

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ**



**ИНСТИТУТ**

*имени*

*П.Н. Лебедева*

**Ф**

**И**

**А**

**Н**

ПРЕПРИНТ

Б.Б. КРЕЙСМАН

**15**

**ОДНОИМПУЛЬСНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ С ОРБИТ  
ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ НА ОРБИТЫ  
ВОКРУГ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ  $L_1$  ИЛИ  $L_2$**

МОСКВА 2009

## **Аннотация**

В рамках ограниченной круговой задачи трех тел описывается метод построения семейств периодических орбит, каждая из которых содержит участок перелета с орбиты искусственного спутника (ИС) меньшего тела на орбиту вокруг точки  $L_1$  или  $L_2$  систем Солнце – Земля и

Земля - Луна, участок многократного облета этой точки либрации и участок возврата на орбиту ИС. Даются зависимости скорости в перицентре от радиуса перицентра.

## **Введение**

Орбиты в окрестности точек либрации  $L_2$  и  $L_1$  привлекательны для многих космических проектов. С точки зрения энергетики наиболее выгодными являются одноимпульсные перелеты с орбит ИСЗ на такие орбиты. Для таких перелетов давно разрабатываются [1] ÷ [2] методы расчета. Эти методы достаточно сложны и трудоемки в программной реализации. Аппарат конструирования нужных орбит с помощью периодических решений круговой ограниченной задачи трех тел позволяет намного проще и нагляднее решить эту задачу.

### **1. Плоская круговая ограниченная задача трех тел [3] ÷ [5].**

Пусть две материальные точки с массами  $M_1$  и  $M_2$  движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс с угловой скоростью  $\Omega$  под действием взаимного ньютоновского притяжения, а третье тело имеет пренебрежимо малую массу. Проще всего уравнения движения третьего тела выглядят во вращающейся (синодической) системе координат в безразмерной форме. Начало координат находится в барицентре притягивающих тел, ось  $X_1$  направлена от тела

меньшей массы  $M_2$  к телу большей массы. Система вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\Omega$ ; в качестве единицы времени берется  $1/\Omega$ , единицы расстояния – постоянное расстояние  $R$  между притягивающими телами, единицы массы –  $(M_1+M_2)$ . В этой системе притягивающие тела неподвижны и имеют координаты  $(m_2, 0)$  и  $(-m_1, 0)$ , где  $m_1$  и  $m_2$  - их безразмерные массы,  $m_1 = M_1/(M_1+M_2)$ ,  $m_2 = M_2/(M_1+M_2)$ .

Для системы Земля - Луна используется  $R = 384400$  км и  $m_2 = 0.0121505816234336$ , для системы Солнце – (Земля+Луна)  $R$  равно астрономической единице,  $R = 149597870.661$  км и  $m_2 = 0.0000030404235885$ . Далее вместо комбинации (Земля+Луна) мы будем писать просто Земля с этим значением  $m_2$ .

Функция Гамильтона  $H(\mathbf{x})$  вычисляется по формуле:

$$H = \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2) + x_2x_3 - x_1x_4 - \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2},$$

$$r_1^2 = (x_1 - m_2)^2 + x_2^2, \quad r_2^2 = (x_1 + m_1)^2 + x_2^2,$$

где  $r_1$  и  $r_2$  - расстояния до притягивающих тел. Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J}H'(\mathbf{x}).$$

Здесь  $\mathbf{x}$  - четырехмерный вектор, компоненты которого  $x_k$  и  $x_{2+k}$   $k=1,2$  - канонически сопряженные (координаты и импульсы),  $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$  - четырехмерный вектор - градиент функции Гамильтона, а матрица четвертого порядка  $\mathbf{J}$  имеет вид:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Первых интегралов, отличных от интеграла энергии  $H(\mathbf{x})=\text{const}$ , нет и задача не интегрируется в квадратурах. Исторически принято интеграл энергии записывать в виде  $2H(\mathbf{x})=C$ , где  $C$  называется константой Якоби.

Далее в тексте для наглядности вместо вектора  $\mathbf{x}$  будут использоваться скаляры  $x, y, v_x, v_y$ .

## 2. Случай системы Солнце - Земля.

### 2.1. Семейства плоских периодических решений вокруг точек либрации $L_2$ и $L_1$ .

Наиболее популярными решениями плоской ограниченной задачи трех тел во вращающейся системе координат являются 5 положений равновесия – точки либрации  $L_1 \div L_5$ . В этом разделе мы ограничимся рассмотрением двух коллинеарных (лежащих на оси  $X$ ) точек  $L_1$  и  $L_2$  в системе Солнце - Земля. Точка  $L_1$  лежит между

притягивающими телами, а точка  $L_2$  – за меньшим телом. На рисунке 1. даны образцы орбит вокруг этих точек (семейства  $L2sz$  и  $L1sz$ ). Здесь и далее расстояния задаются в тыс. км, орбиты изображаются во вращающейся геоцентрической системе координат. Точка (0,0) соответствует Земле, Солнце находится справа по оси  $X$  на расстоянии одной астрономической единицы. Точки либрации  $L_2$  и  $L_1$  имеют координаты  $(-1508.1381, 0)$  и  $(1497.1694, 0)$ . Эти и все рассматриваемые ниже орбиты симметричны относительно оси  $X$  и поэтому дважды пересекают вертикально эту ось [5]. В этих точках имеем:  $y = v_x = 0$ . Точку с меньшим  $x$  мы далее обозначаем  $a_1$  ( $b_1$ ), с большим –  $a_2$  ( $b_2$ ). Любое такое решение задается значениями  $x$  и  $v_y$  в одной из этих точек.

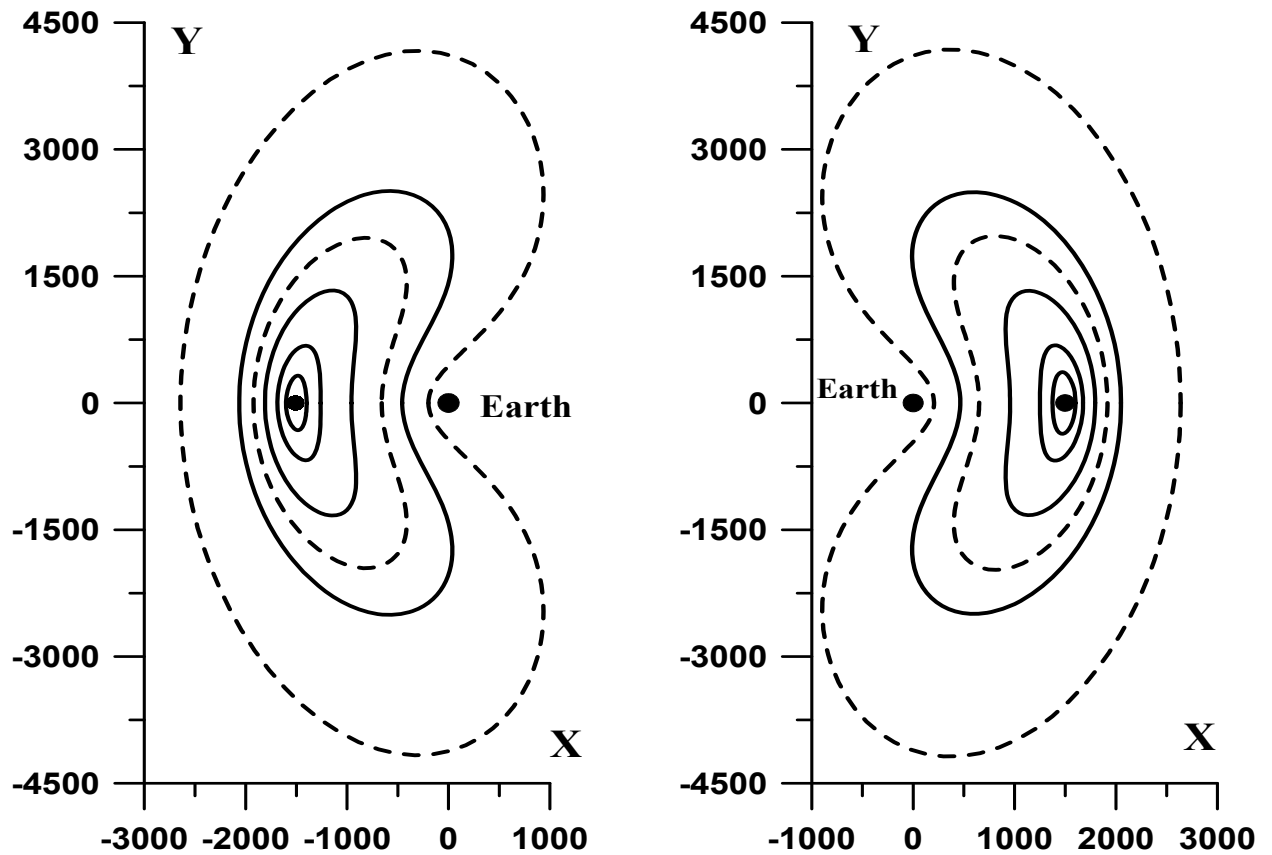


Рис. 1.

## 2.2. Семейства плоских периодических решений первого рода вокруг Земли в системе Солнце - Земля.

Простейшими семействами плоских прямых (то есть облетающих Землю против часовой стрелки) периодических орбит вокруг Земли в системе Солнце - Земля являются аналоги семейства прямых круговых орбит невозмущенной задачи (при  $m_2=1$ ). Так как они не имеют “родителей”, то их называют решениями первого рода, в отличие от порождаемых ими периодических решений второго рода – аналогов эллиптических орбит. Оказывается, (как и в задаче

Хилла) таких семейств два и они почти взаимно симметричны относительно оси  $Y$ . Мы обозначили их  $szz1$  и  $szz2$ ; образцы орбит представлены на рис. 2. Заметим, что здесь мы поменяли нумерацию семейств по сравнению с предыдущими нашими публикациями.

