

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ**



имени

П. Н. Лебедева

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

7

Д.С. ЧЕРНАВСКИЙ, А.П. НИКИТИН,
О.Д. ЧЕРНАВСКАЯ

**О МЕХАНИЗМАХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРЕТО
В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ**

МОСКВА 2007

О механизмах возникновения распределения Парето в сложных системах
Д.С. Чернавский, А.П. Никитин, О.Д. Чернавская

Аннотация

Распределение Парето, имеющее в области достаточно больших x плотность вероятности $\rho(x) \sim x^{-\alpha}$, где $\alpha \geq 2$, является весьма важным с теоретической и практической точки зрения. Основной причиной этого является его качественное отличие от нормального (гауссова) распределения. А именно, вероятность больших отклонений оказывается для случая Парето-распределения существенно выше. Представление о повсеместной применимости нормального закона распределения остается весьма распространенным, несмотря на отсутствие объективных подтверждений этого во многих прикладных областях. В работе рассмотрен вопрос о возникновении Парето-распределения в динамических системах, находящихся в шумовом поле. Обсуждаются простейшие одномерные модели, в которых в достаточно широком диапазоне переменной отклик системы может быть с хорошей точностью аппроксимирован таким распределением.

On emergence of Pareto distribution in complex dynamical systems
D.S. Chernavski, A.P. Nikitin, O.D. Chernavskaya

Abstract

The Pareto distribution which probability density function can be approximated at sufficiently great x as $\rho(x) \sim x^{-\alpha}$, where $\alpha \geq 2$, is of crucial importance from as theoretical so as practical point of view. The main reason is its qualitative distinction from normal (Gaussian) distribution. Namely, the probability of high deviation occurs to be significantly higher. The conception of universal applicability of the Gaussian law remains to be widely distributed though there is a lack of objective confirmation of this notion in a variety of application areas. The origin of the Pareto distribution in dynamical systems located in the Gaussian noise field is considered. A simple one-dimensional model where the system response in wide enough interval of the variable can be quite precisely approximated by this distribution is discussed.

1. Введение

При анализе статистических данных произвольной природы используются распределения объектов по какому-либо признаку (обозначим его X). Наиболее популярно нормальное (гауссово) распределение, в котором плотность вероятности обнаружить объект с величиной признака x представляется выражением

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

где σ^2 — дисперсия, μ — параметр смещения, равный математическому ожиданию x .

Доказано, что во многих хаотических системах распределение (1) действительно должно иметь место. Примерами могут служить эргодические системы (бильярд Больцмана) и броуновское движение в гармоническом потенциале. Однако распространено заблуждение о том, что нормальное распределение справедливо всегда, что, разумеется, не верно.

В начале прошлого века В.Парето (*W. Pareto*, см. библиографию в en.wikipedia.org/wiki/Vilfredo_Pareto) обратил внимание на то, что во множестве реальных ситуаций объекты при больших значениях x распределены по иному, а именно по степенному закону

$$\rho(x) \sim \rho_0 x^{-\alpha}, \quad (2)$$

где α — показатель Парето.

(Сделаем небольшое уточнение: в теории вероятностей под «распределением Парето» обычно понимается распределение (предложенное в 1975 г.), для которого

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha - 1)x_m^{\alpha-1}}{x^\alpha}, & x \geq x_m \\ 0, & x < x_m \end{cases} .$$
 Таким образом, объекты не могут иметь значения x

меньше порогового x_m . Ниже в п.2. мы вернемся к этому вопросу.)

Реально В.Парето, будучи социологом и экономистом, обнаружил, что распределение людей по доходам и/или накоплениям в области больших x описывается выражением (2)

Позднее Дж.К. Ципф (*G.K. Zipf*) [6] обнаружил, что схожая зависимость проявляется при оценке частоты употребления слов любого языка. Затем было

обнаружено, что аналогичная ситуация имеет место в целом ряде физических и биологических систем, а распределение Парето является одним из вариантов степенных законов (*power laws*).

В настоящее время распределению Парето посвящена обширная литература (см., например, [9]), прежде всего, социально-экономического направления, но также подобного рода зависимости изучаются в лингвистике, биологии [2, 3, 11] и целом ряде других областей. Обсуждается и более сложное распределение Леви, которое в частных случаях переходит в распределение Парето.

