

$$\Psi_n(L) - \Psi_o(L) = 0$$

между полями падающей  $\Psi_n$  и отраженной  $\Psi_o$  волн.

В действительности, однако, коэффициент отражения излучения от зеркала всегда меньше единицы. Это означает, что предыдущее соотношение строго не выполняется, также как и использованное выше граничное условие  $\Psi(L) = 0$ . С учетом этого свойства значение суммарного поля на поверхности зеркала может быть конечным

$$\delta\Psi = \Psi_n(L) - \Psi_o(L) \neq 0.$$

Это свойство ассоциируется с механизмом потерь энергии волнового поля при его взаимодействии с материалом зеркальной поверхности, а также со способностью зеркала пропускать излучение наружу, за пределы резонатора. Чем больше такие потери, тем больше  $|\delta\Psi|$ . Отметим, что формулу (1) можно использовать с учетом этого фактора.

Более наглядный учет этого фактора при анализе свойств продольной компоненты поля излучения в резонаторе содержится в элементарной и фундаментальной физической модели поля излучения в интерферометре Фабри-Перо. Используем ее в отношении к интересующей нас проблеме.

#### 4.3.3. Поле продольной компоненты излучения в интерферометре Фабри-Перо.

Изложим содержание модели поля излучения в интерферометре Фабри-Перо применительно к интересующей нас проблеме определения продольной структуры поля излучения в лазерном резонаторе. Будем считать, что зеркала резонатора плоские, расположены параллельно, имеют бесконечную поперечную протяженность и полупрозрачны. В этом смысле геометрия резонатора совпадает с геометрией интерферометра Фабри-Перо.

Пусть на интерферометр Фабри-Перо снаружи в направлении оптической оси  $z$  падает плоская волна с пространственной структурой

$$E_o = \hat{E}_o e^{ikz},$$

где  $\hat{E}_o$  - постоянная вещественная амплитуда,  $k$  - волновое число.

Если коэффициенты отражения волнового поля (по амплитуде) от обоих зеркал резонатора (интерферометра) одинаковы и равны  $\hat{\rho}$ , то внутри него имеется последовательность волн

$$E_1 = (1 - \hat{\rho}) \hat{E}_o e^{ikz},$$

$$E_2 = (1 - \hat{\rho}) \hat{\rho} \hat{E}_o e^{i(kL - \pi + kz)},$$

$$E_3 = (1 - \hat{\rho}) \hat{\rho}^2 \hat{E}_o e^{i(2kL - 2\pi + kz)},$$

$$E_4 = (1 - \hat{\rho}) \hat{\rho}^3 \hat{E}_o e^{i(3kL - 3\pi + kz)},$$

...

где:  $\xi = L - z$ ,  $0 \leq z \leq L$ .

Волны  $E_1, E_3, \dots$  распространяются в направлении оси  $z$ , а волны  $E_2, E_4, \dots$  - в противоположном направлении.

Из этих соотношений легко увидеть следующую закономерность. Если предположить, что сначала в резонаторе задана исходная волна

$$E_1 = \tilde{E}_0 e^{ikz}$$

с амплитудой  $\tilde{E}_0 = (1 - \hat{\rho}) \hat{E}_0$ , причем считать, что  $\tilde{E}_0$  - произвольная, не зависящая от  $\hat{\rho}$ , постоянная величина, то суммы пар встречных волн на поверхностях зеркал резонатора представимы в виде

$$E_1(L) + E_2(L) = \tilde{E}_0 e^{ikL} (1 - \hat{\rho}),$$

$$E_2(0) + E_3(0) = \tilde{E}_0 \hat{\rho} e^{2ikL} (-1 + \hat{\rho}),$$

$$E_3(L) + E_4(L) = \tilde{E}_0 \hat{\rho}^2 e^{3ikL} (1 - \hat{\rho}) \text{ и т.д.}$$

Отсюда видно, что при  $\hat{\rho} = 1$  для этих пар волн будет иметь место гасящая интерференция, т.е. суммарное поле в каждой паре волн на поверхности зеркала оказывается равным нулю. Это свойство означает, что отличные от нуля поля рассматриваемых пар волн на зеркалах возможны только в том случае, если амплитуды волн в паре различны. В данном случае это различие достигается при условии неполного отражения волн от поверхности зеркала ( $\hat{\rho} < 1$ ).

Таким образом, подтвержден следующий факт из предыдущего параграфа. При отражении плоской волны от поверхности зеркала при  $\hat{\rho} = 1$  напряженность поля на поверхности зеркала равна нулю и возрастает или уменьшается от нуля при уменьшении  $\hat{\rho}$  от единицы.

Теперь проанализируем структуру волнового поля в резонаторе (интерферометре) и на поверхности его зеркал в системе, состоящей из бесконечной последовательности волн  $E_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, \infty$ , т.е. проанализируем интерференционную картину поля при сложении этих волн.

Далее нас будет интересовать поле излучения, составленное из двух совокупностей  $E_+$  и  $E_-$  волновых полей, распространяющихся в различных направлениях внутри резонатора:

$$E_+ = E_1 + E_3 + \dots = \frac{(1 - \hat{\rho}) \hat{E}_0 e^{ikz}}{1 - \hat{\rho}^2 e^{2ikL}},$$

$$E_- = E_2 + E_4 + \dots = \frac{-(1 - \hat{\rho}) \hat{\rho} \hat{E}_0 e^{i(2kL - kz)}}{1 - \hat{\rho}^2 e^{2ikL}}.$$

Вещественную структуру суммарного волнового поля  $E = E_+ + E_-$  в резонаторе можно изучать с помощью следующих представлений:

$$E_r = \text{Re}(E_+ + E_-),$$

$$E_i = \text{Im}(E_+ + E_-).$$

Вычисления приводят к следующим результатам:

$$E_r = \frac{\hat{E}_o(1 - \hat{\rho})}{1 + \hat{\rho}^4 - 2\hat{\rho}^2 \cos(2kL)} \cdot [\cos(kz) - \hat{\rho}^2 \cos(kz - 2kL) - \hat{\rho} \cos(2kL - kz) + \hat{\rho}^3 \cos(kz)],$$

$$E_i = \frac{\hat{E}_o(1 - \hat{\rho})}{1 + \hat{\rho}^4 - 2\hat{\rho}^2 \cos(2kL)} \cdot [\sin(kz) - \hat{\rho}^2 \sin(kz - 2kL) - \hat{\rho} \sin(2kL - kz) - \hat{\rho}^3 \sin(kz)].$$

Видно, что соответствие между такими определениями  $E_r$  и  $E_i$  нарушено только знаком последнего слагаемого в квадратных скобках. Причиной этого нарушения является различие четности функций  $\cos(kz)$  и  $\sin(kz)$ . Противоречие устраняется, если принять во внимание, что  $\cos(kz) = \cos(-kz)$ ,  $-\sin(kz) = \sin(-kz)$ . Если рассматривать ситуацию с этой точки зрения, то более корректным является анализ проблемы посредством представления  $E_i$ . Далее используем его.