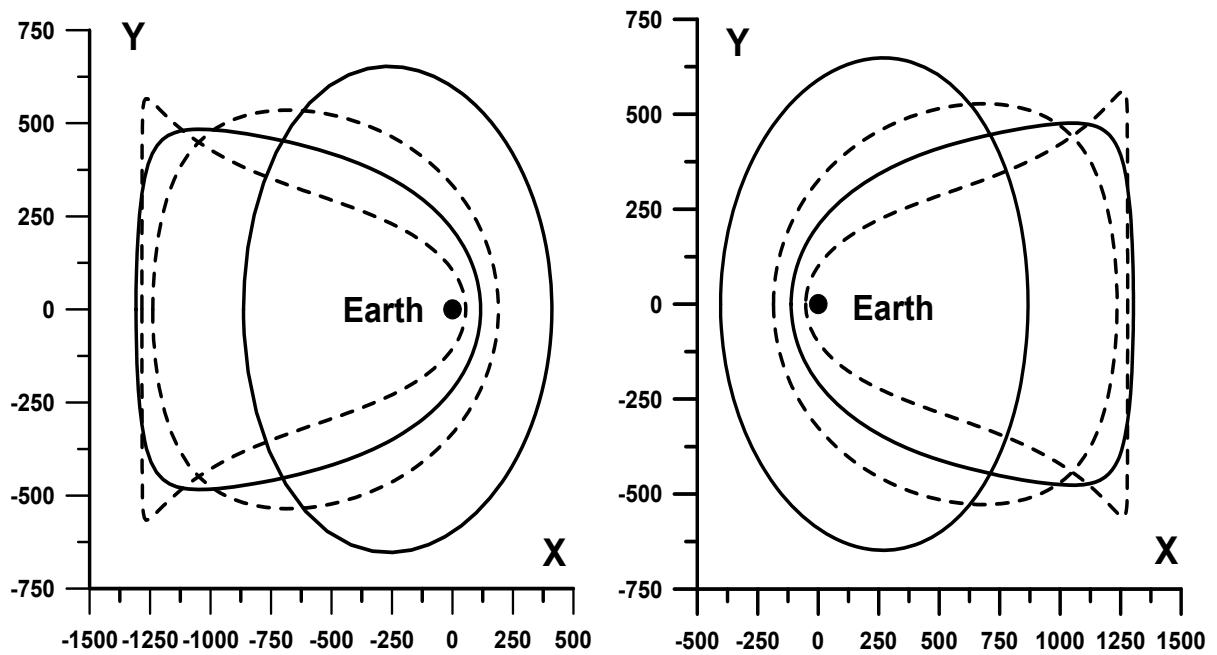


Рис. 2.



Видно, что при увеличении апогея орбиты семейств **szz2** и **szz1** теряют сходство с окружностью. Орбиты семейства **szz2** удаляются от Солнца, находящегося справа на расстоянии одной астрономической единицы от начала координат, а орбиты семейства **szz1** наоборот, смещаются в сторону Солнца. Ясно, что орбиты семейства **szz1** перспективны для перехода с орбиты ИСЗ на орбиту вокруг точки  $L_1$ , а орбиты семейства **szz2** – для перехода на орбиту вокруг точки  $L_2$ .

### **2.3. Одноимпульсный перелет с орбиты ИСЗ на орбиту вокруг точки $L_2$ .**

Пусть высота орбиты ИСЗ в момент пересечения линии Земля - Солнце равна 200 км. Построим орбиту семейства **szz2** со значением радиуса перицентра 6.581340 тыс. км и изобразим ее на рисунке 3 сплошной линией. Период этой орбиты 196.73093 суток, а второе вертикальное пересечение оси  $X$  (точка  $a_1$ ) происходит при  $x = -1175.1182$ . Построим орбиту семейства вокруг точки  $L_2$  с пересечением оси  $X$  (точка  $b_2$ ) при таком же  $x$  и изобразим ее на том же рисунке пунктиром. Период этой орбиты 182.39200 суток, а второе вертикальное пересечение оси  $x$  (точка  $b_1$ ) происходит при  $x = -1727.9751$ .

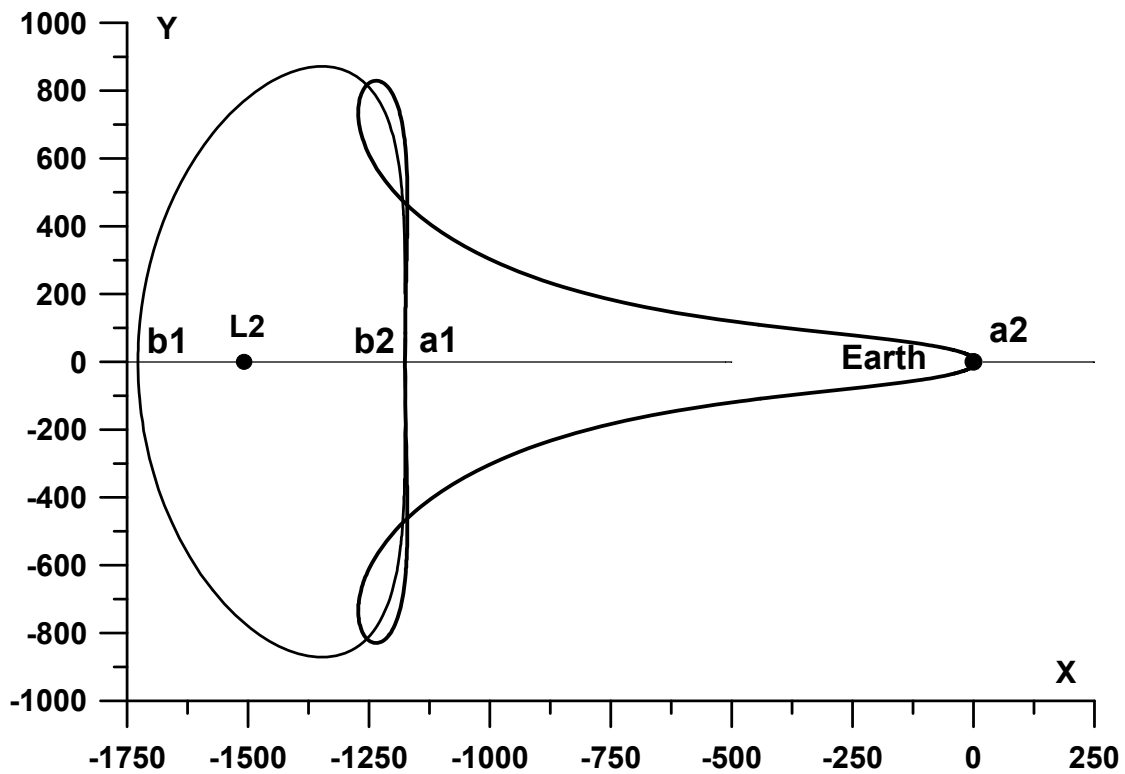


Рис. 3.

Орбиты касаются друг друга, но имеют различные скорости  $v_y$ , значения которых для различных орбит семейств **szz2** и **L2sz** даны на графиках рисунка 4.

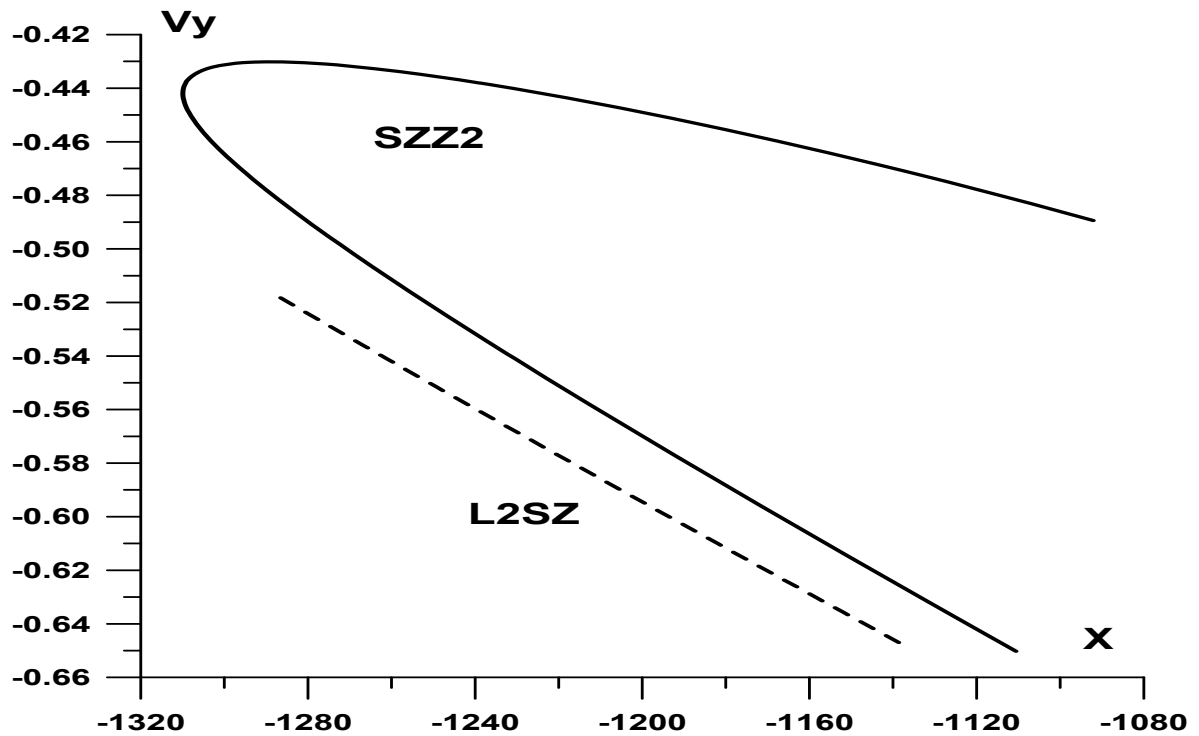


Рис. 4.

Разность значений  $v_y$  при  $x = -1175.1182$  равна 24.1 м/сек, то есть переход с орбиты семейства **szz2** на ближайшую орбиту вокруг точки  $L_2$  требует малых затрат энергии.

Однако, согласно разработанному нами и описанному в препринте [6] методу, такие орбиты можно объединять в одну вообще без затрат энергии в точке  $a_1$ . Для этого зададим, что у объединенной орбиты кроме двух вертикальных пересечений оси  $X$  (в точках  $a_1$  и  $a_2$ ) есть два наклонных (в точке  $a_3$ ) и малой вариацией скорости в перигее добьемся выполнения условий периодичности. Построенная орбита дана на рисунке 5.