Тем не менее, вопрос о том, как и когда возникает распределение Парето, остается открытым.

2. Свойства распределения Парето

Распределение Парето существенно отличается от нормального. Обсудим его свойства.

Во-первых, выражение (2) может описывать распределение в большом, но ограниченном диапазоне по x . Действительно, распределение (2) не интегрируемо в интервале $0 \leq x < \infty$. Интегралы от моментов распределения, т.е. величин $M_m = \int_0^\infty x^m \rho(x) dx$ расходятся на бесконечности при $m \geq \alpha - 1$. Так, если $\alpha = 2$, то уже первый момент M_1 не существует. Это значит, что среднее значение признака X формально стремится к бесконечности.

Во-вторых, свойства распределения Парето существенно зависят от показателя α . При $\alpha = 1$ интеграл от распределения расходится при $x \rightarrow \infty$, т.е. отсутствует нормировка. При $\alpha \leq 2$, как упоминалось, отсутствует среднее значение. При $\alpha > 2$ первый момент интегрируется, а интегралы от более высоких моментов уже расходятся. В физически реальных случаях бесконечностей не бывает. Всегда находятся факторы, ограничивающие X некоторым предельным значением x_{\max} . Это означает, что при $x > x_{\max}$ величина $\rho(x)$ резко падает (распределение «обрывается»). Как следствие

вклад интеграла $\int_{x_{\max}}^{\infty} \rho(x) dx$ пренебрежимо мал и эта область в расчет не принимается (или обсуждается особо). Величина x_{\max} фактически является параметром распределения.

В-третьих, при малых значениях x и любых значениях α выражение (2)

неограниченно возрастает. Это тоже нереально и поэтому принимают, что в области $0 \leq x < x_{\min}$ имеет место какое-либо другое распределение, а в точке $x = x_{\min}$ к нему «стыкуется» распределение Парето.

Величина $\rho(x_{\min})$ в этом случае является параметром и определяет вклад распределения Парето (равный $\kappa = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \rho(x) dx = \frac{\rho_0}{(\alpha - 1)} \left(\frac{1}{x_{\min}^{\alpha-1}} - \frac{1}{x_{\max}^{\alpha-1}} \right)$) в общее распределение, если последнее нормировано. То же относится и к интегралам от моментов.

Таким образом, распределение Парето не является общим законом, а приближенно, но с хорошей точностью выполняется в широком диапазоне значений x , который может охватывать несколько порядков ($x_{\max} / x_{\min} \sim 10^2 \div 10^4$). Поэтому часто говорят не о распределении Парето, а о распределении с «тяжелым хвостом».

Стандартным приемом визуализации таких закономерностей является их представление на графике в двойном логарифмическом масштабе. Допустим, подсчитываются величины y — количество объектов, обладающих значениями в некотором достаточно узком интервале $x \pm \Delta x$. Очевидно, что в интересующем нас диапазоне по x ожидается $y \sim x^{-\alpha}$. Строится график (в логарифмической шкале как по y , так и по x), на котором выделяется область линейной зависимости:

$$\log(y) = -k \log(x) + c. \quad (3)$$

Далее для нахождения коэффициента k (как аппроксимации показателя α) используются средства регрессионного анализа. Оценка качества модели производится по близости к 1 коэффициента детерминированности R^2 . Отметим важное отличие такого подхода от обычной линейной регрессионной модели: остатки ϵ_i входят в нее не аддитивно, а мультипликативно (т.е. в виде произведения, а не суммы). Этот факт накладывает серьезные ограничения на применимость известных статистических критериев проверки состоятельности модели. В частности, это сказывается на значениях стандартных ошибок коэффициентов модели и ширине доверительных интервалов. Поэтому используются эвристические правила, например, такое, что линейный характер зависимости $\log(y)$ от $\log(x)$ должен проявляться в диапазоне не менее двух порядков по x .

Распределения с тяжелыми хвостами в реальных ситуациях играют

весьма существенную роль.

Так, при оценке маловероятного события формулы (1) и (2) дают результаты, отличающиеся на много порядков, даже если вклад «хвоста» (т.е. величины κ) невелик. Это важно учитывать при оценке вероятности катастроф и катаклизмов [8].

Другой пример: общая численность особей, находящихся в «хвосте» распределения может быть невелика ($\kappa \ll 1$), но вклад их в общую биомассу (если x — масса особи) весьма значителен.

