

процессе движения, его можно описывать методами обычной (не статистической) волновой механики. Это означает, что внутри отдельной когерентной области разумна аппроксимация поля регулярной структурой, движение которой описывается волновой функцией $\Psi = \Psi_{\parallel} \cdot \Psi_{\perp}$, где Ψ_{\parallel} , Ψ_{\perp} - волновые функции продольной и поперечной составляющих волнового движения.

Результаты проведенного выше анализа будут использоваться далее при исследовании свойств вынужденного излучения в резонаторе с активной средой.

5.3. Движение поля спонтанного излучения в резонаторе. Временная шкала процесса. Основной вывод.

Изложенные выше представления позволяют рассматривать структуру поля спонтанного излучения в виде набора движущихся, пересекающихся и не связанных между собой когерентных импульсов излучения. Пространственно-временная протяженность $L_{\parallel}(t)$, $L_{\perp}(t)$, $T_k(t)$ этих импульсов возрастает по мере их распространения. Поле отдельного когерентного импульса аппроксимируется единственной волной, описываемой волновой функцией $\Psi = \Psi_{\parallel} \cdot \Psi_{\perp}$, представляющей собой композицию из продольного волнового движения Ψ_{\parallel} и поперечного волнового движения Ψ_{\perp} . Продольная протяженность такого импульса достигает удвоенного продольного размера $2L \sim 200$ см резонатора за время $T_{\parallel} \sim 3 \cdot 10^{-8}$ с, (при $T_k > 10^{-8}$ с). Поперечная протяженность импульса достигает поперечного размера $a \sim 1$ см резонатора за время $T_{\perp} \sim 10^{-6}$ с.

Далее происходит трансформация поля импульса в когерентную структуру, определяемую геометрией резонатора. Этот процесс происходит за время 10^{-7} с (приблизительно за 100 проходов излучения между зеркалами резонатора). Затем происходит формирование шумовых продольных и поперечных мод. Далее имеет место процесс возбуждения обычных продольных и поперечных мод.

Началу процесса возбуждения нижней поперечной моды соответствует время $2 \cdot 10^{-4}$ с.

Все эти этапы движения поля когерентного импульса спонтанного излучения изображены на рис. 9.

Сделаем важное замечание.

В рассматриваемом процессе естественно предположить, что значение времени жизни частично-когерентного поля спонтанного излучения, испущенного в момент времени $t = 0$ в резонаторе, не превышает величины $\tau \sim 10^{-7}$ с. Это означает, что все интересующие нас процессы, показанные на рис. 9, практически невозможно наблюдать, поскольку они определены во временном масштабе $2 \cdot 10^{-4} \div 10^{-6} \gg 10^{-7}$ с. Амплитуда поля спонтанного

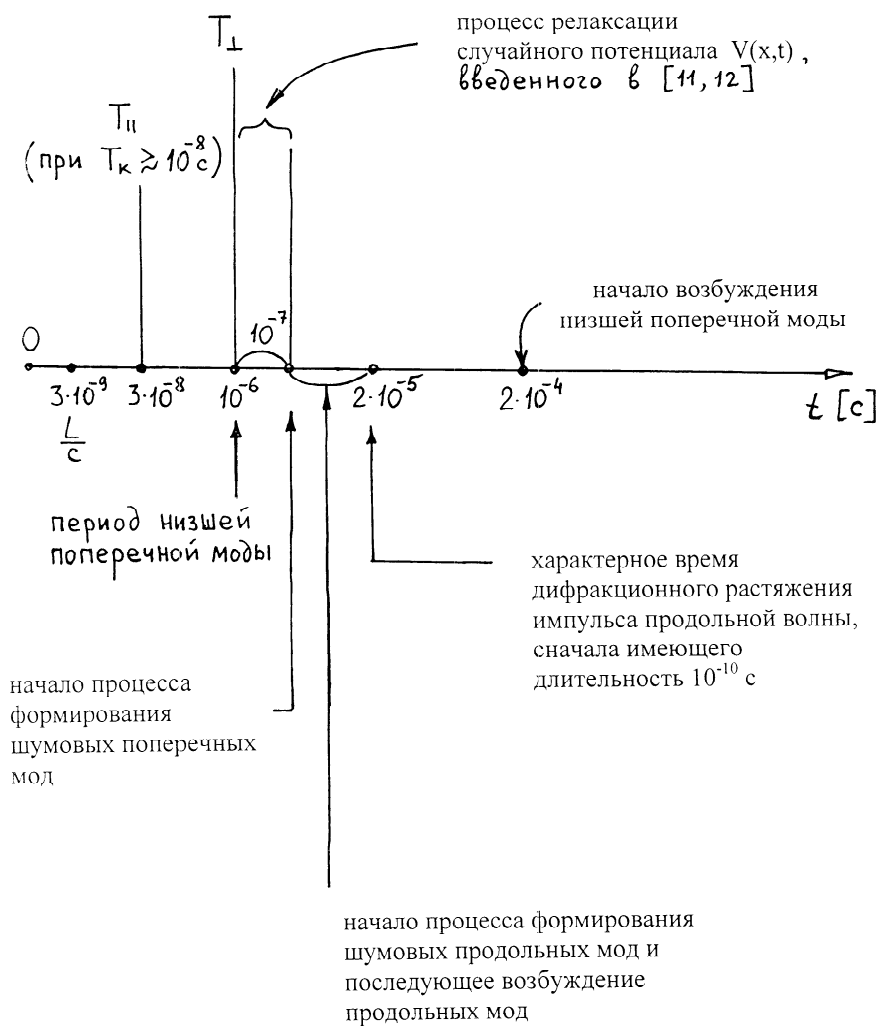


Рис. 9.

излучения, испущенного в момент $t = 0$, к моменту времени $t \sim 10^{-6}$ с становится пренебрежимо малой.

Повысить время затухания $\tau \sim 10^{-7}$ с можно двумя способами: увеличив расстояние L между зеркалами резонатора или повысив коэффициент отражения зеркал. Оба эти способа практически неэффективны. Отсюда следует основной вывод.

Модовая структура спонтанного излучения активной среды в резонаторе, если пренебречь эффектом вынужденного излучения, практически ненаблюдаема.

