РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Физический институт имени П.Н. Лебедева
ФИАН

ПРЕПРИНТ
1

А.В. КОЛЬЦОВ, А.В. СЕРОВ

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ДВУГРАННОМ УГЛЕ

МОСКВА 2009

Переходное излучение в двугранном угле

А.В.Кольцов, А.В.Серов

Решена задача возбуждения переходного излучения в двугранном угле, образованном идеально проводящими плоскостями. Поле возбуждается релятивистской заряженной частицей влетающей в двугранный угол перпендикулярно его ребру. Определено пространственное распределение поля излучения. Проведены расчеты угловых распределений интенсивности излучения в двугранных углах с различными углами раствора. Рассмотрены особенности переходного излучения в двугранном угле.

Введение

Излучение, возникающее при пересечении заряженной частицей границы раздела двух сред, обладает свойствами позволяющими использовать его при решении различных задач [1]. В теории переходного излучения наиболее простым и очень важным частным случаем является излучение, возникающее при падении частицы на идеально проводящую плоскость. Эта задача была рассмотрена уже в первой работе В.Л.Гинзбурга и И.М.Франка по теории переходного излучения [2]. Было показано, что при пересечении плоскости под прямым углом излучаемая энергия равна нулю по направлению скорости частицы и максимальна под углом $\theta_m \simeq \gamma^{-1}$ к направлению скорости, где γ - относительная энергия частицы. Исследование излучения на более сложных поверхностях раздела показало, что в этих случаях в спектрально-угловых распределениях появляются новые особенности, расширяющие возможности использования переходного излучения в различных приложениях.

Одной из таких поверхностей раздела двух сред является поверхность, имеющая форму двугранного угла. Свойства переходного излучения генерируемого при пересечении частицей двугранного угла исследовались теоретически [3,4] и экспериментально [5]. В работе [3] было рассмотрено переходное излучение заряженной частицы для случая, когда идеально проводящая поверхность образована двумя плоскостями составляющими двугранный угол с раствором $\alpha = 90°$. В работе [4] рассматривался более общий случай, когда плоскости пересекаются не только под прямым углом, а под углом $\alpha = \pi/m$, где m – целое число. В этой работе для описания переходного излучения использовался метод зеркальных изображений. На возможность применения этого метода в задаче о переходном излучении частицы пересекающей проводящую плоскость указывалось еще в работе [2]. Отмечалось, что переходное излучение на идеально проводящей плоскости можно рассматривать как излучение двух частиц: реальной частицы с зарядом q и зеркального изображения частицы с зарядом $-q$. При падении на идеально проводящую плоскость заряд и его изображение встречаются в точке пересечения плоскости. Возникающее при этом излучение можно представить как сумму излучений генерируемых при остановке заряда и его изображения. В области оптических частот в качестве идеально проводящих можно рассматривать металлические поверхности. С увеличением частоты диэлектрическая проницаемость ϵ спадает и при $\omega \to \infty$ $\epsilon \to 1$. По грубым оценкам частота, до которой металлы можно рассматривать как идеальные проводники, имеет порядок $\omega \approx 10^{16}$ сек$^{-1}$.

В настоящей работе рассматриваются особенности переходного излучения в двугранном угле с произвольной величиной угла раствора. При этом излучение генерируемое при пересечении плоской поверхности является частным случаем излучения в двугранном угле с раствором 180°. Для вычисления электромагнитных полей, возбужденных внешним источником в двугранном угле, использовался традиционный электродинамический метод, применяеемый при рассмотрении полей возбужденных в закрытых волноводах [6,7]. В этом методе поле в волноводе представляется в виде линейной комбинации полей собственных волн двух различных типов: поперечно электрических волн (H-волн) и поперечно магнитных волн (E-волн).

Переходное излучение

В дальнейшем используется система единиц, в которой скорость света $c = 1$. Геометрия задачи представлена на рис.1. Двугранный угол образован при пересечении плоскостей, обладающих идеальной проводимостью. Раствор двугранного угла равен α. Ось z прямоугольной системы координат направлена по прямой по которой пересекаются плоскости, образующие двугранный угол, а ось x - вдоль одной из плоскостей. Заряженная частица q вылетает из точки расположенной на ребре двугранного угла и движется с постоянной скоростью v. Вектор скорости частицы лежит в плоскости xy и направлен под углом φ_o к оси x. Через φ обозначен угол между осью x

