координаты в штрихованной системе координат выражаются через контравариантные координаты по формулам

$$\underline{x}' = \bar{x}' g'_{xx} + \bar{l}' g'_{lx}, \quad \underline{l}' = \bar{x}' g'_{xl} + \bar{l}' g'_{ll} \quad (36)$$

или

$$\underline{x}' = \bar{x}' - \bar{l}' \sin \beta, \quad \underline{l}' = -\bar{x}' \sin \beta + \bar{l}'. \quad (37)$$

Соответственно, контравариантные координаты выражаются через ковариантные координаты по формулам

$$\bar{x}' = \frac{\underline{x}' + \underline{l}' \sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad \bar{l}' = \frac{\underline{x}' \sin \beta + \underline{l}'}{\cos^2 \beta}. \quad (38)$$

Сравнивая первую формулу в (37) с первой формулой в (34) видим, что $\underline{x}' = x'$. Из второй же формулы (37) и рис.7 находим, что $\underline{l}' = l'$. Таким образом, также как и в случае системы координат, связанной с неподвижной модой, ковариантные координаты точки M численно равны ортогональным проекциям радиус-вектора \mathbf{R} на координатные оси (теперь это оси Ox' и Ol'). В соответствии с вышесказанным на рис.7 сделаем замены $x \rightarrow \underline{x}$, $l \rightarrow \underline{l}$, $x' \rightarrow \underline{x}'$, $l' \rightarrow \underline{l}'$. Результат этих замен показан на рис.10.

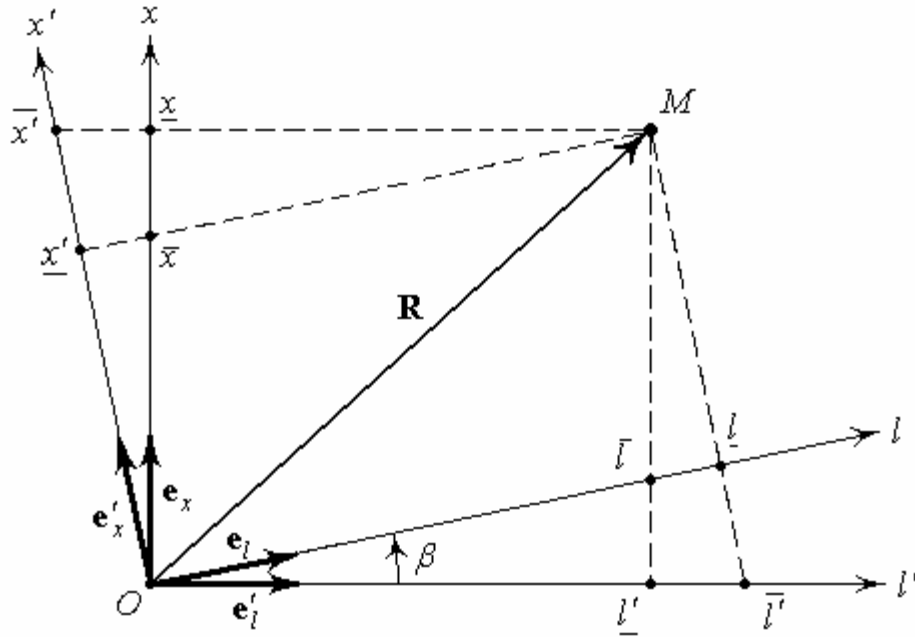


Рис.10.

Выпишем еще раз полученные формулы преобразования. В системе отсчета, связанной с неподвижной модой

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \bar{l} \sin \beta, \quad \bar{l} = \bar{x} \sin \beta + \bar{l}, \\ \bar{x} &= \frac{x - \bar{l} \sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad \bar{l} = \frac{-x \sin \beta + \bar{l}}{\cos^2 \beta}. \end{aligned} \quad (39)$$

В системе отсчета, связанной с движущейся модой

$$\begin{aligned} x' &= \bar{x}' - \bar{l}' \sin \beta, \quad \bar{l}' = -\bar{x}' \sin \beta + \bar{l}', \\ \bar{x}' &= \frac{x' + \bar{l}' \sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad \bar{l}' = \frac{x' \sin \beta + \bar{l}'}{\cos^2 \beta}. \end{aligned} \quad (40)$$

