

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК



ПРЕПРИНТ

Е.П.ОРЛОВ, И.М.СИЗОВА

**О ПОДОБИИ И УНИВЕРСАЛЬНЫХ  
ФУНКЦИЯХ СТАТИСТИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ  
ПРОЦЕССОВ**

Москва 2008

## **АННОТАЦИЯ**

Показано, что статистические характеристики стационарных узкополосных гауссовских случайных процессов с различными контурами спектральной плотности подчиняются закону подобия и могут быть представлены в универсальном безразмерном виде. Коэффициентом подобия двух таких процессов выступает отношение их времен корреляции. Исследована трансформация универсальных функций, описывающих статистические характеристики случайного процесса при деформации контура его спектральной плотности. Обнаружено, что при переходе от «одногогорбого» контура к «двугорбому» на определенной его стадии происходит качественное изменение структуры этих универсальных функций. Найден параметр, позволяющий описать процесс трансформации, и определено его значение, при котором происходит качественное изменение структуры функций.

## **ABSTRACT**

It is shown that the statistical properties of the narrow-band Gaussian random processes with different spectral density profiles follow the similarity law and can be displayed in universal dimensionless form. The similarity coefficient of two such processes is the relation of its correlation times. The transformation of universal functions describing the statistical properties of random process under deformation of its spectral density profile is investigated. The qualitative change of universal function structure in a definite stage of the profile conversion from "onehumped" form to "twohumped" is revealed. The parameter that let us describe this transformation process is found and the parameter value that fits the qualitative change of function structure is determined.

## Содержание

|  | Стр. |
|--|------|
| Введение                                   | 4    |
| Исходные соотношения                       | 5    |
| «Одногорбый» контур спектральной плотности | 8    |
| «Двугорбый» контур спектральной плотности  | 23   |
| Заключение                                 | 49   |
| Список литературы                          | 50   |

## Введение

В работах [1-4] нами было обнаружено и исследовано свойство подобия статистических характеристик квантового шума оптических усилителей с различными коэффициентами усиления и различными контурами линий усиления. Были рассмотрены характеристики усилителей как с «одногогорбыми» симметричными контурами, т.е. с одним максимумом в центре линии, так и с «двугорбыми» симметричными контурами, т.е. имеющими в центре провал и два симметричных максимума по бокам.

Было показано, что при достаточно больших коэффициентах усиления каждая из рассмотренных в [1–4] статистических характеристик квантового шума оптических усилителей может быть с хорошей точностью описана своей универсальной функцией. Для каждой такой универсальной функции, как в случае «одногогорбых», так и для «двугорбых» контуров линии усиления, удалось получить набор аналитических представлений, отвечающий некоторому набору конкретных контуров линии усиления в пределах бесконечно больших коэффициентов усиления. Несмотря на существенное различие этих аналитических представлений, они дают почти одинаковые числовые значения, что и позволило сделать вывод о существовании универсальных функций, описывающих каждую из рассмотренных в [1–4] статистических характеристик.

Эти аналитические представления универсальных функций описывают статистические характеристики не только квантового шума оптических усилителей, а вообще произвольного случайного процесса с необходимым набором свойств, к каковым относятся: стационарность процесса, гауссова статистика его функции распределения, узкополосность и симметричность относительно центральной частоты  $\omega_0$  его спектральной плотности. Однако, выводя аналитические представления универсальных функций из частного случайного процесса, мы даже в случае «одногогорбых» контуров получили эти представления в результате ряда приближений; хотя и оказалось, что область их применимости шире. В случае же «двугорбых» контуров построение аналитических представлений универсальных функций потребовало ещё большего количества приближений, не всегда до конца обоснованных. И они оказались громоздкими, трудно обозримыми, а в промежуточном случае перехода от «двугорбых» контуров к «одногогорбым» вообще не работающими.

Цель данной работы – восполнить указанные пробелы. Как будет показано далее, если исходить непосредственно из спектральной плотности случайного процесса вместо наблюдаемого форм-фактора линии усиления квантового усилителя, то результаты работ [1-4] получаются вообще без всяких приближений. Кроме того, в случае «одногогорбых» контуров так будут получены наборы новых аналитических представлений универсальных функций, а в случае «двугорбых» контуров - несколько точных наборов представлений. Некоторые из них по числовым значениям почти совпадут с «приблизёнными» представлениями работы [4]. Однако, в отличие от последних, они проще и, что особенно важно, пригодны для описания перехода к случаю «одногогорбых» контуров. Это даёт возможность рассмотреть аналог критерия Релея в структуре универсальных функций при таком переходе.

### Исходные соотношения

Итак, предположим, что имеется случайный процесс с перечисленными выше свойствами - узкополосный, стационарный, гауссовский, с симметричным спектром, например, оптический сигнал. Используем его комплексное представление.

$$A(t) \approx A(t)e^{i\omega_0 t} + k.c.$$

Т.к. случайный процесс узкополосный ( $\omega \approx \omega_0$ ), то физически оправдана именно такая запись сигнала в форме колебания на несущей частоте  $\omega_0$  со случайной огибающей  $A(t)$ . Тогда коэффициент корреляции этого случайного процесса имеет вид [5] (мы будем использовать обозначения, используемые в работах [1–4]).

$$K(\tau) \approx \frac{\langle A(t)A^*(t+\tau) \rangle}{\langle |A(t)|^2 \rangle} \approx \gamma(\tau) \cos(\omega_0 \tau) \approx \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\omega,$$

где  $\tau$  – временной интервал между двумя моментами времени, в которые производится наблюдение случайного процесса (в дальнейшем этот временной интервал будем называть временной задержкой, или просто задержкой); функция  $G(\omega)$  имеет смысл нормированной спектральной плотности случайного процесса (по условию она симметрична относительно центральной частоты  $\omega_0$ ), а  $\gamma(\tau)$  является коэффициентом корреляции огибающей  $A(t)$  этого случайного процесса

$$\gamma(\tau) \approx \frac{\langle A(t)A^*(t+\tau) \rangle}{\langle |A(t)|^2 \rangle} \approx \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_0 + \omega) \cos(\omega \tau) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_0 - \omega) \cos(\omega \tau) d\omega. \quad (1)$$

Здесь  $\omega = \omega_0 + \omega$  - сдвиг частоты относительно центральной  $\omega_0$ . Узкополосность случайного процесса оправдывает выделение  $\gamma(\tau)$  из  $K(\tau)$  и допустимость бесконечных пределов интегрирования по  $\omega$  в (1). По теореме Винера-Хинчина (В-Х) спектральная плотность  $G(\omega)$  является фурье-трансформантой коэффициента корреляции  $K(\tau)$  и наоборот, а  $G(\omega_0 + \omega)$  (по условию четная функция от  $\omega$ ) - соответственно, фурье-трансформантой  $\gamma(\tau)$ . Таким образом, задание функции  $G(\omega_0 + \omega)$  полностью определяет и функцию  $\gamma(\tau)$ , и все остальные, однозначно зависящие от них обеих, функции.

Ввиду четности  $G(\omega_0 + \omega)$  относительно  $\omega$  представим  $\gamma(\tau)$  в виде

$$\gamma(\tau) \approx \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega. \quad (2)$$

По формулам обратного Фурье-преобразования

$$S(\omega) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Сравнивая (2) с (1), видим, что  $S(\omega) \approx 2G(\omega_0 + \omega)$  представляет собой удвоенную спектральную плотность рассматриваемого случайного процесса, у которой аргумент - разностная частота. В дальнейшем, говоря о спектральной плотности случайного процесса, будем подразумевать функцию  $S(\omega)$ . К явному виду  $S(\omega)$  в задачах, рассмотренных в [1-4], мы вернемся позже, а пока будем считать, что это просто некоторая четная положительно определенная функция с ограниченным интегралом от нее. Действительно, из (2) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \approx 1. \quad (3)$$

На практике часто требуются статистические характеристики функции мгновенной интенсивности или рассматриваемого случайного процесса, подвергнутого квадратичному детектированию. В силу предположения о гауссовской статистике случайного процесса [5], корреляционная функция флуктуационной части квадрата случайного процесса равна удвоенному квадрату корреляционной функции самого процесса

$$\langle x^2(t)x^2(t+\tau) \rangle \approx \langle x^2(t) \rangle^2 [1 + 2\psi(\tau)].$$

Отсюда (опуская несущественный коэффициент 2, поскольку он все равно в дальнейшем уйдет в нормировку) с помощью теоремы В-Х получаем, что спектральная плотность этой флуктуационной части

$$\begin{aligned} \rho_0(\omega) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_1) * G(\omega_1 + \omega) d\omega_1 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * S(\omega_0 + \omega) d\omega_0 + 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * S(\omega_0 + \omega) d\omega_0}{4} \approx, \quad (4) \\ &\approx \rho_0(\omega) + 0,5 * \rho_0(\omega_0 + \omega) \end{aligned}$$

где

$$\rho_0(\omega) \approx \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \approx \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * S(\omega_0 + \omega) d\omega_0. \quad (5)$$

низкочастотная часть спектральной плотности  $\rho_0(\omega)$ . Ее высокочастотная часть (на частотах  $\omega \gg 2\omega_0$ ), как видно из (4), выражается такой же функцией, что и низкочастотная, но с коэффициентом 0,5 и соответствующим частотным сдвигом. Возможность разделения (4) на два слагаемых и расширение пределов интегрирования в них до бесконечности обусловлены узкополосностью случайного процесса. Эксперимен-

тально это разделение может быть осуществлено с помощью низкочастотного и высокочастотного фильтров.