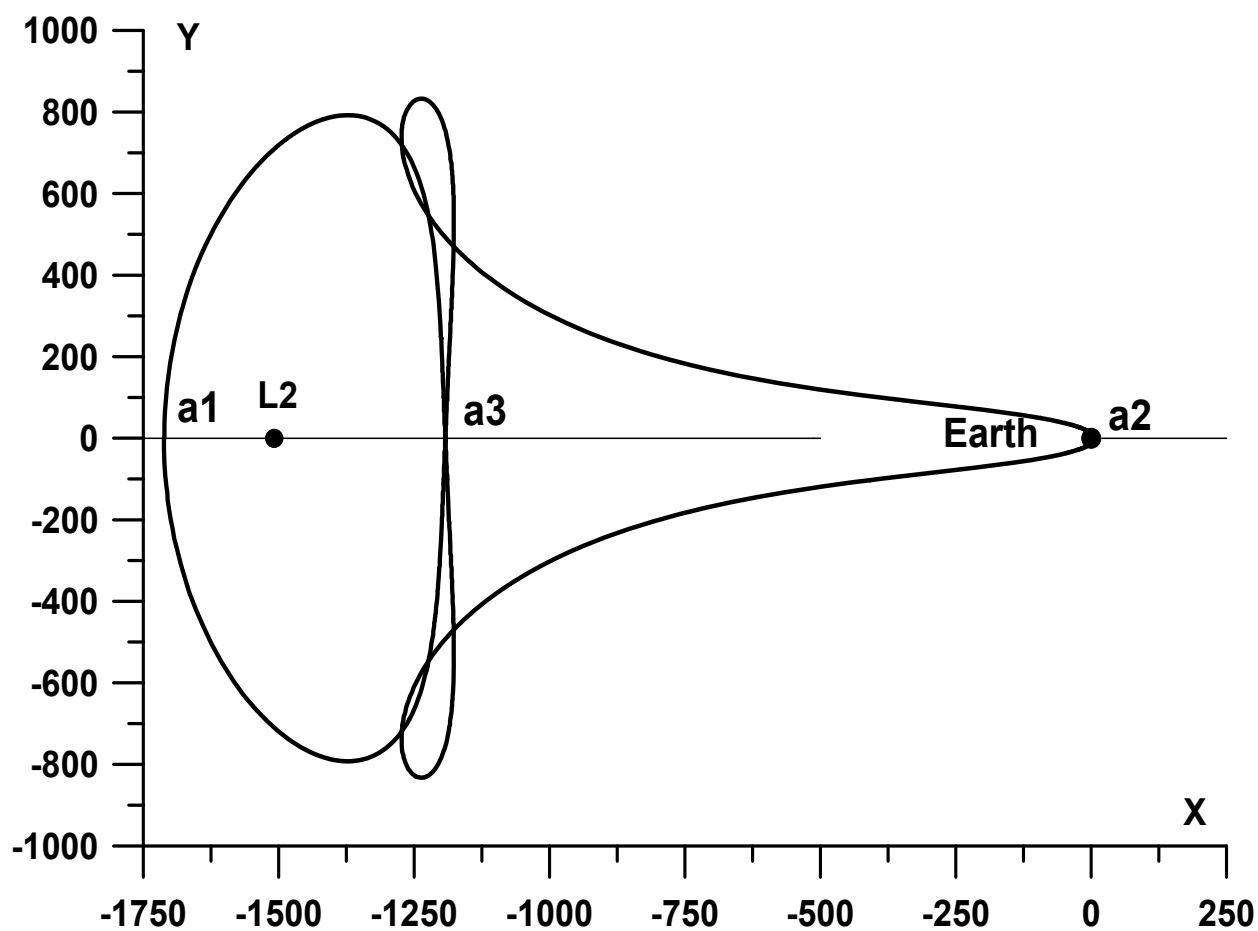


Рис. 5

Аналогичным образом мы построили орбиту с двумя облетами точки  $L_2$  (рисунок 6). Здесь имеем две пары наклонных пересечений оси  $X$  (в точках  $a_3$  и  $a_4$ ).

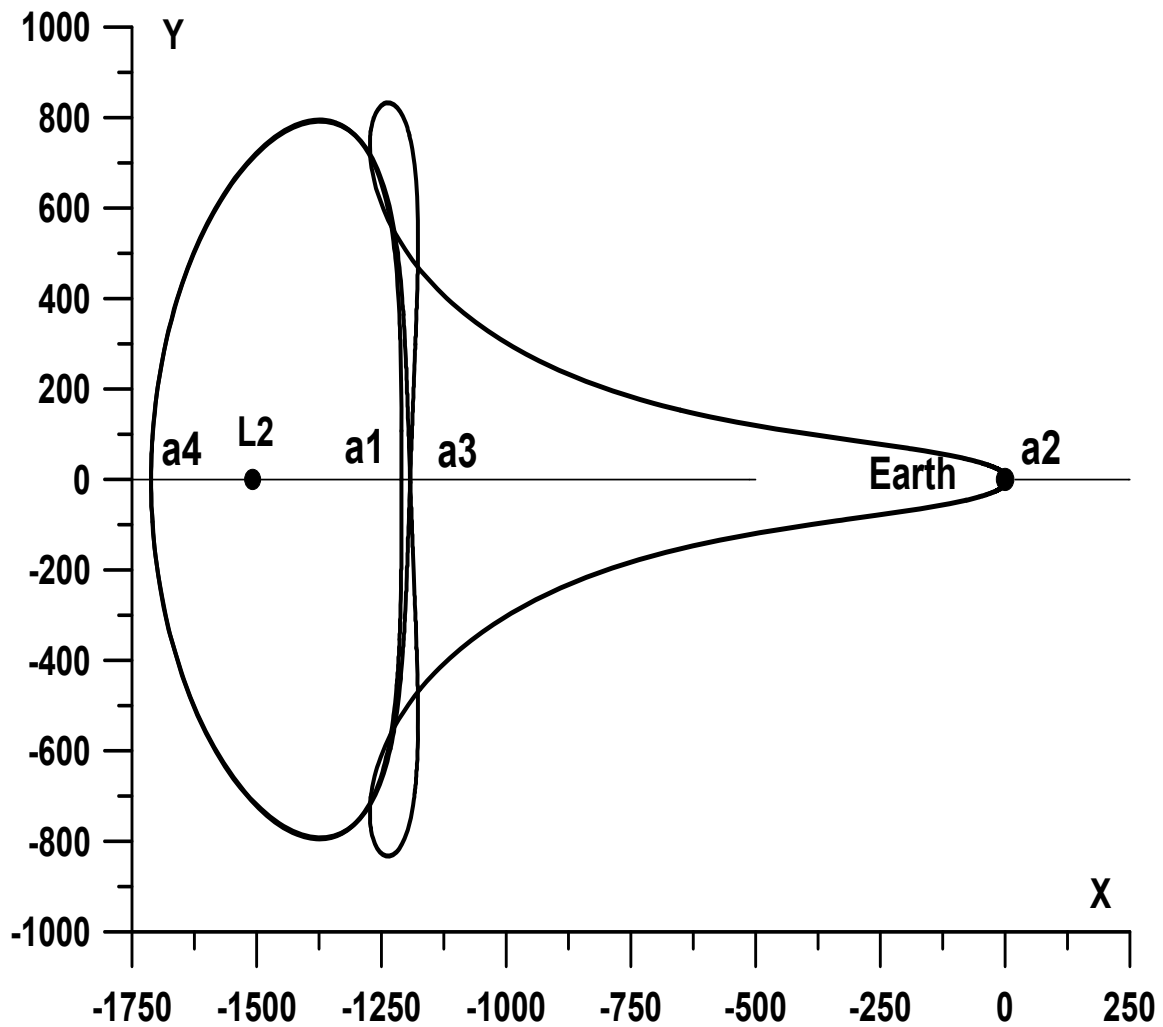


Рис. 6.

Как известно [3] ÷ [5], периодические решения неинтегрируемых задач существуют не изолированно, а в виде (обычно) однопараметрических семейств. Мы построили два семейства орбит (с одним и двумя облетами точки либрации). На рисунке 7 показаны зависимости длительности периодов  $T$  (в годах) от радиусов перигеев  $R_p$  для этих

семейств. Видно, что в обоих случаях одному значению  $R_p$  соответствуют два решения с разными значениями  $T$ . Для приложений интерес представляют решения с меньшей длительностью периода.

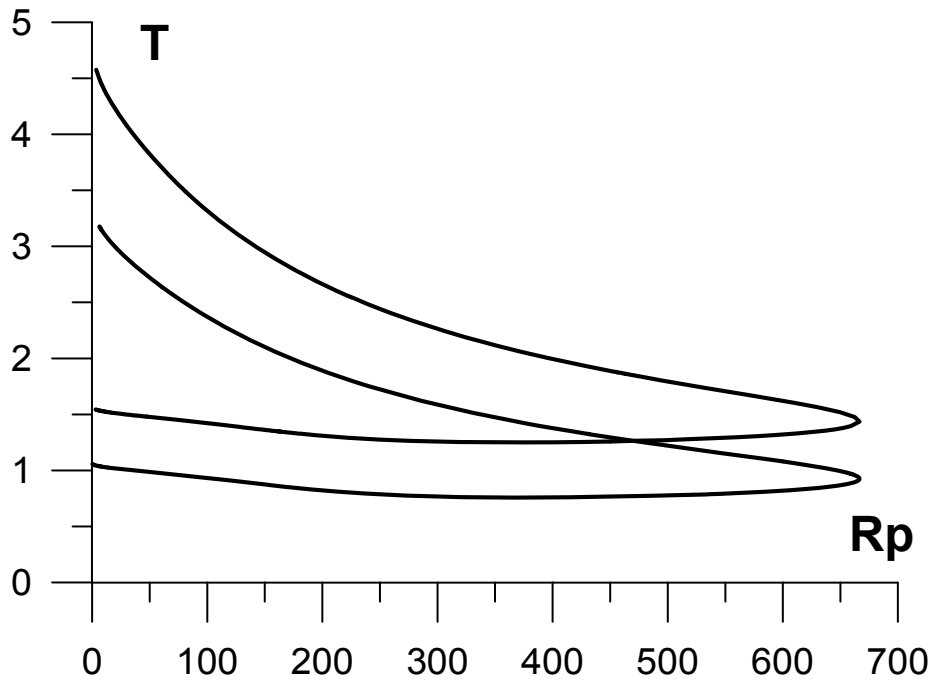


Рис. 7

#### 2.4. Одноимпульсный перелет с орбиты ИСЗ на орбиту вокруг точки $L_1$ .

Построим орбиту семейства **szz1** со значением радиуса перицентра – 6.581340 тыс. км и, увеличивая число вертикальных пересечений оси  $X$  за полупериод с 2 до 3,

получаем орбиту с облетом точки  $L_1$ , представленную на рисунке 8.