Если теперь учесть, что $\bar{l} = ct$, $\sin \beta = V/c$, $\bar{l}' = ct'$, то формулы, выражающие контравариантные координаты события через ковариантные координаты, будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + V\bar{t}, \quad \bar{t} = \bar{t} + \bar{x}V/c^2, \\ \bar{x} &= \frac{x - V\bar{t}}{1 - V^2/c^2}, \quad \bar{t} = \frac{\bar{t} - xV/c^2}{1 - V^2/c^2}. \end{aligned} \quad (39a)$$

$$\begin{aligned}
x' &= \bar{x}' - V\bar{t}', \quad t' = \bar{t}' - \bar{x}'V/c^2, \\
\bar{x}' &= \frac{x' + Vt'}{1 - V^2/c^2}, \quad \bar{t}' = \frac{t' + x'V/c^2}{1 - V^2/c^2}.
\end{aligned} \tag{40a}$$

Отметим, что здесь под x , x' и t , t' подразумеваются ковариантные координаты события, определенные как ортогональные проекции точки M на координатные оси Ox, Ol и Ox', Ol' , рис.10. Об этом подробно говорилось выше.

В предыдущем параграфе было показано, что ковариантные координаты выражаются через ковариантные координаты штрихованной системы и, наоборот, в соответствии с формулами преобразования Лоренца, то есть

$$\underline{x}' = \frac{\underline{x} - \underline{l} \sin \beta}{\cos \beta}; \quad \underline{l}' = \frac{\underline{l} - \underline{x} \sin \beta}{\cos \beta}; \tag{41}$$

$$\underline{x} = \frac{\underline{x}' + \underline{l}' \sin \beta}{\cos \beta}; \quad \underline{l} = \frac{\underline{l}' + \underline{x}' \sin \beta}{\cos \beta}. \tag{42}$$

Найдем теперь, как преобразуются контравариантные координаты. Заметим при этом, что базисные векторы $\mathbf{e}'_x \equiv \mathbf{i}'_x$, $\mathbf{e}'_l \equiv \mathbf{i}_s$ в силу того, что $g'_{xx} = g'_{ll} = 1$. Поэтому как следует из рис.10

$$\underline{x} = \bar{x}' \cos \beta; \quad \underline{l} = \bar{l}' \cos \beta; \tag{43}$$

$$\underline{x}' = \bar{x} \cos \beta; \quad \underline{l}' = \bar{l} \cos \beta. \tag{44}$$

Подставляя эти соотношения в формулы для перехода от ковариантных координат к контравариантным координатам, получаем

$$\bar{x}' = \frac{\bar{x} + \bar{l} \sin \beta}{\cos \beta}; \quad \bar{l}' = \frac{\bar{l} + \bar{x} \sin \beta}{\cos \beta}; \tag{45}$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}' - \bar{l}' \sin \beta}{\cos \beta}; \quad \bar{l} = \frac{\bar{l}' - \bar{x}' \sin \beta}{\cos \beta}. \tag{46}$$

Из полученных формул видно, что в отличие от ковариантных координат контравариантные координаты точки M в штрихованной системе координат выражаются через ее контравариантные координаты в не штрихованной системе в соответствии с формулами обратного преобразования Лоренца. Соответственно контравариантные координаты в не штрихованной системе выражаются через контравариантные координаты в штрихованной системе с помощью прямого преобразования Лоренца.

Отметим, что детерминант метрического тензора \underline{G} с ковариантными компонентами, который обозначим как $\underline{g} = \cos^2 \beta$. Детерминант метрического тензора \overline{G} с контравариантными компонентами, который обозначим как $\overline{g} = \frac{1}{\underline{g}} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$. Аналогично в штрихованной системе координат $\underline{g}' = \cos^2 \beta$ и $\overline{g}' = \frac{1}{\cos^2 \beta}$. Поэтому формулы (43, 44) можно записать в виде

$$\underline{x} = \overline{x}' \sqrt{\underline{g}'}, \quad \underline{l} = \overline{l}' \sqrt{\underline{g}'}; \quad (47)$$

$$\overline{x} = \underline{x}' \sqrt{\overline{g}'}, \quad \overline{l} = \underline{l}' \sqrt{\overline{g}'}. \quad (48)$$