В процессе квадратичного детектирования и дальнейшей обработки сигнала происходит его усреднение по времени с некоторым эффективным временем усреднения  $T_e$ . Поэтому обратимся теперь к третьей статистической характеристике случайного процесса, рассмотренной в работах [1-4], - нормированному на 2 коэффициенту корреляции усредненного по  $T_e$  квадрата случайного процесса

$$P_{\varphi}(t) = \frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \varphi^2(t - \tau) d\tau$$

Используя уже приведенную выше связь корреляционной функции квадрата случайного гауссовского процесса с корреляционной функцией самого процесса и пренебрегая быстро осциллирующими и быстро затухающими (задержка порядка  $1/\omega_0$ ) членами, что возможно в силу узкополосности процесса, в итоговом выражении для этого коэффициента корреляции получим

$$\begin{aligned} \rho(0, T_e) &= \frac{\langle P_{\varphi}(t) P_{\varphi}(t - T_e) \rangle \langle P_{\varphi}(t) \rangle^2}{2 \langle P_{\varphi}(t) \rangle^2} = \frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \int_0^{T_e} \varphi^2(t - \tau) \varphi^2(t - \tau - T_e) d\tau d\tau \\ &= \frac{\sin^2(\omega_0 T_e / 2)}{(\omega_0 T_e / 2)^2} \int_0^{T_e} \exp(-\omega_0 \tau) \frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \varphi^2(t - \tau) \varphi^2(t - \tau - T_e) d\tau d\tau \\ &= \frac{\sin^2(\omega_0 T_e / 2)}{(\omega_0 T_e / 2)^2} \int_0^{T_e} \exp(-\omega_0 \tau) \frac{1}{2T_e} \int_0^{T_e} \varphi^2(t - \tau) \varphi^2(t - \tau - T_e) d\tau d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

Соответственно, относительная дисперсия усредненного по  $T_e$  квадрата случайного процесса

$$\rho(0, T_e) = \frac{\sin^2(\omega_0 T_e / 2)}{(\omega_0 T_e / 2)^2} \int_0^{T_e} \exp(-\omega_0 \tau) d\tau \frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \varphi^2(t - \tau) \varphi^2(t - \tau - T_e) d\tau \quad (7)$$

Поскольку все статистические характеристики (2,5-7) зависят только от  $S(\omega)$  (четной по нашему предположению), то естественно, что и полученный в [1-4] масштабный фактор, приводящий (2,5-7) к универсальным функциям, также может зависеть только от  $S(\omega)$ .

Как уже говорилось во введении, в указанных работах с точки зрения закона подобия были исследованы статистические характеристики квантового шума оптичес-

ских усилителей с различными контурами линий усиления и различными коэффициентами усиления. Отвечающая этому шуму спектральная плотность определяется наблюдаемым форм-фактором линии усиления  $F(\omega)$  оптического усилителя, который зависит от формы контура линии усиления  $f(\omega)$  и коэффициента усиления в максимуме линии усиления  $K_0$

$$F(\omega) \approx \frac{K_0^{f(\omega)} \approx 1}{K_0 \approx 1}. \quad (8)$$

Поэтому и функция  $S(\omega)$ , выраженная через форм-фактор (8) как

$$S(\omega) \approx F(\omega) / \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega, \quad (9)$$

также зависит от контура линии усиления  $f(\omega)$  и коэффициента усиления в максимуме линии усиления  $K_0$ .

Из (8) и (9) видно, что спектральная плотность  $S(\omega)$  имеет структуру схожую с  $f(\omega)$ . Поэтому при сравнении результатов данной работы с результатами работ [1-4] термины «одногорбый» и «двугорбый» будут одновременно употребляться как по отношению к контуру линии усиления  $f(\omega)$ , так и по отношению к контуру спектральной плотности  $S(\omega)$ .

### «Одногорбый» контур спектральной плотности

Рассмотрим сначала узкополосные, стационарные, гауссовские случайные процессы с «одногорбым» контуром спектральной плотности  $S(\omega)$  (этот термин можно также отнести и к контуру линии усиления оптического усилителя). Результаты работ [1-3] можно переформулировать следующим образом. Статистические характеристики (2,5-7) зависят только от функции  $S(\omega)$  и эта зависимость подчиняется закону приближенного подобия. В том смысле, что для любых двух рассматриваемых случайных процессов с различными контурами спектральной плотности  $S_1(\omega)$  и  $S_2(\omega)$  соответственные функции (2,5-7) почти подобны с коэффициентом подобия  $k_{1,2} \approx \mathcal{O}_c(S_1) / \mathcal{O}_c(S_2)$ , где  $\mathcal{O}_c$  - характерный временной нормировочный множитель.

Поскольку статистические характеристики (2,5-7) являются функционалами на множестве функций  $S(\omega)$ , то их характерные временные и частотные масштабы определяются характерным масштабом функции  $S(\omega)$ . Т.к.  $S(\omega)$  имеет размерность времени и интеграл от нее равен единице (см.(3)), то простейшим временным параметром, который из нее можно получить, будет интеграл от ее квадрата – величина, часто используемая в литературе как одно из определений времени корреляции [5]

$$\mathcal{O}_c \approx \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega}{2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{O} d\mathcal{O}. \quad (10)$$



Именно временной параметр, определяемый (10), согласно [1-3], и является не только характерным временным масштабом функций (2,5-7), но и **масштабным фактором подобия**. Т.е., если на (10) нормировать все с размерностью времени (функции, их аргументы или параметры), а на обратную ему величину - все с размерностью частоты, то нормированные функции (2,5-7) с хорошей точностью совпадут с универсальными зависимостями (для каждой функции своей). Проведем такую нормировку.

– Функция (2), описывающая коэффициент корреляции огибающей, безразмерна, в нуле аргумента равна единице и зависит от координаты времени – временного интервала. Значит, ее нормировка заключается в том, что переписываем ее как функцию аргумента  $\tau / T_c$

$$r(\tau) = S(\tau / T_c) \cos(\omega_c \tau) \quad (11)$$

– При этом в (11) мы, очевидно, подвергли нормировке и функцию  $S(\tau)$ . Поскольку она имеет размерность времени и зависит от аргумента частоты, то в нормированном виде ее надо поделить на (10) и рассмотреть от безразмерного аргумента  $\omega / \omega_c$ , т.е.

$$S(\omega) = S(\omega / \omega_c) / \omega_c \quad (12)$$

При этом равенство (3) сохраняется, но уже для безразмерного аргумента.

– Функция (5), описывающая низкочастотную часть спектральной плотности на выходе квадратичного детектора, как и  $S(\omega)$ , имеет размерность времени и зависит от частоты, поэтому ее также и нормируем. Единственное несущественное отличие заключается в том, что делить функцию (5) будем на  $\omega_c / 2$ . Это связано с тем, что значение (5) в нуле аргумента как раз равно  $\omega_c / 2$ . Тогда нормированная безразмерная функция (5) будет равна единице в нуле. Собственно, именно этот факт и еще один, упомянутый ниже, и натолкнули нас на мысль рассмотреть (10) как фактор подобия, а отношение таких факторов - как коэффициент подобия статистических характеристик случайных процессов с разными контурами спектральной плотности. Выбранный нами числовой множитель перед интегралом в (10) (и взятое для него обозначение) связаны с одним из определений в литературе (см., например, [5]) этого интеграла, называемого временем корреляции выходного шумового сигнала. Безразмерным аргументом нормированной функции (5) является  $\tau / T_c$ .

$$2 \omega_c (\omega_c / 2) \int_0^{\tau} r^2(\tau - \tau') \cos(\omega_c \tau) d\tau' = \frac{\omega_c}{2} \int_0^{\tau} S(\omega / \omega_c) * S(\omega / \omega_c) d\omega \quad (13)$$

– И, наконец, функция (6), описывающая коэффициент корреляции усредненного по  $T_c$  квадрата случайного процесса, и ее частный случай (7) безразмерны, в начале координат по своим аргументам равны 1/2 и после нормировки аргументов

будут зависеть от отношения  $\sigma_e / \sigma_c$  и введенной для (11) переменной  $\xi$  (дисперсия (7), т.е. функция (5) при  $\sigma_e \neq 0$ , зависит лишь от  $\xi$ ). В итоге получим

$$f(\xi) = \frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2} \int_0^{\xi} \cos(\xi - \eta) \frac{f(\eta)}{2\xi} d\eta;$$

$$f(0, \xi) = \frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2} \int_0^{\xi} f(\eta) d\eta. \quad (14)$$

В дальнейшем будем говорить лишь о функции (14), т.е. дисперсии, поскольку в [4] было показано, что  $f(\xi)$  выражается через нее как сумма трех слагаемых от комбинированных аргументов (см. формулу (24) в [4]).