Таким образом, вопрос о причинах (или механизмах) возникновения распределения Парето является актуальным и до сих пор дискуссионным.

Динамические системы, описываемые уравнением Ланжевена.

В свете изложенного уместно сделать два замечания.

1). Выводить распределение Парето из какого-либо случайного процесса не представляется нужным (хотя это и может быть сделано, например, с помощью преобразования $x_m / z^{1/(\alpha-1)}$, где z — равномерно распределенная случайная величина из $(0, 1)$). Актуальна другая задача: исследовать класс систем, где оно приблизительно проявляется в широком диапазоне значений x .

2). Можно указать два разных источника флуктуаций в динамических системах. Первый — глобальная неустойчивость микропроцессов. При этом сама система может быть автономной, а внешние шумы могут отсутствовать. Второй — любая реальная динамическая система находится во внешнем шумовом поле. Отклик динамической системы на внешний шум представляет собой нерегулярный (хаотический) процесс, но существенно отличающийся от внешнего шума: возникает иное распределение по величинам флуктуаций, иные корреляции и т.п. При этом характер внешнего шума уже не так важен, основные характеристики шумового отклика определяются свойствами динамической системы.

Методы исследования их различны. В первом случае формулируются гипотезы о характере случайного процесса (с памятью или без) или используются динамические системы со странными аттракторами.

Во втором случае используется уравнение Ланжевена (см., например, [7]):

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x) + G(t), \quad (4)$$

где x — наблюдаемая величина, $f(x)$ — функция, описывающая динамику системы (в общем случае, нелинейную), $G(t) = g(t) \cdot \xi(t)$ — случайная величина с заданным распределением, нормируемым и интегрируемым со всеми моментами (т.е. шум).

Возможен промежуточный вариант, в котором динамическая система, будучи автономной, содержит хаотическую подсистему, которая и «производит шум». С методической точки зрения этот вариант эквивалентен второму.

Цель предлагаемой работы — исследовать класс динамических систем, которые, будучи помещены в шумовое поле, в широком диапазоне x порождают распределение Парето. Таким образом мы принимаем, что распределение Парето возникает не в чисто случайном процессе, но представляет собой нормальный шум, преобразованный динамической системой.

Для того чтобы выбрать простейшую модель, воспользуемся уравнением Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x} \rho(x,t) \right) + \frac{1}{2} g \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x,t), \quad (5)$$

где $\rho(x,t)$ — распределение объектов по величинам x в момент времени t ,

$U(x) = -\int_0^x f(x') dx'$ — «потенциал» силового поля $f(x)$, g — амплитуда шума в (4).

Уравнение (5) вытекает из (4) в случае, когда $\xi(t)$ — дельта-коррелированный нормальный шум и его амплитуда не зависит от x (так называемый аддитивный шум). Кроме того, здесь и ниже мы примем, что величина g не зависит от времени.

Другая ситуация, когда $g(t)$ медленно убывала с течением времени, рассматривалась в работе [12], в которой изучались характеристики генерируемых временных рядов для определения так называемых «моментов истины» (т.е. моментов времени, начиная с которых можно с некоторой наперед заданной вероятностью утверждать, что бистабильная динамическая система останется в текущем состоянии и дальнейших переходов в противоположное состояние уже не случится).

Отметим, что модели типа (4) достаточно широко исследуются с теоретических позиций и применяются для описания социально-экономических процессов, например, динамики курсов акций и цен [1], доходности финансовых инструментов [4], формирования общественного мнения [5] и др.

Стационарное решение уравнения (5) хорошо известно и имеет вид:

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{2U(x)}{g}} \quad (6)$$

Из (6) следует, что распределение Парето имеет место, если потенциал $U(x)$ и функция $f(x)$ асимптотически ведут себя как:

$$U(x) \sim \ln x; f(x) \sim -1/x \quad (7)$$

Показатель Парето при этом равен $\alpha = 2 / g$.

Вычислительный эксперимент.

Более детальный анализ можно провести с помощью вычислительного эксперимента. Для этого рассмотрим простейшую модель:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{ax}{x^2 + b^2} + \xi(t) \quad (8)$$

Здесь, величина $\xi(t)$ — случайный дельта-коррелированный шум. Плотность вероятности реализации конкретного значения ξ_A описывается стандартным гауссовым распределением с нулевым средним и дисперсией $D = \sigma^2$. Шумовая компонента $\xi(t)$ отлична от нуля только в моменты времени $t = \tau \cdot i$, где i — целое число. Таким образом, случайные импульсы с частотой $1/\tau$ вызывают мгновенное изменение координаты x .