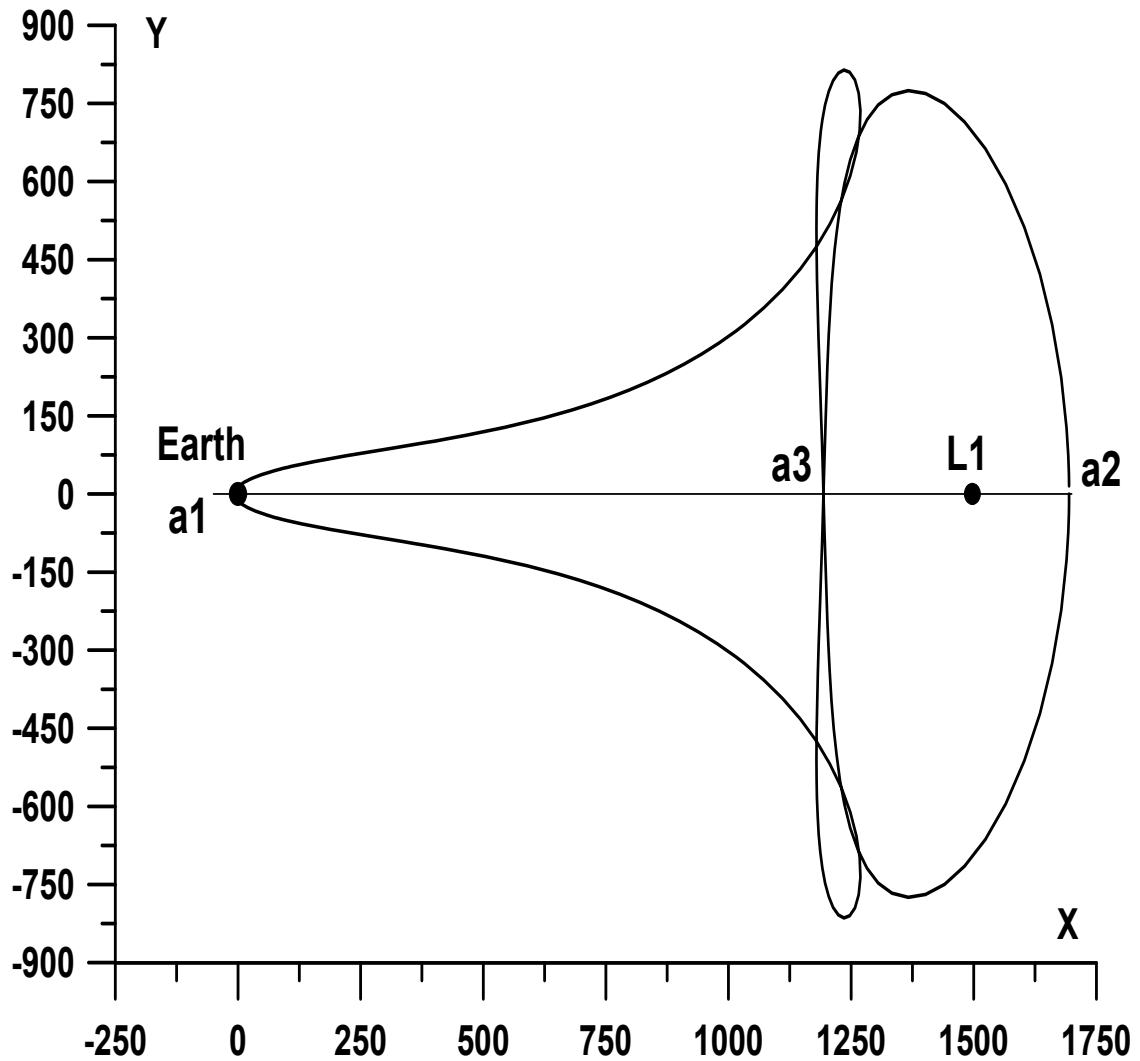


Рис. 8.

Увеличивая далее с 3 до 4 число вертикальных пересечений оси X за полупериод, получаем орбиту с двумя облетами точки  $L_1$ , представленную на рисунке 9.

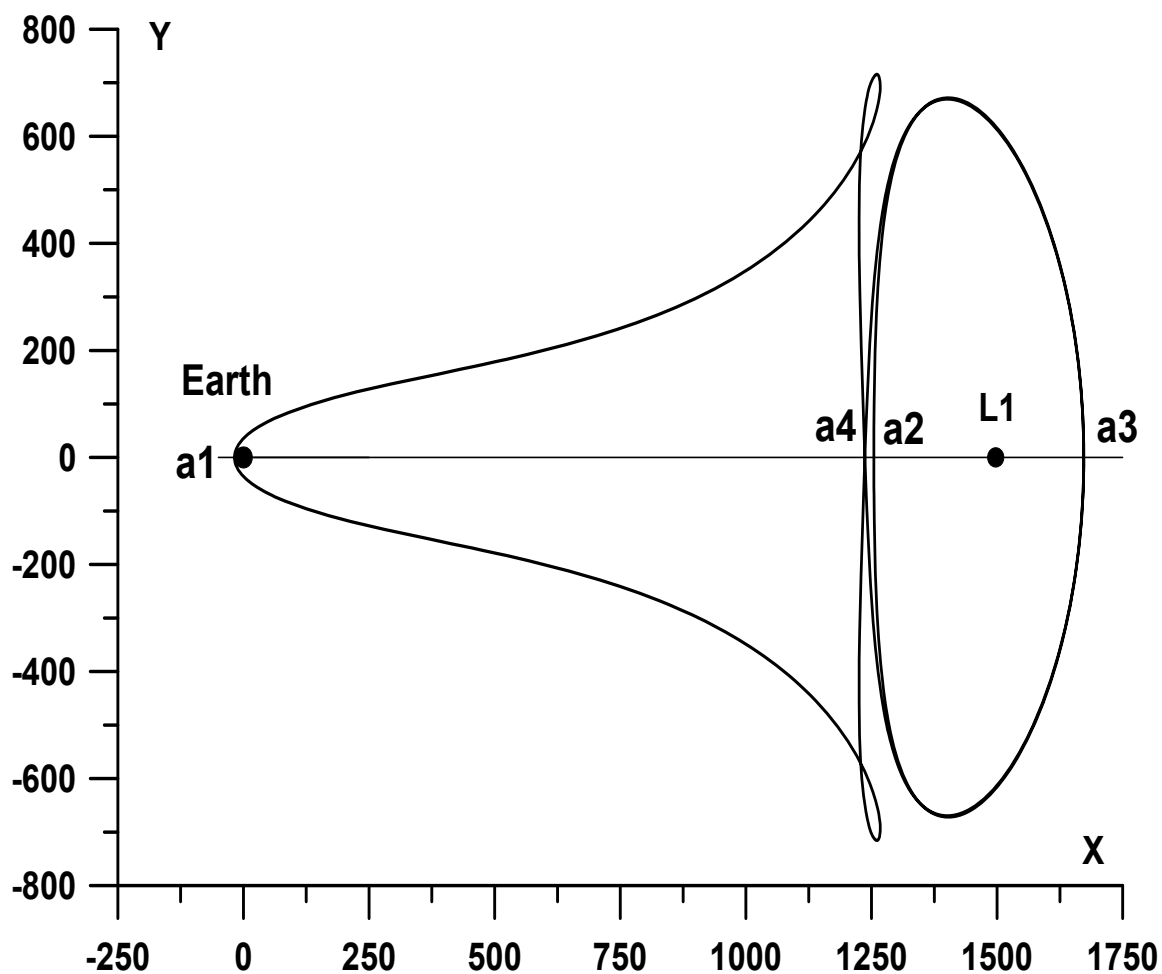


Рис. 9.

Построим два семейства таких орбит (с одним и двумя облетами точки либрации  $L_1$ ). На рисунке 10 показаны зависимости длительности периодов  $T$  (в годах) от радиусов перигеев  $R_p$  для этих семейств. В этом случае точка  $a_1$  находится слева от Земли и значения скорости и координаты отрицательны. Видно, что в обоих случаях одному значению  $R_p$  также соответствуют два решения с разными значениями  $T$ .



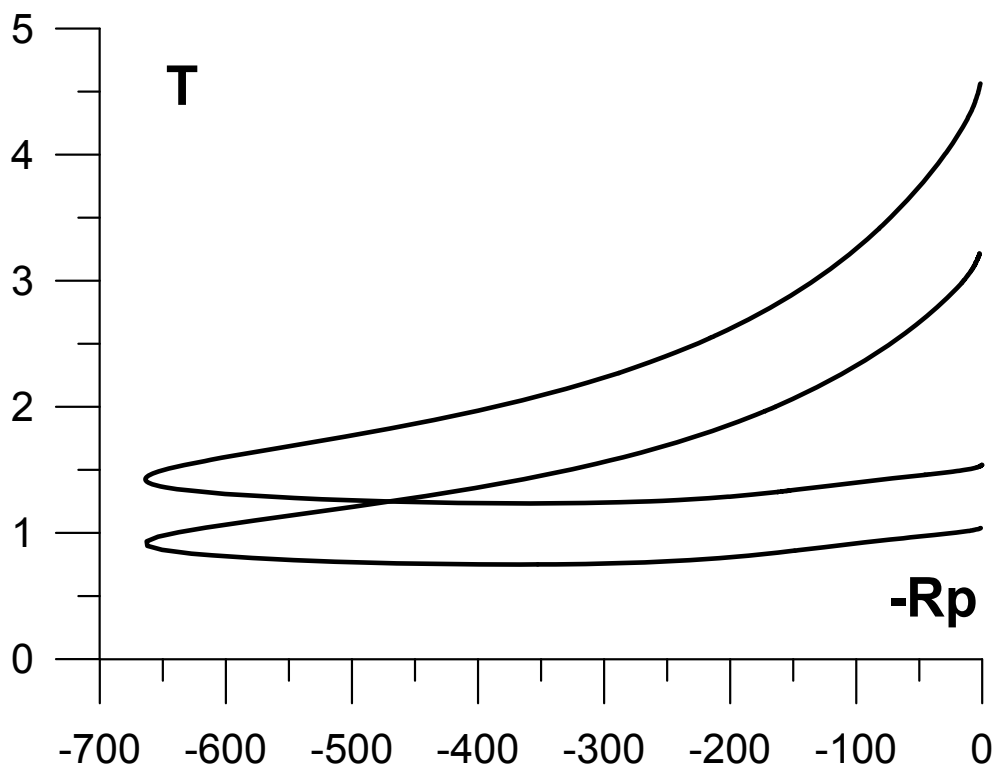


Рис. 10.