Отвлечемся от ситуации с интерферометром и будем считать, что исходной первоначальной волной в резонаторе является волна  $E_i$  с амплитудой  $\tilde{E}_o = \hat{E}_o(1 - \hat{\rho})$ , не зависящей от  $\hat{\rho}$ .

Тогда формула для  $E_i$  приводится к виду

$$E_i = \frac{\tilde{E}_o(1 - \hat{\rho})[(\hat{\rho}^2 + \hat{\rho} + 1)\sin(kz) - \hat{\rho} \sin(2kL - kz)]}{1 + \hat{\rho}^4 - 2\hat{\rho}^2 \cos(2kL)}. \quad (2)$$

Эта формула определяет вещественное суммарное волновое поле в резонаторе. Проанализируем ее.

Поскольку  $E_i \sim (1 - \hat{\rho})$ , то видно, что с приближением  $\hat{\rho}$  к единице и при  $\cos(2kL) \neq 1$  поле  $E_i$  будет стремиться к нулю. При  $\hat{\rho} \rightarrow 1$  и  $\cos(2kL) \neq 1$  в резонаторе будет иметь место гасящая интерференция волн. При этом, однако, необходимо принять во внимание стремление к нулю знаменателя на резонансных частотах  $k$ , удовлетворяющих условию  $\cos(2kL) = 1$ ,

$$2kL = 2\pi n, n = 1, 2, 3, \dots$$

Поскольку  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  – длина волны, то

$$\frac{\lambda_n}{2} n = L.$$

Поэтому на резонансных частотах  $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi n}{L}$  даже при условии  $\hat{\rho} \rightarrow 1$

амплитуда поля в резонаторе может быть отлична от нуля.

Проанализируем практически интересный случай  $\hat{\rho} \rightarrow 1$ .

В случае  $\hat{\rho} \rightarrow 1$  формула для  $E_i$  принимает вид:

$$E_i = \frac{\tilde{E}_o(1 - \hat{\rho})[3\sin(kz) - \sin(2kL - kz)]}{2[1 - \cos(2kL) + \alpha]}$$

где  $\alpha$  – малая положительная величина.

Тогда на границах

$$E_i(z=0) = \frac{-\tilde{E}_o(1 - \hat{\rho})\sin(2kL)}{2[1 - \cos(2kL) + \alpha]}$$

$$E_i(z=L) = \frac{\tilde{E}_o(1 - \hat{\rho})\sin(kL)}{1 - \cos(2kL) + \alpha}$$

Из этих формул видно, что

$$E_i(z=0) = 0 \quad \text{при} \quad \sin(2kL) = 0, \quad 2kL = \pi m,$$

$$m = 1, 2, \dots; \quad k_m = \frac{\pi m}{2L}; \quad \Delta k_m = k_m - k_{m-1} = \frac{\pi}{2L};$$

$$E_i(z=L) = 0 \quad \text{при} \quad \sin(kL) = 0, \quad kL = \pi \ell,$$

$$\ell = 1, 2, \dots; \quad k_\ell = \frac{\pi \ell}{L}, \quad \Delta k_\ell = k_\ell - k_{\ell-1} = \frac{\pi}{L}.$$

Таким образом, имеется три набора пространственных частот  $k_n, k_m, k_\ell$ , которым соответствуют наиболее интересные физические свойства суммарного волнового поля в резонаторе и на зеркалах. Расположение этих частот показано на рис. 3.

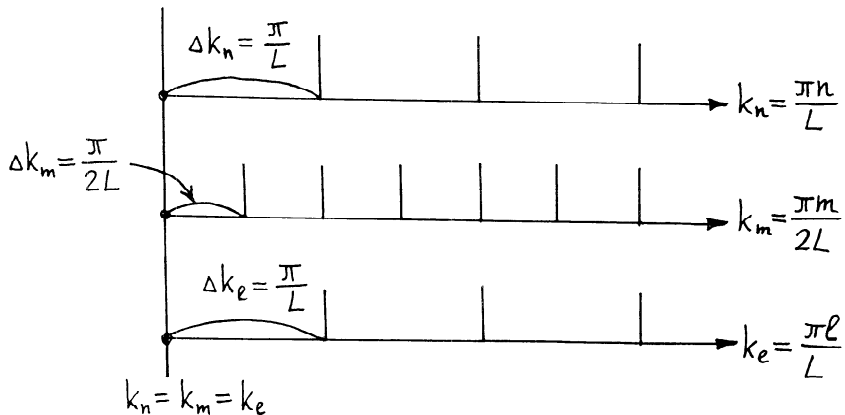


Рис. 3.

Из этого рисунка видно, что существует единственный набор частот  $k_n = \frac{\pi n}{L}$ , для которого выполняются два условия – максимум амплитуды суммарного волнового поля в резонаторе и нулевое значение этого поля на поверхностях резонаторных зеркал.

Отклонение волнового числа  $k$  от резонансного значения  $k_n = \frac{\pi n}{L}$  приводит к уменьшению амплитуды суммарного волнового поля  $E_i$  и к появлению отличного от нуля поля на поверхностях зеркал. Последнее свойство приводит к возникновению потерь энергии волнового поля на них.

Отметим, что установленная выше закономерность совпадения свойств максимума амплитуды суммарного волнового поля  $E_i$  в резонаторе и минимальных потерь энергии этого поля на поверхностях зеркал при резонансных частотах  $k_n$  поля является фундаментальной закономерностью в физике поля лазерного излучения. Без ее открытия проблема осуществления генерации когерентного лазерного излучения осталась бы нерешенной.