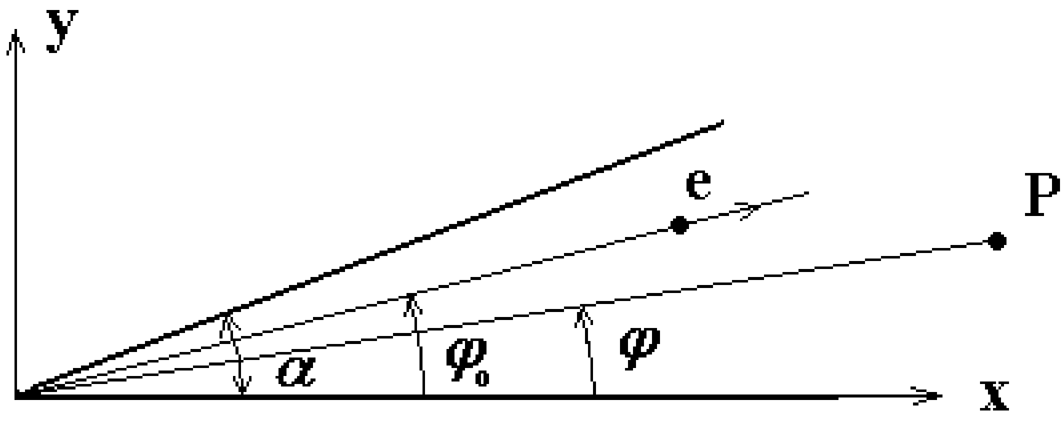

Рис.1 Геометрия задачи

и проекцией на плоскость xy прямой, проведенной из начала координат в точку наблюдения P.

Двугранный угол представляет собой направляющую структуру однородную вдоль продольной оси z. В волне, бегущей вдоль оси z, зависимость всех величин определяется множителем $\exp i(\omega t - k_z z)$, где k_z - продольное волновое число, ω - частота электромагнитной волны. Электромагнитные поля $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \int \mathbf{E}_{\omega k_z}(x, y)\; e^{i(\omega t - k_z z)} d\omega dk_z \tag{1}$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \int \mathbf{H}_{\omega k_z}(x, y)\; e^{i(\omega t - k_z z)} d\omega dk_z, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}_{\omega k_z}(x, y), \mathbf{H}_{\omega k_z}(x, y)$ - Фурье представления полей по ω и k_z, определяемые выражениями

$$\mathbf{E}_{\omega k_z}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{E}(x, y, z, t)\; e^{-i(\omega t - k_z z)} d\omega dk_z \tag{3}$$

$$\mathbf{H}_{\omega k_z}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{H}(x, y, z, t)\; e^{-i(\omega t - k_z z)} d\omega dk_z. \tag{4}$$

В дальнейшем нижние индексы ωk_z у Фурье представлений полей будут опускаться.

По условиям задачи продольная компонента плотности тока j_z равна нулю и в общем случае не равны нулю поперечные компоненты плотности тока j_x и j_y. С учетом этого, уравнения Максвелла

$$rot\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} \qquad div\mathbf{E} = 4\pi\varrho \tag{5}$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad div\mathbf{H} = 0, \tag{6}$$

где ϱ - плотность заряда, можно переписать в виде

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y = 4\pi j_x + i\omega E_x \tag{7}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + ik_z H_x = -4\pi j_y - i\omega E_y \tag{8}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega E_z \tag{9}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} - ik_z E_z = 4\pi\varrho \tag{10}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i\omega H_x \tag{11}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_z E_x = i\omega H_y \tag{12}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega H_z \tag{13}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} - ik_z H_z = 0 \tag{14}$$

Из (7)-(14) получаем уравнения, позволяющие по продольным компонентам E_z и H_z определить все поперечные компоненты полей

$$H_x = \frac{1}{k_\perp^2}\left(i\omega\frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z\frac{\partial H_z}{\partial x} - 4\pi i k_z j_y\right) \tag{15}$$

$$H_y = \frac{1}{k_\perp^2}\left(-i\omega\frac{\partial E_z}{\partial x} - ik_z\frac{\partial H_z}{\partial y} + 4\pi i k_z j_x\right) \tag{16}$$

$$E_x = \frac{1}{k_\perp^2}\left(-ik_z\frac{\partial E_z}{\partial x} - i\omega\frac{\partial H_z}{\partial y} + 4\pi i\omega j_x\right) \tag{17}$$

$$E_y = \frac{1}{k_\perp^2}\left(-ik_z\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\omega\frac{\partial H_z}{\partial x} + 4\pi i\omega j_y\right) \tag{18}$$

где Δ_2 - двумерный оператор Лапласа, $k_\perp^2$ - поперечное волновое число, $k_\perp^2 = k^2 - k_z^2, \quad k = \omega$, и неоднородные уравнения Гельмгольца с граничными условиями

$$\Delta_2 E_z + k_\perp^2 E_z = -4\pi i k_z \varrho \qquad E_z|_S = 0 \tag{19}$$

$$\Delta_2 H_z + k_\perp^2 H_z = 4\pi \left(\frac{\partial j_x}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial x} \right) \qquad \frac{\partial H_z}{\partial n}|_S = 0 \tag{20}$$

Собственные функции двугранного угла могут быть определены из решений волновых уравнений, удовлетворяющих граничным условиям

$$\Delta_2 E_z + k_\perp^2 E_z = 0 \qquad E_z|_S = 0 \tag{21}$$

$$\Delta_2 H_z + k_\perp^2 H_z = 0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial n}|_S = 0. \tag{22}$$

В качестве собственных функций двугранного угла выбираем [6,7]

$$\Phi_m = \sin(\nu m \varphi) J_{\nu m}(\rho), \tag{23}$$

где $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ - угол между осью x и проекцией на плоскость xy прямой, проведенной из начала координат в точку наблюдения.