Величины x и t в модели (8) выбраны, не ограничивая общности, в безразмерных единицах, поэтому характерный масштаб изменения как x , так и t — порядка единицы.

Таким образом, формально имеется 4 параметра, определяющих поведение модели (8): τ , a , b , D . Однако так как амплитуда не зависит от времени, то можно считать, что $\tau = 1$.

Далее, мы предполагаем исследовать поведение модели при $x \gg b$. Поэтому, не теряя общности, можно выбрать фиксированное определенное b , например, положить $b = 1$.

Коэффициент a характеризует, насколько быстро компенсируется

случайное отклонение $\xi(t)$. Отсюда следует, что определяющее значение имеет отношение a/D . Поэтому зафиксируем $D = 1$ и посмотрим, как влияют на поведение системы различные значения a . При этом случаи $a \ll D$ и $a \gg D$ сводятся, соответственно, к ситуации фактически броуновского движения и ситуации отсутствия шума. Поэтому логичным представляется исследование в области значений параметра $a \sim D$.

В качестве начального x_0 выберем случайное значение в интервале $(0,1)$. Далее зафиксируем реализацию $\{x(t_i)\}$, где $i = 1..N$. N выберем достаточно большим ($N = 10^6$), как и общее число реализаций $M = 1000$. Таким образом, для каждого варианта параметра a общее число анализируемых элементов последовательностей составляло 1 миллиард.

Нижняя граница распределения Парето x_{min} в данной модели определяется нелинейной частью, а именно «потенциалом»:

$$U(x) = \frac{a}{2} \ln(x^2 + b^2) \quad (9)$$

Стационарное распределение имеет вид:

$$\rho(x) = \rho_0 (x^2 + b^2)^{-a/g} \quad (10)$$

Распределение (10) явно соответствует Парето при $x \gg b$. Отметим, что при анализе выбранной в работе модели хорошее соответствие регрессии (3) достигается уже при $x_{min} \sim 3$.

Пример реализации $\{x(t_i)\}$ приведен на рис. 1.

Очевидной характеристикой таких последовательностей является гистограмма плотности распределения $H(s_j)$. Ее построение сводится к стандартной процедуре. Во-первых, диапазон возможных значений x_i разбивается на осмысленное количество R интервалов — «бинов» r_j одинаковой ширины $\Delta R = (x_{max} - x_{min})/R$. Во-вторых, подсчитывается количество элементов x_i , попадающих в каждый бин r_j . Как s_j обозначим середину j -го бина.

После построения гистограммы $H(s_j, a)$ для конкретного значения параметра a исключим из рассмотрения элементы с $s_j = x_{min} < 3$. Далее построим график зависимости $\lg(H)$ от $\lg(s_j)$, т.е. гистограмму распределения в двойном логарифмическом масштабе. Как говорилось выше, для Парето-распределения такой график должен быть линейным, т.е. хорошо описываться регрессионным уравнением $\lg(H) = -k \cdot \lg(x) + c$. Коэффициент c определяется

объемом выборки и потому несущественен, а коэффициент наклона k будем сопоставлять с показателем α .

Понятно, что такое построение не является строгим доказательством, что полученное распределение соответствует именно Парето-распределению и никакому иному. В практике применения статистических методов (согласно классическим схемам) довольно часто возникает необходимость проверки гипотезы о том, что функция распределения результатов наблюдений принадлежит параметрическому семейству распределений $\{F(x, \theta)\}$. Методы установления типа закона распределения (критерии согласия) включают [10]:

- глазомерный метод проверки;
- проверку по гистограмме;
- проверку по критерию Пирсона («хи-квадрат»);
- критерии типа Колмогорова-Смирнова, «омега-квадрат»;
- проверку с помощью коэффициентов асимметрии и эксцесса и др.

Итак, фактически мы используем второй метод проверки — проверку по гистограмме. А результат проверки будем интерпретировать с практической (а не формально статистической) точки зрения: т.е. как подтверждение того, что экспериментальное распределение $H(j)$ в области $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ можно рассматривать как распределение Парето с параметром $\alpha = k$.

