

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ**



*имени
П. Н. Лебедева*

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

А.Н. ЛОГУНОВ

9

**ФИЗИКА ПРОЦЕССА ВОЗБУЖДЕНИЯ
ПОПЕРЕЧНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПОЛЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В ОТКРЫТОМ РЕЗОНАТОРЕ**

МОСКВА 2006

Физика процесса возбуждения поперечных собственных колебаний поля лазерного излучения в открытом резонаторе

А.Н.Логунов

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Введение.	4
2. Представление о собственных поперечных колебаниях поля лазерного излучения в открытых резонаторах.	5
3. Обзор литературной информации по проблеме описания процесса возбуждения поперечной волновой структуры поля лазерного излучения в открытом резонаторе. Постановка задачи.	8
4. Физика процесса возбуждения радиальных мод поля лазерного излучения в резонаторе на качественном уровне восприятия.	10
4.1. Две разновидности процесса возбуждения радиальных волн излучения в лазерном резонаторе.	10
4.2. Процессы, определяющие движение радиальной волновой структуры поля лазерного излучения в резонаторе.	15
4.3. Модель волнового движения поля излучения в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Процесс движения волнового поля в пространстве-времени (\hat{x}, t)	18
4.4. Введение моделей сосредоточенной и распределенной колебательных систем.	20
4.5. Метод описания взаимодействия между шумовым полем E и полем мод $\{W_n\}$ в рамках модели сосредоточенной колебательной системы.	21
4.6. Движение волнового поля в пространстве-времени (\hat{x}, t) .	22
4.7. Описание движения волновых полей E и $\{W_n\}$ в пространстве-времени (\hat{x}, ct, \hat{t})	23
4.8. Замечания.	25
4.9. Переход к описанию волнового движения $\{W_n\}$ в потенциальной яме с конечной глубиной.	26
4.10. Выводы по проведенному анализу.	27
5. Полуколичественный анализ решения проблемы накачки мод $\{W_n\}$ шумовым полем ψ , заданным вначале гауссовым импульсом в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.	28
5.1. Постановка задачи.	28
5.2. Модель гауссова импульса в качестве исходного шумового	

	стр.
поля.	28
5.3. Модель двухуровневой квантовомеханической системы для описания процесса накачки моды W шумовым колебанием E . Её недостаток.	34
5.4. Модель связанных гармонических осцилляторов для описания процесса накачки моды W шумовым колебанием E .	36
5.5. Определение понятия резонансов полей ψ и $\{W_n\}$. Представление об их движении в пространстве-времени (ξ, t) .	39
5.6. Ограничение, накладываемое на протяженность a исходного гауссова импульса шумового поля. Зависимость эффективности накачки мод $\{W_n\}$ от соотношения a/ℓ	41
5.7. Эффекты образования новых резонансов в процессе накачки моды W_n шумовым полем ψ . Оценки пороговых условий их возникновения. Движение резонансов в пространстве-времени $(\xi, \Delta t)$	42
5.8. Понятие о точках резонансов полей ψ и $\{W_n\}$ на плоскости (\hat{x}, ct) в фиксированный момент времени $\hat{t} > 0$ без учета взаимодействия.	47
5.9. Размеры и формы областей взаимодействия полей ψ и $\{W_n\}$ в плоскости (\hat{x}, ct) на начальном этапе движения.	51
5.10. Движение областей возмущения поля ψ на плоскости (\hat{x}, ct) во времени \hat{t} с учетом образования новых резонансов.	52
5.11. Переход к задаче с непрерывным источником шумового поля ψ	53
5.12. Замечания к п. 5.	53
6. Общие замечания и основной вывод.	56
7. Заключение.	57
Литература.	59

Физика процесса возбуждения поперечных собственных колебаний поля лазерного излучения в открытом резонаторе.

1. Введение

Основным достижением современной теории поля лазерного излучения считается ее формулировка в терминах квантовой теории поля [1,2]. Может сложиться впечатление об универсальности этой формулировки в отношении полноты описания свойств лазерного излучения. Мы полагаем, что такое впечатление ошибочно. Как и всякая формулировка, она имеет ограниченную область применения. Она не может быть универсальной. Большое количество интересных и важных физических эффектов осталось вне пределов досягаемости этой формулировки. По указанной причине возникает вопрос о выборе метода исследования в теории поля лазерного излучения, способного существенно дополнить современные представления о физическом содержании свойств этого поля. Ответ на этот вопрос был дан П.Дираком в [3]: «Мы хотим, чтобы в нашем распоряжении было нечто, способное нам помочь, и то единственное, на чью помощь мы можем рассчитывать, - это классическая модель».

Таким образом, мы возвращаемся к классической волновой теории поля лазерного излучения и считаем, что современные представления о физическом содержании свойств этого поля можно дополнить, оставаясь в рамках образов классической волновой механики. Значительный вклад в этом направлении исследований был сделан Лэмбом [4]. Лэмбовская теория лазера описывает процесс взаимодействия продольных мод лазерного излучения в установившемся режиме его генерации в резонаторе Фабри-Перо с активной средой. Она не описывает процесс возбуждения этих мод спонтанной (шумовой) компонентой излучения в резонаторе. По этой причине в лэмбовской теории лазера имеется существенный пробел. (Он отсутствует в квантовой теории поля лазерного излучения).

Основной целью наших исследований является построение классической волновой теории поля лазерного излучения, лишенной указанного недостатка. Более конкретной целью является уяснение физических свойств процесса формирования когерентного лазерного излучения с уровня спонтанного шума в резонаторе с активной средой. Подчеркнем, что эта цель будет достигнута только средствами аппарата классической (но не квантовой) волновой механики поля лазерного излучения.

Побуждающим мотивом к такой постановке проблемы является следующее замечание. Основатели лазерной физики перед созданием первого лазера Мейманом в 1960-1961 гг. наверняка уже ставили перед собой

такую проблему (в те времена аппарат квантовой теории поля был слабо развит). Однако публикаций в научной литературе на эту тему мы не обнаружили. В ближайшем будущем мы попытаемся исправить этот недостаток.

Следует отметить, что круг вопросов, составляющих содержание указанной проблемы, очень широк. По этой причине мы намерены осветить результаты наших исследований в данной области посредством нескольких публикаций.

Первая публикация – данное сочинение, целью которого является уяснение физики процесса возбуждения поперечных собственных колебаний поля лазерного излучения в открытом резонаторе.

2. Представление о собственных поперечных колебаниях поля лазерного излучения в открытых резонаторах.

Поле лазерного излучения в установившемся режиме его генерации внутри резонатора состоит из двух компонент – когерентной и шумовой. Шумовая компонента обусловлена существованием спонтанного излучения активной среды. Когерентная компонента наиболее интересна. Она состоит из трех составляющих (типов) – продольных собственных колебаний и двух типов поперечных собственных колебаний поля излучения. Каждое собственное колебание представляет собой стоячую волну, т.е. систему из двух встречных бегущих волн. Волны продольных собственных колебаний распространяются вдоль оптической оси резонатора, а волны поперечных собственных колебаний – в направлениях, перпендикулярных относительно этой оси. Направление распространения волн одного типа поперечных колебаний ортогонально направлению распространения другого типа.

Структура отдельных собственных поперечных колебаний поля лазерного излучения впервые наблюдалась и была проанализирована в [5,6].

Физическая интерпретация структуры поперечных собственных колебаний поля лазерного излучения в резонаторе имеет близкое сходство с физической интерпретацией структуры поперечных колебаний мембраны с жестко закрепленной замкнутой границей (см., например, [7]).

Различие заключается в виде волновых уравнений относительно волновой функции ψ . В случае мембраны

$$-a^{-2} \cdot \psi_{,tt} + \Delta\psi - U\psi = 0,$$

где: t – время, a – скорость распространения малых поперечных возмущений мембраны, U – потенциал

$$U = \begin{cases} 0 & \text{во внутренней области, ограничивающей мембрану,} \\ \infty & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

В случае поперечных колебаний лазерного излучения внутри резонатора

$$\frac{2ik_0}{c}\psi_{,t} + \Delta\psi - U\psi = 0,$$

где k_0 – волновое число лазерного излучения.

Если от этих уравнений заменой

$$\psi = \chi(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad (\vec{r} - \text{пространственная координата})$$

перейти к уравнению Гельмгольца

$$\Delta\chi + (E - U)\chi = 0,$$

то различие будет заметно только в определении величины E . В случае мембраны

$$E = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad \text{а в случае лазерного излучения } E = \frac{2k_0\omega}{c}$$

В случае круговой области на пространственной плоскости (x, y) в полярных координатах (r, φ) :

$$x = r \sin \varphi,$$

$$y = r \cos \varphi$$

из последнего уравнения имеем:

$$\chi_{,rr} + \frac{1}{r}\chi_{,r} + \frac{1}{r^2}\chi_{,\varphi\varphi} + (E - U)\chi = 0.$$

Разделяя переменные

$$\chi = u(r) \cdot \Phi(\varphi),$$

получим методом разделения переменных уравнения относительно u , Φ :

$$u_{,rr} + \frac{1}{r}u_{,r} + (E - U - \frac{T^2}{r^2})u = 0,$$

$$\Phi_{,\varphi\varphi} + T^2\Phi = 0,$$

где T^2 – постоянная разделения.

Решением первого уравнения являются функции Бесселя, а решением второго –

$$\Phi = \Phi_0 \cos(T\varphi),$$

где $\Phi_0 = \text{const}$, T может быть равно нулю.

Принимая во внимание граничные условия задачи, видим, что величины E и T^2 принимают ряд дискретных, разрешенных значений, называемых собственными значениями энергии радиальных и азимутальных колебаний, соответственно. При этом функции u , Φ имеют смысл соответствующих собственных функций таких колебаний. Таково определение собственных колебаний в ограниченной круговой области, расположенной в плоскости (x, y) .

В случае лазерного излучения в открытых резонаторах с полярной поперечной симметрией определение азимутальных собственных поперечных колебаний поля излучения остается прежним, а при определении

радиальных собственных колебаний поля следует учитывать нетривиальную зависимость $U(r)$. Собственные функции таких колебаний с низшими собственными значениями энергии были определены нами в [8].