6. Эффект вынужденного излучения.

6.1. Общие представления.

Эффект вынужденного излучения имеет в лазерной физике основополагающее значение. Без него создание лазерной физики было бы невозможным. Его смысловое восприятие сложно. По этой причине ниже сначала изложим подробно его физическое содержание и лишь после этого уясним его отношение к интересующей нас лазернофизической проблеме.

В самых общих чертах можно считать, что эффект вынужденного излучения описывает один из возможных каналов взаимодействия излучения со средой, в которой оно распространяется. Поясним это на простом примере.

Рассмотрим стационарный процесс распространения поля плоской синусоидальной волны электромагнитного плоскополяризованного излучения в среде, состоящей из одинаковых атомов. Ограничимся анализом процесса движения поля в случае двух независимых пространственно-временных переменных z, t .

Пусть на слой среды падает синусоидальная плоская волна $E(z, t)$ первичного излучения. Ее движение описывается уравнением

$$\frac{1}{c^2} E_{,tt} - E_{,zz} = 0.$$

Поле этой волны наводит в среде поляризацию $P(z, t)$. Движение P приводит к возникновению вторичной синусоидальной волны поля излучения $\hat{E}(z, t)$. Поле \hat{E} имеет смысл поля вынужденного (индуцированного полем E) излучения. Далее будем полагать, что амплитуда поля \hat{E} много меньше амплитуды поля E , т.е. эффект взаимодействия слаб. В этой ситуации наблюдаемое поле $\tilde{E}(z, t)$ представляет собой суперпозицию полей $E(z, t)$ и $\hat{E}(z, t)$. Движение поля $\tilde{E}(z, t)$ можно представить как движение единственного (не составного) полевого объекта,

взаимодействующего в процессе движения со средой, в которой он распространяется.

Конкретизируем эти положения.

Сначала уясним смысловое содержание понятия поляризации P среды в рамках классических (не квантовомеханических) представлений по [14].

Рассмотрим колебание поля $E(z,t)$ в фиксированной точке z , где находится атом. Уравнение движения колеблющегося электрона в атоме имеет вид:

$$m\ddot{r} + \underline{g}\dot{r} + fr = qE(t),$$

где: $r(t)$ - смещение электрона от положения равновесия, $\underline{g}\dot{r}$ - сила трения, m - масса электрона, fr - упругая сила, qE - сила внешнего воздействия со стороны световой волны E , q - заряд электрона.

Полагая

$$\gamma = \frac{g}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m},$$

имеем

$$\ddot{r} + \gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{q}{m} E.$$

Пусть

$$E = E_0 e^{-i\omega t}, \quad r = r_0 e^{-i\omega t},$$

где: ω , E_0 , r_0 - постоянные величины. Тогда из последнего уравнения следует, что

$$r_0 = \frac{\frac{q}{m} E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}.$$

Поляризация P среды вводится так:

$$P = N q r(t),$$

где N - концентрация взаимодействующих со световой волной E атомов.

Поле $\hat{E}(z,t)$ вынужденного излучения определяется уравнением

$$\frac{1}{c^2} \hat{E}_{,tt} - \hat{E}_{,zz} = -\frac{1}{c^2} P_{,tt}.$$

Введем понятие диэлектрической проницаемости $\epsilon = 1 + \epsilon'$ среды, в которой распространяется излучение:

$$P = \epsilon' E.$$

Легко заметить, что

$$\epsilon' = \frac{N q^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}.$$

Если амплитуда поля \hat{E} соизмерима с амплитудой поля E , то определение P можно расширить:

$$P = \varepsilon' \cdot (E + \hat{E}) = \varepsilon' \cdot \tilde{E}$$

Величина ε' при этом не изменится.

Уравнение движения наблюдаемого поля \tilde{E} тогда определяется сложением уравнений движения полей E и \hat{E} :

$$\frac{1}{c^2} E_{,tt} - E_{,zz} = 0,$$

$$\textcircled{+} \quad \frac{1}{c^2} \hat{E}_{,tt} - \hat{E}_{,zz} = -\frac{1}{c^2} \varepsilon' \cdot (E + \hat{E})_{,tt}$$

$$\frac{1 + \varepsilon'}{c^2} \tilde{E}_{,tt} - \tilde{E}_{,zz} = 0.$$

Если $\varepsilon' \rightarrow 0$, то

$$\text{Re} \varepsilon' \approx \frac{N \frac{q^2}{m} (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

$$\text{Im} \varepsilon' \approx \frac{N \frac{q^2}{m} \omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Волновое число k наблюдаемого поля $\tilde{E} \sim e^{ikz - i\omega t}$ связано с волновым числом K волны $E \sim e^{iKz - i\omega t}$ так:

$$k^2 = K^2 (1 + \varepsilon'),$$

$$k \approx K \left(1 + \frac{\varepsilon'}{2} \right) = K + \frac{K}{2} (\text{Re} \varepsilon' + i \text{Im} \varepsilon').$$

Отсюда, в частности, видно, что при $\gamma > 0$ наблюдаемое поле \tilde{E} в процессе распространения будет затухать.

Таково начальное представление о физической природе процесса вынужденного излучения \hat{E} и о том, как он влияет на процесс распространения наблюдаемого (общего) поля \tilde{E} .

Дальнейшее уточнение физического содержания эффекта вынужденного излучения сопровождается переходом от классического метода описания движения поляризации P среды к квантовомеханическому.

Наиболее подходящая квантовомеханическая теория движения поляризации P активной среды в поле волны излучения содержится в [15].

Следуя этой теории, колебание поляризации $P(t)$ среды представляется в виде

$$P(t) = Nd[u(t) \cos(\omega t) - v(t) \sin(\omega t)],$$

где: d – матричный элемент дипольного момента излучательного перехода активной двухуровневой молекулы; u, v – синфазная и квадратурная компоненты огибающей колебания поляризации среды во внешнем высокочастотном электромагнитном поле излучения $E(t)$:

$$E = 2\tilde{\epsilon}(t)\cos(\omega t),$$

где: $2\tilde{\epsilon}$ – огибающая поля E .

Предполагается, что характерные времена изменения $\tilde{\epsilon}(t), u(t), v(t)$ много больше времени $\omega^{-1} \sim 10^{-15}$ с.