Оценку качества регрессионной модели будем оценивать по значению коэффициента детерминации R^2 , причем будем требовать выполнения условия

$$R^2 > 0.999. \quad (11)$$

В качестве примера рассмотрим зависимость $\lg(H)$ от $\lg(x)$ для $a = 1.05$ (см. рис. 2).

Из рис. 2 следует, что вычислительный эксперимент позволяет определить верхнюю границу распределения Парето (x_{\max}). В данном случае она определяется не моделью, а значением N — длиной временного ряда или, что то же, числом объектов в рассматриваемом множестве.

Отклонения от Парето наступают, когда число объектов в бине гистограммы $H(j)$ оказывается малым. В примере на рис. 2 $\lg x_{\max} = 2.3 \div 2.4$ и, следовательно, распределение Парето покрывает чуть менее 2 десятичных интервалов по x (от $\lg x_{\min} = 0.5$).

Поведение экспериментального распределения $H(x)$ в области $x > x_{\max}$ нерегулярно и заслуживает отдельного рассмотрения.

Для дальнейшего анализа модели (8) используем следующий подход: для каждого a найдем верхнюю границу распределения Парето x_{\max} и оценку показателя Парето k при условии достижения регрессионной моделью (3) определенного значения коэффициента детерминированности R^2 . В таблице 1 приведены результаты при выполнении условия (11).

На рис. 3, 4 результаты вычислительных экспериментов представлены в графическом виде. Из рис. 3 видно, что оценка k линейно растет с ростом a , а из рис. 4, что логарифм верхней границы распределения Парето $\lg x_{\max}$ линейно уменьшается с ростом a . Естественно, точность оценки этих показателей можно улучшить, увеличивая длину последовательностей N и их количество M , что, однако, не являлось нашей целью.

Если уменьшить число реализаций, используемых для расчета статистик, то можно получить больший разброс наблюдаемой гистограммы $H(j)$ в области больших x .

Из рис. 5 видно, что для $a = 1.0$ в области $\lg(x) \approx 2.6 \div 2.8$ величины $H(j)$ оказываются существенно выше, чем можно предсказать из линейного тренда. Возникновение такого «горба» распределения объясняется следующим. Если в результате последовательного наложения нескольких больших шумовых отклонений $x(t)$ попадает в область $x > x_{\max}$, то малые значения

«возвращающей силы» $-\frac{ax}{x^2 + b^2}$ позволяют системе сравнительно долго оставаться в этой области. В итоге относительные частоты $\rho(x; x > x_{\max})$ оказываются достаточно велики.

На рис. 6 приведен пример подобной реализации. Можно заметить, что при $i \sim 900\,000$ система весьма «долго» пребывает в области $x \sim 400$ ($\lg x \sim 2.6$).

С другой стороны, само попадание в эту область является событием достаточно редким и потому реализуется только на незначительной части реализаций. В других реализациях $x(t)$ не попадают в эту область и частоты $\rho(x, x > x_{\max})$ будут меньше предсказываемых. При суммировании по большому числу реализаций M эти эффекты, естественно, нивелируются.

Формально, модель (12) описывает систему, в которой имеется один аттрактор при $x = 0$ и на бесконечности (при $x \rightarrow \infty$) имеется стационарное, но неустойчивое состояние (седло). Соответственно, функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

$$f(x) = 0 \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Кроме того, во всем ареале притяжения функция $f(x)$ является гладкой и не имеет экстремумов. В этом случае функцию $f(x)$ в бесконечно удаленной точке можно разложить в ряд Лорана, оставив главный член $f(x)|_{x \rightarrow \infty} \sim -a/x$.

Интервал значений $x \sim b$ является пограничным, в нем режим, характерный для $x \rightarrow \infty$ переходит в режим при $x \rightarrow 0$. В области $x < b$ преобладают динамические процессы; в области $x \gg b$ слабое (в силу его удаленности) притяжение аттрактора компенсируется эффектом шума.

Таким образом при оговоренных выше условиях выбранная форма функции $f(x)$ является достаточно общей.

Заключение.

Модель (8) одномерна, это значит, что мы рассматриваем распределение по одной, наиболее существенной переменной. Вопрос о распределении по двум (и более) переменным нуждается в специальном обсуждении.