Временные частоты ω_{mn} радиальных собственных колебаний поля лазерного излучения с собственными значениями E_{mn} , где m и n – номера собственных радиальных и азимутальных колебаний, определяются формулой

$$\omega_{mn} = \frac{c}{2k_0} E_{mn}.$$

Для минимальных значений E_{mn} обычно они имеют значения в области

$$10^4 \leq \omega_{mn} \leq 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Минимальные частоты ω_{mn} характерны для резонаторов с выпуклыми круглыми и плоскими прямоугольными зеркалами, а также для неустойчивых телескопических резонаторов. Максимальные частоты ω_{mn} характерны для конфокальных устойчивых резонаторов с малыми характерными поперечными размерами гауссовых пучков излучения в них.

В соответствии с методом нормальных координат (см., например, [8]), волновая функция ψ когерентной составляющей поля излучения в резонаторе с полярной поперечной симметрией представима в виде

$$\psi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3,$$

где: ψ_1 – волновая функция продольных собственных колебаний (вдоль оптической оси z); ψ_2, ψ_3 – волновые функции радиальных и азимутальных поперечных собственных колебаний поля.

Обычно временные частоты продольных собственных колебаний поля (ψ_1) имеют порядок 10^{15} с^{-1} , что намного превышает порядки частот поперечных колебаний поля (ψ_2, ψ_3).

Низкочастотный характер поперечных собственных колебаний поля излучения в резонаторе накладывает серьезные ограничения при определении пороговых условий возбуждения генерации когерентной составляющей ψ поля излучения.

В установившемся режиме генерации когерентного лазерного излучения пространственная структура функций ψ_2, ψ_3 вносит существенные ограничения на определение пространственных областей взаимодействия излучения с активной средой.

Поперечные колебания поля лазерного излучения в значительной мере определяют пространственно-временную структуру когерентного лазерного излучения за пределами резонатора.

Таковы основные свойства поперечных собственных колебаний поля когерентной составляющей лазерного излучения, побуждающие интерес к более подробному их изучению.

Оно начинается с решения проблемы их возбуждения из сначала невозбужденного состояния.

3. Обзор литературной информации по проблеме описания процесса возбуждения поперечной волновой структуры поля лазерного излучения в открытом резонаторе.

Постановка задачи.

Литературная информация по проблеме описания процесса возбуждения поперечной волновой структуры поля лазерного излучения в открытом резонаторе скудна.

Очень поверхностное представление о таком процессе можно получить, исходя из линейной модели возбуждения поперечных колебаний закрепленной в двух точках струны [9] (1931 год).

Различие между описанием колебаний струны и поперечного одномерного в пространстве колебания лазерного излучения заключается в виде дифференциальных уравнений движения волнового поля $\psi(x, t)$.

Для струны:

$$\psi_{,tt} = a^2 \psi_{,xx}, \quad (a - \text{скорость распространения малого возмущения}).$$

Для лазерного излучения:

$$\frac{2ik_0}{c} \psi_{,t} + \psi_{,xx} = 0.$$

Соответствующее уравнение Гельмгольца получается заменой

$$\psi = \chi(x)e^{-i\omega t}$$

Оно имеет вид

$$\chi_{,xx} + \acute{a}^2 \chi = 0, \quad \text{где волновое число}$$

$$\acute{a} = \frac{\omega}{a} \quad \text{в случае струны и} \quad \acute{a} = \sqrt{\frac{2k_0 \omega}{c}} \quad \text{в случае лазерного излучения.}$$

Если рассматривать волновое движение в области $0 \leq x \leq \ell$ его определения, то собственные значения \acute{a}^2 будут одинаковы в обоих случаях:

$$\acute{a}_n = \frac{\pi n}{\ell}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а соответствующие им собственные частоты ω_n определяются так:

$$\omega_n = \frac{\pi a n}{\ell} \quad \text{— для струны,}$$

$$\omega_n = \frac{\pi^2 c n^2}{2k_0 \ell^2} \quad \text{— для лазерного излучения.}$$

В [9] было сделано заключение о том, что в любой пространственно ограниченной системе движение, создаваемое любыми начальными условиями, совместными с ее устройством, можно получить путем суперпозиции разных нормальных колебаний с соответственно подобранными амплитудами C_n и фазами ϵ_n . Отсюда следует, что самый общий случай движения $\psi(x, t)$ можно представить формулой

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\alpha_n x) \cos(\omega_n t + \varepsilon_n)$$

при условии подходящего выбора постоянных C_n и ε_n .

Из такой интерпретации волнового движения следует, что максимально возможное время T возбуждения собственных колебаний определяется так:

$$T \sim \omega_1^{-1}.$$

Для интересующего нас случая лазерного излучения с $\ell = 1$ см, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, $\lambda_0 = 300$ нм = $3 \cdot 10^{-5}$ см имеем $T \sim 10^{-6}$ с.

Недостатком изложенного метода описания процесса возбуждения поперечных собственных колебаний поля излучения в резонаторе является неопределенность физического восприятия этого процесса, выраженная вопросом: «Каким образом исходное шумовое излучение может заранее «знать» о модовой структуре своего конечного состояния?».

Физически более корректный в указанном отношении метод описания процесса возбуждения низших по энергии поперечных собственных колебаний поля лазерного излучения в пустых открытых резонаторах был предложен Фоксом и Ли [10]. Они задавали исходное шумовое поле излучения на поверхности одного из резонаторных зеркал. Затем, используя интегральную формулу Френеля, определялось поле на другом зеркале. Повторяя эту процедуру много раз, они обнаружили, что после нескольких сотен таких итераций (проходов поля излучения между зеркалами) конфигурации поля на зеркалах сходятся к некоторой определенной установившейся форме. Оказалось, что такая установившаяся конфигурация поля на зеркалах допускает интерпретацию в виде собственной функции низшего по энергии поперечного колебания поля излучения в резонаторе. Изменив конфигурацию исходного шумового поля, Фокс и Ли после итерационной процедуры получили конфигурацию поля следующего, более высокого по энергии, поперечного собственного колебания поля.

Основным достоинством метода Фокса и Ли является возможность наблюдения процесса возбуждения собственных поперечных колебаний поля в процессе эволюции исходного, наперед заданного шумового поля на поверхности зеркала.

Недостатком этого метода является затруднение физического толкования процесса. Он обусловлен использованием численных расчетов итераций на компьютере. Тем не менее, как отмечалось ранее, возбуждение низших по энергии собственных поперечных колебаний поля излучения в резонаторе происходит за несколько сотен проходов (итераций) излучения между резонаторными зеркалами, а это согласуется с уже введенным нами выше временем $T \sim 10^{-6}$ с.

Метод Фокса и Ли позволил установить, что низшие по энергии собственные поперечные колебания имеют максимальное время жизни. Это

согласуется с экспериментальными наблюдениями и означает, что потенциальная яма $U(r)$ должна иметь конечную глубину.

Дальнейшее изучение собственных поперечных колебаний поля лазерного излучения было проведено в [11-15]. Авторы этих исследований, в основном, интересовались проблемой искажения структуры поперечных собственных колебаний поля лазерного излучения оптическими неоднородностями активной среды в резонаторе, хотя их методы можно было бы использовать в интересующей нас проблеме. Недостатком их методов исследования является отсутствие подробной физической интерпретации полученных результатов. Это связано с использованием численных методов поиска решения, затрудняющих смысловое восприятие предмета исследования.

Надежные аналитические методы решения проблемы возбуждения собственных поперечных колебаний поля лазерного излучения в резонаторе отсутствуют.

Целью данного сочинения является устранение этого недостатка.

В отличие от предшественников, мы избираем не технический метод исследований, основанный на численном моделировании, а аналитический метод, позволяющий уяснить более глубокое физическое содержание проблемы и ее решения. Такой метод исследования позволит нам представить существо проблемы с принципиально новой физической точки зрения. Это свойство, в свою очередь, позволит увидеть в предмете исследования ряд новых физических закономерностей, полезных как в фундаментальном научном, так и в прикладном отношении.

4. Физика процесса возбуждения радиальных мод поля лазерного излучения в резонаторе на качественном уровне восприятия.

4.1. Две разновидности процесса возбуждения радиальных волн излучения в лазерном резонаторе.

Решение поставленной выше проблемы начинается с определения причин, приводящих к появлению в открытом резонаторе с полярной поперечной симметрией радиальной компоненты волнового поля излучения. Существуют две такие причины. Рассмотрим первую. Используем модель скалярного волнового поля в резонаторе, введенную нами в [8]. Далее ограничимся анализом интересующего нас вопроса в отношении к устойчивому конфокальному резонатору. Как будет замечено далее, схема анализа без труда обобщается на другие геометрии открытых классических лазерных резонаторов.

Пусть в резонаторе перпендикулярно к оптической оси z установлен плоский экран со спонтанно излучающими на частоте лазерного перехода молекулами.

Рассмотрим сначала излучение от экрана при отсутствии резонаторных зеркал. Геометрия задачи показана на рис. 1.

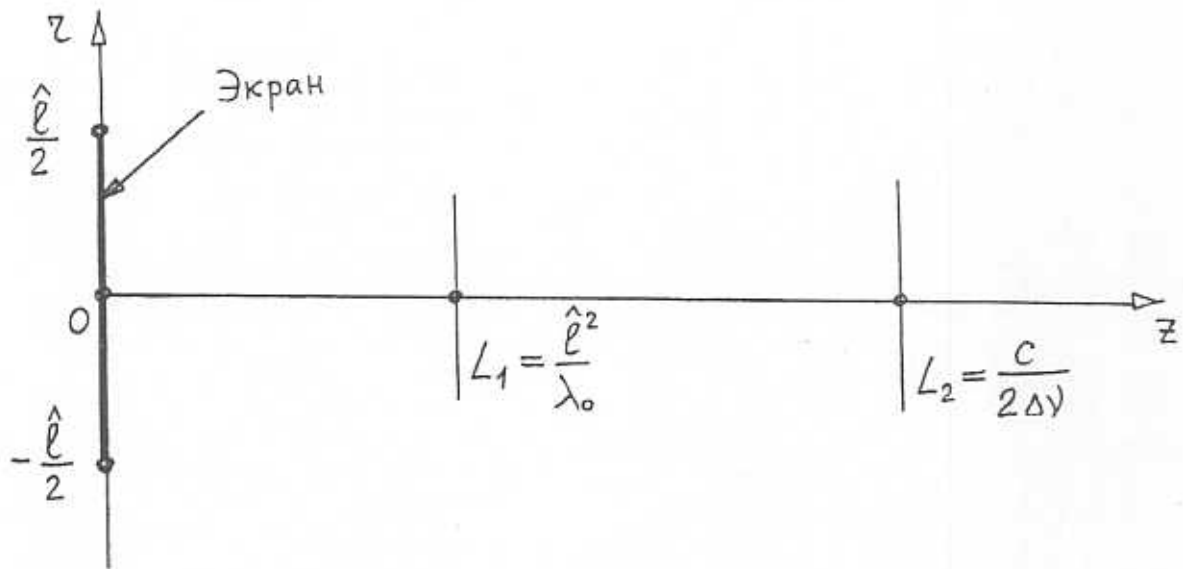


Рис.1.