Заменим теперь значения скоростей и радиусов перигея на их модули и данные, соответствующие однократным и двукратным облетам точек  $L_1$  и  $L_2$ , представим в таблице 1. В первой строке – радиусы  $R_p$ , в следующих – обозначение семейства и требуемые значения скорости в км/сек. Для каждого семейства даны сначала скорости для орбит с меньшими, а затем с большими периодами. Видно, что от числа оборотов требуемая скорость зависит мало, следовательно, орбиты структурно неустойчивы.

Таблица 1.

FAM	6.55	6.65	6.75	6.85
L11	11.0684436654	10.9844284881	10.9022837017	10.8219408174
L12	11.0684436766	10.9844284993	10.9022837128	10.8219408288
L11	11.1294632926	11.0457296263	10.9638635676	10.8837966817
L12	11.1294636217	11.0457286516	10.9638633423	10.8837979305
L21	11.0686539240	10.9846403336	10.9024971216	10.8221557997
L22	11.0686539353	10.9846403454	10.9024971274	10.8221555622
L21	11.1345316238	11.0507729573	10.9688823905	10.8887914636
L22	11.1345309260	11.0507714808	10.9688829592	10.8887940527

### 3.Случай системы Земля-Луна.

В этом случае меньшим телом является Луна и на рисунках начало системы координат находится в центре масс Луны. Используется  $m_2 = 0.0121505816234336$ . Мы не будем повторять описание этапов построения нужных орбит, мало отличающихся от этапов для системы Солнце-Земля, и сразу приведем результаты.

На рисунке 11 дана орбита одноимпульсного перелета с орбиты искусственного спутника Луны на орбиту вокруг точки  $L_1$  с одним облетом этой точки, на рисунке 12 с двумя и на рисунке 13 с тремя облетами. На рисунке 14 – увеличенный фрагмент рисунка 13.

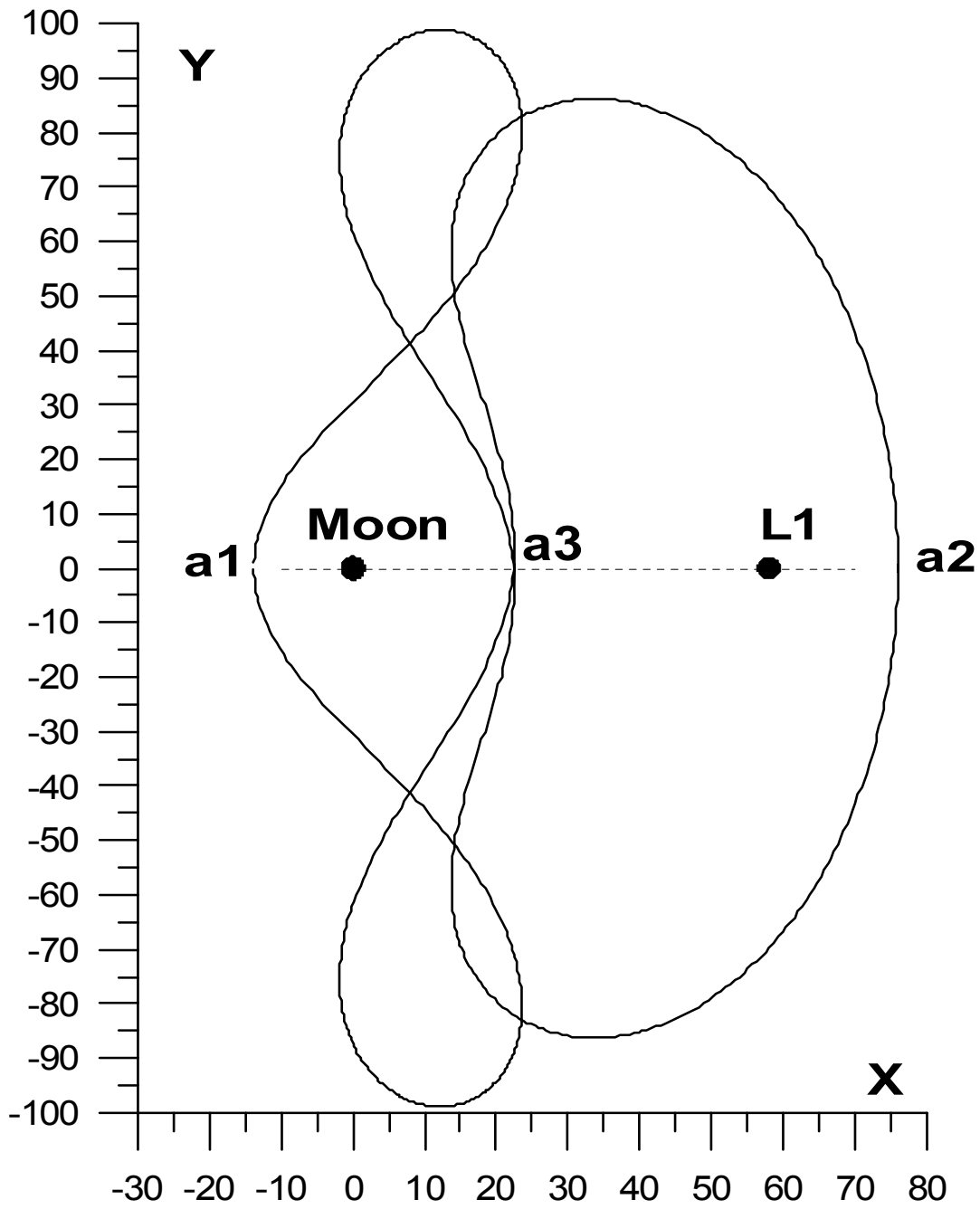


Рис. 11

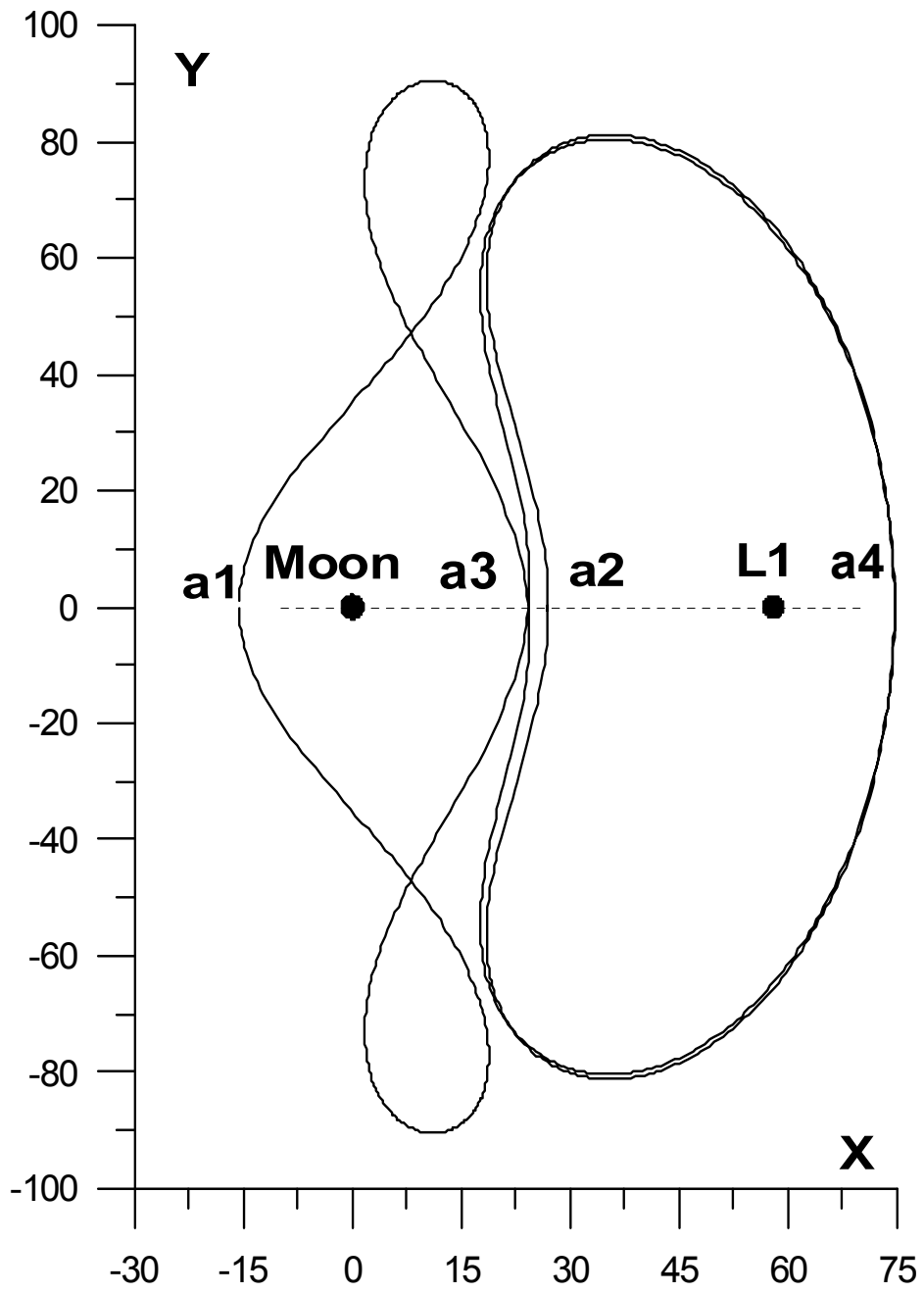


Рис. 12.