#### 4.3.4. Времена жизни продольных колебаний поля излучения в пустом резонаторе.

Из проведенного выше анализа продольной компоненты поля излучения в интерферометре Фабри-Перо следует, что она определяется двумя факторами: значением волнового числа  $k$  и значением коэффициента отражения  $\hat{\rho}$  зеркал. Зависимость амплитуды  $\rho_\Sigma$  суммарного волнового поля в интерферометре от  $k$  и  $\hat{\rho}$ , в соответствии с формулой (2), показана на рис. 4.

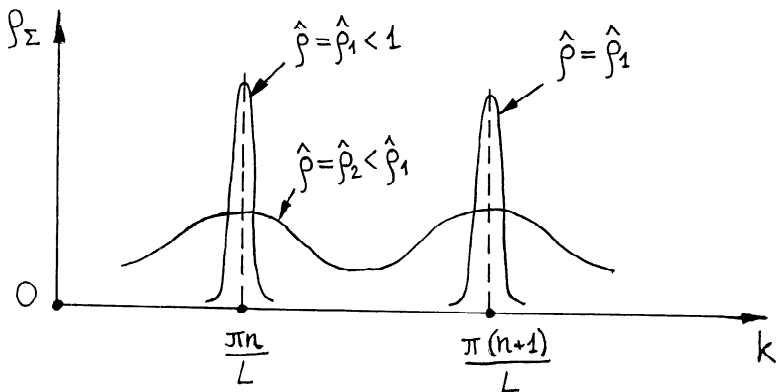


Рис. 4.

Информацию, изображенную на этом рисунке, можно физически интерпретировать следующим образом. Колебания поля на резонансных частотах  $k_n = \frac{\pi n}{L}$  имеют времена  $\tau(k_n)$  жизни более длинные по сравнению с временами жизни  $\tau(k)$  колебаний поля на нерезонансных частотах  $k \neq k_n$ . Определим зависимость  $\tau(k)$  в случае произвольных  $k$ .

Ограничимся анализом ситуации, при которой значение  $\hat{\rho}$  в (2) близко к единице. Тогда амплитуду  $\rho_\Sigma$  суммарного поля в резонаторе, в соответствии с (2), можно аппроксимировать зависимостью

$$\rho_\Sigma \approx \frac{2\tilde{E}_0(1-\hat{\rho})}{1+\hat{\rho}^4 - 2\hat{\rho}^2 \cos(2kL)},$$

где  $\tilde{E}_0$  - амплитуда поля исходной волны.

Движение амплитуды

$$\rho(k, t) = \tilde{E}_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau(k)}}$$

поля в плоскости  $(\hat{z}, t)$  изображено на рис. 5.

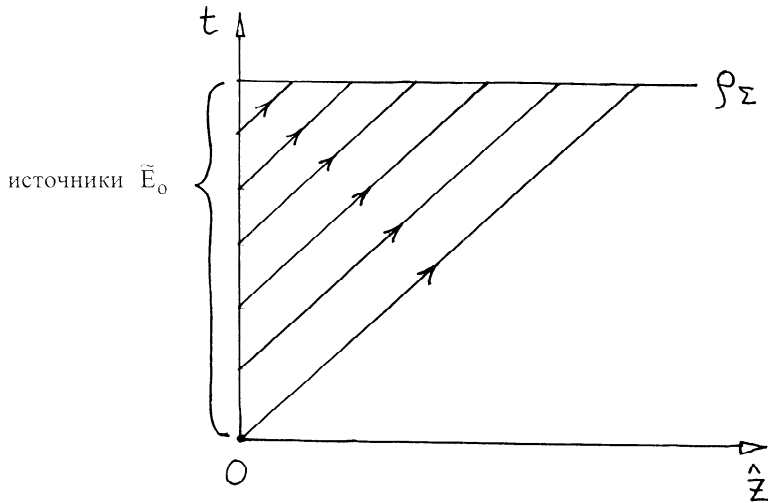


Рис.5.

Введем величину

$$\tilde{E}_{o,t} = \left( \frac{\tilde{E}_o}{\Delta t} \right)_{z=0} = \text{Const} > 0.$$

Тогда

$$\rho_{\Sigma} = \int_0^{\infty} \tilde{E}_{o,t} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau \tilde{E}_{o,t}.$$

Следовательно,

$$\tau(k) = \frac{\rho_{\Sigma}(k)}{\tilde{E}_{o,t}} = \frac{2 \Delta t (1 - \hat{\rho})}{1 + \hat{\rho}^4 - 2 \hat{\rho}^2 \cos(2kL)}.$$

При  $\hat{\rho} = 0$ :

$$\tau(k, \hat{\rho} = 0) = 2 \Delta t.$$

С другой стороны,

$$\tau(k, \hat{\rho} = 0) = \frac{L}{c}.$$

Поэтому

$$2 \Delta t = \frac{L}{c}.$$

Окончательно, имеем формулу для определения  $\tau$ :

$$\tau(k, \hat{\rho}) = \frac{L(1 - \hat{\rho})}{c \cdot [1 + \hat{\rho}^4 - 2 \hat{\rho}^2 \cos(2kL)]}.$$

Минимальное время жизни при  $L \sim 1$  м составляет  $\tau = \tau_{\min} = \frac{L}{c} \sim 3 \cdot 10^{-9}$  с и имеет место при  $\hat{\rho} = 0$ .

В случае резонанса  $k = k_n = \frac{\pi n}{L}$ :  $\cos(2k_n L) = 1$  и тогда

$$\tau(k_n, \hat{\rho}) = \frac{L}{c(1 - \hat{\rho})(1 + \hat{\rho})^2}.$$

При  $L = 1$  м,  $\hat{\rho} = 0,98$  имеем  $\tau \sim 5 \cdot 10^{-8}$  с, а при  $\hat{\rho} = 0,99$  будет  $\tau \sim 10^{-7}$  с.

Таково представление о временах жизни продольных колебаний поля излучения в пустом резонаторе.

#### 4.3.5. Определение используемых далее понятий продольная мода и шумовая продольная мода.

Выше анализировалась ситуация, при которой в резонатор вводилась продольная плоская волна. Более реальной является ситуация, когда внутрь резонатора вводится продольная волна шумового излучения с флуктуирующими в пространстве-времени амплитудой, пространственной и временной частотами. Из проведенного выше анализа и рис. 4 следует, что в этом случае в поле продольной компоненты излучения внутри резонатора возможно существование резонансных волновых структур с конечной частотной протяженностью, ограниченной в интервале  $0 < \Delta v < \frac{c}{2L}$ ,

( $0 < \Delta k < \frac{\pi}{L}$ ). Из рис. 4 видно, что, чем выше значение  $\hat{\rho}$ , тем меньше их частотная протяженность.