В [15] показано, что движение колебаний $u(t), v(t)$ описывается системой уравнений Блоха:

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{u}{T_2} - v\Delta, \\ \dot{v} = -\frac{v}{T_2} + u\Delta + \kappa\tilde{\epsilon}w, \\ \dot{w} = -\frac{w - w_p}{T_1} - \kappa\tilde{\epsilon}v, \end{cases}$$

где: w – инверсия заселенностей уровней, отнесенная к одной излучающей двухуровневой молекуле; w_p – равновесное значение w ; $\Delta = \omega_0 - \omega$; ω_0 – частота излучательного перехода в двухуровневой молекуле; $\kappa = \frac{2d}{\hbar}$; T_1, T_2 – времена релаксации.

Как видим, в квантовомеханической теории колебаний $P(t)$ появилась новая зависимая переменная $w(t)$.

В случае $T_1 = T_2 = \infty, \Delta = u = 0, \tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_0 = \text{Const} > 0$ решением уравнений Блоха является

$$\begin{cases} v = v_0 \cos(\Omega t) + w_0 \sin(\Omega t), \\ w = -v_0 \sin(\Omega t) + w_0 \cos(\Omega t), \end{cases}$$

где: v_0, w_0 – начальные значения v, w ;

$$\Omega = \kappa\tilde{\epsilon}_0 \text{ – частота Раби.}$$

Составляющая v поляризации среды в данном случае является единственным источником вынужденного излучения с огибающей $\hat{\epsilon}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{\epsilon} = \pi k N v d, \quad (k = K).$$

Отсюда, в частности, видно, что вынужденное излучение может вносить вклад в суммарное излучение на частотах, отличных от частоты ω исходного, первичного, вынуждающего излучения $E = 2\tilde{\epsilon}_0 \cos(\omega t)$.

В случае $\Delta \neq 0, u \neq 0$ в движении поляризации будут наблюдаться колебания с частотой Раби, определенной так:

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \kappa^2 \tilde{\epsilon}^2}.$$

В интересующей нас проблеме присутствие таких колебаний поляризации нежелательно. В общем случае они будут вносить новую, случайную, флуктуирующую составляющую поля вынужденного излучения в резонаторе. Их можно избежать двумя способами:

а) они будут отсутствовать в когерентной структуре излучения в резонаторе, если временная протяженность этой структуры намного меньше, чем Ω^{-1} ;

б) эти колебания u, v будут подавлены, если принять во внимание конечность времен релаксации T_1, T_2 , причем выбрать условия наблюдения так, чтобы выполнялось неравенство $T_1, T_2 \ll \Omega^{-1}$.

В последнем способе представляет интерес частное решение системы уравнений Блоха, полученное в пределе $T_1, T_2 \rightarrow 0$, когда производные в левых частях этих уравнений можно положить равными нулю. Это, так называемое, кинетическое приближение. Тогда из уравнений Блоха имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = v_k = \frac{w_p T_2 \kappa \tilde{\epsilon}}{1 + T_2^2 \Delta^2 + T_1 T_2 \kappa^2 \tilde{\epsilon}^2}, \\ u = u_k = \frac{w_p T_2^2 \kappa \tilde{\epsilon} \Delta}{1 + T_2^2 \Delta^2 + T_1 T_2 \kappa^2 \tilde{\epsilon}^2}, \\ w = w_k = \frac{w_p (1 + T_2^2 \Delta^2)}{1 + T_2^2 \Delta^2 + T_1 T_2 \kappa^2 \tilde{\epsilon}^2}. \end{array} \right.$$

Здесь слагаемые с $\tilde{\epsilon}^2$ в знаменателях описывают эффект насыщения оптических свойств активной среды полем излучения.

Свойство пропорциональности числителей формул для v, u величине $\tilde{\epsilon}$ позволяет в кинетическом приближении ввести понятие комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon = 1 + \epsilon'$ активной среды:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Im} \epsilon' = -\frac{\pi N d w_p T_2 \kappa}{1 + T_2^2 \Delta^2 + T_1 T_2 \kappa^2 \tilde{\epsilon}^2}, \\ \text{Re} \epsilon' = -\frac{2\pi N d w_p T_2^2 \kappa \Delta}{1 + T_2^2 \Delta^2 + T_1 T_2 \kappa^2 \tilde{\epsilon}^2}, \end{array} \right.$$

где $\tilde{\epsilon}$ - огибающая поля электромагнитного излучения, действующего на среду.

При $w_p < 0$ (отсутствие инверсии заселенности в двухуровневой среде) эти формулы на качественном уровне соответствуют формулам, выведенным выше в классической трактовке движения поляризации среды. Однако теперь, в отличие от этой трактовки, они содержат в числителе новую

физическую величину – равновесную инверсную заселенность w_p , отнесенную к одной активной молекуле. Эта величина знакопеременна: $-1 \leq w_p \leq 1$. В случае лазерноактивной среды она положительна и, в отличие от классической трактовки, движение волны излучения в такой среде будет сопровождаться не ослаблением волны, а ее усилением.

Это замечание является основным в лазерной физике.

В отношении к рассматриваемой здесь проблеме оно имеет следующее важное значение.

Эффект вынужденного излучения, в установленном выше смысле, может проявляться настолько значительно, что усиление продольной когерентной компоненты излучения в резонаторе компенсирует ее ослабление за счет неполного отражения от зеркал. Это приведет к увеличению времени жизни указанной компоненты в резонаторе, которое без учета эффекта вынужденного излучения составляло $\tau \sim 10^{-7}$ с. Когда это время превысит значение 10^{-6} с, становится возможным наблюдать макроскопические продольные и поперечные когерентные структуры поля излучения в резонаторе. При дальнейшем увеличении времени τ эти наблюдаемые структуры становятся более отчетливыми.

6.2. Две точки зрения на предмет исследования.

Изложенные выше представления о свойствах эффекта вынужденного излучения позволяют рассматривать процесс движения продольной компоненты поля излучения в резонаторе с двух принципиально различных точек зрения:

а) поле первичного и поле вторичного (вынужденного) излучения представляют собой два различных полевых объекта (это имеет место в случае $T_1, T_2 \gg \Omega^{-1}$),

б) поле первичного и поле вторичного (вынужденного) излучения представляют собой единственный полевой объект (это имеет место в случае $T_1, T_2 \ll \Omega^{-1}$, т.е. в кинетическом приближении, когда можно ввести понятие комплексной диэлектрической проницаемости активной среды).