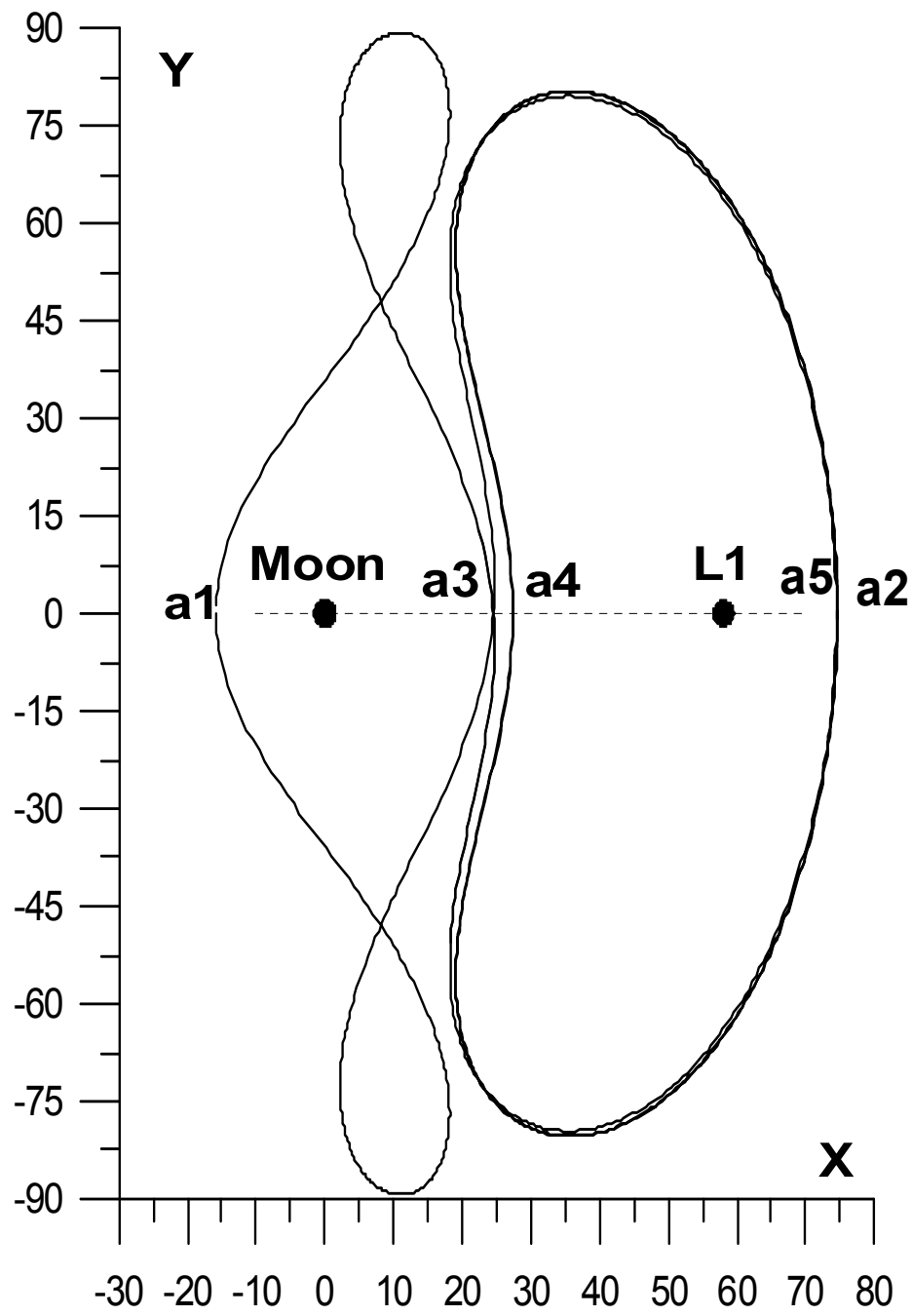
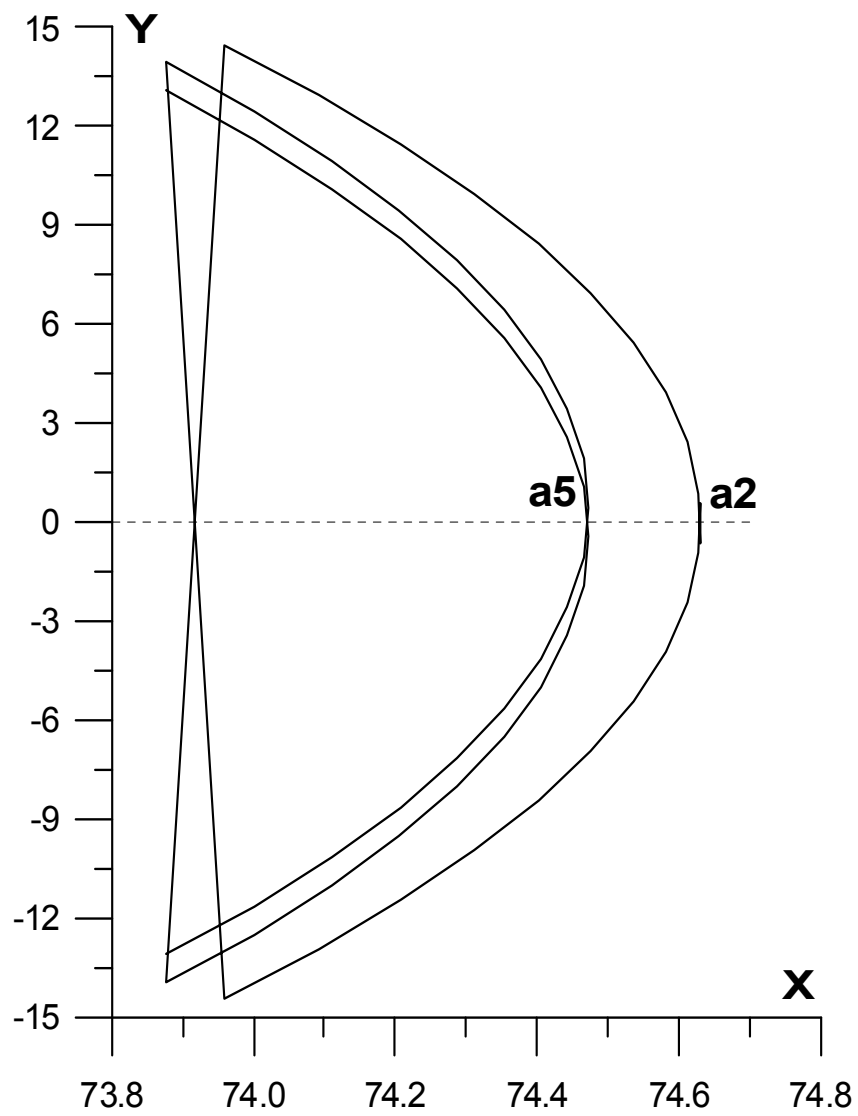
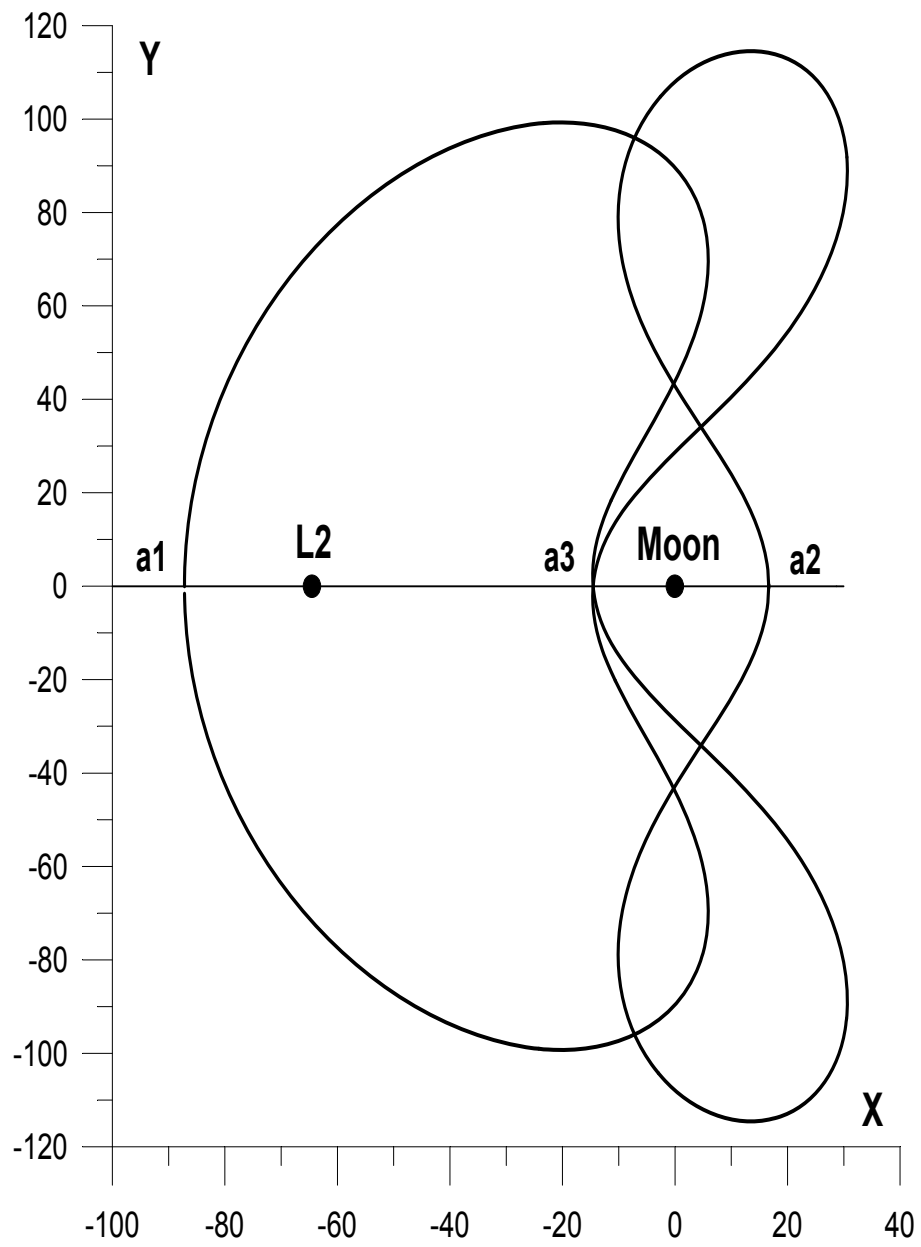


Рис. 13.