Существование таких волновых структур имеет в физике очень важное значение. Оно настолько велико, что мы осмелились дать им собственное название – шумовых мод.

Понятие шумовой поперечной моды было введено нами в [ 12 ]. Там же было уяснено ее фундаментальное физическое значение.

Понятие шумовой продольной моды вводится похожим образом.

В теории поля лазерного излучения существуют два фундаментальных неэквивалентных физических объекта – продольная мода и шумовая продольная мода. Дадим их определения.

Под продольной модой будем понимать собственное продольное колебание поля излучения в резонаторе на резонансной частоте  $v_n = \frac{nc}{2L}$ , ( $k_n = \frac{\pi n}{L}$ ), где  $n$  – положительное целое число, имеющее смысл числа полудлин волн  $\lambda/2$  излучения, укладываемых на расстоянии  $L$ :  $\frac{\lambda}{2} \cdot n = L$ .

Под шумовой продольной модой будем понимать продольное колебание поля излучения в резонаторе, определенное в окрестности резонансной частоты  $v_n$  (и  $k_n$ ) в интервале

$$v_n - \frac{\Delta v}{2} < v < v_n + \frac{\Delta v}{2}, (\Delta v = \frac{c}{2L}) \quad \text{и} \quad k_n - \frac{\Delta k}{2} < k < k_n + \frac{\Delta k}{2}, (\Delta k = \frac{\pi}{L}).$$

Уясним физику процесса формирования продольных шумовых мод.

Пусть в резонатор вводится продольная волна шумового излучения с флуктуирующими в пространстве-времени амплитудой  $\rho$  и частотами  $v, k$ . Рассмотрим процесс движения  $\rho, v, k$  этой волны внутри резонатора в пространстве-времени  $(\hat{z}, t)$ . Здесь  $\hat{z}$  – продольная пространственная координата, отсчитываемая в направлении движения волны (координата  $z$



внутри резонатора есть свернутая с периодом  $2L$  координата  $\hat{z}$ ). Поле  $\Psi_{11}(\hat{z}, t)$  представляет собой бегущую волну с плавно изменяющимися по  $\hat{z}, t$  амплитудой  $\rho$  и частотами  $\nu, k$ . Предположим, что характерные пространственные  $\Delta\hat{z}$  и временные  $\Delta t$  масштабы изменения  $\rho, \nu, k$  в этой волне превышают  $2L$  и  $2\frac{L}{c}$ , соответственно.

Заметим, что такую волну можно считать локально плоской. (Такой термин находится в соответствии с существующим в математике определением искривленного риманова многообразия как локально евклидова пространства). Это означает, что в малой окрестности любой точки на плоскости  $(\hat{z}, t)$  волну с переменными  $\rho, \nu, k$  можно считать плоской. Следовательно, при анализе движения интересующей нас волны в малом (т.е. в малых окрестностях точек на плоскости  $(\hat{z}, t)$ ) можно использовать представления, изложенные выше при описании движения плоских волн в резонаторе.

Тогда можно заметить, что в пространственно-временных областях, в которых волна имеет частоты  $\nu, k$ , близкие к резонансным  $\nu_n, k_n$ , она будет затухать слабее, чем в областях с нерезонансными частотами  $\nu, k$ . Это означает, что, в целом, в зависимости  $\rho(\hat{z}, t)$  будут появляться горбы с максимумами, соответствующими резонансным частотам  $\nu = \nu_n, k = k_n$ . Можно считать, что такие горбы в зависимости  $\rho(\hat{z}, t)$  являются пространственно-временными конфигурациями шумовых продольных мод. Они показаны на рис. 6.

Несколько различных шумовых продольных мод (горбов), изображенных на этом рисунке, могут иметь одинаковые центральные частоты  $\nu_n, k_n$ . Чтобы подчеркнуть их индивидуальность, мы, иногда, будем называть их «парциальными» шумовыми продольными модами.

Шумовые продольные моды образуются при трех условиях:

- а) геометрия многообразия фазовых фронтов продольной шумовой волны должна быть близка к такой геометрии в установившемся режиме волнового движения поля в резонаторе (настолько, чтобы можно было бы ввести понятие продольных резонансных частот  $\nu_n, k_n$  в отношении к полю);
- б) в исходной продольной волне шумового излучения должны иметься частоты  $\nu, k$ , совпадающие с резонансными частотами  $\nu_n, k_n$ ;
- в) зависимости  $\rho(\hat{z}, t), \nu(\hat{z}, t), k(\hat{z}, t)$ , в окрестности центральных частот  $\nu_n, k_n$  шумовых продольных мод должны быть слабыми.

Продольные шумовые моды могут формироваться даже в случае коротких во времени и в пространстве импульсов исходной продольной волны шумового излучения, когда пространственная длительность начального импульса короче  $2L$ . В этом случае условия (а,в) будут выполнены с некоторой временной задержкой, определенной процессами