Итак, по итогам работ [1-3] после нормировки функции (11,13-14) почти не зависят от вида порождающей их функции (12), т.е. имеет место подобие функций (2,5-7). Сами порождающие нормированные функции  $S(\xi)$  никаким подобием не обладают. Они различаются и значением в нуле и видом. Объединяет их между собой, кроме свойств функции  $S(\xi)$  - четности, положительной определенности и равенства единице интеграла от нее от нуля до бесконечности как в размерных, так и в безразмерных единицах, - еще два свойства: близость масштабов и, согласно (10), равенство интеграла от  $S^2(\xi)$  тоже константе  $2/\pi$

$$\int_0^{\infty} S^2(\xi) d\xi = 2/\pi.$$

Вид полученных универсальных функций можно описать аналитически, если для каких-то частных  $S(\xi)$  удастся рассчитать (11,13-14). Мы остановились на 5-и таких случаях, когда  $S(\xi)$  представляет собой гауссоиду, экспоненту, параболу, треугольник и прямоугольник:

$$S_g(\xi) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \exp\left\{-\frac{2}{\pi} \xi^2\right\} \quad (15)$$

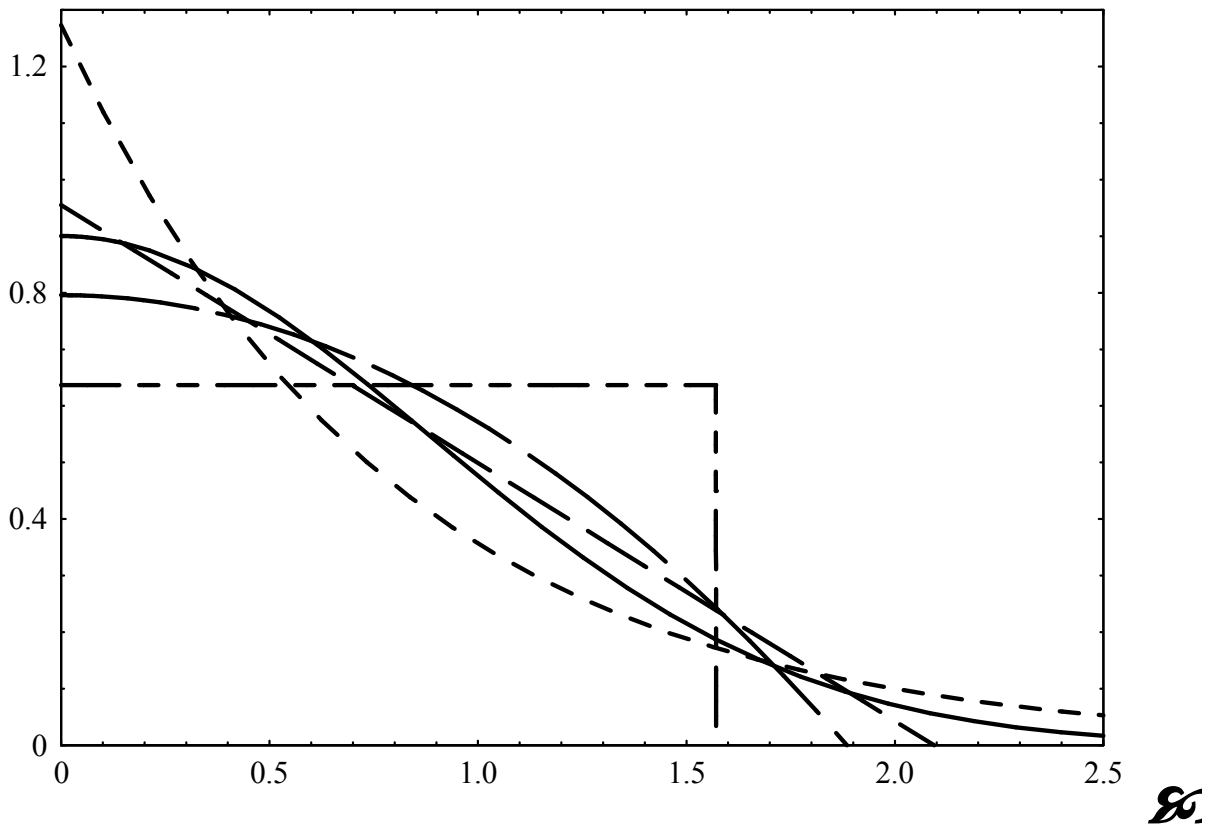
$$S_e(\xi) = \frac{4}{\pi} \exp\left\{-\frac{4}{\pi} |\xi|\right\} \quad (16)$$

$$S_p(\omega) \propto \frac{5}{2\omega} \left[ \frac{5}{3\omega} \right] \left[ \frac{5}{\omega} \right] \left[ \frac{2}{\omega} \right] \left[ \frac{3}{\omega} \right] \left[ \frac{3}{\omega} \right] \quad \left| \omega \right| \propto \frac{3}{5} \quad (17)$$

$$S_t(\omega) \propto \frac{3}{\omega} \left[ \frac{3}{\omega} \right] \left[ \frac{3}{\omega} \right] \left[ \frac{3}{\omega} \right] \left[ \frac{3}{\omega} \right] \quad \left| \omega \right| \propto \frac{2}{3}, \quad (18)$$

$$S_r(\omega) \propto 2/\omega, \quad \left| \omega \right| \propto \omega/2. \quad (19)$$

$S(\omega)$



**Рис.1**

Графики нормированной спектральной плотности  $S(\omega)$  «одногорбого» вида. Длина штрихов кривых на графике увеличивается для кривых в такой последовательности: (16), (18), (17). Для (19) – штрихи разной длины, а кривая (15) изображена сплошной линией.

На рис.1 приведены графики функций (15-19), из которых видно, что, общее по виду у них лишь то, что их локализация по оси абсцисс близка.

Для всех спектральных плотностей (15-19) все функции (11,13-14) рассчитываются аналитически; их формулы приведены в таблицах 1-3, а они сами - на рис.2-4.

Табл.1

| Спектральная плотность | Коэффициент корреляции $\rho(\omega)$ (формула (11))                             |
|------------------------|--|
| $S_g(\omega)$ (15)     | $\rho(\omega) = \exp\left[-\frac{\omega^2}{8}\right]$                            |
| $S_e(\omega)$ (16)     | $\rho(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$  |
| $S_p(\omega)$ (17)     | $\rho(\omega) = 3 \frac{\sin(z) - z \cos(z)}{z^3}$ , где $z = \frac{3\omega}{5}$ |
| $S_t(\omega)$ (18)     | $\rho(\omega) = \frac{\sin(\omega/3)}{\omega/3}$                                 |
| $S_r(\omega)$ (19)     | $\rho(\omega) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$                                 |

Табл.2

| Спектральная плотность | Низкочастотная часть спектра флуктуации квадратичного детектирования $2\Phi_0(\omega)/\sigma_c$ (формула (13))   |
|------------------------|--|
| $S_g(\omega)$ (15)     | $2\Phi_0^g(\omega)/\sigma_c = \exp\left[-\frac{\omega^2}{2}\right]$  |
| $S_e(\omega)$ (16)     | $\frac{2\Phi_0^e(\omega)}{\sigma_c} = \frac{4}{\omega} \exp\left[-\frac{4}{\omega}\right]$   |
| $S_p(\omega)$ (17)     | $\frac{2\Phi_0^p(\omega)}{\sigma_c} = (1-z)^3 [1 + 3z + z^2]$ , где $z = \frac{5}{6\omega}$ и $4 \leq \frac{6\omega}{5}$   |
| $S_t(\omega)$ (18)     | $\frac{2\Phi_0^t(\omega)}{\sigma_c} = \begin{cases} \frac{3}{4} z^2 (2-z), & 0 \leq z \leq 1 \\ 2(z)^3 / 4, & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$ , где $z = \frac{3}{2\omega}$ |
| $S_r(\omega)$ (19)     | $2\Phi_0^r(\omega)/\sigma_c = 1 - \frac{\omega}{2}$ , $4 \leq \omega$  |