Построим функции Грина для двух пересекающихся идеально проводящих плоскостей. Для E-волн функция Грина должна удовлетворять уравнению

$$\Delta_2 G^E + k_\perp^2 G^E = -4\pi \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \tag{24}$$

с граничным условием $G^E|_S = 0, k_\perp^2 > 0$.

Представим δ-функцию в правой части выражения (24) в виде произведения двух δ-функций

$$\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{\rho'} \delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi').$$

Будем использовать разложение $\delta(\varphi - \varphi')$-функции в ряд по синусам

$$\delta(\varphi - \varphi') = \frac{2}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\nu m \varphi) \ \sin(\nu m \varphi'), \tag{25}$$

а $\delta(\rho-\rho')$ в интеграл по Бесселевым функциям

$$\delta(\rho-\rho') = \int\limits_0^\infty J_{\nu m}(\rho t)\; J_{\nu m}(\rho' t)\; \rho' t dt \tag{26}$$

Имеем

$$\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') = \frac{2}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(\nu m\varphi)\;\sin(\nu m\varphi')\int\limits_0^\infty J_{\nu m}(\rho t)\; J_{\nu m}(\rho' t)\; t dt. \tag{27}$$

Ищем решение уравнения (24) в виде

$$G^E = \frac{2}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^\infty A_m(t)\;\sin(\nu m\varphi)\; J_{\nu m}(\rho t)\; t dt. \tag{28}$$

Подставляя (27) и (28) в уравнение (24) после дифференцирования получаем

$$\frac{2}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^\infty A_m(t)\;\sin(\nu m\varphi)\; J_{\nu m}(\rho t)\;(k_\perp^2-t^2)\; t dt = \tag{29}$$

$$-\frac{8\pi}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(\nu m\varphi)\;\sin(\nu m\varphi')\int\limits_0^\infty J_{\nu m}(\rho t)\; J_{\nu m}(\rho' t)\; t dt,$$

откуда находим выражение для функции $A_m(t)$

$$A_m(t) = -\frac{4\pi}{k_\perp^2-t^2}\sin(\nu m\varphi')\; J_{\nu m}(\rho' t). \tag{30}$$

Интеграл в правой части выражения (29) можно представить в виде [8]

$$\int\limits_0^\infty J_{\nu m}(\rho t)\; J_{\nu m}(\rho' t)\;\frac{t}{k_\perp^2-t^2}\; dt = \begin{cases} \frac{i\pi}{2}H^{(2)}_{\nu m}(k_\perp\rho')J_{\nu m}(k_\perp\rho) & \rho<\rho' \\ \frac{i\pi}{2}H^{(2)}_{\nu m}(k_\perp\rho)J_{\nu m}(k_\perp\rho') & \rho>\rho'. \end{cases} \tag{31}$$

Окончательно получаем

$$G^E = \begin{cases} -\frac{i4\pi^2}{\alpha}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sin(\nu m\varphi)\;\sin(\nu m\varphi')H^{(2)}_{\nu m}(k_\perp\rho')J_{\nu m}(k_\perp\rho) & \rho<\rho' \\ -\frac{i4\pi^2}{\alpha}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sin(\nu m\varphi)\;\sin(\nu m\varphi')H^{(2)}_{\nu m}(k_\perp\rho)J_{\nu m}(k_\perp\rho') & \rho>\rho'. \end{cases} \tag{32}$$

Для H-волн функция Грина должна удовлетворять уравнению

$$\Delta_2 G^H + k_\perp^2 G^H = -4\pi\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \tag{33}$$

с граничным условием $\frac{\partial G^E}{\partial n}|_S = 0, k_\perp^2 > 0$.

Используя разложения $\delta(\varphi - \varphi')$-функции в ряд по косинусам

$$\delta(\varphi - \varphi') = \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos(\nu m\varphi)\ \cos(\nu m\varphi') \qquad \epsilon_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m > 0 \end{cases} \tag{34}$$

и проводя вычисления, аналогичные выполненым ранее при построении функции Грина G^E, получаем

$$G^H = \begin{cases} \frac{-i2\pi^2}{\alpha} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \epsilon_m \cos(\nu m\varphi)\ \cos(\nu m\varphi') H_{\nu m}^{(2)}(k_\perp \rho') J_{\nu m}(k_\perp \rho) & \rho < \rho' \\ \frac{-i2\pi^2}{\alpha} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \epsilon_m \cos(\nu m\varphi)\ \cos(\nu m\varphi') H_{\nu m}^{(2)}(k_\perp \rho) J_{\nu m}(k_\perp \rho') & \rho > \rho'. \end{cases} \tag{35}$$