Соответственно формулы обратного преобразования можно представить в виде

$$\overline{x}' = \underline{x} \sqrt{\overline{g}}, \quad \overline{l}' = \underline{l} \sqrt{\overline{g}}; \quad (49)$$

$$\underline{x}' = \overline{x} \sqrt{\underline{g}}, \quad \underline{l}' = \overline{l} \sqrt{\underline{g}}. \quad (50)$$

Из формул (47) – (50) видно, что

$$\frac{\underline{x}}{\underline{x}'} = \frac{\overline{x}'}{\overline{x}} = \frac{\underline{l}}{\underline{l}'} = \frac{\overline{l}'}{\overline{l}} = \cos \beta. \quad (51)$$

Соотношения (51) также можно получить, обратившись к рис.11.

Комбинируя попарно отношения, фигурирующие в (51), можно составить шесть тождеств: $\underline{x}\overline{x} = \underline{x}'\overline{x}'$, $\underline{l}\overline{l} = \underline{l}'\overline{l}'$, $\underline{x}\overline{l} = \underline{x}'\overline{l}'$, $\overline{x}\underline{l} = \overline{x}'\underline{l}'$, $\underline{x}/\underline{l} = \overline{x}'/\overline{l}'$, $\overline{x}/\overline{l} = \underline{x}'/\underline{l}'$. Как будет показано ниже, два последних из этих тождеств эквиваленты правилу преобразования скорости в теории относительности; первые же четыре дают различные модификации формулы для скорости относительного движения двух систем отсчёта друг относительно друга как функции координат события в этих системах отсчёта.

7. Следствия из первых двух тождеств

Рассмотрим сначала первые два из приведённых выше тождеств:

$$\underline{x}\overline{x} = \underline{x}'\overline{x}', \quad (52)$$

$$\underline{l}\overline{l} = \underline{l}'\overline{l}'. \quad (53)$$

Рассмотрим первое из тождеств (см. формулу (52)). Выразим сначала контравариантные координаты через ковариантные координаты с помощью формул (39) и (40). В результате получим

$$\frac{\underline{x}^2 - \underline{x}\underline{l} \sin \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{\underline{x}'^2 + \underline{x}'\underline{l}' \sin \beta}{\cos^2 \beta}. \quad (54)$$

Заметим, что если учесть, что в штрихованной системе координат $\beta' = -\beta$, то видно, что комбинация $\underline{x}^2 - \underline{x}\underline{l} \sin \beta$ при заданном β сохраняет не только своё значение, но и свой вид при переходе в штрихованную систему координат

$$\underline{x}^2 - \underline{x}\underline{l} \sin \beta = \underline{x}'^2 - \underline{x}'\underline{l}' \sin \beta'. \quad (55)$$

Однако это значение меняется при переходе от покоящейся моды к модам, движущимся с разными скоростями. Это позволяет по измерениям координат события в системах, движущихся друг относительно друга, найти скорость относительного движения. Действительно, если опять воспользоваться тем, что $\underline{l} = ct$, $\sin \beta = V/c$, $\underline{l}' = ct'$ и $V' = -V$, то формула (55) примет вид

$$x^2 - xVt = x'^2 - x'V't'. \quad (55a)$$

Как и в формулах (39а) и (40а) в этой формуле под значениями координат x, t, x', t' события подразумеваются ковариантные координаты.

Выразим теперь в (52) ковариантные координаты через контравариантные координаты. В результате получим, что

$$\bar{x}^2 + \bar{x}\bar{l} \sin \beta = \bar{x}'^2 + \bar{x}'\bar{l}' \sin \beta'. \quad (56)$$

Переходя от переменных \bar{l}, \bar{l}' к переменным \bar{t}, \bar{t}' , преобразуем формулу (56) к виду

$$\bar{x}^2 + \bar{x}\bar{V}\bar{t} = \bar{x}'^2 + \bar{x}'\bar{V}'\bar{t}'. \quad (56a)$$