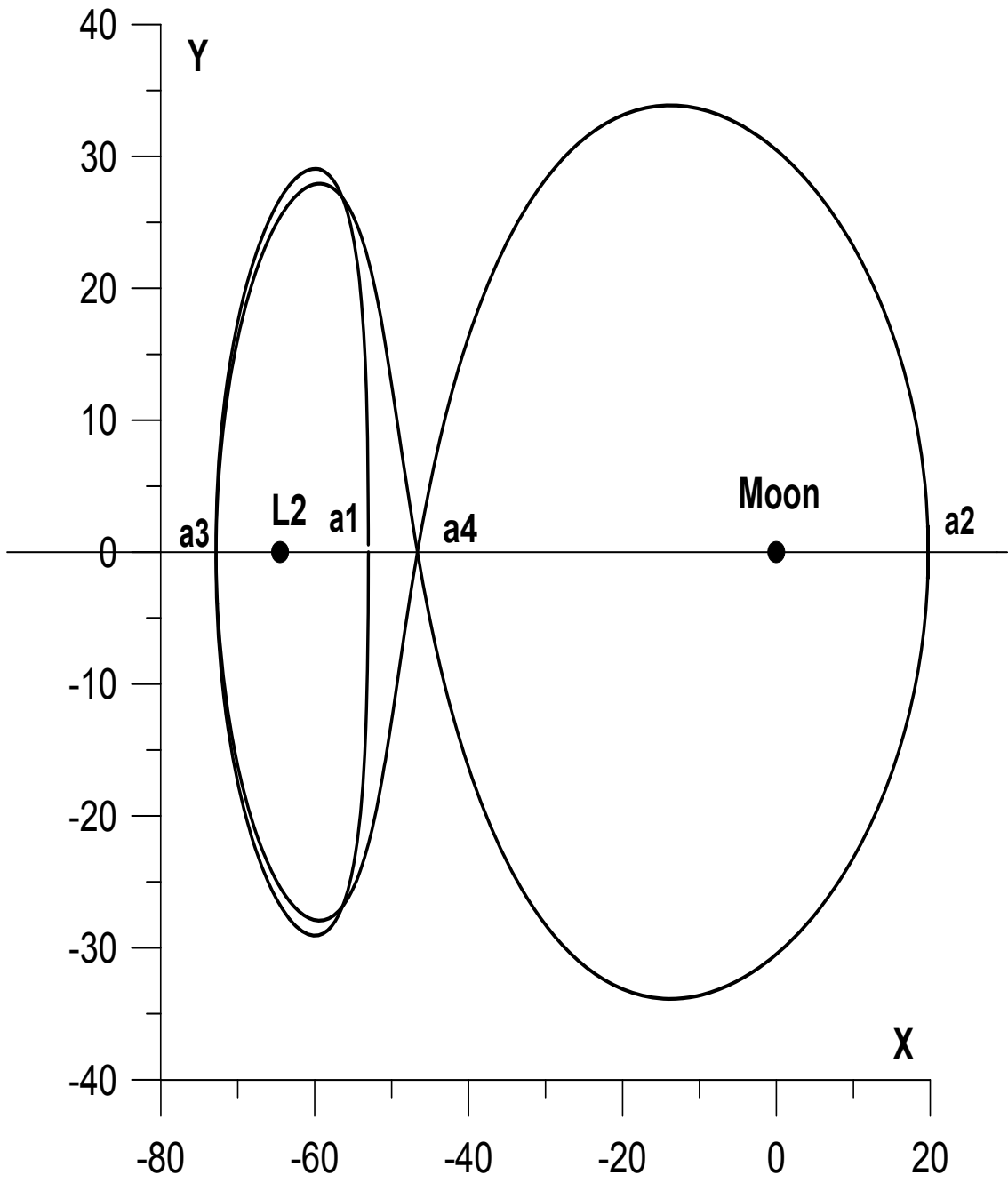


**Рис. 14.**

Аналогичные графики для орбит вокруг точки  $L_2$  даны на рисунках 15÷18. Для разнообразия представлены орбиты из разных частей семейств.

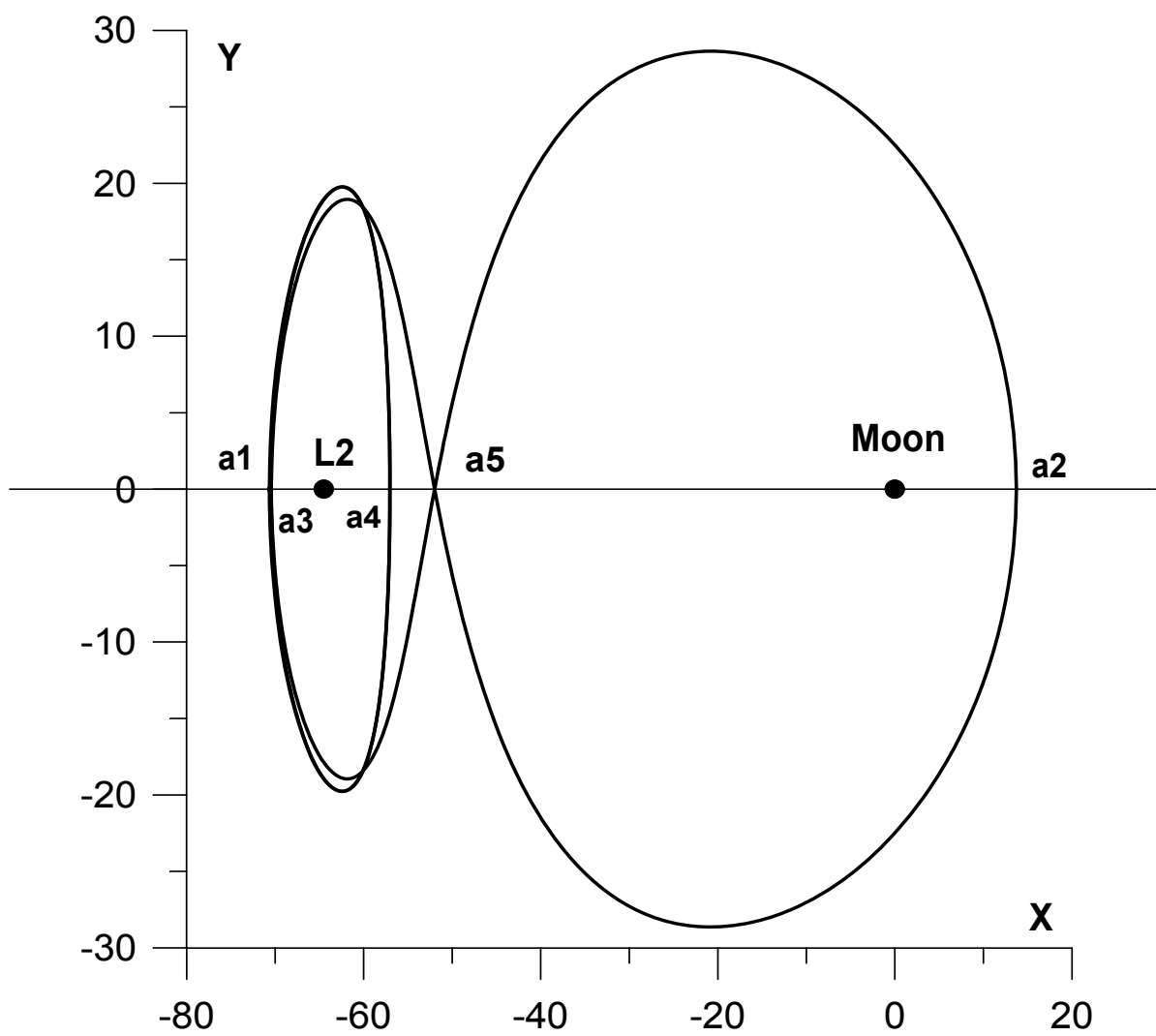


**Рис. 15.**

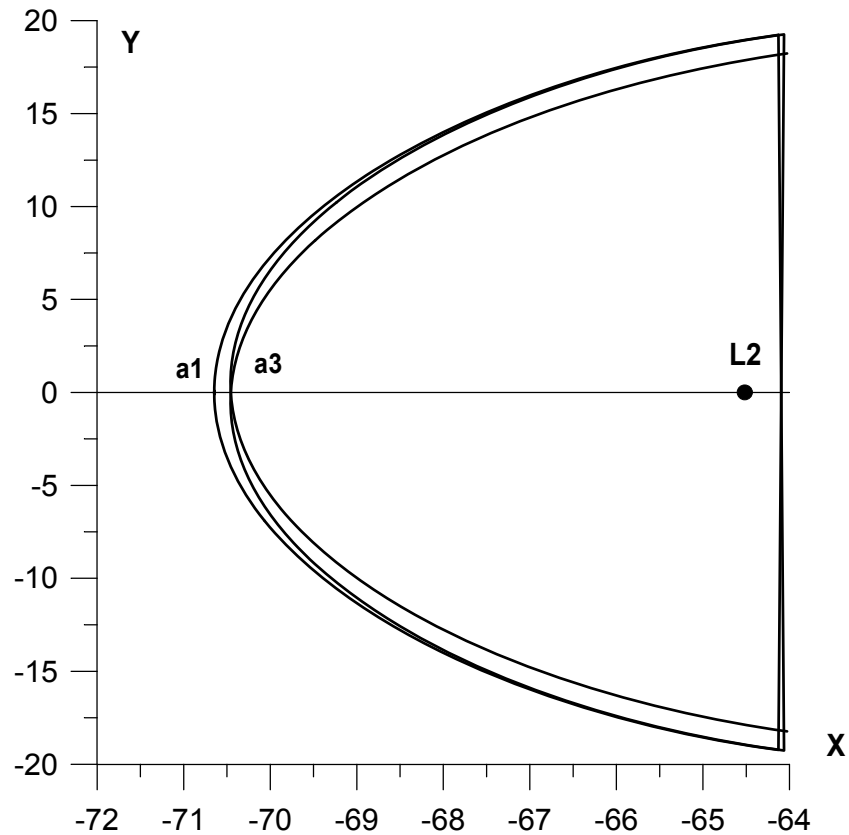


**Рис. 16.**





**Рис. 17.**



**Рис. 18.**

Заметим, что пример орбиты семейства с одним облетом дан на рисунке 33.4 нашей публикации 1997-го года [6].

Таблица 2 аналогична таблице 1 и содержит данные для системы Земля – Луна. Орбиты с тремя облетами точки  $L_1$  и коротким периодом существуют только при радиусе переселения большем 6 и соответствующая строка в таблице отсутствует.

Таблица 2.