Электромагнитные поля с помощью функции Грина определяются из соотношений

$$E = \int G^E(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') i k_\perp \varrho d\boldsymbol{\rho}' \tag{36}$$

$$H = \int G^H(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') (\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y}) d\boldsymbol{\rho}'. \tag{37}$$

Плотность заряда и плотность тока частицы, движущейся с постоянной скоростью v по радиусу, лежащему в плоскости xy, и под углом φ_o к оси x (см. рис.1) в цилиндрической системе координат, описываются выражениями

$$\varrho = \frac{q}{\rho}\ \delta(\rho - vt)\ \delta(\varphi - \varphi_o)\ \delta(z)$$

$$j_\rho = \frac{qv}{\rho}\ \delta(\rho - vt)\ \delta(\varphi - \varphi_o)\ \delta(z)$$

$$j_\varphi = 0$$

Фурье представления по ω и k_z плотности заряда и плотности тока имеют вид

$$\varrho = \frac{q}{(2\pi)^2 v\rho} \delta(\varphi - \varphi_o)\ e^{-i\chi\rho} \tag{38}$$

$$j = \frac{q}{(2\pi)^2 \rho} \delta(\varphi - \varphi_o)\ e^{-i\chi\rho}, \tag{39}$$

где $\chi = \frac{\omega}{v}$.

Подставляя функцию Грина G^H (35) и плотность тока (39) в (37), получаем выражение для поля переходного излучения

$$H_z = \frac{iq}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \int_0^{\alpha} \cos(\nu m\varphi)\ \cos(\nu m\varphi')\delta'(\varphi' - \varphi_0)d\varphi' \times \tag{40}$$

$$\left[\int_0^{\rho} H_{\nu m}^{(2)}(k_\perp\rho)J_{\nu m}(k_\perp\rho')\frac{e^{-i\chi\rho'}}{\rho'}d\rho' + \int_{\rho}^{\infty} H_{\nu m}^{(2)}(k_\perp\rho')J_{\nu m}(k_\perp\rho)\frac{e^{-i\chi\rho'}}{\rho'}d\rho'\right].$$

Интегрируя по $d\varphi'$ и учитывая, что член с $m = 0$ равен нулю получаем

$$H_z = \frac{-iq}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} (\nu m)\sin(\nu m\varphi_0)\ \cos(\nu m\varphi) \times \tag{41}$$

$$\left[\int_0^{\rho} H_{\nu m}^{(2)}(k_\perp\rho)J_{\nu m}(k_\perp\rho')\frac{e^{-i\chi\rho'}}{\rho'}d\rho' + \int_{\rho}^{\infty} H_{\nu m}^{(2)}(k_\perp\rho')J_{\nu m}(k_\perp\rho)\frac{e^{-i\chi\rho'}}{\rho'}d\rho'\right].$$

В волновой зоне при $\rho \to \infty$ поле H_z равно

$$H_z = \frac{-iq}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} (\nu m)\ \sin(\nu m\varphi_0)\ \cos(\nu m\varphi)\ H_{\nu m}^{(2)}(k_\perp\rho)\int_0^{\infty} J_{\nu m}(k_\perp\rho')\frac{e^{-i\chi\rho'}}{\rho'}d\rho'. \tag{42}$$

Так как $k_\perp \leq \omega$, следовательно всегда $\chi > k_\perp$. В этом случае интеграл в правой части (42) равен [9]

$$\int_0^{\infty} J_{\nu m}(k_\perp\rho')\frac{e^{-i\chi\rho'}}{\rho'}d\rho' = \frac{k_\perp^{\nu m}e^{-i\nu m\pi/2}}{\nu m(\chi + \sqrt{\chi^2 - k_\perp^2})^{\nu m}}. \tag{43}$$

Подставляя (43) в (42) и учитывая асимптотику функций Ганкеля

$$H_p^{(1,2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{\pm i(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{2})},$$

получаем

$$H_z = \frac{-iq}{\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi k_\perp\rho}}\ e^{-i(k_\perp\rho - \frac{\pi}{4})} \sum_{m=1}^{\infty}\ k_\perp^{\nu m}\,\frac{\sin(\nu m\varphi_0)\ \cos(\nu m\varphi)}{(\chi + \sqrt{\chi^2 - k_\perp^2})^{\nu m}} = \tag{44}$$

$$\frac{-i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi k_\perp\rho}}\ e^{-i(k_\perp\rho - \frac{\pi}{4})}K_H(k_z).$$