Чтобы уяснить физическое различие между этими точками зрения в отношении к интересующей нас проблеме, рассмотрим процесс движения импульсной продольной волны в плоском двумерном резонаторе с активной средой.

Для обеих точек зрения он показан на рис 10 в координатах $\rho, \hat{z}, t, \hat{t}$, (ρ – амплитуда поля излучения).

На рис. 10а изображен процесс, соответствующий точке зрения (а). Видно, что в процессе движения исходного импульса первичного излучения в окрестности точки $\hat{z} = 0$ образуются импульсы вторичного излучения. Важно отметить, что, как импульс первичного излучения, так и импульсы

вторичного излучения, образованные в окрестности $\hat{z}=0$, имеют одинаковое время затухания ($\tau \sim 10^7$ с). Поле в резонаторе ($-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$) в

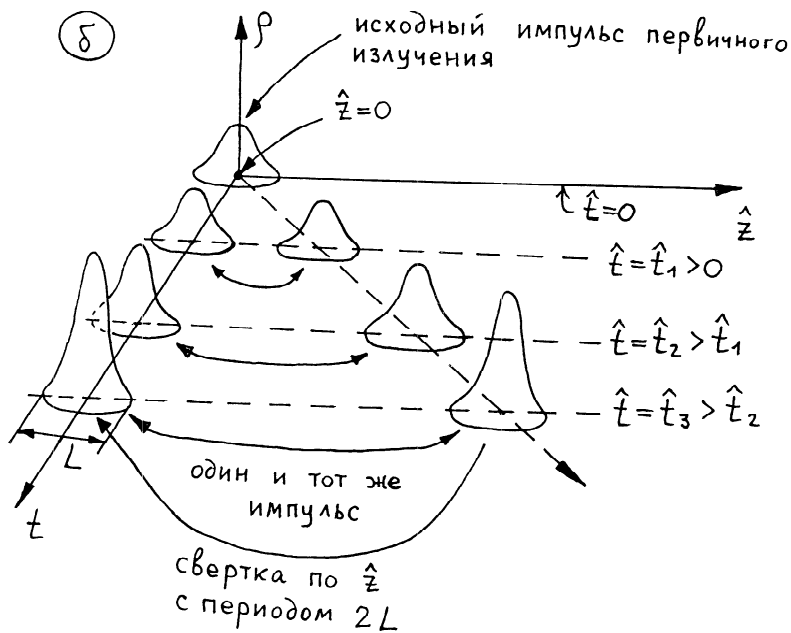
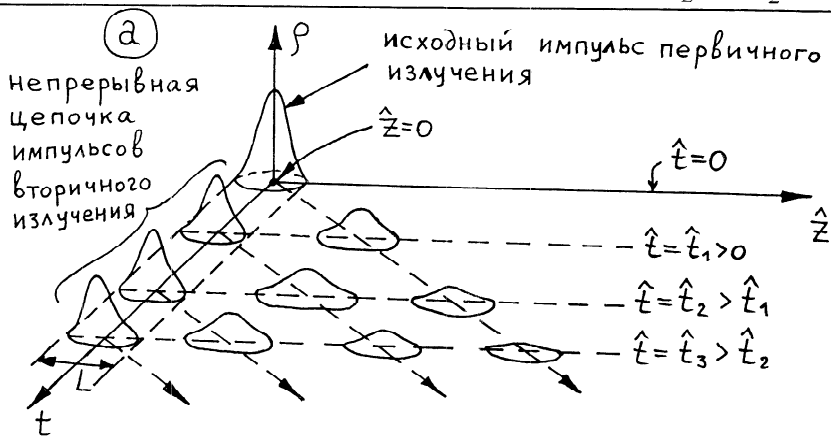


Рис. 10.

фиксированный момент времени t представляет собой сумму таких импульсов. При высокой эффективности процесса вынужденного излучения амплитуда суммарного поля в резонаторе может возрастать во времени t , но когерентные свойства такого поля плохие. Это вызвано, с одной стороны, малым временем жизни $\tau \sim 10^{-7}$ с импульсов и, с другой стороны, заметными случайными флуктуациями испущенного средой поля вынужденного излучения.

Иными свойствами обладает процесс движения поля, трактуемый с точки зрения (б) и изображенный на рис. 10б. В этом случае движение поля представляется движением единственного импульса. Время затухания такого импульса в процессе движения может значительно превышать время $\tau \sim 10^{-7}$ с. Более того, при высокой эффективности процесса вынужденного излучения, амплитуда импульса может возрастать во времени, что показано на рисунке. Случайные флуктуации поля вынужденного излучения теперь выражены слабо. Следовательно, когерентные свойства такого поля излучения должны быть высокими.

Можно сделать вывод. Наибольший практический интерес представляет ситуация, соответствующая точке зрения (б).

В действительности, на практике может иметь место ситуация, промежуточная между обеими рассмотренными ситуациями, соответствующими точкам зрения (а) и (б).

Переход от случая (б) к случаю (а) возможен, например, при возрастании амплитуды поля излучения в процессе его движения в резонаторе. Он индуцируется соответствующим ростом частоты Раби Ω .

6.3. Свойства первичного излучения, поляризации среды и вынужденного излучения, необходимые для формирования когерентной компоненты поля лазерного излучения в резонаторе. Релаксация поляризации среды.

Выше было установлено, что максимальный практический интерес в рассматриваемой проблеме представляет ситуация, при которой взаимодействие излучения с активной средой описывается в рамках представлений о комплексной диэлектрической проницаемости ϵ среды. Этой ситуации соответствует решение (u_k, v_k, w_k) уравнений Блоха в кинетическом приближении ($T_1, T_2 \rightarrow 0$). Следующим этапом решения нашей проблемы является определение условий возникновения такой ситуации. Прежде всего отметим, что точка (u_k, v_k, w_k) в пространстве (u, v, w) является при $\tilde{\epsilon}_\Sigma = \text{Const}$ точкой устойчивого равновесия (это будет показано ниже). Ближайшей целью будет определение характерных времен релаксации начального вектора с составляющими компонентами (u', v', w') в пространстве (u, v, w) к конечному вектору с составляющими (u_k, v_k, w_k) . При этом будет предполагаться, что начальный вектор расположен вблизи

конечного, а огибающая $\tilde{\varepsilon}_\Sigma$ поля излучения постоянна. Далее будем обозначать ее посредством $\tilde{\varepsilon}$.