Рискнем сделать предположение: в рассматриваемых системах в области, где динамическое притяжение компенсируется расползанием за счет шумов, распределение по всем переменным будет соответствовать Парето.

Возникает вопрос: в какой мере формальная общность соответствует реальной. В реальной жизни бесконечностей не бывает. Поэтому речь идет о достаточно большом и гладком ареале притяжения (в фазовом пространстве), ограниченном сепаратрисами. Бесконечно удаленную точку $x \rightarrow \infty$ следует понимать как точку на сепаратрисе, в которой должно соблюдаться условие $f(x) = 0$. Такие системы достаточно широко распространены в различных областях науки.

Так, при заселении новой ниши каким-либо видом, на первом этапе ресурсы практически неограниченны, для их освоения не нужно тратить много усилий, и прессинг внутривидовой борьбы еще слаб. Обсудим распределение особей по размерам. Существует оптимальный размер особи, определенный динамическими факторами (т.е. физиологией и генетикой). Тем не менее, динамический запрет на увеличение размера слаб (ввиду доступности ресурса) и случайные факторы приводят к появлению особей все большего размера. Это продолжается до тех пор, пока не начнут действовать другие (не ресурсные) факторы. Именно в этой области действует распределение Парето.

Как правило, такой вид с течением времени разделяется на два подвида: один состоит из мелких, но быстрых особей и второй — из крупных, но малоподвижных.

Другой пример касается экономики и социологии, где собственно и был обнаружен закон Парето. Если стремление людей к накоплению денег (стяжательству) не встречает должного сопротивления (иными словами, динамические факторы не притягивают людей к накоплению оптимального состояния), то возникает распределение типа Парето. Предел накопления (x_{\max}) определяется при этом государством или обществом в целом, а по порядку величины сопоставим с суммой денег во всем обществе. Ряд аналогичных примеров может быть легко продолжен.

Таким образом, распределение Парето имеет глубокое основание, но он связано с динамикой процесса, а не с характером случайных событий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Гуманитарного Научного Фонда.

Список литературы.

- 1) *Bouchaud J.-P., Cont R. A Langevin approach to stock market fluctuations and crashes // Eur. Phys. J. B. 1998. v.6, p. 543-550*
- 2) *Brown J.H., Gupta V.K., Li B., Milne B.T., Restrepo C., West G.B., The fractal nature of nature: power laws, ecological complexity and biodiversity // Phil. Trans. of Royal Society B. 2002. v.357, No. 1421, p. 619-626.*
- 3) *Rau A.R. Biological scaling and physics // J. Biosci. 2002. v.27, No.5, p.475-478.*
- 4) *Sornette D. Fokker-Planck equation of distributions of financial returns and power laws // Physica A. 2001. v.290, p.211–217.*
- 5) *Tessone C.J., Toral R. System size stochastic resonance in a model for opinion formation. // Physica A. 2005. v. 351, p. 106-116.*
- 6) *Zipf G.K. The psychobiology of language, Houghton-Mifflin, 1935.*
- 7) *Безвербный А.В., Шаповалов А.В. Моделирование кинетики атомарного ансамбля в световом поле с помощью уравнения Ланжевена // Математическое моделирование. т.16, №9, с.49-60.*
- 8) *Малинецкий Г.Г. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. М.: Наука, 2000.*

- 9) *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. т. 5. №5. с. 89–106.*
- 10) *Орлов А.И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2004. 656 с.*
- 11) *Ройтберг М.А., Семионенков М.Н., Таболина О.Ю. Парето-оптимальные выравнивания биологических последовательностей // Биофизика. 1999. т.44. №4. с. 581-594.*
- 12) *Чернавский Д.С., Никитин А.П., Чернавская О.Д., Кривошеев О.И. Генерация и анализ квазихаотических временных рядов. Часть 1. Модель перемешивающего слоя. / Препринт ФИАН №19. 2005. 19с.*