Если обозначить через $\hat{\ell}$ - характерный размер экрана, через ν_0 - центральную частоту контура спектральной линии спонтанного излучения, а $\Delta\nu$ - ширину этого контура ($\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \ll 1$), то на оси z имеется три области с различными свойствами излучения.

В области $0 < z < L_1 = \frac{\hat{\ell}^2}{\lambda_0} = \frac{\hat{\ell}^2 \nu_0}{c}$ излучение имеет хаотическую поперечную волновую структуру.

В области $L_1 < z < L_2 = \frac{c}{2\Delta\nu}$ излучение во временном интервале $\Delta t < (\Delta\nu)^{-1}$ можно рассматривать в виде синусоидальной волны с частотой ν_0 и приблизительно постоянной амплитудой.

В области $z > L_2$ продольная составляющая волны излучения случайно флуктуирует во времени и в пространстве. Наибольший интерес представляет область $L_1 < z < L_2$, которую мы и рассмотрим, полагая сначала, что $L_1 \ll \hat{L}$, где \hat{L} - расстояние между зеркалами резонатора, а $L_2 \gg \hat{L}$.

В соответствии с этими условиями рассмотрим движение фронта продольной волны излучения между зеркалами резонатора, имеющими

характерный поперечный размер $l < \hat{l}$. При анализе этого движения используем замечание А.Эйнштейна о непрерывности теоретико-полевых объектов [16]. В соответствии с ним амплитуда и фаза волны, отраженной от зеркала, должны быть непрерывными функциями от пространственных и временной координат. Это условие в данном случае выполняется, если принять во внимание дифракционный эффект (см. [8]). С учетом этого фактора этапы движения фазового фронта продольной волны излучения в резонаторе показаны на рис. 2.

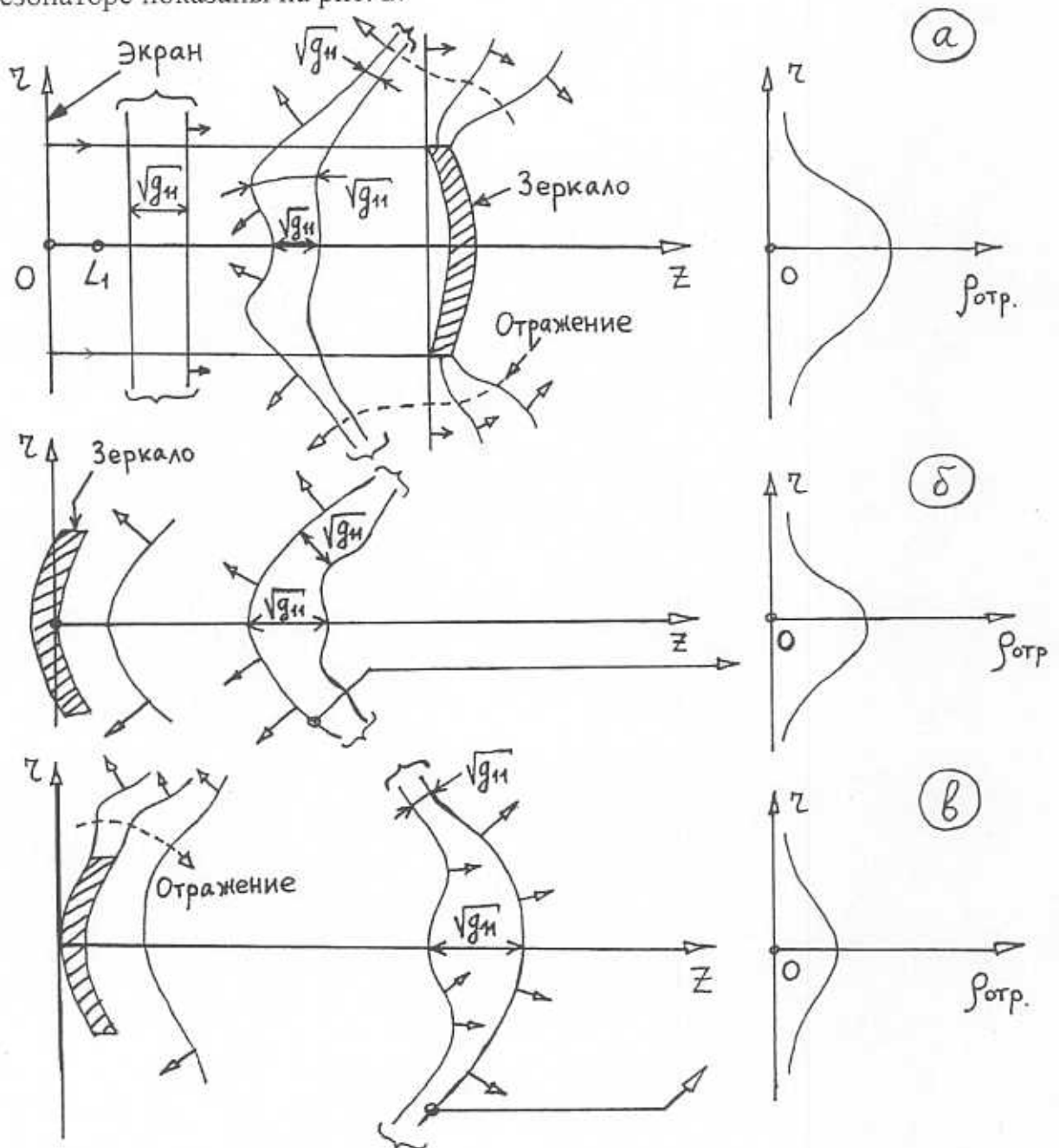


Рис. 2 (продолжение на следующей странице)

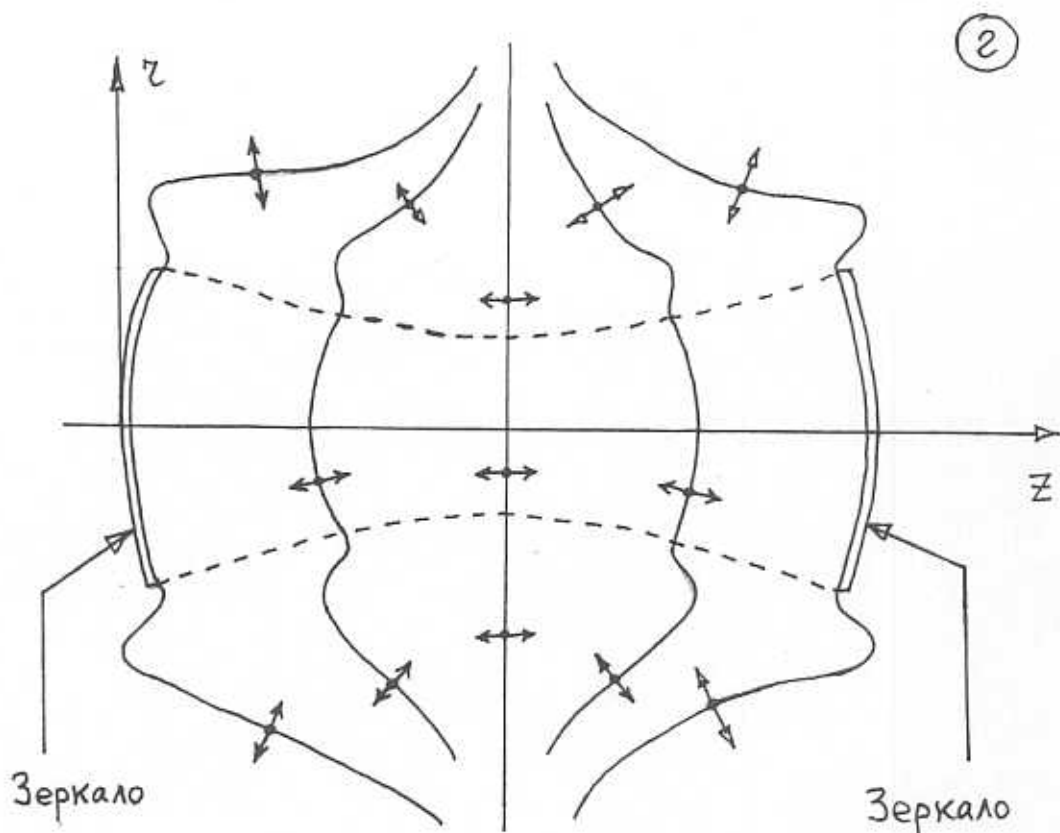


Рис.2.

На этом рисунке также изображены зависимости от поперечной радиальной координаты r амплитуды $\rho_{отр}$ отраженной волны излучения.

На рис. 2г показана геометрия фазовых фронтов продольных встречных волн в установившемся состоянии после очень большого количества проходов волны между зеркалами. Видно, что соответствующие фазовые фронты встречных волн совпадают. Это похоже на проявление эффекта обращения волнового фронта излучения.

Первой причиной возбуждения радиальной составляющей поля излучения в резонаторе является флуктуация продольной римановой метрики g_{11} многообразия продольных фазовых волновых фронтов излучения в процессе их распространения (см. [8]). (g_{11} – продольная составляющая метрического тензора этого многообразия).