Представим переменные u, v, w , содержащиеся в уравнениях Блоха, следующим образом:

$$u(t) = u_k + U(t),$$

$$v(t) = v_k + V(t),$$

$$w(t) = w_k + W(t),$$

где U, V, W – малые отклонения от равновесия u_k, v_k, w_k .

Подстановка так выраженных переменных u, v, w в уравнения Блоха приводит к следующей системе уравнений относительно U, V, W :

$$\begin{cases} \dot{U} = -\frac{U}{T_2} - V.\Delta, \\ \dot{V} = -\frac{V}{T_2} + U.\Lambda + \kappa\tilde{\varepsilon}.W, \\ \dot{W} = -\frac{W}{T_1} - \kappa\tilde{\varepsilon}V. \end{cases}$$

Совершим замену переменных

$$U = \hat{U}(t).e^{-\frac{t}{T_2}},$$

$$V = \hat{V}(t).e^{-\frac{t}{T_2}},$$

$$W = \hat{W}(t).e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Подстановка в последнюю систему уравнений приводит к системе уравнений относительно $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$:

$$\dot{\hat{U}} = -\hat{V}.\Delta,$$

$$\dot{\hat{V}} = \hat{U}.\Delta + \kappa\tilde{\varepsilon}\hat{W}.e^{\alpha t},$$

$$\dot{\hat{W}} = -\kappa\tilde{\varepsilon}\hat{V}.e^{-\alpha t},$$

где $\alpha = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$. При $\alpha = 0$ эта система уравнений совпадает с системой уравнений Блоха, в которой $T_1, T_2 \rightarrow \infty$.

Замечаем, что при $\alpha = 0$ и $\hat{V} \sim \cos(\Omega t)$ из этих уравнений следует, что $\hat{U} \sim \sin(\Omega t)$ и $\hat{W} \sim \sin(\Omega t)$, где $\Omega = \text{Const}$. Поэтому с учетом $\alpha \neq 0$ разумно искать решение этой системы уравнений в виде

$$\begin{aligned}\hat{V} &= \hat{V}_0 \cdot e^{A_v t} \cdot [\cos(\Omega t) + a_v \sin(\Omega t)], \\ \hat{U} &= \hat{U}_0 \cdot e^{A_u t} \cdot [a_u \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t)], \\ \hat{W} &= \hat{W}_0 \cdot e^{A_w t} \cdot [a_w \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t)],\end{aligned}$$

где : $\Omega, \hat{V}_0, \hat{U}_0, \hat{W}_0, A_v, A_u, A_w, a_v, a_u, a_w$ – постоянные величины. При $\alpha = 0$ последние шесть величин обращаются в ноль.

Далее рассмотрим случай $\frac{|\alpha|}{\Omega} \ll 1$. Тогда указанные шесть величин имеют малые значения.

Подстановка таких $\hat{V}, \hat{U}, \hat{W}$ в последнюю систему уравнений и анализ полученных алгебраических уравнений приводят к следующим результатам.

При $\alpha = 0$ имеются незатухающие колебания $\hat{V}, \hat{U}, \hat{W}$ относительно равновесного положения $\hat{V} = \hat{U} = \hat{W} = 0$. Частота Ω этих колебаний совпадает с частотой Раби $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + (\kappa\tilde{\epsilon})^2}$.

При $\alpha \neq 0$, но $\frac{|\alpha|}{\Omega} \ll 1$ имеются отклонение частоты Ω этих колебаний от частоты Раби. В этом случае частота Ω определяется уравнением

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= [\Delta^2 + (\kappa\tilde{\epsilon})^2] + \Omega(A_v a_v - A_w a_w - A_u a_u) + \\ &+ \frac{(\kappa\tilde{\epsilon})^2 A_v a_u + \Delta^2 \cdot A_w a_w}{\Omega}.\end{aligned}$$

Наиболее интересное для нас решение A_u, A_v, A_w задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}A_u &= A_v = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\Delta^2}{\Omega^2}\right), \\ A_w &= -\frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{\Omega^2}\right).\end{aligned}$$

Эти величины представляют наиболее ценную для нас информацию о релаксационном процессе колебаний U, V, W , который описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}U &= \hat{U}_0 \cdot e^{(A_u - \frac{1}{T_2})t} \cdot [a_u \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t)], \\ V &= \hat{V}_0 \cdot e^{(A_v - \frac{1}{T_2})t} \cdot [\cos(\Omega t) + a_v \sin(\Omega t)], \\ W &= \hat{W}_0 \cdot e^{(A_w - \frac{1}{T_1})t} \cdot [a_w \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t)].\end{aligned}$$

Искомые времена T_u , T_v , T_w релаксации колебаний U , V , W определяются так:

$$T_u = T_v = \left(\frac{1}{T_2} - A_v \right)^{-1} = \frac{T_2}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{\Delta^2}{\Omega^2} \right)},$$

$$T_w = \left(\frac{1}{T_1} - A_w \right)^{-1} = \frac{T_1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \left(1 + \frac{\Delta^2}{\Omega^2} \right)}.$$

Это справедливо при $T_1 \sim T_2 \ll \Omega^{-1}$.

Отсюда следуют важные выводы.

а). Времена релаксации T_u , T_v определяются не только временем T_2 .

Имеется также их зависимость от T_1 и $\frac{\Delta^2}{\Omega^2}$.

б). Время релаксации T_w определяется не только временем T_1 .

Имеется также его зависимость от T_2 и $\frac{\Delta^2}{\Omega^2}$.

в). Практически интересная ситуация малых значений $T_u = T_v$ по сравнению с временем T_2 имеет место при $T_1 < T_2$ и $\frac{\Delta^2}{\Omega^2} \ll 1$. Например, при $\Delta = 0$ имеем

$$T_u = T_v = \frac{2}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}}.$$

Сделаем важное общее замечание.