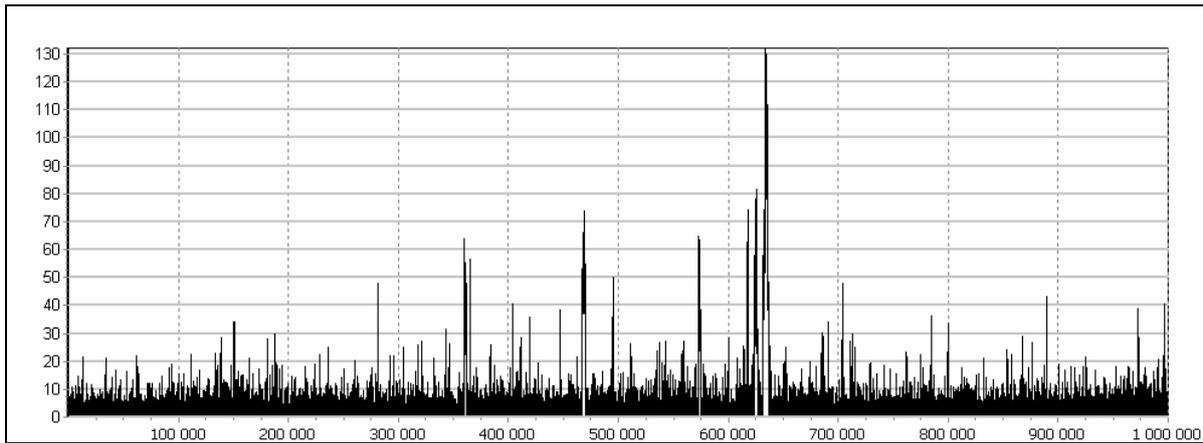


Рис. 1. Реализация модели (8) при $a = 1.05$

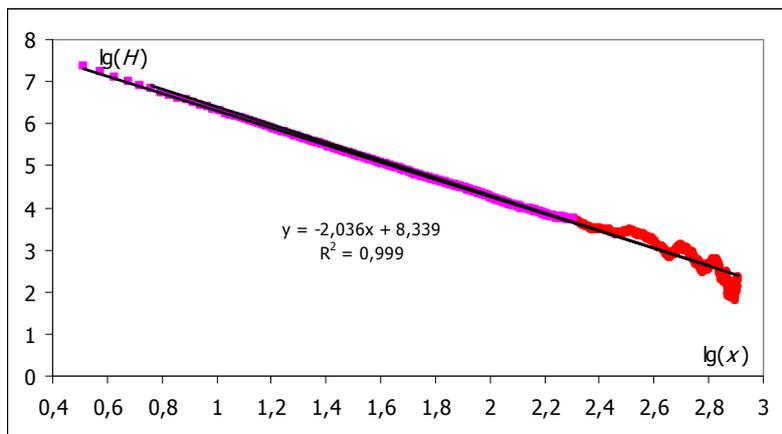


Рис. 2. Гистограмма распределения для модели (6) при $a = 1.05$, $M = 1000$.

Таблица 1

Зависимость коэффициентов наклона k и порога x_{\max} от параметра a

№ п/п	a	оценка k	99% «доверительный» интервал	$\lg x_{\max}$
1	0.800	1.642	0.005	2.511
2	0.850	1.719	0.005	2.558
3	0.900	1.747	0.006	2.458
4	0.950	1.945	0.006	2.490
5	1.000	2.063	0.007	2.495
6	1.050	2.036	0.008	2.304
7	1.100	2.272	0.012	2.089
8	1.150	2.347	0.011	2.202
9	1.200	2.455	0.012	2.159
10	1.300	2.710	0.016	1.979
11	1.400	2.906	0.018	1.936
12	1.500	3.095	0.018	1.999