Из (55а) получаем связь скорости относительного движения двух систем отсчета с ковариантными координатами, а из (56а) – с контравариантными координатами события в этих системах

$$V = \frac{x^2 - x'^2}{xt + x't'} = -\frac{\bar{x}^2 - \bar{x}'^2}{\bar{x}\bar{t} + \bar{x}'\bar{t}'}. \quad (57)$$

Рассмотрим теперь более подробно второе из приведенных выше тождеств (см. формулу (53)). В ковариантных координатах оно будет иметь вид

$$\underline{l}^2 - \underline{l}\underline{x} \sin \beta = \underline{l}'^2 - \underline{l}'\underline{x}' \sin \beta' \quad (58)$$

или

$$c^2 t^2 - xVt = c^2 t'^2 - x'V't'. \quad (58a)$$

В контравариантных координатах (53) имеет следующий вид:

$$\bar{l}^2 + \bar{l}x \sin \beta = \bar{l}'^2 + \bar{l}'x' \sin \beta' \quad (59)$$

или

$$c^2 \bar{t}^2 + \bar{x}V\bar{t} = c^2 \bar{t}'^2 + \bar{x}'V'\bar{t}'. \quad (59a)$$

Справедливость рассмотренных тождеств может быть проверена также непосредственной подстановкой формул преобразования Лоренца.

Из (58a) и (59a) получаем другие формулы, выражающие связь скорости относительного движения двух систем отсчета, как с ковариантными, так и с контравариантными координатами события в этих системах

$$V = c^2 \frac{\bar{t}^2 - \bar{t}'^2}{\bar{x}t + \bar{x}'t'} = -c^2 \frac{\bar{t}^2 - \bar{t}'^2}{\bar{x}t + \bar{x}'t'}. \quad (60)$$

8. Следствия из второй пары тождеств

Рассмотрим теперь следующие два тождества, которые следуют из формул (51).

$$\underline{\bar{x}l} = \underline{\bar{x}'l'}, \quad (61)$$

$$\bar{x}l = \underline{\bar{x}'l'}, \quad (62)$$

Обратимся к первому (61) и второму (62) из приведенных тождеств. В ковариантных координатах они имеют следующий вид

$$\underline{\bar{x}l} - \underline{\bar{x}}^2 \sin \beta = \underline{\bar{x}'l'} - \underline{\bar{l}'^2} \sin \beta', \quad (63)$$

$$\bar{x}l - \bar{l}^2 \sin \beta = \bar{x}'l' - \bar{x}^2 \sin \beta' \quad (64)$$

или

$$\bar{x}t - \frac{\bar{x}^2 V}{c^2} = \bar{x}'t' - V\bar{t}'^2, \quad (63a)$$

$$\bar{x}t - V\bar{t}^2 = \bar{x}'t' - \frac{\bar{x}'^2 V'}{c^2}. \quad (64a)$$

Так же как и рассмотренные в предыдущем параграфе тождества, эти тождества легко проверить непосредственной подстановкой формул преобразований Лоренца. В контравариантных координатах отличие будет состоять только в замене β и β' на $-\beta$ и $-\beta'$, соответственно.

С помощью рассмотренных тождеств (63a), (64a) относительная скорость движения двух систем отсчета может быть выражена через ковариантные координаты события в этих системах следующим образом:

$$V = \frac{xt - x't'}{t'^2 + x^2/c^2} = \frac{xt - x't'}{t^2 + x'^2/c^2}. \quad (65)$$

Итак, выпишем все модификации формулы для скорости относительного движения

$$\begin{aligned} V &= \frac{x^2 - x'^2}{xt + x't'} = -\frac{\bar{x}^2 - \bar{x}'^2}{\bar{x}t + \bar{x}'t'} = c^2 \frac{t^2 - t'^2}{xt + x't'} = -c^2 \frac{\bar{t}^2 - \bar{t}'^2}{\bar{x}t + \bar{x}'t'} = \\ &= \frac{xt - x't'}{t'^2 + x^2/c^2} = \frac{xt - x't'}{t^2 + x'^2/c^2} = -\frac{\bar{x}t - \bar{x}'t'}{\bar{t}'^2 + \bar{x}^2/c^2} = -\frac{\bar{x}t - \bar{x}'t'}{\bar{t}^2 + \bar{x}'^2/c^2} \end{aligned} \quad (66)$$