Если начальное состояние поляризации среды в поле с $\tilde{\epsilon} = \text{Const}$ было хаотическим, то через промежуток времени, соизмеримый с временем $T_u = T_v$, в среде наводится упорядоченная поляризация и процесс взаимодействия излучения со средой становится возможным описывать в рамках представления о комплексной диэлектрической проницаемости среды. Это свойство необходимо учитывать при исследовании процесса формирования когерентной компоненты поля лазерного излучения в резонаторе.

Теперь рассмотрим проблему релаксации поляризации среды в другом отношении. Ранее она рассматривалась в поле излучения, имеющем постоянную огибающую $\tilde{\epsilon}$. В действительности, особенно на начальной стадии развития генерации лазерного излучения, частотный спектр излучения в резонаторе может иметь значительную ширину $\Delta \nu$

$$10^6 < \Delta \nu < 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

Это свойство приводит к существованию импульсного воздействия излучения на активную среду, обусловленного эффектом биений. Длительности τ_0 таких импульсов поля излучения приближенно определяются соотношением

$$\tau_0 \geq (\Delta\nu)^{-1}.$$

Видно, что промежутки времени τ_0 могут быть очень короткими ($\tau_0 \geq 10^{-10}$ с). По этой причине возникает проблема релаксации поляризации среды в импульсном режиме воздействия на нее полем излучения.

Рассмотрим эту проблему.

В случае импульса $\tilde{\epsilon}(t)$, имеющего вид ступеньки с бесконечно протяженностью ($\tau_0 \rightarrow \infty$) решение проблемы было получено выше. Времена релаксации поляризации и инверсии среды в этом случае совпадают с определенными выше временами T_u, T_v, T_w .

Найдем решение проблемы в случае, когда эффект биений проявляется при сложении только двух колебаний с различными частотами и одинаковыми амплитудами. В этом случае разумна аппроксимация поля излучения в виде последовательности чередующихся прямоугольных импульсов со знакопеременной огибающей $\tilde{\epsilon} = \pm A$, $A = \text{Const}$. Временная длительность каждого импульса одинакова и равна $\tau_0 = \text{Const}$. Для простоты ограничимся анализом ситуации, в которой $T_1 = T_2 = T$, $u = \Delta = 0$. Уравнения Блоха при этом имеют вид

$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{v}{T} + \kappa w \tilde{\epsilon}, \\ \dot{w} = -\frac{w - w_p}{T} - \kappa v \tilde{\epsilon}. \end{cases}$$

Исключив из этих уравнений w , получим

$$\ddot{v} = -\frac{2}{T} \left\{ \dot{v} - \left[\frac{\kappa w_p \tilde{\epsilon}}{2} - v \left(\frac{1}{T^2} + \kappa^2 \tilde{\epsilon}^2 \right) \right] \right\}.$$

Видно, что это уравнение описывает процесс релаксации величины \ddot{v} к величине в квадратных скобках. Далее будем полагать, что скорость этого процесса велика ($T \rightarrow 0$). Тогда можно считать, что $\dot{v} = 0$ и описывать движение $v(t)$ уравнением

$$\dot{v} + \frac{T}{2} \left(\frac{1}{T^2} + \kappa^2 \tilde{\epsilon}^2 \right) v = \frac{\kappa w_p}{2} \tilde{\epsilon},$$

причем величина $\tilde{\epsilon}$ внутри интервала $0 \leq t \leq \tau_0$ имеет постоянное значение и

$$\kappa^2 \tilde{\epsilon}^2 < \frac{1}{T^2}.$$

Решением этого уравнения в указанном временном интервале является функция

$$v(t) = v_p + [v(0) - v_p] e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где:

$$v_p = \frac{\kappa v_p T \tilde{\epsilon}}{1 + \kappa^2 T^2 \tilde{\epsilon}^2}, \quad \tau = \frac{2T}{1 + \kappa^2 T^2 \tilde{\epsilon}^2}.$$

Из этого решения следует, что $v(t)$ имеет две точки устойчивого равновесия $v = v_p$, которым соответствует два значения $\tilde{\epsilon} = \pm A$. Величина τ имеет смысл характерного времени движения v к указанным точкам равновесия $v = v_p$.

Естественно полагать, что во всем временном интервале функция $v(t)$ периодическая. Ее период равен $2\tau_0$. Тогда должно выполняться условие $v(0) = -v(\tau_0)$ и из приведенного выше решения $v(t)$ следует:

$$v(\tau_0) = v_p - (v(\tau_0) + v_p) e^{-\frac{\tau_0}{\tau}}.$$

Отсюда видно, что

$$v(\tau_0) = v_p \cdot \text{th}\left(\frac{\tau_0}{2\tau}\right).$$

Усиление поля за счет эффекта вынужденного излучения будем полагать слабым. Огибающую суммарного поля (первичного излучения и вынужденного излучения) обозначим $\tilde{\epsilon}_\Sigma$, а ее движение будем описывать уравнением

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_\Sigma = \frac{\omega_0 N d}{2} v(t).$$

В этом уравнении в интервале $0 \leq t \leq \tau_0$:

$$v(t) = v_p \left\{ 1 - \left[1 + \text{th}\left(\frac{\tau_0}{2\tau}\right) \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \right\}.$$

Поэтому решением последнего уравнения является

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_\Sigma(\tau_0) = & \tilde{\epsilon}_\Sigma(0) + \frac{\omega_0 N d}{2} v_p \cdot [\tau_0 - \tau(1 - e^{-\frac{\tau_0}{\tau}}) \cdot \\ & \cdot (1 + \text{th}\left(\frac{\tau_0}{2\tau}\right))]. \end{aligned}$$

Поскольку усиление поля излучения предполагается слабым, то $\tilde{\epsilon}_\Sigma \approx \tilde{\epsilon}$ и можно оценить показатель усиления α излучения за время τ_0 по формуле

$$\alpha = \frac{\tilde{\epsilon}_\Sigma(\tau_0) - \tilde{\epsilon}_\Sigma(0)}{\tilde{\epsilon} \cdot \tau_0}.$$

При $\tau_0 \rightarrow \infty$ имеем

$$\alpha = \alpha_k = \frac{\omega_0 N d k \omega_p \Gamma}{2(1 + \kappa^2 T^2 \tilde{\epsilon}^2)}.$$

Из формулы, определяющей $\tilde{\epsilon}_\Sigma(\tau_0)$, следует, что при конечных значениях величины τ_0 :

$$\alpha = \alpha_k \cdot \left[1 - \frac{\text{th}\left(\frac{\tau_0}{2\tau}\right)}{\frac{\tau_0}{2\tau}} \right].$$

Из этой формулы следует, что с уменьшением длительности τ_0 импульсов эффект вынужденного излучения становится менее заметным. При $\tau_0 \rightarrow 0$ он исчезает ($\alpha \rightarrow 0$).