Через $K_H(k_z)$ обозначена функция

$$K_H(k_z) = \frac{2q}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} k_\perp^{\nu m} \frac{\sin(\nu m\varphi_0)\ \cos(\nu m\varphi)}{(\chi + \sqrt{\chi^2 - k_\perp^2})^{\lambda m}} = \tag{45}$$

$$Im\left[\frac{q}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_\perp^{\nu m}}{(\chi + \sqrt{\chi^2 - k_\perp^2})^{\nu m}} \left(e^{i\nu m(\varphi_0 - \varphi)} + e^{i\nu m(\varphi_0 + \varphi)}\right)\right] = Im\left[\frac{q}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (h_+^m + h_-^m)\right]$$

$$K_H(k_z) = \frac{qh}{\alpha}\left(\frac{\sin\nu(\varphi_0 - \varphi)}{1 + h^2 - 2h\cos\nu(\varphi_0 - \varphi)} + \frac{\sin\nu(\varphi_0 + \varphi)}{1 + h^2 - 2h\cos\nu(\varphi_0 + \varphi)}\right), \tag{46}$$

где

$$h = \left(\frac{k_\perp}{\chi + \sqrt{\chi^2 - k_\perp^2}}\right)^\nu$$

$$h_+ = \left(\frac{k_\perp}{\chi + \sqrt{\chi^2 - k_\perp^2}} e^{i(\varphi_0 + \varphi)}\right)^\nu \qquad h_- = \left(\frac{k_\perp}{\chi + \sqrt{\chi^2 - k_\perp^2}} e^{i(\varphi_0 - \varphi)}\right)^\nu.$$

Подобным же образом может быть определено электрическое поле волны. Для этого подставим функцию Грина G^E (32) в выражение (36) и после интегрирования получим

$$E_z = \frac{-i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi k_\perp \rho}}\, e^{-i(k_\perp \rho - \frac{\pi}{4})} K_E(k_z), \tag{47}$$

где через $K_E(k_z)$ обозначена функция

$$K_E(k_z) = \frac{2k_z q}{\alpha v\sqrt{\chi^2 - k_\perp^2}} \sum_{m=1}^{\infty} k_\perp^{\nu m} \frac{\sin(\nu m\varphi_0)\ \sin(\nu m\varphi)}{(\chi + \sqrt{\chi^2 - k_\perp^2})^{\nu m}} = \tag{48}$$

$$Re\frac{k_z q}{\alpha v\sqrt{\chi^2 - k_\perp^2}} \sum_{m=0}^{\infty} (h_+^m - h_-^m)$$

$$K_E(k_z) = \frac{k_z q}{\alpha v\sqrt{\chi^2 - k_\perp^2}}\left(\frac{1 - h\cos\nu(\varphi_0 - \varphi)}{1 + h^2 - 2h\cos\nu(\varphi_0 - \varphi)} - \frac{1 - h\cos\nu(\varphi_0 + \varphi)}{1 + h^2 - 2h\cos\nu(\varphi_0 + \varphi)}\right). \tag{49}$$

Зная выражения описывающие E_z и H_z составляющие электромагнитной волны, можно определить все остальные компоненты. Для цилиндрической системы координат имеем

$$E_\rho = -\frac{1}{k_\perp^2 \rho}\left(ik_z\rho\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + i\omega\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right),\ E_\varphi = -\frac{1}{k_\perp^2 \rho}\left(ik_z\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - i\omega\rho\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right) \tag{50}$$

$$H_\rho = \frac{1}{k_\perp^2 \rho}\left(i\omega \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - ik_z\rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right),\ H_\varphi = -\frac{1}{k_\perp^2 \rho}\left(i\omega\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + ik_z \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right). \tag{51}$$

Дифференцируя и оставляя основные члены, получаем

$$E_\rho = -\frac{k_z}{k_\perp}E_z, \qquad E_\varphi = \frac{\omega}{k_\perp}H_z \tag{52}$$

$$H_\rho = -\frac{k_z}{k_\perp}H_z, \qquad H_\varphi = -\frac{\omega}{k_\perp}\ E_z. \tag{53}$$

Для определения энергии W излученной в интервал частот $d\omega$ в телесном угле $d\Omega$ необходимо вычислить Фурье представление поля по $d\omega$. Для этого умножаем на $e^{-ik_z z}$ выражения для E_z и H_z и интегрируем по dk_z. Поскольку мы рассматриваем поля на больших расстояниях от ребра (при $\rho \to \infty$), то интегрирование можно провести методом стационарной фазы. В результате имеем

$$E_z = K_E(\omega\cos\theta)\frac{e^{-i\omega r}}{r}, \qquad H_z = K_H(\omega\cos\theta)\frac{e^{-i\omega r}}{r} \tag{54}$$