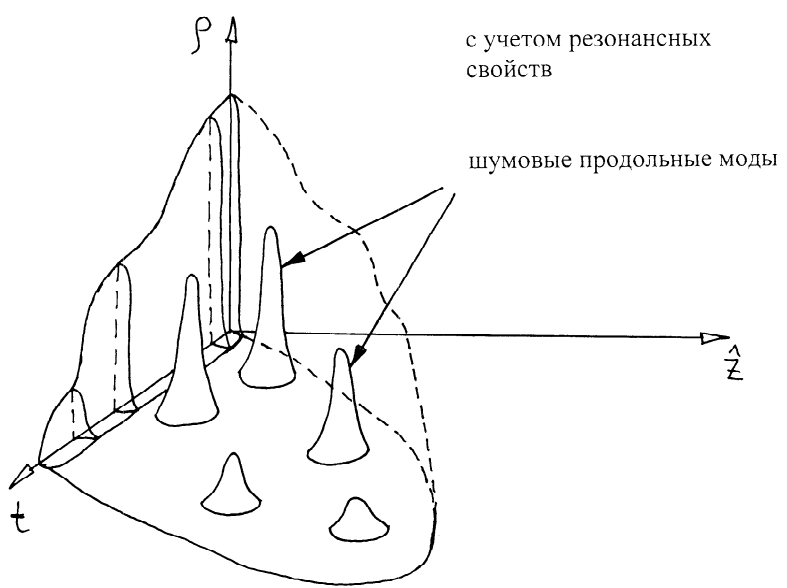
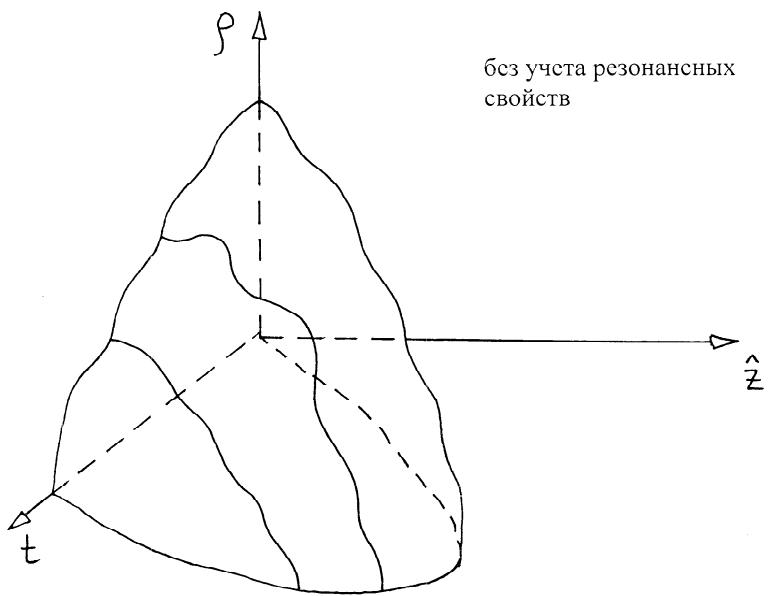


Рис. 6.

дифракционного и дисперсионного растяжения импульса в процессе его распространения.

Время  $t_0$  начала процесса формирования шумовых продольных мод определяется так:

$$t_0 = \max(\tau_{\min}, \tau_0, \tau_1),$$

где:  $\tau_0$  - время достижения условия (а),

$$\tau_{\min} = \frac{2L}{c}, \quad \tau_1 - \text{время достижения условия (в)}.$$

Характерное время жизни (затухания) шумовых продольных мод определяется временем  $\tau$  жизни резонансного продольного колебания в резонаторе. Оно было определено выше, в п. 4.3.4.. При  $L = 1$  м,  $\hat{\rho} = 0,99$  оно составляет  $\tau \sim 10^{-7}$  с. Интересно сравнить его с временем  $T'$  резонансного возбуждения продольной моды, не имеющей затухания в свободном состоянии. Метод определения  $T'$  совпадает с методом определения времени  $T$  возбуждения поперечной моды. Он был изложен в [ 11 ]. В соответствии с ним, если свободное собственное продольное колебание поля в резонаторе имеет бесконечное время жизни, то:

$$T' = \frac{8\pi^2 \nu L^2}{c^2}.$$

Для  $\lambda = 300$  нм,  $L = 1$  м имеем  $T' \sim 1$  с. Отсюда можно сделать (как будет далее показано ложный) вывод.

При рассматриваемых условиях процесс непосредственного возбуждения продольной моды из шумовой продольной моды маловероятен, поскольку время жизни  $\tau$  шумовой продольной моды намного меньше времени  $T'$  возбуждения продольной моды:

$$\tau \sim 10^{-7} \text{ с} \ll T' \sim 1 \text{ с}.$$

Во избежание недоразумений отметим, что введение в интерферометр Фабри-Перо (или в резонатор) продольной волны шумового излучения на резонансной частоте  $\nu_n$  совсем не означает мгновенного возбуждения собственного продольного колебания поля (моды) в нем на той же частоте. Процесс такого возбуждения должен происходить за конечный промежуток времени, который может быть весьма длительным. В рассматриваемой ситуации, если свободная продольная мода имеет бесконечное время жизни, он равен  $T'$ . (Подробно этот вопрос освещен в [ 11 ]).

Определенные выше физические полевые объекты и указанные их свойства будут использоваться далее при решении основной проблемы лазерной физики.

#### 4.3.6. Характерное время резонансного возбуждения шумовым полем продольного собственного колебания (моды) поля, имеющего в свободном состоянии конечное время жизни $\tau$ . Влияние $\tau$ на физическое содержание проблемы.

Выше было отмечено, что характерное время  $T'$  резонансного возбуждения шумовым колебанием продольной моды поля, имеющей в свободном состоянии бесконечно время жизни, довольно велико ( $T' \sim 1$  с). Интересно определить, как влияет на значение величины  $T'$  фактор конечности времени жизни  $\tau$  продольной моды в свободном состоянии. Это важно, поскольку из проведенных выше оценок следует, что время  $\tau$  может иметь сравнительно малое значение ( $\tau \sim 10^{-7}$  с). Чтобы оценить значение интересующего нас времени возбуждения продольной моды, которое, в отличие от известного времени  $T'$ , будем обозначать посредством  $T''$ , необходимо определить эволюцию собственного колебания в процессе его резонансного возбуждения. Такая задача в отношении к поперечной моде приближенно была решена в [ 12 ]. Воспользуемся полученными там результатами. В соответствии с ними, в интересующей нас здесь ситуации, характерное время  $T''$  резонансного возбуждения продольной моды оказывается соизмеримым с временем  $\tau$ , т.е.

$$T'' \sim \tau \sim 10^{-7} \text{ с.}$$

Отметим, что время  $T''$  в этом случае все-таки оказывается больше минимально допустимого времени формирования шумовой продольной моды ( $3 \cdot 10^{-9}$  с). Кроме того, время  $T''$  оказывается соизмеримым с временем жизни шумовой продольной моды. Все это указывает на значительную вероятность возбуждения продольной моды из шумовой продольной моды.

Как видим, учет фактора конечности времени  $\tau$  жизни свободного продольного собственного колебания поля в резонаторе существенно влияет на физическое содержание рассматриваемого явления.

#### 4.4. Строение наблюдаемой когерентной продольной структуры поля в резонаторе на начальной стадии ее формирования.

Строение наблюдаемой когерентной продольной структуры поля в резонаторе на начальной стадии ее формирования очень похоже на строение наблюдаемой когерентной поперечной структуры поля, изученной в [11, 12]. Основным замечанием при этом является существование в плоскости  $(\hat{z}, t)$  точек – резонансов, в окрестности которых из шумового поля образуются интересующие нас когерентные образования – «парциальные» шумовые продольные моды (см. рис. 6) и затем, соответствующие им, «парциальные» продольные моды.