9. Последняя пара тождеств и преобразование скорости

Наконец рассмотрим пятое и шестое из шести написанных выше тождеств

$$\underline{x}/\underline{l} = \underline{x}'/\underline{l}', \quad (67)$$

$$\bar{x}/\bar{l} = \bar{x}'/\bar{l}'. \quad (68)$$

Пятое тождество в ковариантных координатах будет иметь вид

$$\frac{\underline{x}}{\underline{l}} = \frac{\underline{x}' + \underline{l}' \sin \beta}{\underline{x}' \sin \beta + \underline{l}'}. \quad (69)$$

Переходя от переменных $\underline{x}, \underline{l}$ к x, t и от $\underline{x}', \underline{l}'$ к x', t' , получим

$$\frac{x}{t} = \frac{x'/t' + V}{1 + \frac{x' V}{t' c^2}}. \quad (69a)$$

Из рис.4 и рис.5 с учетом рис.11 можно видеть, что отношение $\underline{x}/\underline{l} = \sin \alpha$, а отношение $\underline{x}'/\underline{l}' = \sin \alpha'$. Следовательно, отношение x/t можно интерпретировать как скорость моды в системе K , а отношение x'/t' - как скорость моды в системе K' . Обозначив первое из них буквой u , а второе буквой u' , из (69a) получим формулу, которая в теории относительности определяют преобразование скорости в случае движения частицы параллельно оси x [4, 8]

$$u = \frac{u' + V}{1 + u'V/c^2}. \quad (70)$$

Запишем теперь шестое тождество в ковариантных координатах:

$$\frac{\bar{x}'}{\bar{l}'} = \frac{\bar{x} - \bar{l} \sin \beta}{\bar{l} - \bar{x} \sin \beta} \quad (71)$$

или

$$u' = \frac{u - V}{1 - uV/c^2}. \quad (71a)$$

Как и прежде запись полученных формул в контравариантных координатах будет отличаться заменой β на $-\beta$ или V на $-V$.

10. Преобразование компонент волнового вектора и релятивистские формулы для аберрации света

Пусть волна, образующая движущуюся моду резонатора, распространяются под углом α к его оси. Как и раньше выберем ось Os' в плоскости, в которой лежат волновой вектор \mathbf{k} и ось Os и направим ее под углом α к оси Os . Тогда волновое число $k(\alpha) = |\mathbf{k}|$ будет представлять собой компоненту k_l волнового вектора \mathbf{k} . Введем в рассмотренной ранее косоугольной системе координат $Oxyl$ вектор \mathbf{K} с компонентами (k_l, k_x) , где k_x - есть проекция волнового вектора на ось Ox .

В самом начале данной работы было показано, что $k_l = k_0 / \cos \alpha$. Мы видели, что точно такой же формулой выражается длина пути, пройденного волной движущейся моды, через длину пути, пройденного волной неподвижной моды, а именно: $l = l_0 / \cos \alpha$. Это говорит о том, что компоненты вектора \mathbf{K} , определенные в неподвижной системе отсчета, при переходе к движущейся системе отсчета, будут преобразовываться также как и компоненты рассмотренного ранее радиус-вектора \mathbf{R} точки M .

Итак, пусть имеются две системы координат $Oxys$, отвечающая плоской волне неподвижной моды резонатора, и $Ox'y's'$, отвечающая плоской волне движущейся моды резонатора. Первую систему будем кратко обозначать K , а вторую систему - K' . Обозначим угол между волновыми векторами соответствующих волн через β .

Рассмотрим третью волну с волновым вектором \mathbf{k} , компоненты которого в неподвижной системе координат соответственно равны $k_x, 0, k_l$. Угол между осью Os и \mathbf{k} обозначим α . Пусть в штрихованной системе координат этот вектор имеет компоненты $k'_x, 0, k'_l$. Угол между осью Os' и вектором \mathbf{k}' обозначим α' . В косоугольной системе координат $Ox's'$ этому вектору сопоставим вектор $\mathbf{K}' \equiv \mathbf{K}$.