Табл.3

| Спектральная плотность | Дисперсия усредненной интенсивности $\langle I \rangle(0, \varphi)$ (формула (14))  |
|------------------------|---|
| $S_g(\varphi)$<br>(15) | $\langle I \rangle_g(0, \varphi) = \frac{2}{\pi} F \left( \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{2} \right),$ где $F(z) = \sqrt{z} \operatorname{erf}(z) - \exp(-z^2)$  |
| $S_e(\varphi)$<br>(16) | $\langle I \rangle_e(0, \varphi) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{4}$  |
| $S_p(\varphi)$<br>(17) | $\langle I \rangle_p(0, \varphi) = \frac{25}{(\pi \varphi^2)^2} F \left( \frac{6 \cos \varphi}{5} \right) \frac{1}{4}$ где $F(z) = \frac{6 \cos^2 z (z^4 - 2z^2 - 6) \cos(z) - z(z^2 - 6) \sin(z) - z^5 \operatorname{si}(z)}{15z^4}$   |
| $S_t(\varphi)$<br>(18) | $\langle I \rangle_t(0, \varphi) = \frac{3}{(\pi \varphi^2)^2} F \left( \frac{2 \cos \varphi}{3} \right)$ где $F(z) = (1 - \cos(z)) \left( 1 - 2 \cos(z) - 2 \frac{\sin(z)}{z} - \frac{1 - \cos(z)}{2z^2} \right) - z \left( 2 \operatorname{si}(2z) - \operatorname{si}(z) - 3 \operatorname{cin}(2z) - \operatorname{cin}(z) \right)$ |
| $S_r(\varphi)$<br>(19) | $\langle I \rangle_r(0, \varphi) = \frac{2}{(\pi \varphi^2)^2} F \left( \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{2} \right)$ где $F(z) = 2 \sin^2(z) - 2z \operatorname{si}(2z) - \operatorname{cin}(2z)$   |

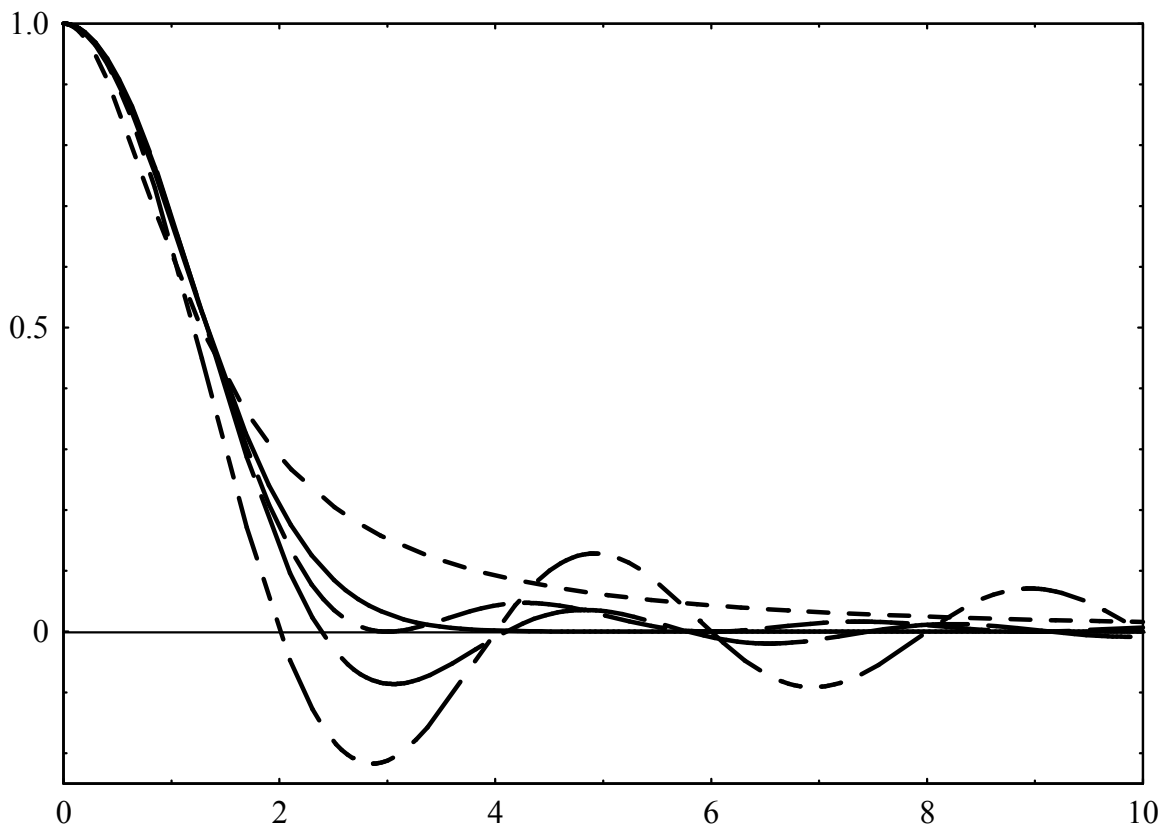
В таблицах 1-3 использованы специальные функции, определяемые выражениями:

$$\operatorname{si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt; \quad \operatorname{cin} x = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt, \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt.$$

Из рис.2-4 видно, что все пять кривых на каждом рисунке так близки между собой, что действительно можно говорить о приближенном равенстве. Худшее совпадение на рис.2, чем на остальных, в нижней части рисунка обусловлено колебательной структурой  $\varphi(4)$ , возникающей из-за ломаных углов функции  $S(\varphi)$  (областей ее негладкости), в природе не имеющих место. Эти колебания накладываются на плавную форму  $\varphi(4)$  от плавной спектральной функции в области малых значений  $\varphi(4)$ , вдали от ее максимума. Поэтому на хвостах  $\varphi(4)$  разброс довольно заме-

тен. У функций же на рис.3-4 этот эффект сглажен интегралами от квадрата  $S(\omega)$  или двойными интегралами, поэтому и равенство лучше.

$\rho_{\theta}(4)$



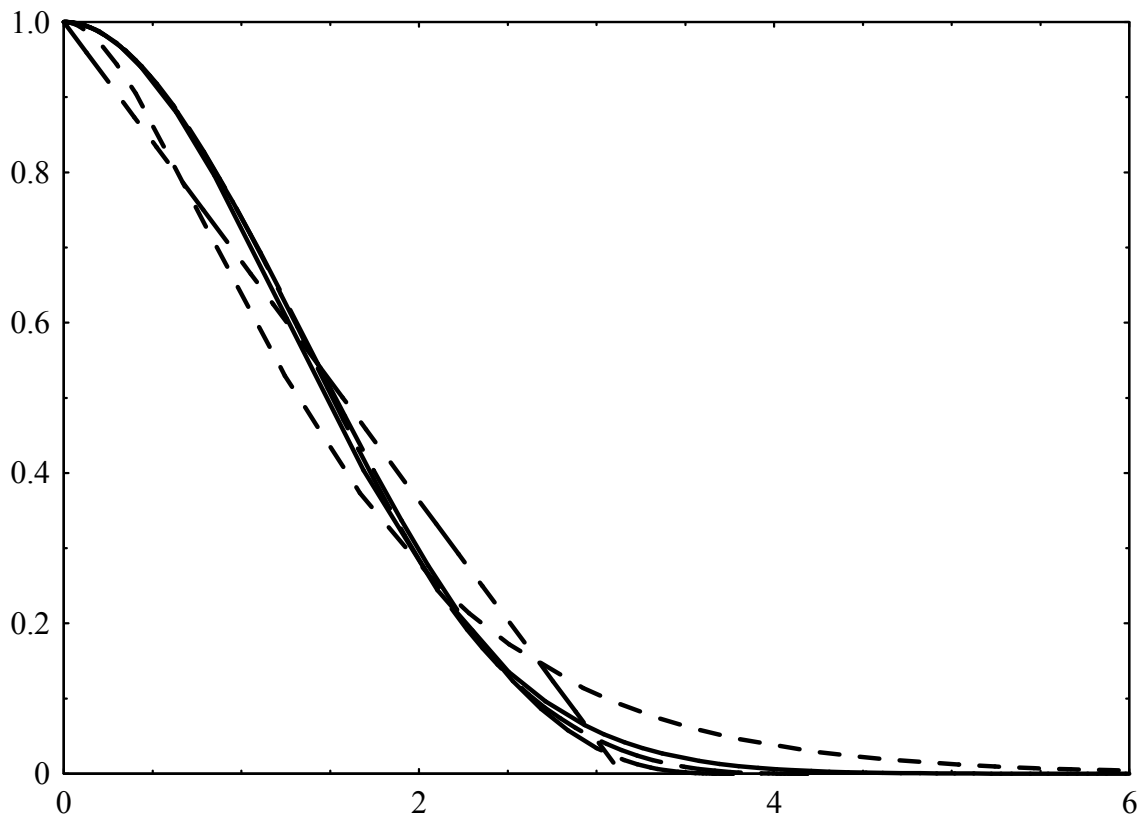
4

Рис.2

Графики нормированного коэффициента корреляции  $\rho_{\theta}(4)$  для спектральных плотностей, приведенных на рис.1. Типы линий кривых соответствуют типам линий рис.1

Если сравнить функции в табл.1-3 с аналитическими представлениями универсальных функций для «одногогорбых» контуров, полученными в [1-3], то оказывается, что точные функции, определяемые спектральными плотностями (15-16,19), равны приближенным выражениям, полученным в [1-3] для контуров, соответственно, в виде параболы, треугольника и прямоугольника при условии  $K_0 \blacklozenge \blacksquare$ . Два новых комплекта функций для  $S(\omega)$  (17-18) расширяют наш набор аналитических представлений универсальных функций по сравнению с [1-3]. Поскольку все соответственные представления почти совпадают, в качестве универсальных функций можно взять любой набор из предложенной пятерки.