где через θ обозначен угол между продольной осью z и прямой направленной в точку наблюдения. Функции K_E и K_H можно представить в виде

$$K_E(\omega\cos\theta) = \frac{q\cos\theta}{\alpha\sqrt{1-v^2\sin^2\theta}}\left(\frac{1-h\cos\nu(\varphi_0-\varphi)}{1+h^2-2h\cos\nu(\varphi_0-\varphi)} - \right. \tag{55}$$

$$\left. - \frac{1-h\cos\nu(\varphi_0+\varphi)}{1+h^2-2h\cos\nu(\varphi_0+\varphi)}\right)$$

$$K_H(\omega\cos\theta) = \frac{qh}{\alpha}\left(\frac{\sin\nu(\varphi_0-\varphi)}{1+h^2-2h\cos\nu(\varphi_0-\varphi)} + \right. \tag{56}$$

$$\left. + \frac{\sin\nu(\varphi_0+\varphi)}{1+h^2-2h\cos\nu(\varphi_0+\varphi)}\right)$$

$$h = \left(\frac{v\sin\theta}{1+\sqrt{1-v^2\sin^2\theta}}\right)^\nu \tag{57}$$

$$E_\rho = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} E_z, \qquad E_\varphi = \frac{1}{\sin\theta} H_z \tag{58}$$

$$H_\rho = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} H_z, \qquad H_\varphi = -\frac{1}{\sin\theta} E_z. \tag{59}$$

При выбранной нормировке энергия W, излучаемая в интервал частот $d\omega$ в единицу телесного угла $d\Omega$, определяется выражением

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = H_\omega H_\omega^* r^2. \tag{60}$$

Учитывая, что $H_\omega = \frac{\sqrt{K_H^2 + K_E^2}}{\sin\theta} \frac{e^{i\omega r}}{r}$, получаем

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{K_H^2 + K_E^2}{\sin^2\theta}. \tag{61}$$

Соотношения (61), (55) и (56) позволяют описать пространственное распределение интенсивности переходного излучение частицы вылетающей из ребра двугранного угла.

Особенности переходного излучения в двугранном угле

Будем рассматривать угловые распределения излучения в плоскости xy. В этом случае угол θ между продольной осью z и прямой, направленной в точку наблюдения, равен $\pi/2$. Обозначим через $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ приведенную энергию частицы.

На рис.2 приведены угловые распределения интенсивности в плоскости xy при различных углах раствора. Частицы инжектируются вдоль биссектрисы двугранного угла, т.е. при условии ($\varphi_o = \alpha/2$), а приведенная энергия частиц равна $\gamma = 15$. При больших углах раствора максимальная интенсивность наблюдается под углами $|\varphi - \varphi_o| = \gamma^{-1} \approx 4^\circ$ к скорости частицы. Из рисунка следует, что интенсивность излучения вдоль плоскостей двугранного угла максимальна, когда угол раствора равен $\alpha = 10^\circ \approx 2\gamma^{-1}$. Уменьшение и увеличение угла раствора приводит к снижению этой интенсивности.