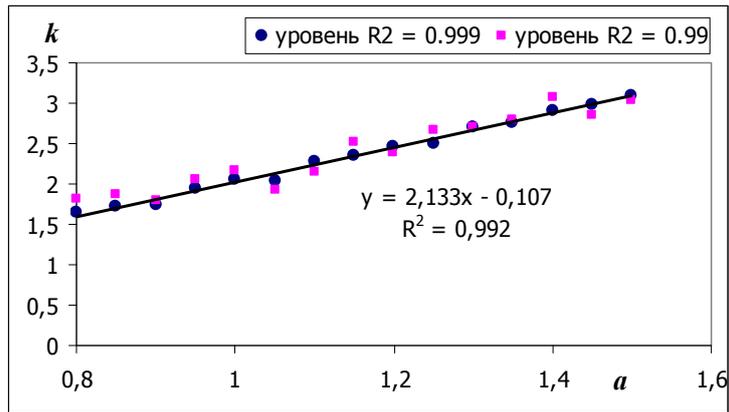


Рис. 3. Значение оценки показателя Парето k при различных значениях a и R^2

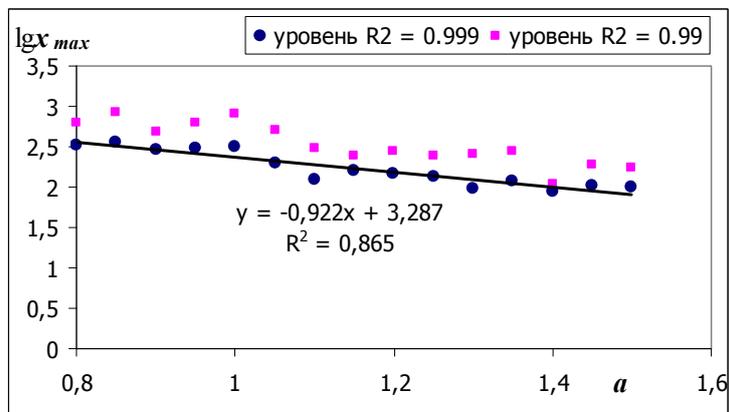


Рис. 4. Зависимость верхней границы распределения Парето x_{\max} от коэффициента a

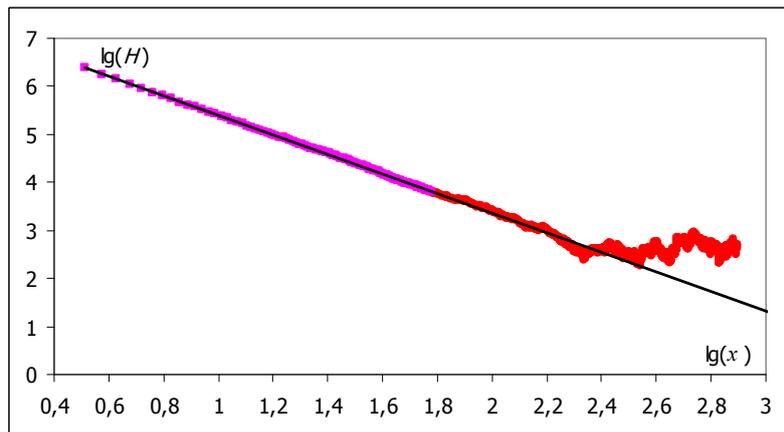


Рис. 6. Гистограмма распределения при $a = 1.0$, $N = 100$.

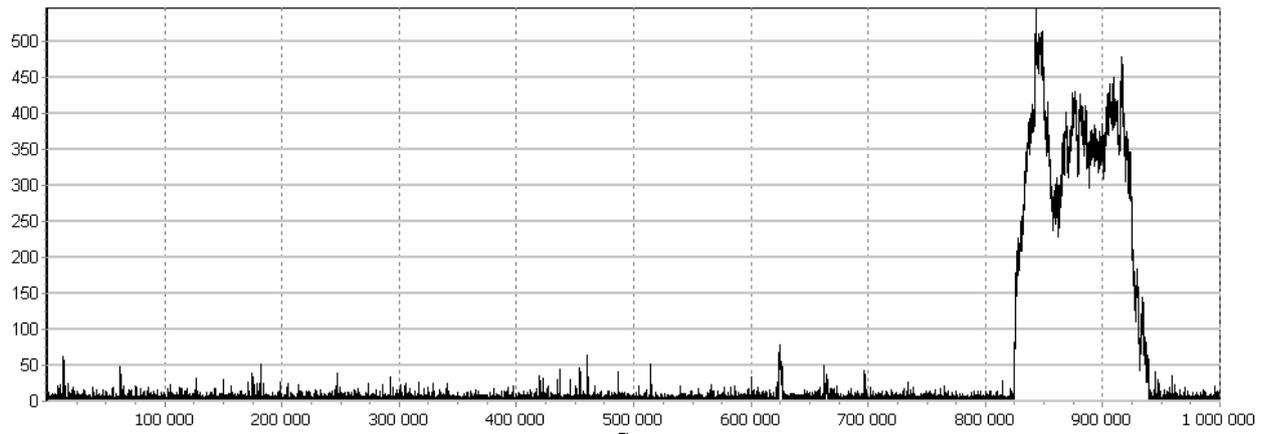


Рис. 7. Реализация с «горбом» распределения
в области больших x ($a = 1.0$).