Существенно отметить, что нескольким различным точкам-резонансам может соответствовать столько же «парциальных» когерентных образований с одинаковой резонансной частотой, но с различными амплитудами и относительными фазами. Суперпозиция таких «парциальных» когерентных образований будет наблюдаться в эксперименте и отождествляться с образом единственного волнового образования (шумовой продольной моды или продольной моды). Отсюда следуют выводы.

1). Наблюдаемая в эксперименте конфигурация отдельной продольной моды в действительности состоит из суперпозиции большого количества «парциальных» продольных мод с той же частотой, но со случайными амплитудами и относительными фазами. Эти «парциальные» моды возбуждаются в окрестности различных точек (резонансов) на плоскости  $(\hat{z}, t)$ .

То же справедливо в отношении к шумовым продольным модам.

Ранее нами было показано, что таким же свойством обладают наблюдаемые в эксперименте конфигурации поперечных мод и шумовых поперечных мод.

Наблюдаемая в эксперименте конфигурация продольной моды имеет случайный характер. Флуктуации тем меньше, чем больше число «парциальных» мод с той же частотой, с близкими по величине случайными амплитудами и с хаотическими относительными фазовыми сдвигами.

2). «Парциальные» моды, составляющие наблюдаемую в эксперименте моду, имеют конечное время жизни, которое может быть малым. Время жизни составленной из них моды велико. Оно определяется длительностью источника шумового излучения. Это происходит потому, что, наряду с затуханием «парциальных» мод, имеет место и их рождение. В общем, наблюдаемая в момент времени  $t$  мода составлена из набора существующих в этот момент времени  $t$  соответствующих ей «парциальных» мод.

Здесь также уместно привести формулу, определяющую наблюдаемое в эксперименте продольное волновое поле  $\hat{\Psi}(z, t)$  в резонаторе с  $0 \leq z \leq L$ , содержащее как когерентную, так и шумовую составляющие, по известному полю  $\Psi(\hat{z}, t)$  с  $0 \leq \hat{z} < \infty$  (см. (1) и рис. 6):

$$\hat{\Psi}(z, t) = \Psi(z, t) + [\Psi(\hat{z}_2 + z, t) + \Psi(\hat{z}_4 + z, t) + \dots] - [\Psi(\hat{z}_2 - z, t) + \Psi(\hat{z}_4 - z, t) + \dots],$$

где:  $\hat{z}_n = nL, n = 0, 1, 2, \dots$

Таково представление о строении наблюдаемой когерентной продольной структуры поля в резонаторе на начальной стадии ее формирования без учета эффекта вынужденного излучения и когерентных свойств исходного спонтанного излучения. Далее это представление будет существенно уточнено.

## 5. Свойства спонтанного излучения в резонаторе.

### 5.1. Общие положения.

Полученных выше представлений достаточно для перехода к следующему этапу решения основной проблемы лазерной физики. Его содержанием является уяснение физических свойств спонтанного излучения активной среды в резонаторе. Значение этого этапа важно по двум причинам:

а) спонтанная компонента излучения в резонаторе, наряду с его когерентной компонентой, всегда является неотъемлемой частью лазерного излучения;

б) интересующая нас когерентная составляющая лазерного излучения в резонаторе начинает формироваться из его спонтанной компоненты.

Эти причины являются побуждающим мотивом к подробному исследованию свойств спонтанного излучения активной среды в резонаторе.

### 5.2. Когерентные свойства спонтанного излучения от плоского экрана с конечной поперечной протяженностью.

#### 5.2.1. Определение предмета исследования.

Проблема определения структуры спонтанного излучения от активной среды в лазерном резонаторе начинает решаться с уяснения когерентных свойств такого излучения. Оно позволит установить пространственно-временные области когерентности излучения, в которых излучение описывается средствами обычной (не статистической) волновой механики. Ближайшей целью является установление размеров таких областей и вывод закономерностей их движения в пространстве-времени. Для интересующих нас условий эта проблема сводится к решению фундаментальной элементарной физической задачи, а именно, к определению когерентных свойств излучения от тонкого, плоского, ограниченного в пространстве экрана, в котором хаотически расположено большое количество молекул, испускающих в целом спонтанное излучение в малом частотном интервале

$\Delta\nu$  по сравнению с центральной частотой  $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$  лазерного перехода ( $\lambda_0$  –

длина волны излучения).

Решим эту задачу.

#### 5.2.2. Поперечная пространственная когерентность.

Сначала предположим, что излучение от экрана когерентно во времени, т.е. найдем решение задачи во временном интервале, меньшем по сравнению с  $(\Delta\nu)^{-1}$ .

Определим закон изменения размера  $L_{\perp}$  поперечной когерентности поля излучения, испущенного экраном, по мере удаления от него.

Пусть  $a$  – протяженность экрана в поперечном направлении (вдоль координаты  $x$ ),  $\ell$  – расстояние от экрана вдоль координаты  $\hat{z}$ , ортогональной координате  $x$ . Определим зависимость  $L_{\perp}$  от  $\ell$  и  $a$  на оптической оси  $\hat{z}$ . Геометрия задачи показана на рис. 7.

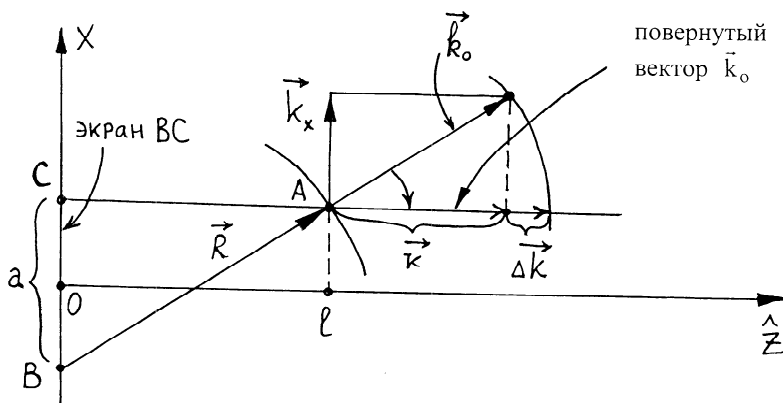


Рис. 7.