$$2\Phi_0(\omega)/\sigma_c$$



4

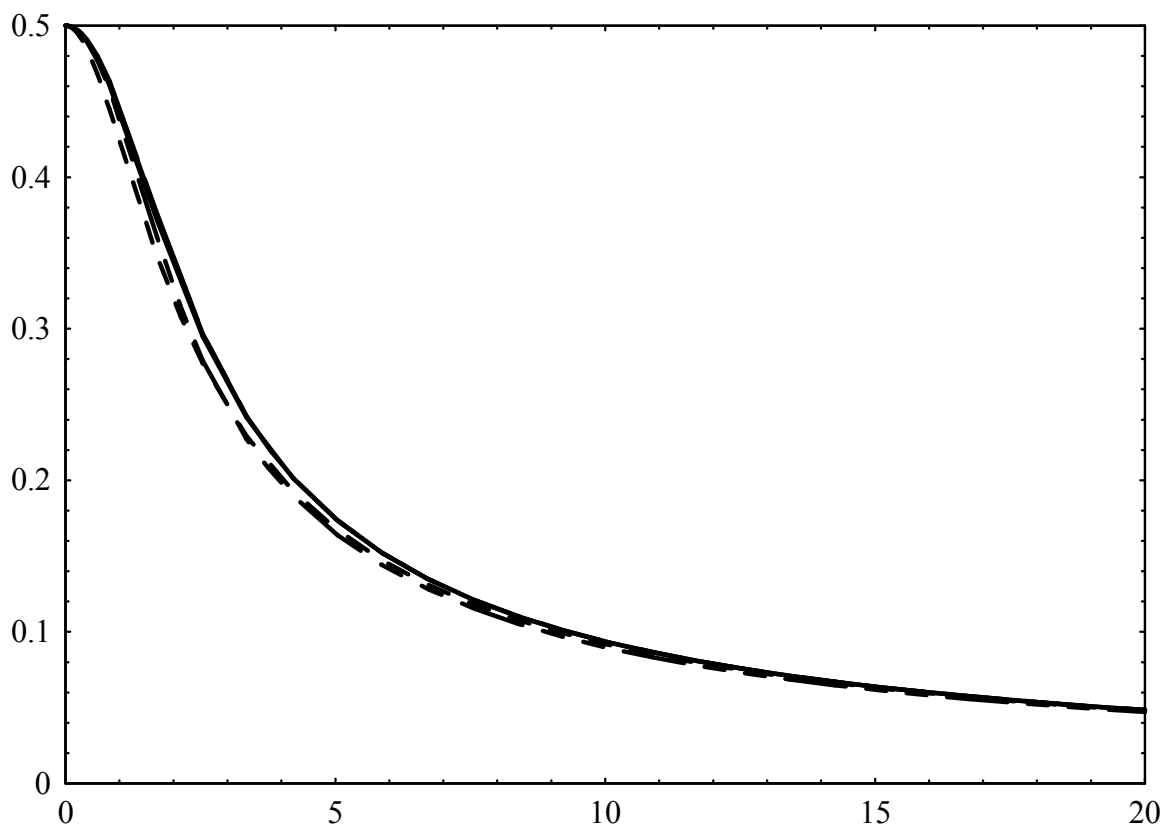
**Рис.3**

Графики низкочастотной части спектра флуктуации квадратичного детектирования  $2\Phi_0(\omega)/\sigma_c$  для спектральных плотностей с рис.1. Типы линий соответствуют рис.1

Как мы уже писали в [1-3], полученные аналитические представления для универсальных функций статистических характеристик (11,13-14) практически являются крайними случаями для большинства реальных ситуаций. Т.е. реальные кривые попадают в промежуток разброса кривых на рис.2-4.

Интересно также подтвердить еще один вывод из приложения 1 работы [2]. Возьмем, например, рис.4, на котором совпадение нормированных функций  $\psi(0, \vartheta)$  наиболее впечатляющее. В то же время табл.3 показывают, сколь различны формулы для этих одинаковых функций. У пяти функций совпадают только значения в нуле ( $\psi(0,0) \approx 0,5$  из (6)) и первые члены асимптотического разложения на бесконечности, т.е.  $\psi(0, \vartheta) \approx 1/\vartheta$ . Последний факт строго следует из (14) и был основным поводом, натолкнувшим нас на рассмотрение параметра (10) как фактора подобия. Так вот, новые функции  $\psi_p(0, \vartheta)$  и  $\psi_t(0, \vartheta)$ , также как и три уже приведенные в [1-3], различны между собой по следующим членам как разложения в ряд Тейлора в нуле  $\vartheta$ , так и

$\sigma(0, \omega)$



**Рис.4**

Графики дисперсии усредненной интенсивности  $\sigma(0, \omega)$  для спектральных плотностей, приведенных на рис.1. Типы линий кривых соответствуют типам линий рис.1

асимптотического разложения на бесконечности. Приведем в дополнение к формулам в приложении 1 в [2] соответствующие формулы для новых  $\sigma(0, \omega)$  (для остальных функций ситуация аналогичная):

$$\sigma_p(0, \omega) = \frac{1}{2} \left[ \frac{3\omega^2}{250} \omega^2 \dots \right] + \frac{1}{2} \left[ \dots \right] \approx 0,118 \omega^2 \dots;$$

$$\sigma_p(0, \omega) = \frac{1}{4\omega^2} \left[ \frac{25}{108\omega^4} \omega^3 \dots \right] + \frac{1}{\omega} \left[ \frac{0,633}{\omega} \frac{0,059}{\omega^3} \dots \right] \dots$$

$$\sigma_t(0, \omega) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega^2}{81} \omega^2 \dots \right] + \frac{1}{2} \left[ \dots \right] \approx 0,122 \omega^2 \dots;$$



$$f_t(0) = \frac{1}{16} \left( \frac{9 \ln 2}{16} - \frac{81}{16} \right) \dots \frac{1}{16} \left( \frac{0,632}{16} - \frac{0,052}{16} \right) \dots$$

Суммируя результаты раздела, можно сказать, что анализ подобия статистических характеристик через спектральную плотность  $S(\omega)$  упрощает и обобщает понимание многих выводов работ [1-3], обосновывает приведенные там формулы как **точные** расчеты через простые виды  $S(\omega)$ , а не приближения при условии  $K_0$  для простых контуров линий, и позволяет расширить количество аналитических представлений универсальных функций рассматриваемых статистических характеристик (мы добавили 2 набора для  $S(\omega)$  в виде параболы и треугольника, но можно взять и другие простые виды  $S(\omega)$ , например, равнобокие трапеции при разных соотношениях оснований; это позволило бы проследить эволюцию перехода от прямоугольного  $S(\omega)$  к треугольному). Рассмотрение функций (11,13-14) через порождающую их функцию  $S(\omega)$ , конечно, не объясняет самого факта приближенного подобия кривых (2,5-7), но, если принять этот факт, то поиск фактора подобия становится почти однозначным. Величина (10) - самый простой и почти единственно разумный кандидат на такой фактор; все остальное либо слишком вычурно, чтобы быть в природе (например,  $\sqrt{\int S^3(\omega) d\omega}$  - тоже имеет размерность времени), либо не обладает однозначностью определения (например, т.к.  $S(\omega)$  имеет размерность времени и зависит от частоты, можно было бы связать фактор с какой-то частью от ее максимума или с величиной, обратной ширине этой функции по какому-то ее уровню, но какую часть и какой уровень брать?). И в этом свете, конечно, полученная в [1-3] браковка остальных рассмотренных там множителей совершенно естественна – они попросту зависят не только от  $S(\omega)$ .

Обсудим теперь более обстоятельно, чем в [1-3], математическое описание того, что мы назвали приближенным подобием функций. В обосновании этого свойства будем опираться на визуальную качественную оценку и два количественных фактора.

Возьмем функции схожего вида, каковыми, вообще говоря, являются почти все нормированные по оси ординат на конкретное число как коэффициенты корреляции, так и спектральные плотности. Основные элементы этого вида – локализация по оси абсцисс и спад до нуля с ростом аргумента (не обязательно монотонно). Тогда о приближенном подобии может идти речь, если, во-первых, можно подобрать масштаб по оси абсцисс так, чтобы области локализации функций максимально сблизилась. И при этом, во-вторых, сами функции оказались еще и весьма близкими друг к другу по оси ординат. Образно говоря, можно говорить о приближенном подобии, если нормированные функции, начерченные с помощью толстых линий, практически совпадают между собой в пределах этих толстых линий. Качественно все это мы и видим на

рис.2-4. Количественно же оценим удачность выбора нормировочного фактора в такой ситуации двумя дополняющими способами.