FAM	2	3	4	5
L11	2.16490762177	1.74796649896	1.49700648555	1.32421165365
L12	2.16496634030	1.74786049102	1.49689729518	1.32422124903
L11	2.22085631690	1.81392903526	1.57072599471	1.40418186042
L12	2.22084916934	1.81389053218	1.57093485377	1.40336921057
L13	2.22085670131	1.81393684053	1.57072214381	1.40421806129
L21	2.16976272863	1.75337461507	1.50296095521	1.33082269478
L22	2.16959424857	1.75340582007	1.50301447944	1.33084690587
L23	2.16964235626	1.75324794415	1.50306489696	1.33074799281
L21	2.24337077467	1.83255352351	1.58791120960	1.42109903934
L22	2.24336980167	1.83254641452	1.58791836994	1.42103323731
L23	2.24338819448	1.83251209197	1.58786891946	1.42113004319

#### 4. Пространственный вариант одноимпульсного перелета с орбиты ИСЗ на орбиту вокруг точки $L_2$ в системе Солнце – Земля.

Для проекта “Миллиметрон” и других проектов космических телескопов требуются орбиты не лежащие в плоскости эклиптики. Методика построения семейств пространственных периодических решений по плоским описана в частности в наших публикациях [7] ÷ [9]. В таблице 3 представлены решения семейства  $L22$  с резонансами  $1 \div 3$  по вертикали. Во втором и четвертом столбцах указаны координаты точек пересечения оси  $X$  (в тысячах км), в третьем и пятом - скорость  $V_y$  (в км/сек), в шестом – длительность периода (в

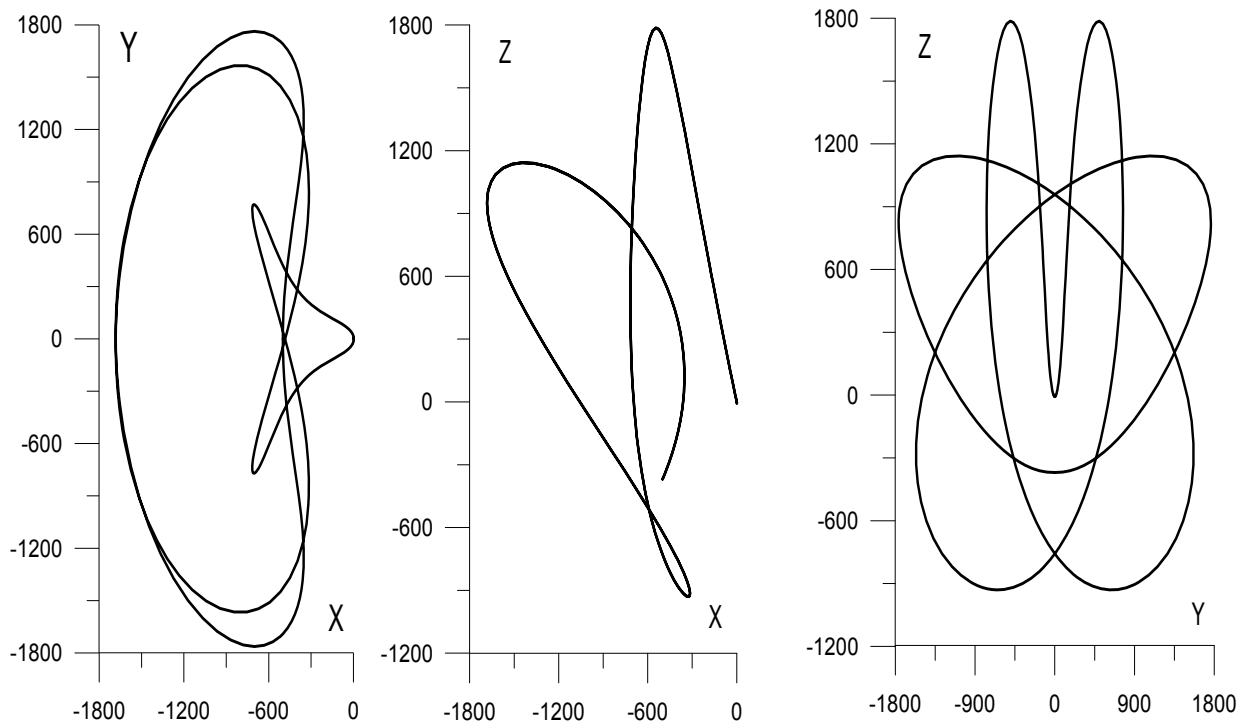
годах), в седьмом – константа Якоби, в восьмом – параметр  $s_2$ , в девятом - кратность резонанса  $p/q$ . В строках 1,5 и 6 имеем резонанс 1/1. Мы построили и проанализировали 3 семейства пространственных орбит, порожденных этими плоскими. Наиболее подходящими для проекта “Миллиметрон” оказались орбиты, порожденные 5-й строкой.

Таблица 3.

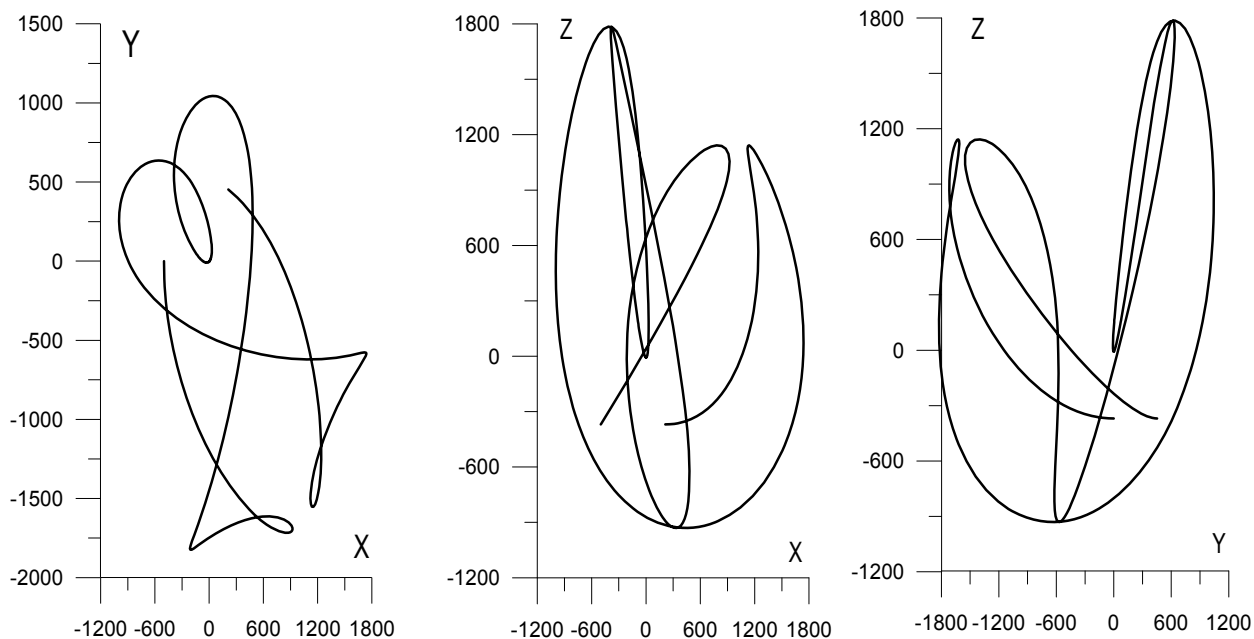
$n$	$a_1$	$v_1$	$a_2$	$v_2$	$T$	$C$	$s_2$	$p/q$
1	-1.001518	-1.064596	-.999044	-.919449	2.9909	3.0000	1	1/1
2	-1.001535	-1.064239	-.999031	-.919994	2.9780	3.0000	-.5	1/3
3	-1.001541	-1.064112	-.999026	-.920188	2.9734	3.0000	-1	1/2
4	-1.002122	-1.054563	-.998565	-.934401	2.5922	3.0001	-1	1/2
5	-1.002141	-1.054302	-.998549	-.934775	2.5810	3.0001	-.5	1/3
6	-1.002204	-1.053501	-.998498	-.935922	2.5466	3.0001	1	1/1
7	-1.004267	-1.036961	-.996856	-.957442	1.8477	3.0004	1	1/1
8	-1.004933	-1.033488	-.996375	-.961346	1.7189	3.0005	-.5	1/3
9	-1.005369	-1.031410	-.996089	-.963525	1.6458	3.0005	-1	1/2
10	-1.007098	-1.023889	-.995589	-.968905	1.3959	3.0007	-1	1/2
11	-1.007749	-1.021125	-.996048	-.967750	1.3135	3.0008	-.5	1/3
12	-1.009142	-1.014876	-.998282	-.946636	1.2707	3.0009	-.5	1/3

Наиболее подходящими для проекта “Миллиметрон” оказались орбиты, порожденные 5-й строкой. Они симметричны вокруг гиперплоскостей  $Y$  и  $V_z$ . Образец такой орбиты в эклиптической системе, вращающейся вокруг Земли, дан на рисунке 19. Полный период – 613.7 суток, из которых

по 112 суток занимают участки входа и схода с орбит вокруг точки  $L_2$  и по 194.85 – каждый из двух облетов.



**Рис. 19.**



**Рис. 20.**

Эта же орбита в инерциальной эклиптической системе с началом координат в центре Земли дана рисунке 20.

Предложенные орбиты могут использоваться как начальное приближение при построении реальных орбит.

### **Список литературы**

1. Боярский М. Н., Шейхет А. И. Об одноимпульсном переходе с орбиты ИСЗ на условно-периодическую траекторию вокруг коллинеарной точки либрации системы Солнце - Земля. Космич. исслед., 1987, том 25, №1. С.152.
2. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Одноимпульсный перелет на условно-периодическую орбиту

в окрестности точки L2 системы Земля – Солнце и смежные задачи. Космич. исслед., 1987, том 25, №2. С.163-185.

3. А.Пуанкаре Новые методы небесной механики.- Избр. тр. Т. 1,2.М. Наука, 1971,1972.

4.Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел.М., Наука, 1982, 656с.

5. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М., 1990, 296 с.

6. Крейсман Б.Б. О симметричных периодических решениях плоской ограниченной задачи трех тел. Препр. Физического инст. им.П.Н.Лебедева РАН,1997, №66, 131с.

7. Б.Б. Крейсман Исследование орбит КА “Миллиметрон”, наиболее перспективных с точки зрения решения поставленных научных задач. Материалы тех. предл. по КНА обсерватории “Миллиметрон”. Глава 2. М., АКЦ ФИАН, 2006.

8. Крейсман Б.Б. Периодические решения пространственной ограниченной задачи трех тел. Космич. исслед., 2009, том 47, №1, с 64-78.

9. Крейсман Б.Б. Применение периодических решений пространственной задачи трех тел для проектирования орбиты космического телескопа. Космич. исслед., 2009, том 47, №5, (в печати).