Как говорилось выше, компоненты вектора \mathbf{K} в системе K должны выражаться через компоненты этого вектора в штрихованной системе координат

$k'_x, 0, k'_l$ также как и компоненты вектора \mathbf{R} , то есть с помощью формул преобразования Лоренца

$$k_x = \frac{k'_x + k'_l \sin \beta}{\cos \beta}, \quad k_l = \frac{k'_l + k'_x \sin \beta}{\cos \beta}. \quad (72)$$

Можно рассмотреть контравариантные компоненты вектора \mathbf{K} и показать, что они преобразуются также как и контравариантные компоненты вектора \mathbf{R}

$$k^x = \frac{k'^x - k'^l \sin \beta}{\cos \beta}, \quad k^l = \frac{k'^l - k'^x \sin \beta}{\cos \beta}. \quad (73)$$

Ковариантные и контравариантные компоненты волнового вектора выражаются друг через друга с помощью метрического тензора. Выпишем формулы преобразования

$$k_x = k^x + k^l \sin \beta, \quad k_l = k^l + k^x \sin \beta, \quad (74)$$

$$k^x = \frac{k_x - k_l \sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad k^l = \frac{k_l - k_x \sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad (75)$$

$$k'_x = k'^x - k'^l \sin \beta, \quad k'_l = k'^l - k'^x \sin \beta, \quad (76)$$

$$k'^x = \frac{k'_x + k'_l \sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad k'^l = \frac{k'_l + k'_x \sin \beta}{\cos^2 \beta}. \quad (77)$$

Можно также показать, что имеют место соотношения, аналогичные (51)

$$\frac{k_x}{k'^x} = \frac{k'_x}{k^x} = \frac{k_l}{k'^l} = \frac{k'_l}{k^l} = \cos \beta, \quad (78)$$

откуда следуют шесть тождеств, аналогичных рассмотренным выше:

$$k_x k^x = k'_x k'^x, \quad k_l k^l = k'_l k'^l, \quad k_x k^l = k'^x k'_l, \quad k^x k_l = k'_x k'^l, \\ k_x/k_l = k'^x/k'^l, \quad k^x/k^l = k'_x/k'_l. \quad (79)$$

С помощью пятого и шестого тождеств также как и в случае тождеств (67), (68) легко получить правило преобразования скорости. Действительно, записывая, например, пятое тождество в ковариантных компонентах вектора \mathbf{K} и поделив числитель и знаменатель правой части тождества на k'_l , получим

$$\frac{k_x}{k_l} = \frac{\frac{k'_x}{k'_l} + \sin \beta}{1 + \frac{k'_x}{k'_l} \sin \beta}. \quad (80)$$

Учтем, что $\sin \alpha = \frac{k_x}{k_l}$, а $\sin \alpha' = \frac{k'_x}{k'_l}$. В результате получим формулу, выражающую $\sin \alpha$ через $\sin \alpha'$ и $\sin \beta$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \alpha' + \sin \beta}{1 + \sin \alpha' \sin \beta}. \quad (81)$$

Из этой формулы видно, что если в системе K' волна, образующая моду, распространяется под максимально большим углом $\alpha' = \pi/2$, то есть $\sin \alpha' = 1$, то в системе K эта же волна также будет распространяться под углом $\alpha = \pi/2$. Действительно, подставляя в формулу (81) $\sin \alpha' = 1$, получаем $\sin \alpha = 1$.

Если теперь учесть, что $\sin \beta = \frac{V}{c}$, где V - скорость движения системы K' относительно системы K , $\sin \alpha = \frac{u}{c}$, где u - скорость движения моды относительно K , $\sin \alpha' = \frac{u'}{c}$, где u' - скорость движения моды относительно K' , то формула (81) примет вид (70) формулы преобразования скорости в теории относительности.

Вычислим теперь $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Учитывая, что $\cos \beta$, $\cos \alpha$ и $\cos \alpha'$ положительны с помощью формулы (81) получаем

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' \cos \beta}{1 + \sin \alpha' \sin \beta}. \quad (82)$$

Эту формулу можно получить также следующим образом. С учётом (72) запишем $\cos \alpha$ в виде

$$\cos \alpha = \frac{k_0}{k_l} = \frac{k_0 \cos \beta}{k'_l + k'_x \sin \beta}.$$

Учитывая теперь, что $k_0/k'_l = \cos \alpha'$, получаем снова формулу (82).