Отсюда следует важный вывод.

Существует нижняя граница временной длительности τ_0 импульсов первичного излучения

$$\tau_0 \geq 2\tau = \frac{4\Gamma}{1 + \kappa^2 T^2 \tilde{\epsilon}^2},$$

начиная с которой проявление свойств эффекта вынужденного излучения становится заметным.

Эффект вынужденного излучения будет замечен только при достаточно протяженных во времени импульсах первичного излучения.

Таковы свойства первичного поля излучения, поляризации активной среды и вынужденного излучения, необходимые для формирования когерентной компоненты поля лазерного излучения в резонаторе.

6.4. Движение интерференционной картины поля излучения в резонаторе и соответствующих ей свойств вынужденного излучения.

Присутствие в резонаторе большого количества волновых полей излучения значительно усложняет анализ процесса взаимодействия этих полей с активной средой. Основная трудность заключается в том, что оптические свойства среды (ее поляризация) воспринимают не каждое отдельное волновое поле излучения, а суперпозицию (интерференцию) всех этих полей. Пространственно-временная структура суммарного поля излучения в резонаторе обычно весьма сложна. Именно она и определяет движение поляризации среды в пространстве-времени. Указанная трудность влечет за собой другую трудность, связанную с определением структуры поля вынужденного излучения, испускаемого активной средой. Последнюю трудность удастся несколько ослабить, если принять во внимание несколько физических закономерностей, которые далее будут сформулированы.

Пусть в цилиндрическом резонаторе задано суммарное волновое поле, составленное из большого количества различных элементарных волновых полей излучения. В самом общем случае когерентная пространственная структура суммарного поля определена в семействе пространственных областей с продольной ℓ_{11} и поперечной ℓ_{\perp} протяженностями, изменяющимися в пределах

$$\begin{aligned} \lambda_0 < \ell_{11} < L, \\ \lambda_0 < \ell_{\perp} < a, \end{aligned}$$

где L и a - продольный и поперечный размер резонатора.

Величины ℓ_{11} и ℓ_{\perp} имеют смысл характерных пространственных масштабов областей, в которых определена регулярная структура волнового поля.

На начальной стадии процесса формирования когерентного излучения, когда в резонаторе присутствует только некогерентное спонтанное излучение, наибольшей вероятностью обладает интерференционная картина суммарного поля с областями $\hat{\ell}_{11} \sim \hat{\ell}_{\perp} \sim \lambda_0$, ($\hat{\ell}_{11} \in \ell_{11}$, $\hat{\ell}_{\perp} \in \ell_{\perp}$).

С течением времени в таких пространственных областях будут наблюдаться временные колебания поля с частотой, приблизительно равной центральной частоте ν_0 лазерного перехода активной молекулы. Разумно полагать, что вынужденное излучение, испускаемое из пространственных областей с размерами $\hat{\ell}_{11} \sim \hat{\ell}_{\perp} \sim \lambda_0$, имеет вид сферических волн. С этой точки зрения оно похоже на спонтанное излучение, испускаемое отдельными активными молекулами.

На следующем этапе движения поля излучения в резонаторе в интерференционной картине начинают появляться области с продольным L_{11} и поперечным L_{\perp} размерами ($L_{11} \in \ell_{11}$, $L_{\perp} \in \ell_{\perp}$), превышающими длину волны λ_0 . Структуру поля излучения в таких областях можно приблизительно представить в виде образов искаженных синусоидальных волн. В этом случае размер L_{11} составлен из нескольких размеров λ_0 . Области с L_{11} , L_{\perp} приблизительно имеют форму эллипсоидов, вытянутых в продольном направлении ($L_{11} > L_{\perp}$). Вынужденное излучение из таких эллипсоидов анизотропно. Плотность потока энергии вынужденного излучения, испускаемого в продольном направлении (вдоль L_{11}) больше, чем в поперечном направлении (вдоль L_{\perp}).

На следующем этапе движения поля происходит увеличение размеров областей с L_{11} и L_{\perp} , причем размер L_{11} растет быстрее, чем размер L_{\perp} . На этом этапе, при условии быстрой релаксации поляризации среды, внутри областей с размерами L_{11} , L_{\perp} начинает появляться связь между полями первичного и вынужденного излучения, характерная для интересного для нас кинетического приближения взаимодействия этих полей со средой (в рамках модели комплексной диэлектрической проницаемости среды).

Определим свойства вынужденного излучения, испускаемого из области с размерами L_{11} , L_{\perp} . Если принять во внимание пространственный дисперсионный эффект, то характерный продольный размер \tilde{L}_{11} поля вынужденного излучения в процессе его распространения во времени t должен увеличиваться по закону

$$\tilde{L}_{11}(t) = L_{11} \sqrt{1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 L_{11}^4}}.$$

Отсюда следует вывод. Чем меньше размер L_{11} , тем быстрее будет увеличиваться при распространении характерный продольный размер поля вынужденного излучения.

Теперь определим угол θ дифракционного растяжения характерного поперечного размера поля вынужденного излучения, который сначала равен L_{\perp} . Учтем эффект пространственной дифракции. В соответствии с принципом неопределенности

$$\Delta k_{\perp} \cdot L_{\perp} \sim 2\pi,$$

где Δk_{\perp} - неопределенность поперечной составляющей волнового вектора \vec{k}_0 поля вынужденного излучения, и определим угол θ расходимости вынужденного излучения

$$\sin \theta \approx \frac{\Delta k_{\perp}}{k_0}$$

имеем:

$$\sin \theta \sim \frac{\lambda_0}{L_{\perp}}.$$

Отсюда следует важный вывод.