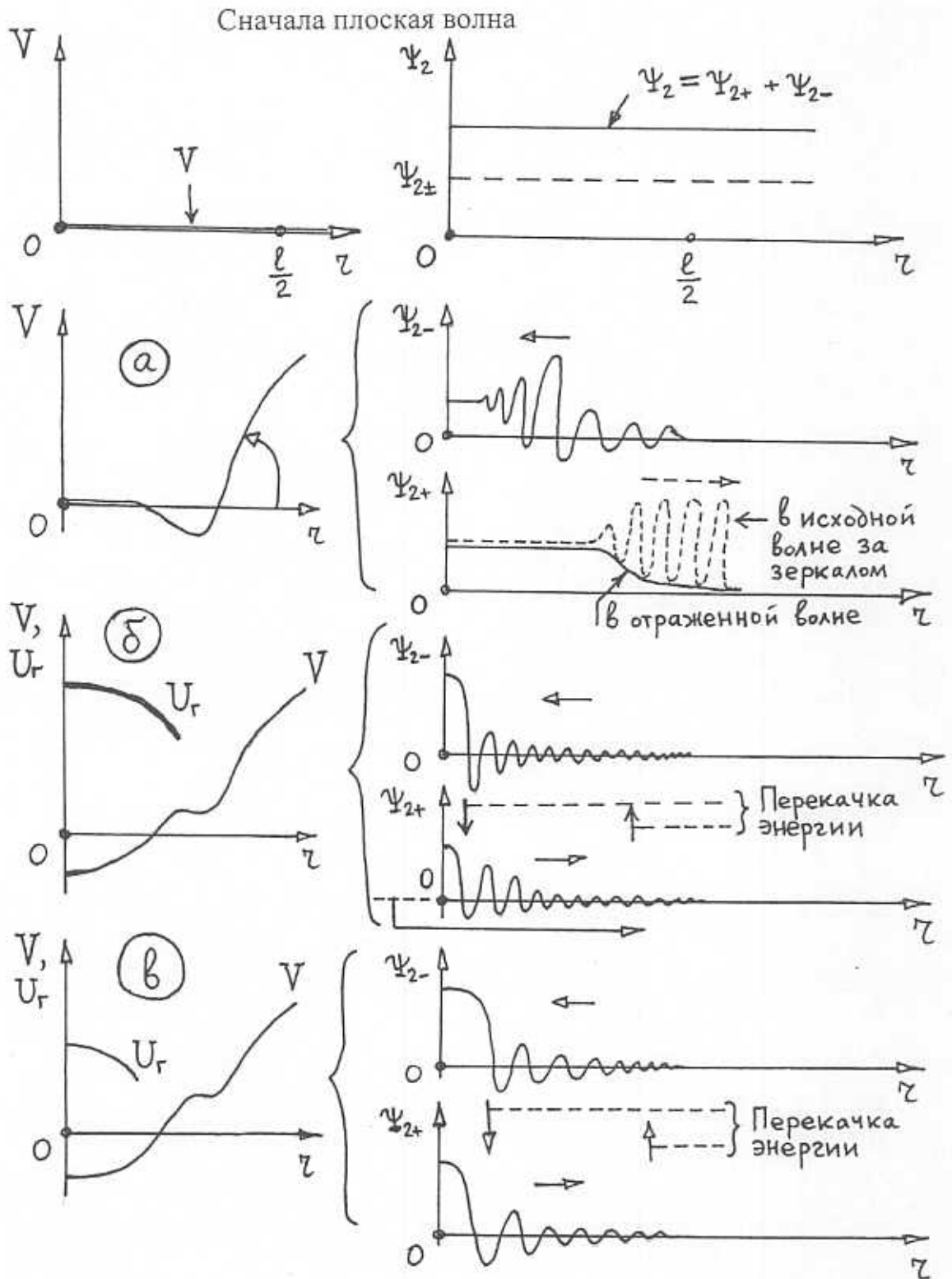
Потенциал V поля сил, приводящих к возбуждению и существованию радиального волнового движения, определяется через $g_{11} = \frac{1}{g_{11}}$ следующим

образом [8]:

$$V = k_0^2 (g^{11} - 1),$$

$$\text{где } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi\nu_0}{c}.$$

Движение потенциала V в процессе распространения сначала плоской волны излучения в резонаторе на этапах, отмеченных на рис. 2, показано на рис. 3. Там же изображена эволюция радиальной волновой функции $\psi_2 = \psi_{2+} + \psi_{2-}$, представляющей собой суперпозицию функций $\psi_{2\pm}$, описывающих движение встречных радиальных волн.



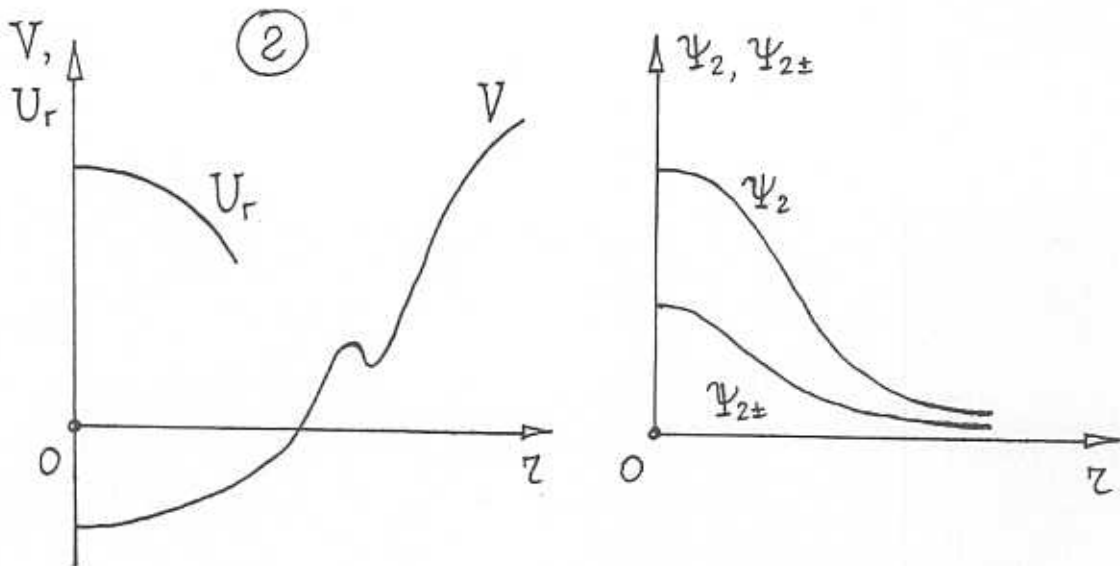


Рис.3

На этом рисунке при изображении зависимостей $\psi_{2\pm}(r)$ учитывалась связь между встречными волнами, обусловленная их рассеянием как на потенциале V , так и на геометрическом потенциале U_r , физическая природа которого была вскрыта в [8].

На рис. 3г изображены волновые функции $\psi_2, \psi_{2\pm}$ только самого низкого по энергии собственного радиального колебания.

Таково содержание первой причины возбуждения радиального волнового движения поля излучения в резонаторе.

Теперь рассмотрим вторую причину.

Она связана с существованием хаотически флуктуирующего поперечного волнового поля в определенной выше области $0 < z < L_1$.

Если размер L_1 соизмерим или превышает величину \hat{L} , то часть такого флуктуирующего поля будет захватываться потенциальным полем $V(r)$ и его дальнейшее движение будет происходить внутри потенциальной ямы $V(r)$.

Далее ограничимся анализом ситуаций, когда второй причиной возбуждения радиального волнового движения поля излучения можно пренебречь.

4.2. Процессы, определяющие движение радиальной волновой структуры поля лазерного излучения в резонаторе.

Выше были указаны две причины возникновения радиальной волновой структуры поля излучения в резонаторе. Следующим этапом анализа

поставленной проблемы является определение закономерностей движения такой волновой структуры.

Процесс движения радиальной волны, описываемой волновой функцией ψ_2 , без учета временной дифракции и дисперсии ($\psi_{2,t} \rightarrow 0$) задается уравнением

$$\frac{2ik_0}{c} \psi_{2,t} + \Delta \psi_2 - \hat{W} \psi_2 = 0,$$

где $\hat{W} = V + U_r$ - потенциал силового поля. Сначала предположим, что ψ_2 имеет структуру бегущей волны.

Совершив в этом уравнении замену

$$\psi_2 = \rho e^{i\varphi},$$

где ρ, φ - амплитуда и фаза волны (вещественные функции от координаты r и времени t), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно φ, ρ :

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_{,t} + \frac{c}{2k_0} (\nabla \varphi)^2 = \frac{c}{2k_0} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \hat{W} \right), \\ (\rho^2)_{,t} + \frac{c}{k_0} \nabla(\rho^2 \nabla \varphi) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

В первом уравнении этой системы слагаемое с $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ описывает дифракционный эффект, а слагаемое с $(\nabla \varphi)^2$ указывает на нетривиальный закон дисперсии.

Если в правой части этого уравнения выделить пространственную (п.) и временную (в.) составляющие

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} - \hat{W} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \hat{W} \right)_p + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \hat{W} \right)_v,$$

то в нем имеется связь:

$$\varphi_{,t} + \frac{c}{2k_0} (\nabla \varphi)^2 = \frac{c}{2k_0} \left\{ \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \hat{W} \right)_p + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \hat{W} \right)_v \right\}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \hat{W} \right)_p + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \hat{W} \right)_v \right] \end{array} \right]$$

Последняя система уравнений относительно φ, ρ допускает физическую интерпретацию в форме уравнений гидродинамики (уравнений движения и непрерывности жидкости). Её легко увидеть, если ввести величину

$$\vec{v} = \frac{c}{k_0} \vec{\nabla} \varphi,$$

ассоциирующуюся со скоростью потока жидкости. Соответствующая система уравнений гидродинамики в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{v}_{,t} + \frac{1}{2} \bar{\nabla}(v^2) = \frac{c^2}{2k_0^2} \bar{\nabla} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \hat{W} \right), \\ (\rho^2)_{,t} + \bar{\nabla}(\rho^2 \bar{v}) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В общем случае при распространении встречных радиальных волн, описываемых волновыми функциями $\psi_{2\pm}$ ($\psi_2 = \psi_{2+} + \psi_{2-}$), между ними имеется связь, обусловленная их рассеянием на потенциале \hat{W} . Она формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \textcircled{+} \quad & \frac{2ik_0}{c} (\psi_{2+})_{,t} + \Delta \psi_{2+} = \frac{1}{2} \hat{W} \psi_{2+}, \\ & \frac{2ik_0}{c} (\psi_{2-})_{,t} + \Delta \psi_{2-} = \frac{1}{2} \hat{W} \psi_{2-}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{2ik_0}{c} \psi_{2,t} + \Delta \psi_2 = \hat{W} \psi_2.$$

Движение встречных радиальных волн с учетом их взаимодействия описывается так.