Введем волновое число  $k_x$  поперечной волны.

Оно связано с  $L_{\perp}$  равенством

$$k_x = \frac{2\pi}{L_{\perp}}$$

Определим вектор  $\vec{k}_x$  как проекцию волнового вектора  $\vec{k}_0$  на ось  $x$  в точке  $A$  пересечения радиуса вектора  $\vec{R}$  с прямой  $AC$ , проведенной параллельно оси  $\hat{z}$  из граничной точки  $C$  экрана.

Из подобия треугольников, изображенных на рисунке, следует

$$\frac{k_x}{a} = \frac{k_0}{R}, \quad (k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}).$$

Используя равенство

$$R^2 = a^2 + \ell^2,$$

получаем искомый результат

$$L_{\perp} = \frac{\lambda_0}{a} \sqrt{a^2 + \ell^2}.$$

В частности, имеем

$$L_{\perp}(\ell = 0) = \lambda_0,$$

$$L_{\perp}(\ell \rightarrow \infty) = \frac{\lambda_0 \ell}{a},$$

равенство  $L_{\perp} = a$  имеет место при  $\ell = a \sqrt{\frac{a^2}{\lambda_0^2} - 1}$ , (если  $a \gg \lambda_0$ , то  $\ell = \frac{a^2}{\lambda_0}$ ).

Полученный результат допускает следующую физическую интерпретацию.

При  $\ell = 0$  размер  $L_{\perp}$  определяется самой короткой возможной длиной волны поперечной структуры, равной  $\lambda_0$ . С ростом  $\ell$  из области наблюдения с максимальной скоростью выходят самые короткие поперечные волны. Поэтому минимальная длина волны поперечной структуры поля там возрастает. Следовательно, возрастает и размер  $L_{\perp}$ .

Таково решение поставленной задачи.

### 5.2.3. Продольная пространственная когерентность.

Определим зависимость размера  $L_{11}$  пространственной области продольной когерентности от размера экрана  $a$  и расстояния  $\ell$  от экрана. (Геометрия задачи показана на рис. 7).

Величина  $L_{11}$  является размером определенности продольной структуры волнового поля вдоль оптической оси  $\hat{z}$ . Она вводится так:

$$L_{11} = \frac{2\pi}{\Delta k}.$$

Вектор  $\vec{\Delta k}$  показан на рис. 7.

Из этого рисунка видно, что

$$\Delta k = k_0 - k.$$

Из подобия треугольников:

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\ell}{R}.$$

Следовательно,

$$k = k_0 \frac{\ell}{R}.$$

С другой стороны:

$$\ell^2 = R^2 - a^2, \quad R = \sqrt{\ell^2 + a^2}.$$

Поэтому



$$\kappa = k_0 \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + a^2}},$$

$$\Delta\kappa = k_0 - k_0 \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + a^2}} = k_0 \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + a^2}}\right).$$

Окончательно имеем

$$L_{11} = \frac{\lambda_0}{1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + a^2}}}.$$

Таково решение поставленной задачи. Интересно сравнить зависимости  $L_{11}(\ell)$  и  $L_{\perp}(\ell)$  при  $a = 1$  см. Они приведены в таблице

$\ell$ [ см ]	$L_{\perp}/\lambda_0$	$L_{11}/\lambda_0$
0	1	1
1	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
10	10	$2 \cdot 10^2$
$10^2$	$10^2$	$2 \cdot 10^4$
$10^3$	$10^3$	$2 \cdot 10^6$

Видно, что размер  $L_{11}$  продольной когерентности возрастает с повышением  $\ell$  быстрее, чем размер  $L_{\perp}$  поперечной когерентности.

#### 5.2.4. Временная когерентность.

Размер  $T_k$  временной области когерентности волнового поля является временным масштабом определенности этого поля. Он вводится как величина, обратная пропорциональная ширине  $\Delta\nu$  частотного контура линии спонтанного излучения:

$$T_k = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

В практически интересных ситуациях для газовых лазеров низкого давления, при  $10^6 < \Delta\nu < 10^8$  с<sup>-1</sup>, очевидно  $10^{-8} < T_k < 10^{-6}$  с.

Отметим, что эти значения  $T_k$  характерны для начального этапа движения поля излучения, вблизи экрана, т.е. в окрестности момента времени  $t = 0$ . При дальнейшем распространении поля от экрана, на характеристике  $\hat{z} = ct$ , величина  $T_k(t)$  может возрастать. Это свойство роста  $T_k(t)$  характерно для лоренцевского механизма уширения контура спектральной линии спонтанного излучения, т.е. тогда, когда средняя длительность  $\tau$  импульса испускаемого молекулой излучения соизмерима с  $(\Delta\nu)^{-1}$ .

В процессе распространения таких импульсов они будут испытывать растяжение во времени, обусловленное проявлением временного дифракционного эффекта. Поэтому их длительность возрастает. Следовательно, возрастает и значение  $T_k$ .

Определим зависимость  $T_k(t)$ , индуцированную проявлением временного дифракционного эффекта.

Из принципа неопределенности  
 $\Delta v \cdot \tau \sim 1$ ,

где  $\tau$  – начальная временная протяженность импульса, следует:

$$\sin \theta \approx \frac{\Delta v}{v_0} \approx \frac{1}{\tau v_0}.$$

Здесь «углом расходимости»  $\theta$  ассоциируется с углом расходимости в процессе пространственной (обычной) дифракции плоской волны излучения на щели. (Геометрия задачи показана на рис. 8). Тогда

$$\operatorname{tg} \theta \approx \frac{T_k}{t}.$$

При  $\theta \rightarrow 0$  имеем  $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$ . Поэтому искомая зависимость  $T_k(t)$  в «дальней зоне»  $\frac{\tau^2}{\tau_0 t} < 1$ , (здесь  $\tau_0 = \frac{1}{v_0}$ ) имеет вид

$$T_k \approx \frac{t}{\tau v_0}$$

Характерное время  $t$  дифракционного растяжения импульса от размера  $\tau$  до  $2\tau = T_k$  определяется так:

$$t \approx 2 v_0 \tau^2.$$

При  $v_0 \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau \sim 10^{-10} \text{ с}$  оно составляет  
 $t \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ , (это *весьма грубая оценка*).