Вынужденное излучение из областей с размером L_{\perp} будет влиять на поле в резонаторе в том случае, если значение угла θ достаточно мало, т.е. при

$$\text{tg } \theta \leq \frac{a}{2L}.$$

При малых θ :

$$\sin \theta \sim \text{tg } \theta \sim \theta.$$

В этом случае из последних двух формул следует ограничение на значение величины L_{\perp} :

$$L_{\perp} \geq \frac{2L\lambda_0}{a}.$$

Если это неравенство не выполнено, то влиянием вынужденного излучения на движение поля в резонаторе можно пренебречь.

При $L = 1$ м, $a = 1$ см, $\lambda_0 = 300$ нм имеем

$$L_{\perp} \geq 6 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

На следующем этапе движения поля излучения в резонаторе увеличение размеров L_{\perp} , L_{11} областей когерентности, измеренных в образах координат (\hat{x}, \hat{z}) , $(0 \leq \hat{x}, \hat{z} < \infty$, свертка координаты \hat{x} с периодом $2\mathbf{a}$ дает координату x , $0 \leq x \leq \mathbf{a}$, а свертка координаты \hat{z} с периодом $2L$ дает координату z , $0 \leq z \leq L$), до размеров, превышающих размеры резонатора (точнее, при $L_{11} > 2L$, $L_{\perp} > 2\mathbf{a}$), сопровождается появлением в них новых когерентных волновых структур: резонансных продольных $\{\Psi_{11j}\}$ и поперечных $\{\Psi_{\perp\ell}\}$ составляющих волнового движения $\Psi_{j\ell} = \Psi_{11j} \cdot \Psi_{\perp\ell}$. Это свойство приводит к образованию внутри областей с размерами L_{11} , L_{\perp} новых интерференционных образований с продольными и поперечными пространственными размерами \tilde{L}_{11} , \tilde{L}_{\perp} , соответственно ($\tilde{L}_{11} = L$, $\tilde{L}_{\perp} = \mathbf{a}$, $\tilde{L}_{11} \in \ell_{11}$, $\tilde{L}_{\perp} \in \ell_{\perp}$, \tilde{L}_{11} и \tilde{L}_{\perp} здесь определены в (z, x)).

Физическими образами этих интерференционных образований, в конечном счете, является интерференционная картина поля излучения, составленного из совокупности собственных колебаний поля излучения (мод), присущих известной геометрии резонатора.

В режиме установившейся генерации лазерного излучения в резонаторе присутствуют интерференционные структуры поля всех рассмотренных выше видов.

6.5. Важная физическая закономерность.

Выше были установлены следующие свойства эффекта вынужденного излучения.

а). Наиболее важные в отношении к рассматриваемой здесь общей проблеме свойства эффекта вынужденного излучения имеют место в так называемом кинетическом приближении, т.е. тогда, когда взаимодействие излучения со средой описывается посредством комплексной диэлектрической проницаемости среды.

б). Были определены времена релаксации поляризации среды в поле излучения. Они позволяют найти нижнюю временную границу достижения желаемого режима взаимодействия излучения со средой.

в). Было установлено, что в процессе формирования когерентной компоненты поля излучения в резонаторе эффект вынужденного излучения начинает заметно влиять на поле в резонаторе не сразу, а только после того, как будут достигнуты необходимые пространственные масштабы когерентности поля спонтанного излучения.

Эти свойства позволяют сформулировать следующую важную физическую закономерность.

В процессе формирования когерентной компоненты поля излучения в резонаторе эффект вынужденного излучения начинает заметно проявляться не сразу, а только после того, как будут достигнуты определенные пространственно-временные масштабы когерентности исходного поля спонтанного излучения (при условии быстрой релаксации поляризации среды).

6.6. Свойства вынужденного излучения в системе (среда + две плоских волны первичного излучения). Свойства вынужденного излучения в резонаторе.

Продемонстрируем важность учета интерференционного эффекта первичного излучения на свойства вынужденного излучения посредством решения элементарной физической задачи.

Пусть задана среда с активными молекулами, в которой распространяются две плоские волны первичного излучения. Амплитуды, частоты ν_0 и волновые числа k_0 волн одинаковы. Введем в пространстве ортогональную координатную систему (z, x) . Будем считать, что проекции волновых векторов \vec{k}_0 волн первичного излучения на ось x равны k_x и $(-k_x)$ с $k_x > 0$. Сначала рассмотрим ситуацию с $\frac{k_x}{k_0} \ll 1$. Зависимости огибающей $\tilde{\epsilon}$ суммарного поля первичного излучения и его фазы Φ от x изображены на рис. 11.

На этом рисунке также изображена зависимость $\hat{\epsilon}(x)$ огибающей вынужденного излучения, испускаемого средой. Заметим, что в пределе $k_x \rightarrow 0$ движение огибающей $\hat{\epsilon}$ волны вынужденного излучения можно описывать посредством нестационарного уравнения Шредингера. В этом случае фазовая скорость v_ϕ движения вдоль x огибающей $\hat{\epsilon}$ волны вынужденного излучения определяется так:

$$v_\phi = \frac{\omega_x}{2k_x} = \frac{ck_x}{k_0}, \quad (\text{поскольку } \omega_x = \frac{c \cdot (2k_x)^2}{2k_0}) \quad \text{и характерный размер}$$

определения поля $\hat{\epsilon}(x)$ с учетом разрыва фазы Φ имеет порядок $\frac{\Lambda}{2} = \frac{\pi}{k_x}$.

На рис. 11 показан процесс распространения волн вынужденного излучения с такой скоростью из области его испускания средой.

При $k_x \rightarrow 0$ имеем $v_\phi \rightarrow 0$. Это соответствует случаю, когда обе волны первичного излучения совпадают. Тогда эффект вынужденного излучения проявляется так же, как в бегущей волне первичного излучения.

Отметим, что при $k_x \rightarrow 0$, но $k_x \neq 0$ скорость v_ϕ совпадает с поперечной составляющей фазовой скорости с $\frac{k_x}{k_0}$ волн первичного излучения.