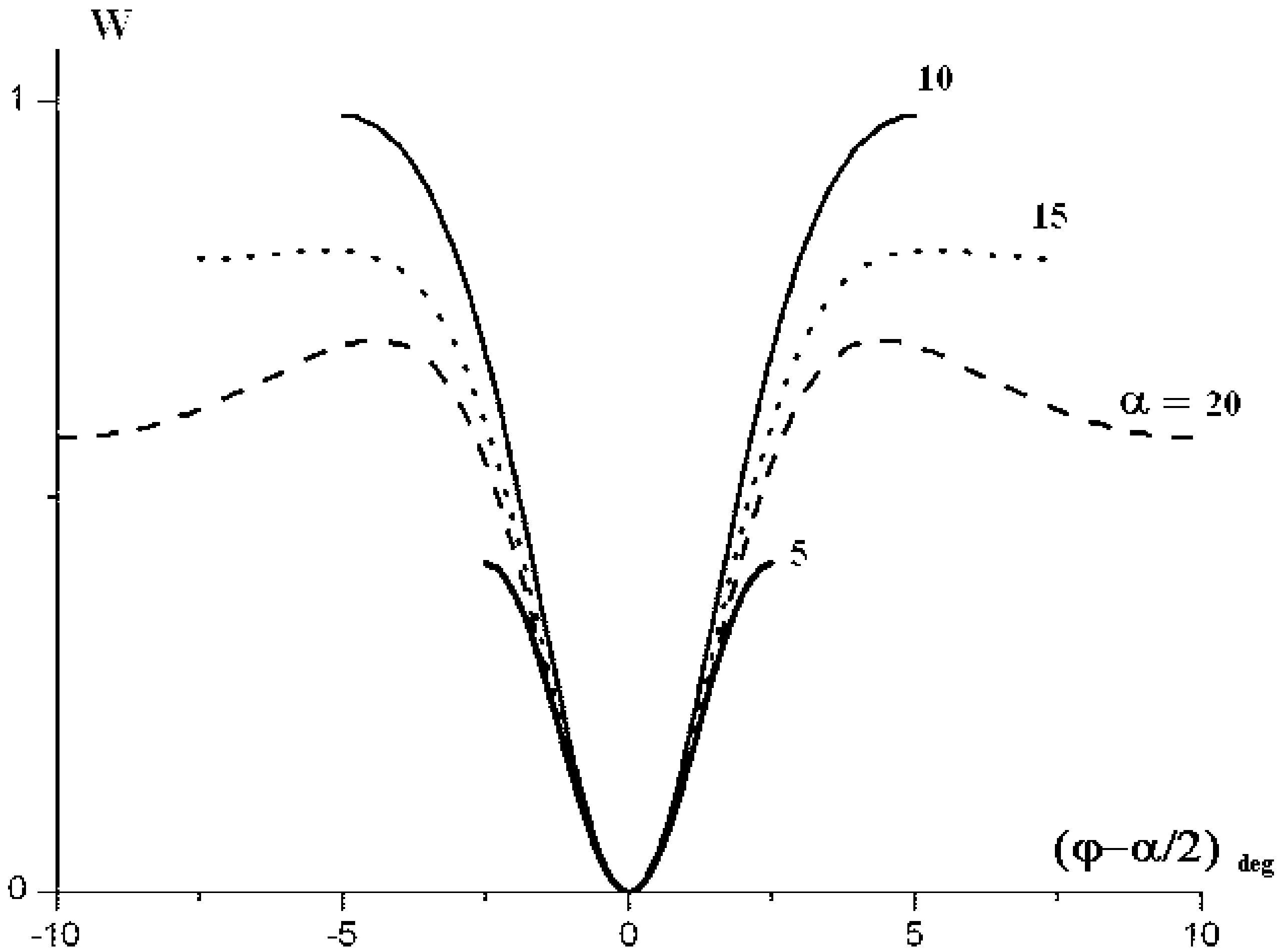

Рис.2 Угловые распределения интенсивности при различных углах раствора. $\varphi_o = \alpha/2$, γ=15

Выражение (56) позволяет определить направление максимальной интенсивности излучения. Экстремум функции K_H будет достигаться при условии

$$\cos(\nu\varphi) = \frac{4h^2\cos(\nu\varphi_o) \pm (1-h^2)\sqrt{(1+h^2)^2 - 4h^2\cos^2(\nu\varphi_o)}}{2(1+h^2)h} = X. \quad (62)$$

В том случае, когда частица инжектируется вдоль биссектисы двугранного угла (т.е.$\varphi_o = \alpha/2$), $\cos(\nu\varphi_o) = 0$, и углы φ^+_{max} и φ^-_{max}, под которыми наблюдается максимальная интенсивность $W^{\pm}_{max}$, совпадают по величине и отличаются знаками. Угол $\varphi^+_{max} > \varphi_o$, а угол $\varphi^-_{max} < \varphi_o$. Если частица инжектируется под другими углами (т.е.$\varphi_o \neq \alpha/2$) , то в общем случае $W^+_{max} \neq W^-_{max}$ и $\varphi^+_{max} \neq \varphi^-_{max}$.

Если $|X| < 1$, интенсивность излучения проходит через максимум в пространстве между гранями двугранного угла. Интенсивность в максимумах равна

$$\frac{dI^{\pm}_{max}}{d\omega d\Omega} = \left(\frac{q\sin(\nu\varphi_o)(1+h^2)^2}{2\alpha(1-h^2)[\sqrt{(1+h^2)^2-4h^2\cos^2(\nu\varphi_o)} \pm (1-h^2)\cos(\nu\varphi_o)]}\right)^2. \tag{63}$$

Исследование зависимости X от $\cos(\nu\varphi_o)$ показывает, что для выполнения условия $|X| < 1$ хотя бы для одного значения φ необходимо, чтобы $|X| < 1$ при $\cos(\nu\varphi_o) = 1$. Это возможно, если

$$\frac{4h^2 - (1-h^2)^2}{2(1+h^2)h} > -1, \tag{64}$$

что ведет к условию $h > 2 - \sqrt{3}$ или

$$\gamma > \frac{1 + (2-\sqrt{3})^{\frac{2}{\nu}}}{1 - (2-\sqrt{3})^{\frac{2}{\nu}}}. \tag{65}$$

Для того чтобы при некоторых углах инжекции φ_o выполнялось условие $|X| < 1$ для двух различных углов наблюдения φ, необходимо чтобы $|X| < 1$ при $\cos(\nu\varphi_o) = 0$. В этом случае

$$\frac{(1-h^2)(1+h^2)}{2(1+h^2)h} < 1, \tag{66}$$

что ведет к условию $h > \sqrt{2} - 1$ или

$$\gamma > \frac{1 + (\sqrt{2}-1)^{\frac{2}{\nu}}}{1 - (\sqrt{2}-1)^{\frac{2}{\nu}}}. \tag{67}$$

Угол, при котором излучение равно нулю, определяется из решения уравнения

$$(1+h^2)\cos(\nu\varphi) - 2h\cos(\nu\varphi_o) = 0, \tag{68}$$

что дает

$$\cos(\nu\varphi) = \frac{2h\cos(\nu\varphi_o)}{(1+h^2)}. \tag{69}$$

Если $|X| \geq 1$, интенсивность излучения достигает максимумов на плоскостях двугранного угла при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$. Величина интенсивности в этом случае равна

$$\frac{dW^{\pm}_{max}}{d\omega d\Omega} = \left(\frac{2qh\sin(\nu\varphi_o)}{\alpha[1+h^2 \pm 2h\cos(\nu\varphi_o)]}\right)^2. \tag{70}$$