Вводятся волновые функции

$$\tilde{\psi}_{2+} = \psi_{2+} + \rho_{0+},$$

$$\tilde{\psi}_{2-} = \psi_{2-} + \rho_{0-},$$

где $\rho_{0\pm}$ - сначала постоянные положительные величины, определенные в начальный момент времени $t = 0$. При этом полагается, что

$$\psi_{2\pm}(t = 0) = 0.$$

Движение амплитуд и фаз волн $\tilde{\psi}_{2\pm}$ описывается уравнениями (1). Для них также имеется гидродинамическая интерпретация (2). Без введения $\rho_{0\pm} > 0$ возбуждение радиальных волн было бы невозможным.

С другой стороны, для описания взаимодействия встречных волн $\psi_{2\pm}$ посредством их рассеяния на потенциале \hat{W} , используются уравнения (3), если амплитуда волн $\psi_{2\pm}$ много меньше $\rho_{0\pm}$. Когда амплитуда волн $\psi_{2\pm}$ становится соизмеримой или превышает $\rho_{0\pm}$, то взаимодействие описывается уравнениями (3), в которых вместо $\psi_{2\pm}$ фигурируют $\tilde{\psi}_{2\pm}$.

Таково представление о методе описания движения и взаимодействия радиальных волн в резонаторе.

4.3. Модель волнового движения поля излучения в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Процесс движения волнового поля в пространстве-времени (\hat{x}, t) .

Легко заметить, что, в рамках изложенных выше представлений, движение радиальной волновой структуры поля излучения в резонаторе – сложное физическое явление. Его описание в общем случае затруднено. В физике существует выход из этого затруднительного положения. Он заключается в следующем. Вместо того, чтобы искать решение сложной в общем случае проблемы, разумно ограничиться поиском решения простой, элементарной задачи, содержащей в себе наиболее существенные с физической точки зрения черты общей проблемы. Далее следуем по этому пути.

Для уяснения физического смысла процесса возбуждения радиальных собственных колебаний поля излучения в резонаторе рассмотрим следующую упрощенную элементарную модель.

Пусть имеется одномерная (вдоль пространственной координаты x) прямоугольная потенциальная яма $U(x)$ с бесконечно высокими стенками. Внутри этой ямы в начальный момент времени $t = 0$ существует импульсная волна E , распространяющаяся в положительном направлении координаты x . Она показана на рис. 4.

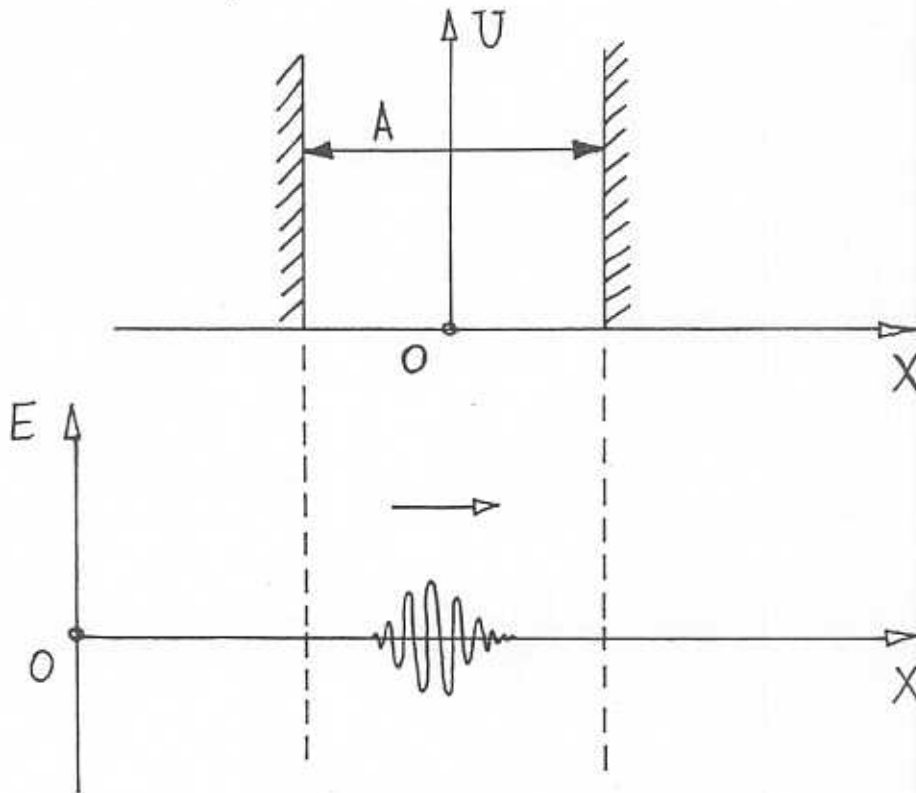


Рис. 4.

Рассмотрим движение волны E .

Сначала, для простоты, пренебрежем резонансными свойствами полости внутри ямы и фазовым сдвигом на π при отражении волны от стенок.

В процессе своего поступательного движения внутри полости импульсная волна E будет испытывать действие пространственного и временного дисперсионного и дифракционного эффектов. Это действие, в основном, будет проявляться в пространственном и временном растяжении импульсной волны в процессе ее движения.

В конечном счете, при $t \rightarrow \infty$, оно приводит к образованию из импульсной волны E непрерывной волны с фиксированными значениями ее длины λ_* и частоты ν_* . Если ввести пространственную координату \hat{x} в направлении распространения волны, то указанное свойство показано на рис. 5.

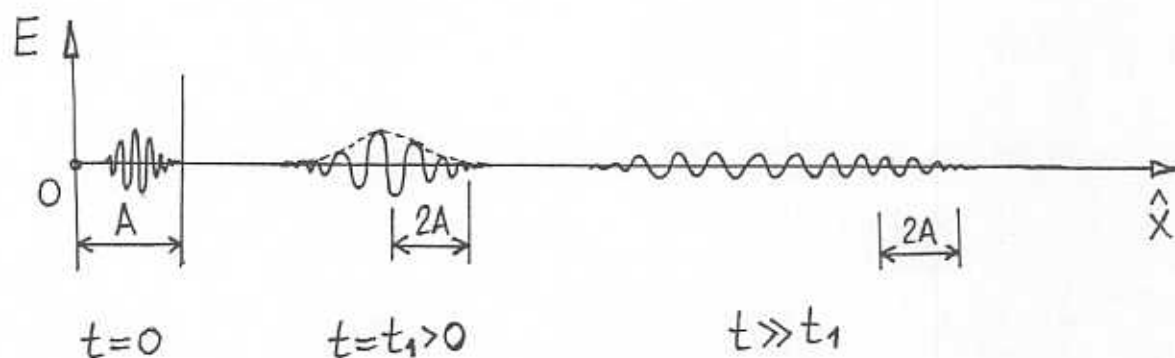


Рис. 5.

Таким образом, в яме при $t \rightarrow \infty$ будет иметь место волновое поле со структурой непрерывной волны.

Теперь примем во внимание резонансное свойство полости внутри ямы.

В процессе пространственно-временного дифракционного и дисперсионного растяжения сначала импульсной при $t = 0$ волны E в ней должны наблюдаться пространственные области, соизмеримые с размером $2A$ (A — ширина ямы), в которых амплитуда, частота ν и длина λ волны являются слабыми функциями от координаты \hat{x} и времени t . Значения ν и λ в этих областях могут совпасть с резонансными значениями ν_n и λ_n , характерными для полости внутри ямы и соответствующими уровню n собственного значения энергии колебаний волнового поля в ней.

В такой ситуации должно происходить образование новой разновидности волновой структуры поля, имеющей форму стоячих волн и обычно называемой модовой структурой. В общем случае такая структура

поля состоит из дискретного набора стоячих волн (мод) $\{W_n\}$ с соответствующими значениями частот ν_n и длин волн λ_n собственных колебаний поля ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Таким образом, рассматриваемое волновое поле оказывается состоящим из двух компонент: E , обычно называемой шумовой компонентой, и $\{W_n\}$, называемой модовой компонентой.

Между этими двумя компонентами поля в процессе его движения имеется взаимодействие. На начальном этапе движения импульсного волнового поля существует только его шумовая компонента E . В процессе движения поля происходит возбуждение модовой компоненты $\{W_n\}$ поля, т.е. имеется перекачка энергии из компоненты E поля в компоненту $\{W_n\}$.

Таково начальное физическое представление о структуре волнового поля в потенциальной яме $U(x)$ и ее движении во времени.

4.4. Введение моделей сосредоточенной и распределенной колебательных систем.

Выше, при описании эволюции поля E , использовалась распределенная модель теории колебаний, т.е. рассматривалось движение E как в пространстве, так и во времени. Однако, для описания процесса взаимодействия полей E и $\{W_n\}$ и, в частности, для описания процесса возбуждения $\{W_n\}$ разумно использовать сосредоточенную модель теории колебаний, т.е. рассматривать движение полей E и $\{W_n\}$ только во времени t . Покажем, как это реализуется.

Уясним более подробно смысловое содержание распределенной и сосредоточенной моделей теории колебаний и связь между ними.

В рамках распределенной модели теории колебаний для описания движения поля $E(\hat{x}, t)$ используется метод характеристик. В соответствии с этим методом в пространстве-времени (\hat{x}, t) задается семейство характеристик $\{\hat{x}_j(t)\}$:

$$\hat{x}_{j0} = \hat{x}_j - \mathbf{v}t, (j = 1, 2, \dots),$$

где: значения \hat{x}_{j0} фиксированы и определены при $t = 0$; \mathbf{v} – скорость движения волны (например, волны ρ^2 , ρ – амплитуда E).

Здесь для простоты предполагается, что \mathbf{v} – постоянная величина.