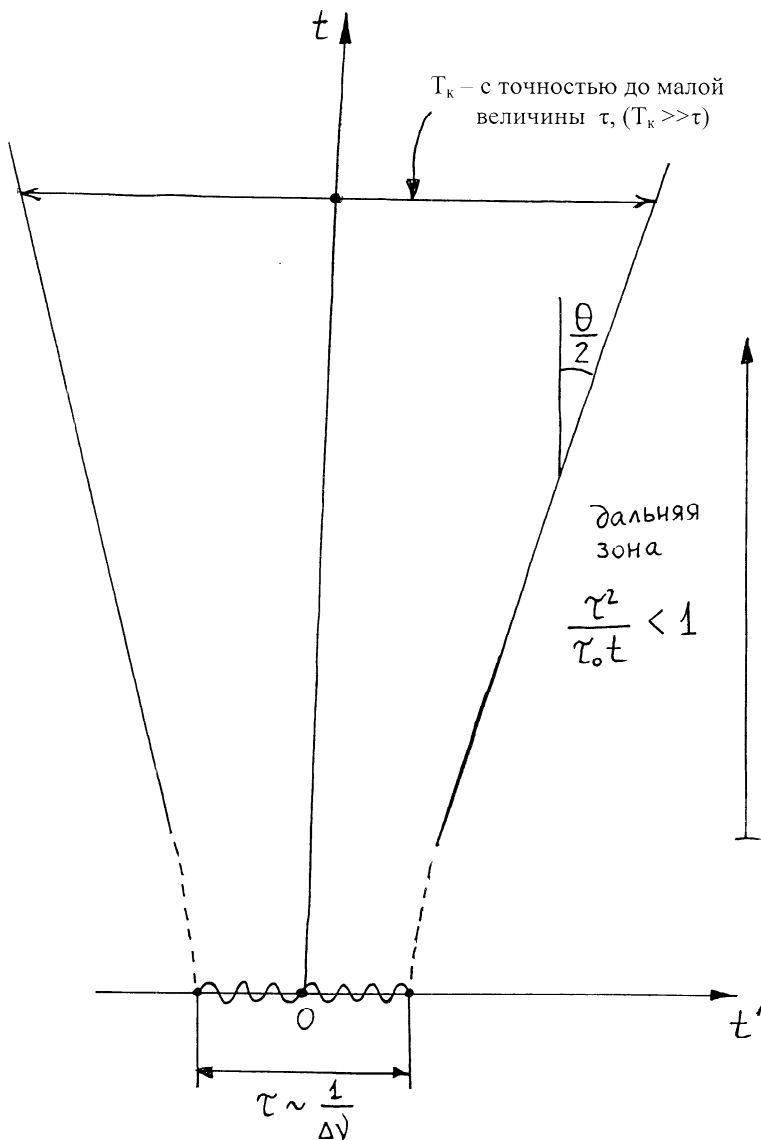
Эффект дисперсионного растяжения импульса с гауссовой огибающей определяется зависимостью

$$\Delta = a \sqrt{1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}}, \text{ где } \Delta(t) \text{ – протяженность импульса.}$$

В рассматриваемой ситуации временного импульса  $a = c\tau$ ,  $\Delta = c T_k$  отсюда следует

$$t = k_0 c \tau^2 \sqrt{\frac{T_k^2}{\tau^2} - 1}.$$

При  $T_k = 2\tau$ ,  $\tau = 10^{-10} \text{ с}$  имеем  $t \sim 6 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ , что близко к рассмотренному выше случаю проявления эффекта временной дифракции.



Здесь релятивистский эффект не учитывается.

Рис. 8.

### 5.2.5. Замечания.

Выведенные выше формулы для  $L_{11}(\lambda_0, \ell, a)$  и  $L_{\perp}(\lambda_0, \ell, a)$  позволяют определить характерные времена  $T_{11}$  и  $T_{\perp}$  формирования пространственной когерентности спонтанного излучения в резонаторе. Полагая

$$L_{11} = 2L, L_{\perp} = a, T_{11} = \frac{\ell(L_{11})}{c}, T_{\perp} = \frac{\ell(L_{\perp})}{c},$$

(размер  $L_{11}$  измеряется вдоль  $\hat{z}$ ), получим

$$T_{11} = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{L}{\lambda_0}} \cdot \frac{1 - \frac{\lambda_0}{2L}}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{4L}}},$$

$$T_{\perp} = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{a^2}{\lambda_0^2} - 1}.$$

Для  $L = 10^2$  см,  $\lambda_0 = 300$  нм,  $a = 1$  см имеем

$$T_{11} \sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ с}, \quad T_{\perp} \sim 10^{-6} \text{ с}.$$

Эта информация означает, что к моменту времени  $T_{11} \sim 3 \cdot 10^{-8}$  с с начала излучения экрана в резонаторе будут присутствовать области  $L_{11}$  продольной когерентности спонтанного излучения, расположенные в интервале

$$\lambda_0 \leq L_{11} \leq 2L = 200 \text{ см}.$$

К моменту времени  $T_{\perp} \sim 10^{-6}$  с с начала излучения экрана в резонаторе будут присутствовать области  $L_{\perp}$  поперечной когерентности спонтанного излучения, расположенные в интервале

$$\lambda_0 \leq L_{\perp} \leq a = 1 \text{ см}.$$

Отметим, что выведенные выше формулы, определяющие  $L_{11}$  и  $L_{\perp}$ , были получены в приближении  $\Delta\nu \rightarrow 0$ , т.е.  $T_k \rightarrow \infty$ . Учет конечности величины  $T_k$  приводит к ограничению значений величины  $L_{11}$  сверху:  $L_{11} \lesssim cT_k$ . В случае лоренцевского контура спектральной линии спонтанного излучения, как было показано выше, зависимость  $T_k(t)$  имеет возрастающий характер. Следовательно, вместе с ней возрастает и верхняя граница области определения величины  $L_{11}(t)$ . По этой причине выведенная выше формула для  $T_{11}$  и оценка  $T_{11} \sim 3 \cdot 10^{-8}$  с справедливы только в области

$$T_k \gtrsim \frac{2L}{c} \sim 10^{-8} \text{ с}.$$

Другое важное замечание состоит в следующем. Внутри пространственно-временных областей когерентности поля спонтанного излучения, ограниченных размерами  $L_{11}(t)$ ,  $L_{\perp}(t)$ ,  $T_k(t)$ , возрастающими в