На рис.3 приведены угловые распределения излучения при инжекции частиц с энергией $\gamma = 15$ под углом $\varphi_{=}2^\circ$ к биссектрисе двугранного угла. Зависимости построены для различных углов раствора α. Видно, что при углах раствора $\alpha >> \gamma^{-1}$ $(\alpha = 60^\circ - 90^\circ)$ отклонение направления инжекции от биссектрисы двугранного угла практически не нарушает симметрии углового распределения. Асимметрия становится заметной при углах раствора $\alpha = 30^\circ - 20^\circ$. При угле раствора $\alpha \simeq 2\gamma^{-1}$ интенсивности излучения вдоль плоскостей угла различаются в 3.5 раза.

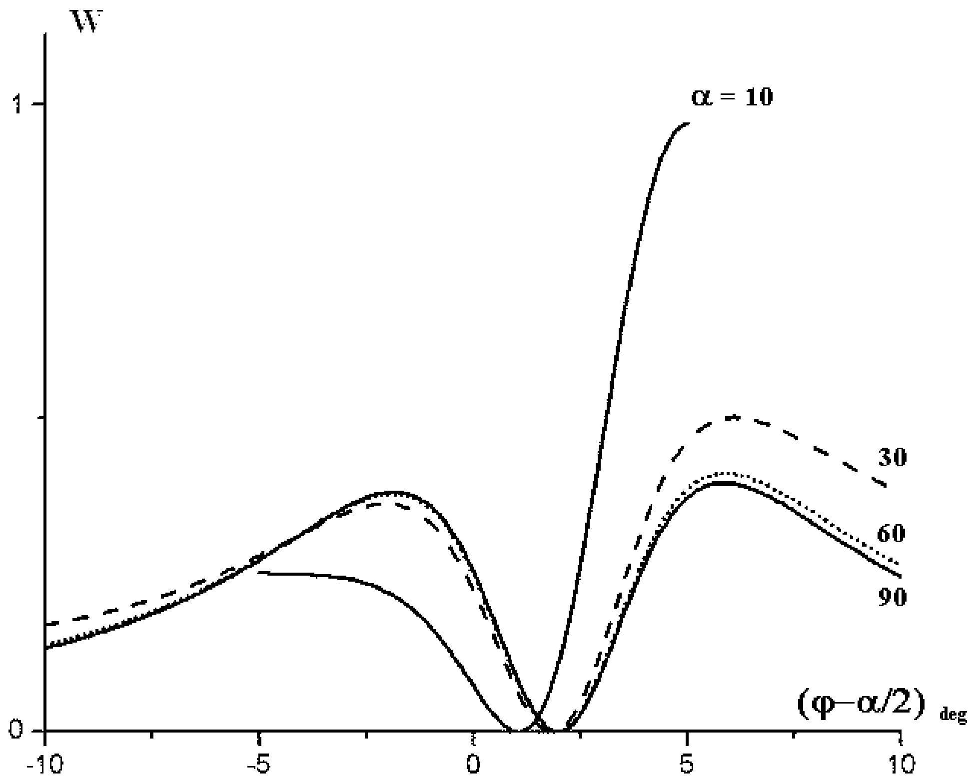

Рис.3 Угловые распределения интенсивности при различных углах раствора. $\varphi_o - \alpha/2 = 2^\circ$ γ=15

Заключение

Решена задача возбуждения переходного излучения в двугранном угле. Получены выражения описывающие пространственное распределение излучения. Показано, что зависимость угловых распределений излучения в двугранном угле от энергии и направления движения частиц более сильная, чем в случае переходного излучения на плоской границе раздела. Это расширяет возможности использования переходного излучения, в частности, для диагностики параметров заряженных частиц.

Авторы благодарны Б.М.Болотовскому за обсуждение работы.

Литература

1. В.Л.Гинзбург, В.Н.Цытович. Переходное излучение и переходное рассеяние. Наука, М., 1984.

2. В.Л.Гинзбург, И.М.Франк. ЖЭТФ, **16**, 15 (1946).

3. M.I.Ryazanov and A.N.Safronov, Laser Phys. **6**, No.4, 708 (1996).

4. А.В.Серов, Б.М.Болотйовский, ЖЭТФ, **131**, 5, (2007).

5. А.В.Серов. ЖЭТФ, **135**, 3, (2009).

6. Л.А.Вайнштейн. Электромагнитные волны. Радио и связь, М., 1988

7. Л.Фелсен, Н.Маркувиц. Излучение и рассеяние волн. Мир, М., 1978

8. А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев. Интегралы и ряды. Наука,

М., 1981