Вдоль каждой характеристики определено движение поля $E_j(t)$ относительно неподвижной системы отсчета.

В рамках модели распределенной колебательной системы проблема считается решенной, если определено семейство характеристик и известны законы движения $\{E_j(t)\}$.

В рамках модели сосредоточенной колебательной системы проблема считается решенной, если известен закон движения $E(t)$ вдоль какой-нибудь одной характеристики.

4.5. Метод описания взаимодействия между шумовым полем E и полем мод $\{W_n\}$ в рамках модели сосредоточенной колебательной системы.

Рассмотрим интересующую нас проблему в рамках модели сосредоточенной колебательной системы. В общем случае она сводится к проблеме описания движения взаимодействующих между собой полей $E(t)$ и $\{W_n(t)\}$ вдоль единственной выбранной характеристики.

При описании движения E и $\{W_n\}$ разумно ограничиться анализом взаимодействия поля E с какой-нибудь одной модой из набора $\{W_n\}$. Далее обозначим поле этой моды через W , а его амплитуду – через r . Приближенно процесс движения во времени t величин ρ и r изображен на рис. 6.

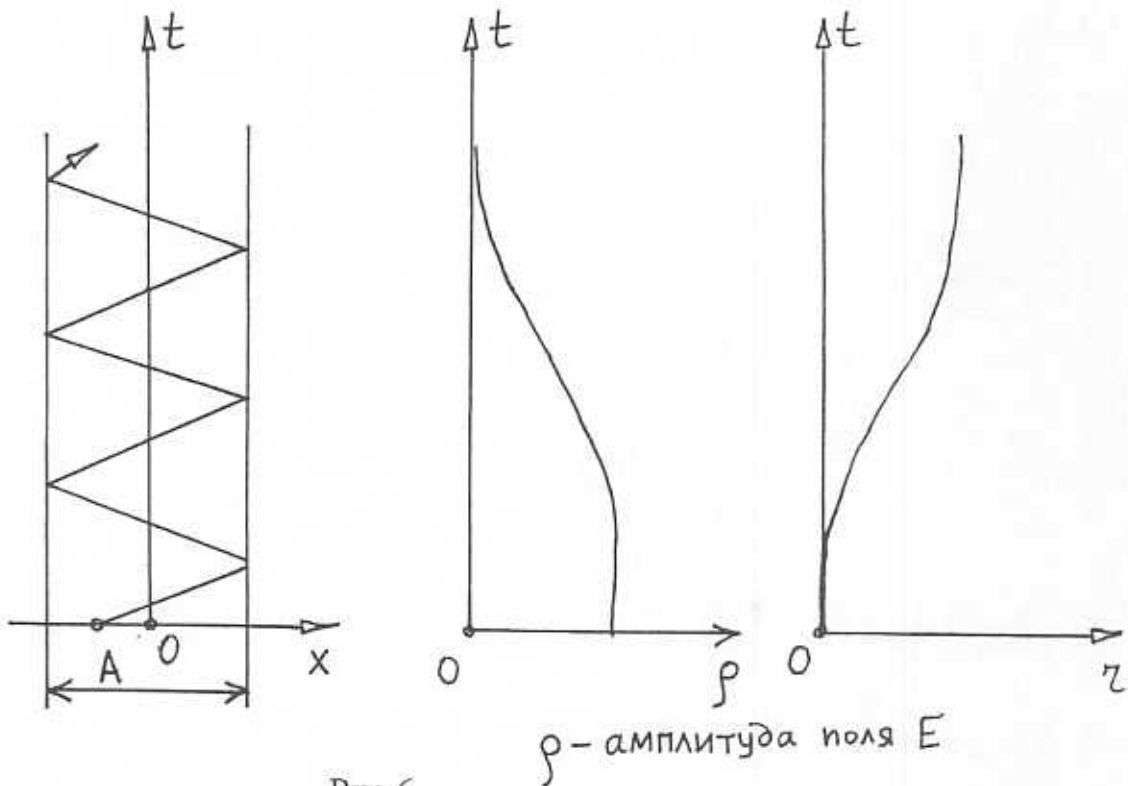


Рис.6.

В процессе движения поля E его частота ω , вследствие дисперсионного и дифракционного эффектов, зависит от t (см. (1)). Когда она станет соизмеримой с частотой ω_n собственного колебания поля W , то должна наблюдаться резонансная перекачка энергии из E в W . Взаимодействие между колебаниями E и W , и, в частности, возбуждение W , в самом общем случае описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{E} + \beta\dot{E} + \omega^2(t)E = \alpha W + Q, \\ \ddot{W} + \gamma\dot{W} + \omega_n^2 W = \alpha E, \end{cases}$$

где: Q – источник шумового поля; β^{-1}, γ^{-1} – времена жизни свободных колебаний W и E ; $\alpha = \frac{1}{\tau^2}$; τ – время двойного прохода фронта волны E между стенками ямы, ширина которой равна A .

Укажем разумный с физической точки зрения метод анализа записанной системы уравнений.

Используем представление

$$E = \rho(t) \cdot e^{i\varphi(t)},$$

$$W = r(t) \cdot e^{i\chi(t)},$$

где амплитуды ρ, r колебаний и их фазы φ, χ – вещественные функции от времени t .

Подстановка этого представления в исходную систему уравнений с последующим выделением вещественных и мнимых частей приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений относительно φ, ρ, χ, r :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}^2 = \frac{\ddot{\rho}}{\rho} + \beta \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \omega^2(t) - \frac{1}{\rho} [\operatorname{Re} Q \cos \varphi + \\ + \operatorname{Im} Q \sin \varphi] - \alpha \frac{r}{\rho} \cos(\chi - \varphi), \\ (\rho^2 \dot{\varphi})' = \rho [\operatorname{Im} Q \cos \varphi - \operatorname{Re} Q \sin \varphi] + \\ + \alpha r \rho \sin(\chi - \varphi) - \beta \rho^2 \dot{\varphi}, \\ \ddot{\chi}^2 = \frac{\ddot{r}}{r} + \gamma \frac{\dot{r}}{r} + \omega_n^2 - \alpha \frac{\rho}{r} \cos(\varphi - \chi), \\ (r^2 \dot{\chi})' = -\gamma r^2 \dot{\chi} + \alpha r \rho \sin(\varphi - \chi). \end{array} \right. \quad (4)$$

Эта система уравнений отражает все интересующие нас физические свойства колебаний E и W . Она представляет собой предмет отдельного, самостоятельного, большого по объему исследования, которое мы здесь проводить не будем.

4.6. Движение волнового поля в пространстве-времени (\hat{x}, t) .

Возвращаясь опять к способу описания волнового поля в рамках распределенной колебательной модели, получим в фиксированный момент времени $t = t_1 > 0$ зависимость амплитуд ρ, r_n полей $E, \{W_n\}$ от координаты \hat{x} , изображенную на рис. 7.

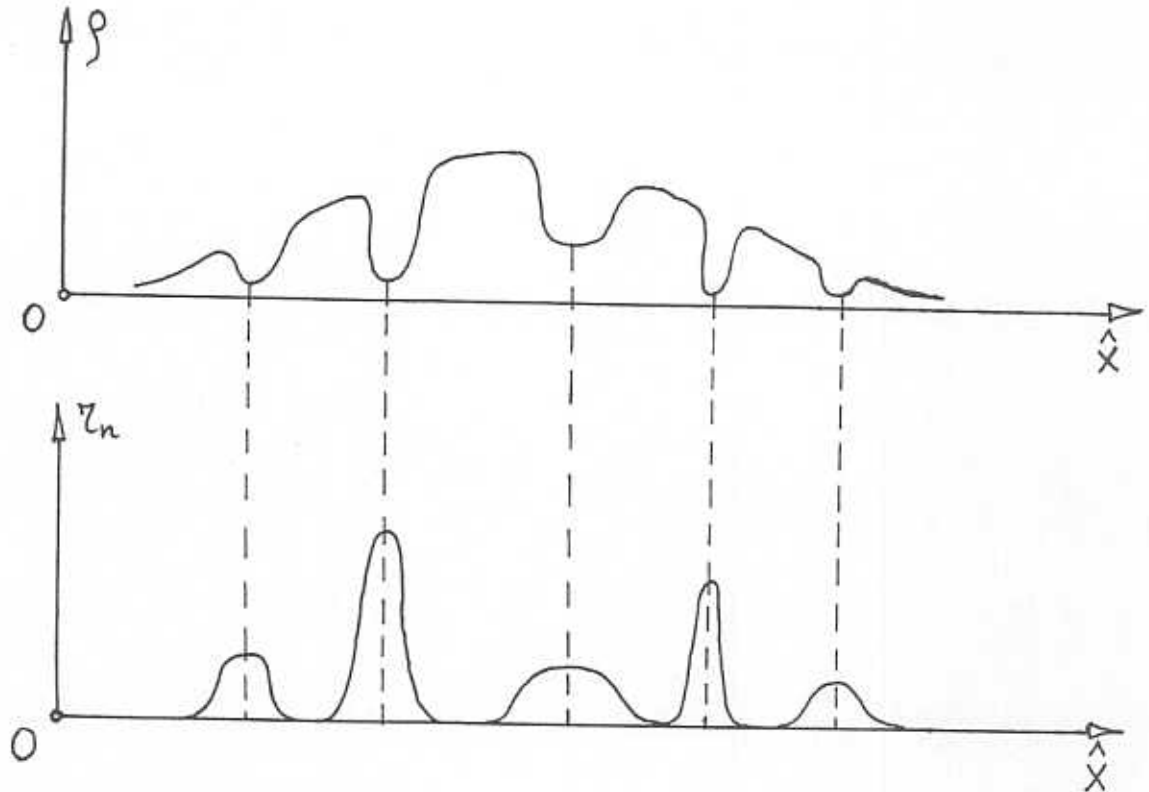


Рис. 7.

По мере дальнейшего движения шумового волнового поля E во времени t будет происходить его дисперсионная и дифракционная деформация, в результате которой могут возникнуть условия для возбуждения других мод из совокупности $\{W_n\}$, а также для дополнительного вклада из E в уже возбужденные моды.

4.7. Описание движения волновых полей E и $\{W_n\}$ в пространстве-времени (\hat{x}, ct, \hat{t}) .