Подбор масштаба по оси абсцисс оценим варьированием множителя нормировки аргумента относительно выбранного значения, следя при этом за изменением разницы между функциями. Последнюю можно понимать в разных смыслах (при этом может отличаться и окончательный выбор фактор подобия): функции можно сравнивать между собой по максимуму абсолютного или относительного отклонения по оси абсцисс или оси ординат, по интегралу, взятому по всей области определения или его определенной части от модуля или от квадрата отклонения, по модулю интеграла от разности функций или квадратов функций и т.д. Оптимум выбора множителя соответствует минимуму разницы функций. В [2] мы показали, что по ряду разумных критериев сравнения множитель (10) близок к оптимальному, а в целом просто оптимален, учитывая, что поправки на его улучшение по разным критериям, если не равны нулю, то малы и не имеют систематического характера – для разных функций требуется изменить множитель то в одну, то в другую сторону. И для каждой из функций (2,5,7) по какому-то критерию нормировка на (10) точно оптимальна, поскольку соответствующие интегралы - константы. Так,

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 1; \quad \int_0^1 \frac{f(x) - g(x)}{c_{corr}} dx = \frac{1}{2}; \quad \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \frac{1}{2}.$$

Совпадение же функций по оси ординат (после того как оптимально подогнаны масштабы по оси абсцисс) можно оценить, воспользовавшись понятием нечеткого множества, специально введенного в математике для придания математической строгости расплывчатым характеристикам [6]. Нам здесь достаточно будет свойств разумно введенного определения. Вкратце напомним, как это определение строится.

Согласно базовому определению, под нечетким множеством  $C$  в  $Z$  понимается совокупность пар элементов, где один элемент пары - это элемент  $z$  множества  $Z$ , а другой - элемент числовой функции  $\mu_C(z)$  от  $Z$  из интервала от нуля до единицы, называемой функцией принадлежности нечеткого множества  $C$ . Каждое конкретное значение  $\mu_C(z)$  называется степенью принадлежности элемента  $z$  нечеткому множеству  $C$ .

$$C : (z, \mu_C(z)); z \in Z; \mu_C(z) \in [0, 1].$$

Именно выбор функции принадлежности, содержащий естественный произвол, связанный с пониманием задачи, собственно и дает возможность перевести лингвистически расплывчатые понятия на язык математической оценки. Мы рассмотрели несколько вариантов множества  $Z$  как критерия приближенного подобия функций. Совпадение функций будем понимать как нечеткое множество отклонений их друг от друга с функцией принадлежности, дающей численную оценку этому отклонению.

Пусть есть некая опорная функция  $f_0(x)$ , и нас интересует поведение функций на интервале  $x \in [x_1, x_2]$ . На предмет приближенного совпадения будем сравнивать

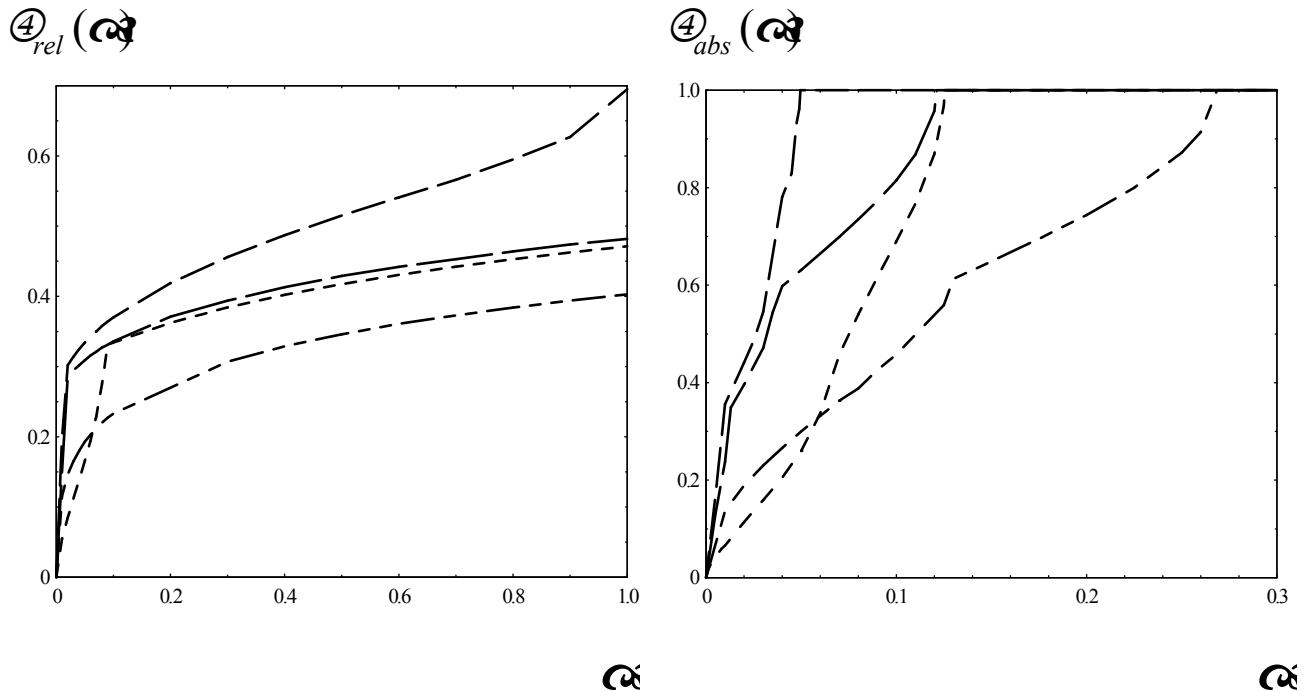
с  $f_0(x)$  функции, визуально ей близкие на указанном интервале. Для каждой такой функции введем понятие нечеткого множества следующим образом. В качестве множества  $Z$  нечеткого множества будем считать отклонения  $\alpha$  по оси ординат сравниваемой функции от опорной. Если рассматривать абсолютные отклонения со знаком, получим одно нечеткое множество, если абсолютные отклонения по модулю - другое, если относительные отклонения по модулю, или без модуля, то третье, четвертое, и т.д. Выбор типа отклонения разумно согласовать с типом отклонения при оценке оптимального фактора нормировки аргумента, описанной выше. В качестве степени принадлежности данного отклонения  $\alpha$  нечеткому множеству приблизительного совпадения сравниваемой и опорной функций определим число, равное отношению совокупной длины отрезков по  $x$  на интервале  $x \in [x_1; x_2]$ , где отклонение функций не превышает  $\alpha$ , к полной длине отрезка -  $x_2 - x_1$  т.е. доли интервала по оси абсцисс, где сравниваемая функция попала в заданный  $\alpha$ -коридор относительно опорной. Таким образом, функция принадлежности равна относительному размеру области заданного уровня отклонения в рассматриваемом смысле.

Так определенная функция принадлежности в нуле отклонения  $\alpha$  равна нулю или конкретному числу, если части функций точно совпадают, не убывает и стремится к единице с ростом  $\alpha$ . Определение формально применимо для сравнения любых функций, заданных на  $x \in [x_1; x_2]$ . Из функции принадлежности не только видно, какая функция точнее совпадает с опорной на интервале  $[x_1; x_2]$  (чем круче рост функции принадлежности, тем лучше совпадение), но и следует практическая численная характеристика совпадения (позволяющая судить, можно ли считать функции подобными для наших задач).

Поскольку в [2] мы показали для трех критериев – для интеграла от квадрата разности функций и модулей интегралов от разности функций и разности квадратов функций, что нормировка аргументов функций (2,5-7) на (10) оптимальна или отличается от таковой на несколько процентов, то логично оценку степени совпадения нормированных функций проводить именно для нормированных на (10) функций (11,13-14). Мы рассчитали вышеупомянутые функций принадлежности для всех трех статистических характеристик (11,13-14) от спектральных плотностей  $S(\omega)$  (16-19). За опорные функции для определенности брались функции (11,13-14) от гауссоиды  $S_g(\omega)$  (15), т.к. все они монотонны и нигде не обращаются в ноль, что позволило рассмотреть как абсолютные, так и относительные по модулю отклонения. Результаты расчетов приведены на рис.5-7.

На рис.5 слева показана функция принадлежности относительного по модулю отклонения функций  $\mu_{\alpha}(\omega)$ , на рис.5 справа – их абсолютного по модулю отклонения. Функции сравнивались на интервале  $\omega \in [0; 5]$ , представляющем наибольший интерес. На рис.6 показаны аналогичные функции принадлежности отклонений функций

$2\varphi_0(\varphi)/\varphi_c$ . Функции сравнивались на интервале  $\varphi \times \omega; 5!$ . И на рис.7 показаны функции принадлежности относительного по модулю отклонения функций  $\varphi(0, \varphi)$  при их сравнении на интервале  $\varphi \times \omega; 20!$ .