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha - \cos \beta}{1 - \sin \alpha \sin \beta}, \quad \cos \alpha' = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{1 - \sin \alpha \sin \beta}. \quad (83)$$

Формулы (81), (82) и (83) представляют собой релятивистские формулы для аберрации света. Чтобы привести их к более привычному виду введем углы

$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\vartheta' = \frac{\pi}{2} - \alpha'$. Для этих углов указанные формулы с учетом того, что $\sin \beta = V/c$ и $\cos \beta = \sqrt{1 - V^2/c^2}$ приобретают знакомый вид [4]

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \vartheta'}{1 + \frac{V}{c} \cos \vartheta'}, \quad \cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \vartheta'}, \quad (84)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + \frac{V}{c}}, \quad (84a)$$

$$\sin \vartheta' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \vartheta}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}, \quad \cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}, \quad (85)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \vartheta}{\cos \vartheta - \frac{V}{c}}. \quad (85a)$$

11. Заключение

Итак, проведённое в данной работе рассмотрение пространственно-временных отношений между модами плоскопараллельного резонатора, движущимися друг относительно друга, показало, что последовательное описание этих отношений удаётся осуществить, используя косоугольные системы координат в действительном евклидовом пространстве, не используя при этом постулат о постоянстве скорости света и не прибегая к понятию псевдоевклидовой геометрии пространства-времени Минковского.

В основу рассмотрения положено лишь то, что пространство внутри резонатора однородное, изотропное и не обладает дисперсией, то есть волны, образующие моды резонатора в любом месте резонатора и в любом направлении, имеют одну и ту же фазовую скорость, не зависящую от частоты моды. Этих предположений оказывается достаточно для определения понятия события в резонаторе с возбуждёнными модами и вывода формул преобразования его координат при переходе от системы координат, связанной с покоящейся модой к системе координат, связанной с движущейся модой, которые совпадают с формулами преобразования Лоренца.

В пространствах с косоугольными системами координат, связанных с движущимися друг относительно друга модами, получены метрические тензоры, связывающие ковариантные и контравариантные координаты события, совместное использование которых оказалось весьма удобным для вывода таких формул, как релятивистские формулы для аберрации света, преобразования скорости и т.д. Обсуждается геометрическая интерпретация интервала между событиями при использовании косоугольных систем координат.

Обобщение проведённого рассмотрения на случай резонатора в 4-х мерном пространстве ещё раз убеждает в естественности и необходимости привлечения, так называемых, дополнительных измерений [10] для обоснования, как второго постулата специальной теории относительности, так и для обоснования математического описания пространственно-временных отношений реального мира в понятиях псевдоевклидовой геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Е.П. *Пространственно-временные отношения между модами резонатора с параллельными плоскими зеркалами*. Препринт ФИАН № 16. Москва. 2004. 17 с.
2. Звелто О. *Принципы лазеров*. // Пер. с англ. под ред. Т.А.Шмаонова. М.: Мир, 1990. С. 162.
3. Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки*. М.: Наука, 1990. С. 66.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. М.: Государственное изд. физико-математической литературы, 1962. С. 144, 18, 13, 24.
5. Окунь Л.Б. *Формула Эйнштейна: $E_0 = mc^2$. “Не смеётся ли Господь Бог”?* УФН, 2008, Т. 178, № 5, С. 541 – 555.
6. *Физический энциклопедический словарь*. // Под ред. А.М.Прохорова. М.: Советская энциклопедия, 1984. С. 307.
7. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике*. М.: Мир, 1965, Т. 2, С. 5, 34.
8. Паули В. *Теория относительности*. // Пер. с немецкого под ред. В.Л.Гинзбурга и В.П.Фролова. М.: Наука, 1991. С. 50, 33.
9. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике*. М.: Наука, 1968, С. 176.
10. Рубаков В.А. *Большие и бесконечные дополнительные измерения*. УФН, 2001, Т. 171, № 9, С. 913 – 938.