Использование модели сосредоточенной колебательной системы при решении рассматриваемой проблемы имеет весьма ограниченную область применения. Такая модель непосредственно не описывает эффекты пространственной и временной дифракции и дисперсии полей E и $\{W_n\}$ в процессе их движения. Возможности способа описания движения полей в пространстве-времени (\hat{x}, t) также ограничены в этом отношении. Чтобы уяснить глобальную картину движения полей требуется другой способ описания. Продемонстрируем его.

Рассмотрим процесс движения полей E , $\{W_n\}$ в $(1+2)$ - пространстве-времени (\hat{x}, ct, \hat{t}) . Вдоль координаты \hat{x} измеряется пространственная протяженность импульсных полей, а вдоль координаты ct – их временная

протяженность. Временная координата \hat{t} служит для описания движения полей в целом.

Движение полей $E, \{W_n\}$ в (\hat{x}, ct, \hat{t}) наиболее просто изобразить посредством движения линий уровня их амплитуд ρ и $\{r_n\}$ на плоскости (\hat{x}, ct) с течением времени \hat{t} . На рис 8 изображен таким образом представленный волновой процесс в различные моменты времени \hat{t} .

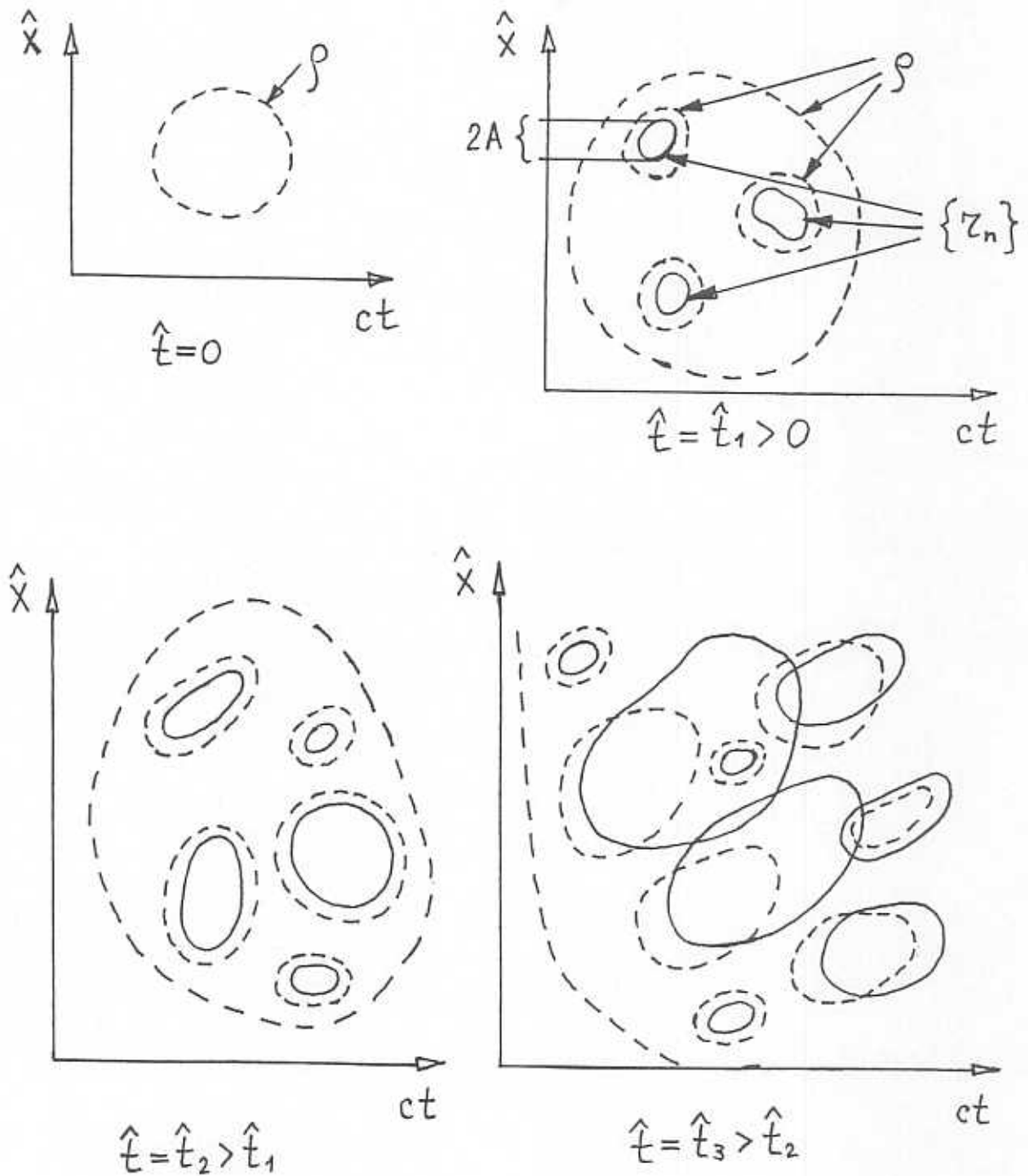


Рис. 8.

Из этого рисунка видно, что в процессе движения ρ и $\{r_n\}$ во времени \hat{t} имеет место дифракционное и дисперсионное растяжение импульсов $\{r_n\}$ как в пространстве (вдоль \hat{x}), так и во времени (вдоль ct). В пределе $\hat{t} \rightarrow \infty$ это растяжение приводит к тому, что импульсы $\{r_n\}$ начинают пересекаться как в пространстве, так и во времени, их пространственные и временные протяженности стремятся к бесконечности, а энергия поля E почти полностью преобразуется в энергию поля $\{W_n\}$. Этому преобразованию соответствует переход рассматриваемой системы из сначала случайного, хаотического, шумового состояния в регулярное, упорядоченное модовое состояние $\{W_n\}$. (Поле E можно рассматривать как отдельную реализацию случайного шумового поля).

Из рис. 8 видно, что процесс накачки мод $\{W_n\}$ осуществляется через дыры в зависимости $\rho(\hat{x}, ct)$, причем накачка отдельной моды W_n может происходить через несколько различных дыр.

Таково физическое содержание проблемы возбуждения собственных колебаний поля $\{W_n\}$ излучения в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками из начально заданного в ней короткого импульса волнового поля E .

4.8. Замечания.

Сформулируем основные замечания, следующие из проведенного анализа.

Рассмотренное выше физическое толкование процесса возбуждения собственных колебаний волнового поля из шума (начальной импульсной волны E) допускает обобщение на интересующую нас ситуацию возбуждения радиальных собственных колебаний поля излучения в лазерном резонаторе. При этом изменится только форма потенциальной ямы $U \rightarrow V$, добавится потенциал U_r , а также изменится характер шумовой волны E , которая на начальной стадии будет возбуждаться при изменении потенциала \hat{W} в пространстве и во времени. Это, однако, не приведет к существенному изменению основного физического содержания интересующего нас процесса.

Заметим, что в проведенном выше анализе были использованы нелинейные свойства волновых полей, в частности, дифракционный и дисперсионный эффекты трактовались как нелинейные волновые явления (см. (1)). Отсюда следует, что процесс формирования упорядоченной регулярной структуры волнового поля излучения в резонаторе (модовой структуры поперечных колебаний этого поля) с уровня шума (шумовой волны E) – существенно нелинейное физическое волновое явление. Оно описывается нелинейными дифференциальными уравнениями (1, 2, 4).

4.9. Переход к описанию волнового движения $\{W_n\}$ в потенциальной яме с конечной глубиной.

Теперь сделаем одно важное уточнение относительно формы потенциальной ямы V в установившемся режиме колебаний поля излучения в резонаторе. Для простоты ограничимся анализом поля в резонаторе с плоскими квадратными зеркалами, имеющими протяженность ℓ вдоль поперечной координаты x .

Исходным замечанием является то, что с повышением значений волновых чисел $K_n = \frac{\pi n}{\ell}$, ($n=1,2,\dots$) собственных поперечных колебаний поля в таком резонаторе их чувствительность к захвату резонатором должна ослабевать. Это означает, что область допустимых значений потенциала $V(x)$ должна быть ограничена сверху. Оценим эту границу из условия

$$K_n < k_0 \frac{\ell}{L} = K.$$

Координатная зависимость $V(x)$ должна иметь вид, изображенный на рис. 9.

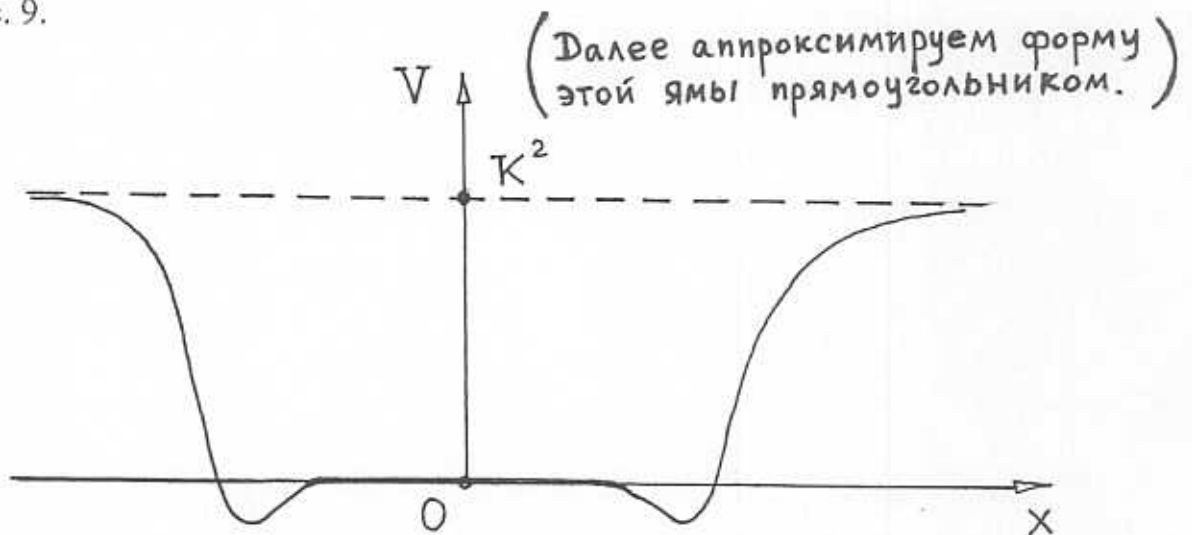


Рис. 9.