$\varphi$

$\varphi$

Рис.5

Функции принадлежности  $\varphi(\varphi)$  отклонения функций  $\varphi(\varphi)$  от  $\varphi^g(\varphi)$ . Слева – для

относительного отклонения  $\varphi_{rel}(\varphi) = \frac{|\varphi(\varphi) - \varphi^g(\varphi)|}{\varphi^g(\varphi)}$ , справа – для абсолютного

$\varphi_{abs}(\varphi) = |\varphi(\varphi) - \varphi^g(\varphi)|$ . Типы линий кривых соответствуют линиям рис.1

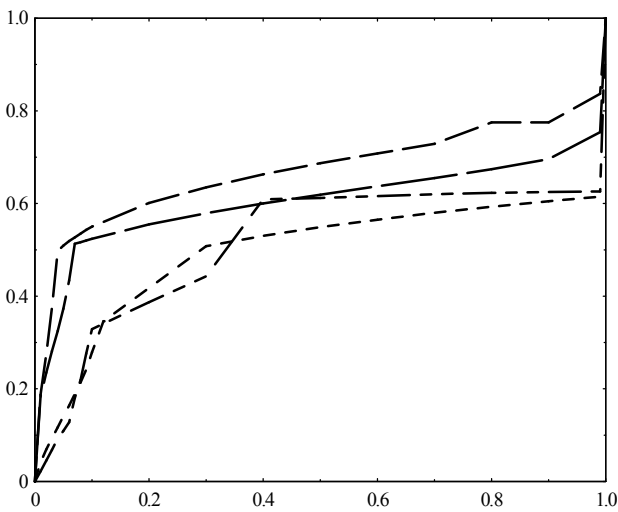
В работе [3] мы предложили для функции  $\varphi_g(0, \varphi)$  удобную аппроксимацию полиномиальными дробями

$$\varphi_{appr}(\varphi) = \frac{1 - \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi}{2 \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi} = \frac{1}{2 \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi} \frac{1}{1 - \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi}$$

где  $\varphi = \frac{2\varphi}{3(11 \varphi 3\varphi)} \approx 1,33$ ,  $\varphi \approx 0,1875 \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \approx 0,783$ . Сплошной кривой на рис.7 показаны

результаты сравнения и этой функции с функцией  $\varphi_g(0, \varphi)$ .

$\mu_{rel}(\omega)$



$\mu_{abs}(\omega)$

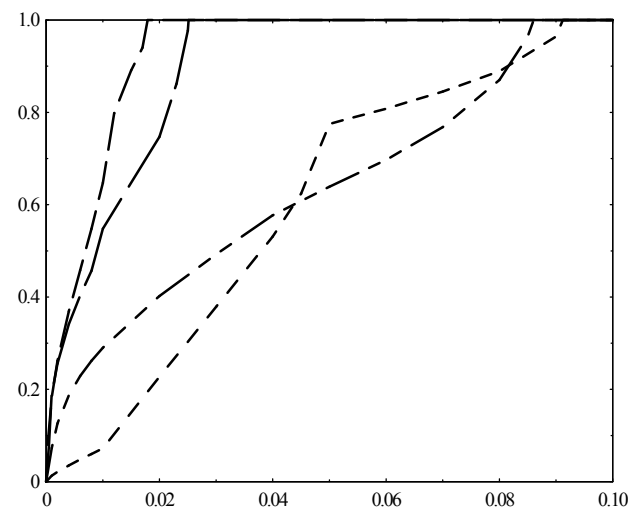


Рис.6

Функции принадлежности  $\mu(\omega)$  отклонения функций  $2\varphi_0(\omega)/\omega_c$  от  $2\varphi_0^g(\omega)/\omega_c$ .

Слева – для относительного отклонения  $\mu_{rel}(\omega) = \frac{|\varphi_0(\omega) - \varphi_0^g(\omega)|}{\varphi_0^g(\omega)}$ , справа –

для абсолютного  $\mu_{abs}(\omega) = \frac{2|\varphi_0(\omega) - \varphi_0^g(\omega)|}{\omega_c}$ . Типы линий соответствуют рис.1

Из рис.5-7 видно, как функции принадлежности дополняют до числа визуальную оценку отклонения функций. Сравнительно невысокие значения функций принадлежности на рис.5 по сравнению с рис.6,7, как уже говорилось, связаны с колебаниями на хвостах функций  $\varphi(\omega)$  вследствие грубости аппроксимации  $S(\omega)$  кусочно-гладкими функциями. Отметим также, что если на рис.4 графики функций  $\varphi(0, \omega)$  практически совпали, то функции принадлежности рис.7 показывают, что это совпадение лежит строго в пределах 6% относительно. Само по себе небыло интересно, что пять совершенно различных выражений, у которых совпадают лишь первые члены разложения в нуле и на бесконечности, не отличаются на всей области своего определения от нуля до бесконечности относительно друг друга более, чем на 6% (а некоторые и на 1%).

Подобие функций (2,5,7) можно сформулировать и по-другому. Перепишем функции (11,13-14) в явном виде через размерную функцию  $S(\omega)$ , удовлетворяющую условию (3).

$$\mu_{\text{rel}}(\alpha) = \frac{2 \mu_0(\alpha) / \mu_c}{\int_0^{\alpha} S^2(\theta) d\theta};$$

$$\mu(0, \alpha) = \frac{\int_0^{\alpha} S(\theta) \cos \frac{\theta}{2} d\theta + \int_0^{\alpha} S^2(\theta) d\theta}{\int_0^{\alpha} S^2(\theta) d\theta};$$

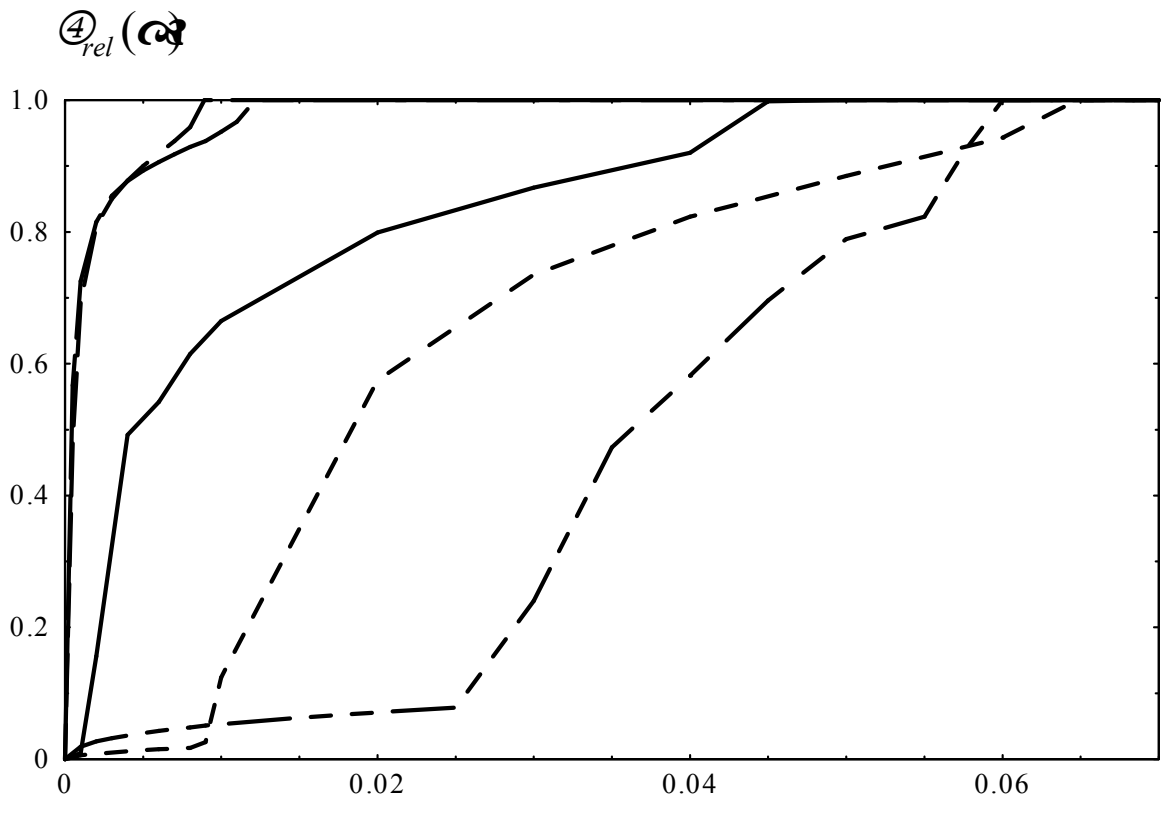


Рис.7

Функции принадлежности  $\mu_{\text{rel}}(\alpha)$  относительного по модулю отклонения функций

$$\mu(0, \alpha) \text{ от } \mu_g(0, \alpha) - \mu_{\text{rel}}(\alpha) = \frac{|\mu(0, \alpha) - \mu_g(0, \alpha)|}{\mu_g(0, \alpha)}$$

Типы линий кривых соответствуют типам линий рис.1. Сплошная кривая соответствует функции  $\mu_{\text{appr}}(0, \alpha)$ .

Эти три функции являются функционалами, определенными на множестве функций  $S(\odot)$ . Наше утверждение о приближенном подобии означает то, что эти функционалы практически не зависят от функции  $S(\odot)$ , т.е. инварианты, по крайней мере для положительно определенных функций с симметричным контуром, удовлетворяющих условию (3).

Итак, для «одногорбых» спектральных плотностей формулировка результатов работ [1-3] через функцию  $S(\otimes)$  не привела к появлению какой-то дополнительной информации, но сделала результаты [1-3] более строгими и прозрачными. Совсем по-другому с «двугорбыми» плотностями. Здесь нам теперь удалось получить несколько точных выражений для рассматриваемых статистических характеристик при любом разнесении «горбов» (что не получилось в [4]) и поставить и решить новые интересные аспекты задачи.

### «Двугорбый» контур спектральной плотности

Если суммировать результаты работы [4] для «двугорбого» случая, то в целом выводы такие. Здесь также имеет место приблизительное равенство функций (11,13-14) (т.е. подобие функций (2,5,7)), но кроме прежних безразмерных аргументов эти функции зависят еще от одного, имеющего смысл нормированного опять же на  $\odot_c$  частотного разнесения «горбов» функции  $S(\odot)$ . Обозначим этот аргумент функций, как и в [4], через  $S$

Однако, т.к. в [4] мы рассчитывали функции (11,13-14) не через простые приближения для  $S(\odot)$ , а через приближения для  $f(\odot)$  в предположении  $K_0 \blacklozenge \blacksquare$ , согласно (8-9), нам не удалось получить ни одного точного аналитического выражения для рассматриваемых функций, а полученные приближения либо нестрого обосновывались, либо в них не выполнялись точные соотношения (например,  $2\odot_0(0)/\odot_c \blacklozenge 1$ ), либо и то и другое вместе. И мы не получили ни одного хорошего приближения для функций в переходной области от «одногорбого» случая к «двугорбому» ( $0 \square s \square 2$ ); соответственно, не решали вопрос о смысле  $S$  в этой области. Кроме того, для спектров с сильно несимметричными «горбами» функции (11,13-14) у нас выпали из равенства. Не имея хотя бы для некоторых из них аналитических выражений, мы не смогли ответить на вопрос, почему это случилось – потому, что они действительно не равны, или потому, что надо по-другому определять аргумент  $S$ . Рассматривая простые функции для плотности  $S(\odot)$ , мы решили теперь все этих вопросы.

Сначала рассмотрим 6 «двугорбых» функций  $S(\odot)$ , «горбы» которых почти симметричны относительно их вершин (аналог параметра  $\otimes 1$  в [4] и ниже). Приведем их уже в нормированном виде  $S(\otimes)$  (они по-прежнему четны):

$$1) \quad S^1(\omega) \approx \frac{1}{2z} \exp\left[-\frac{|\omega s/2|}{z}\right] \exp\left[-\frac{|\omega s/2|}{z}\right], \quad (20)$$

где  $Z$  находится из трансцендентного уравнения  $z \approx \frac{\omega}{8} \exp\left[-\frac{s}{z}\right]$ . Эта

спектральная плотность получается как сумма двух одинаковых перекрывающихся экспонентных линий типа (16), разнесенных на расстояние  $S$  симметрично относительно  $\omega = 0$ . При  $\omega \ll 0$  функция  $S^1(\omega)$  складывается из основной части первого слагаемого в (20) и хвоста второго слагаемого, основная часть которого находится в области  $\omega > 0$ , и наоборот.

$$2) \quad S^2(\omega) \approx \frac{\exp\left[-\frac{|\omega s/2|}{z}\right]}{2 \left[1 - \exp\left[-0,5s/z\right]\right]}$$

где  $Z$  находится из уравнения  $z \approx \frac{\omega}{4} \exp\left[-s/z\right]$ . Спектральная плотность

$S^2(\omega)$  получается из двух экспонентных линий (16) без перекрытия, т.к. их хвосты обрезаны в месте стыковки  $\omega = 0$ .

$$3) \quad S^3(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{\omega} z} \exp\left[-\frac{|\omega s/2|}{z}\right] \exp\left[-\frac{|\omega s/2|}{z}\right], \quad (21)$$

где  $Z$  находится из уравнения  $z \approx \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{s^2}{2z^2}\right]$ . Этот спектр аналогичен

по структуре спектру (20) – две гауссоиды (15) с перекрытием.

$$4) \quad S^4(\omega) \approx \frac{2}{\sqrt{\omega} z \left[1 - \operatorname{erf}\left(0,5s/z\right)\right]} \exp\left[-\frac{|\omega s/2|}{z}\right]$$

где  $Z$  находится из уравнения  $z \approx \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{1 - \operatorname{erf}\left(s/\sqrt{2}z\right)}{\left[1 - \operatorname{erf}\left(0,5s/z\right)\right]^2}$ . Эта  $S^4(\omega)$  - гауссоиды

без перекрытия.



$$\begin{aligned}
 S^{(5)}(\xi) & \begin{cases} \star \frac{4/\vartheta}{\sqrt{1-2s/\vartheta}}, & \left| \xi \right| \leq \frac{s}{2} \leq \frac{\vartheta}{4} \\ \star \frac{2/\vartheta}{\sqrt{1-2s/\vartheta}}, & \left| \xi \right| \leq \frac{\vartheta}{4} \leq \frac{s}{2} \\ \star 0, & \left| \xi \right| \leq \frac{s}{2} \leq \frac{\vartheta}{4} \end{cases} ; \quad s \leq \frac{\vartheta}{2}
 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \star 2/\vartheta, & \left| \xi \right| \leq s/2 \leq \vartheta/4 \\ \star 0, & \left| \xi \right| \leq s/2 \leq \vartheta/4 \end{cases} ; \quad s \leq \frac{\vartheta}{2}$$

Этот спектр – прямоугольники с перекрытием, поскольку он получается из двух одинаковых прямоугольных линий с серединами, находящимися на расстоянии  $S$ , перекрывающихся при сближении.

$$\begin{aligned}
 S^{(6)}(\xi) & \begin{cases} \star 2/\vartheta, & \left| \xi \right| \leq \vartheta/2 \\ \star 0, & \left| \xi \right| \leq \vartheta/2 \end{cases} ; \quad s \leq \frac{\vartheta}{2}
 \end{aligned} \quad (23)$$

А этот спектр логично назвать прямоугольниками без перекрытия, поскольку в отличие от (22) при соединении двух прямоугольников они просто сливаются в один.

В выражениях для  $S^{(1) \dots (4)}$  величина  $S$  - это нормированное на  $\vartheta_c$  частотное расстояние между вершинами двух перекрывающихся или не перекрывающихся гауссоид и экспонент, а в (22-23) – расстояние между центрами перекрывающихся или не перекрывающихся прямоугольников. Далее мы обсудим правомочность такого выбора этого аргумента.

Мы выбрали спектральные плотности  $S^{(1) \dots (6)}$ , во-первых, потому, что у них есть качественные отличия: 1)-2) – резкий спад крыльев каждого из «горбов», 3)-4) – плавные крылья и излом в вершинах «горбов», 5)-6) – грубые модели из прямоугольников. И во-вторых, потому, что для них **точно** считаются функции (11,13), а для (21-23) и функция (14), что дает нам наборы аналитических представлений универсальных функций в «двугорбом» случае.

В таблицах 4 и 5 приведены эти точные выражения для функций (11) и (13) для всех шести рассматриваемых  $S(\xi)$ . А в таблице 6 – три точных выражения функции

(14) для  $S(\infty)$  (21-23). Для  $S(\infty)$  (20) нам удалось получить хорошее приближение функции (14), удовлетворяющее всем граничным и предельным условиям, но мы его не стали приводить.

Табл.4

| $S(\infty)$   | Коэффициент корреляции $\rho(\infty)$ (формула (11))   |
|---------------|--|
| $S^1(\infty)$ | $\frac{\cos \frac{s}{2}}{1 - z^2}, \quad \text{где } z = \frac{1}{8} \exp \frac{s}{z}$   |
| $S^2(\infty)$ | $\frac{2 \cos \frac{s}{2} \exp \frac{0,5s}{z}}{2 \exp \frac{0,5s}{z} - 1 - z^2}, \quad \text{где } z = \frac{2 \exp \frac{s}{z}}{4 \exp \frac{0,5s}{z} - 1}$   |
| $S^3(\infty)$ | $\cos \frac{s}{2} \exp \left( \frac{s}{2} \right), \quad \text{где } z = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp \frac{s^2}{2z^2}$   |
| $S^4(\infty)$ | $\frac{\exp \left( \frac{s}{2} \right) \cos \frac{s}{2} \operatorname{Re} \operatorname{erf} \frac{s/z}{2}}{1 - \operatorname{erf} \frac{s/z}{2} \sin \frac{s}{2} \operatorname{erf} \frac{s/z}{2}}$ <p style="text-align: right;">где</p> $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \operatorname{erf} \frac{s}{\sqrt{2}z}}{1 - \operatorname{erf} \frac{0,5s}{z}}$ |
| $S^5(\infty)$ | $\cos \frac{s}{2} \frac{\sin \frac{2s}{4}}{2}, \quad \text{где } z = \sqrt{1 - 2s/z}, \quad s \leq z/2$<br>$1, \quad s > z/2$  |
| $S^6(\infty)$ | $\frac{\sin \frac{2s}{4}}{2}, \quad s \leq z/2$ $\cos \frac{s}{2} \frac{\sin \frac{2s}{4}}{2}, \quad s > z/2$  |