Например, если принять длину волны лазерного излучения $\lambda_0 = 1$ мкм и положить $L = 1$ м, $\ell = 1$ см, то $K = 600$ см⁻¹, тогда как $K_1 = 3$ см⁻¹, $K_2 = 6$ см⁻¹, $K_3 = 9$ см⁻¹ и т.д.

Форма потенциальной ямы $V(x)$, изображенная на рис.9, означает, что с повышением K_n собственные поперечные колебания поля слабее захватываются резонаторной полостью, а их потери энергии в ней возрастают. Это означает, что при одинаковых условиях их возбуждения, после его действия, наибольшее время жизни в резонаторе будут иметь собственные поперечные колебания поля с минимальными значениями

энергии K_n^2 . Таким образом, в этой ситуации, по истечении длительного промежутка времени, в резонаторе останется заметно возбужденным только одно собственное поперечное колебание с низшей энергией K_1^2 .

4.10. Выводы по проведенному анализу.

Выше мы впервые изложили физическое содержание процесса возбуждения поперечных (радиальных) собственных колебаний волнового поля лазерного излучения в открытых резонаторах. В отличие от предшествующих исследователей, поперечная структура волнового поля излучения в лазерном резонаторе была представлена в виде совокупности из двух физически неэквивалентных полевых объектов – шумового поля и поля собственных колебаний (поперечных мод). Одной из основных наших задач являлось установить связь между этими полевыми объектами в процессе их движения в пространстве-времени. Оказалось, что наиболее просто уяснить смысловое содержание этой связи можно в рамках элементарной физической модели – одномерной потенциальной ямы с заданным в ней сначала коротким импульсом шумового волнового поля. Основным вывод на этом этапе исследований формулируется следующим образом. Связь между указанными полевыми объектами в процессе их движения является следствием проявления двух нелинейных волновых эффектов – пространственно-временной дифракции и пространственно-временной дисперсии. В процессе движения оба эти эффекта приводят к растяжению исходной импульсной волны в потенциальной яме как в пространстве, так и во времени. Это свойство, в свою очередь, приводит к появлению движущихся пространственно-временных областей, в которых имеет место резонансное взаимодействие между неэквивалентными полевыми объектами.

Оказалось разумным исследовать указанный процесс взаимодействия в рамках моделей как сосредоточенной, так и распределенной колебательных систем.

Наконец, можно сделать вывод о целесообразности использования при анализе рассматриваемой проблемы построенного нами метода описания глобальной структуры изучаемых полей и ее движения в $(1+2)$ – пространстве-времени. Он наиболее просто и наглядно отражает физическое смысловое содержание интересующих нас процессов.

Изображенная в п. 4 на качественном уровне восприятия физическая картина процесса взаимодействия двух неэквивалентных полевых объектов нуждается в ряде количественных и полуколичественных уточнений. Они будут проведены в оставшейся части статьи.

**5. Полуколичественный анализ решения проблемы накачки
мод $\{W_n\}$ шумовым полем ψ , заданным вначале гауссовым
импульсом в прямоугольной потенциальной яме с
бесконечно высокими стенками.**

5.1. Постановка задачи.

Выше, на качественном уровне восприятия, была построена физическая модель процесса возбуждения радиальных собственных колебаний поля излучения в открытом лазерном резонаторе. Далее на полуколичественном уровне восприятия попытаемся углубить представление о физическом содержании этой модели. Первым шагом на пути к осуществлению этой программы является конкретизация начального шумового поля ψ . Наиболее подходящим теоретико-полевым объектом для этой цели является синусоидальная волна с огибающей, заданной в виде гауссовой функции (гауссов импульс).

Проблема, полуколичественное решение которой будет получено ниже, относится к одной из фундаментальных проблем волновой механики. Сформулируем ее.

Нас будет интересовать волновое поле, описываемое волновой функцией $\psi(x, t)$, которая удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера

$$\frac{2ik_0}{c} \psi_{,t} + \psi_{,xx} - U(x)\psi = 0.$$

Потенциальная функция $U(x)$ имеет вид прямоугольной ямы шириной ξ и с бесконечно высокими стенками. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в яме задана волна $\psi(x, t = 0)$, имеющая вид гауссова импульса. Требуется описать во времени процесс преобразования поля этой волны в совокупность собственных колебаний $\{W_n\}$ волнового поля в яме.

**5.2. Модель гауссова импульса в качестве исходного
шумового поля.**

Уясним физическое содержание модели движения гауссова импульса в свободном пространстве ($U = 0$), которую мы будем использовать. При этом координата x будет ассоциироваться с координатой \hat{x} , введенной в п. 4.3.

Сразу отметим, что такая модель импульса несовершенна.

Физически разумным являлось бы построить ее, исходя из представлений нелинейной волновой механики, сформулированных в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений (1). В этом случае она была бы корректной в отношении правильного учета дифракционного и дисперсионного эффектов.

Тем не менее, мы воспользуемся упрощенной моделью движения гауссова импульса, ставшей классической, и изложенной, например, в [17,18]. Она построена в линейном приближении и несет информацию только о дисперсионном эффекте настолько, насколько это возможно в линейном приближении – суперпозиции синусоидальных волн. Ее достоинством является простота изображения движения импульса в таком приближении.

В соответствии с этой моделью, для заданной в момент времени $t = 0$ волновой функции

$$\psi(x,0) = A \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + ikx\right),$$

(A, a, k – постоянные, вещественные, положительные величины) решение задачи имеет вид

$$\psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{1 + i \frac{ct}{k_0 a^2}}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2 - 2ia^2 kx + i \frac{ct}{k_0} k^2 a^2}{2a^2(1 + i \frac{ct}{k_0 a^2})}\right] =$$

$$= \rho(x,t) \cdot \exp\{i\varphi(x,t)\}.$$

Здесь ρ, φ – амплитуда и фаза волны (вещественные величины):

$$\rho = \frac{A}{\left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)^{1/4}} \cdot \exp\left[-\frac{\xi^2}{2a^2\left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)}\right],$$

$$\varphi = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{ct}{k_0 a^2}\right) + \frac{ct\xi^2}{2k_0 a^4\left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)} + k \cdot \left(\xi + \frac{vt}{2}\right),$$

где: $\xi = x - vt, v = \frac{k}{k_0} c$.

Характерное время τ дисперсионного растяжения ширины Δ гауссова контура амплитуды импульса

$$\Delta = a \cdot \sqrt{1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}}$$

в два раза ($\Delta=2a$) определяется формулой

$$\tau = \frac{2\pi\sqrt{3}a^2}{\lambda_0 c}.$$

Для $\lambda_0 = 300 \text{ нм} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ и $a = 1 \text{ см}$ значение τ порядка 10^{-5} с . За это время импульс смещается на расстояние

$$\Delta x = \frac{k}{k_0} ct.$$

Для $k = \frac{2\pi}{0,1a} \approx 60 \text{ см}^{-1}$ оно имеет порядок 1 м, т.е. $\Delta x \gg a$.

Проведенные оценки определяют снизу временную и пространственную границы начала процесса дисперсионного растяжения импульса. Следовательно, грубо, можно полагать, что они определяют границы начала процесса возбуждения собственных колебаний поля в яме. Более точные оценки следует проводить, исходя из фазовых характеристик импульсной волны $\varphi(\xi, t)$; $\varphi_{,\xi}(\xi, t)$; $\varphi_{,t}(\xi, t)$, рассматривая их в процессе движения в пространстве-времени. Сделаем это.

Сразу отметим, что записанная выше формула, определяющая фазу $\varphi(\xi, t)$ и выведенная строго математическим методом, нуждается в физическом уточнении. Она удовлетворительно описывает движение фазы только при $k = 0$ (и $v = 0$). Если $k \neq 0$, то имеется физически некорректное описание доплеровского эффекта. Ниже мы исправим эту погрешность.

Из приведенной выше формулы для $\varphi(\xi, t)$ легко выводится

$$\varphi_{,\xi} = k + \frac{ct\xi}{k_0 a^4 \left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)} = k + \beta.$$

Эта зависимость $\varphi_{,\xi}(\xi, t)$ физически реальна. Из той же формулы для $\varphi(\xi, t)$ также выводится

$$\varphi_{,t} = \underbrace{-\frac{1}{2} \frac{k_0 a^2 c}{k_0^2 a^4 + c^2 t^2}}_A + \underbrace{\frac{c\xi^2}{2k_0 a^4 \left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)^2}}_B$$

$$- \underbrace{\frac{c^3 t^2 \xi^2}{2k_0^3 a^8 \left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)^2}}_B + \underbrace{\frac{kv}{2}}_Г$$

Слагаемые А, Б в этой формуле интерпретируются как временные составляющие аperiodических колебаний импульса в целом. Эти колебания не связаны с квазипериодическими волнами, распространяющимися вдоль координаты ξ .

Слагаемое В интерпретируется частотой квазипериодических волн, распространяющихся вдоль ξ . Это следует из дисперсионного закона

$$\omega_B = \frac{c\beta^2}{2k_0},$$

где:

$$\omega_B = \frac{c^3 t^2 \xi^2}{2k_0^3 a^8 \left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)} \quad \leftarrow (-B)$$

$$\beta = \frac{ct\xi}{k_0 a^4 \left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)}$$

Слагаемое Γ интерпретируется частотой колебаний синусоидальной волны, имеющей волновое число k . Важно отметить, что эта частота определена в системе отсчета, движущейся со скоростью v относительно неподвижной системы отсчета. В неподвижной системе отсчета это слагаемое имело бы вид

$$-\frac{kv}{2}.$$

Общая частота ω в системе отсчета движущегося со скоростью v гауссова импульса определяется так:

$$\omega = -\varphi_{,t}(\xi, t).$$

Основной интерес в рассматриваемой проблеме представляет слагаемое ω_B из ω . Оно нуждается в физическом уточнении.

Представленная выше зависимость $\omega_B(\xi, t)$ справедлива только в случае $k = 0$, т.е. в случае, когда поступательное движение импульса отсутствует ($v = 0$). Если $k \neq 0$, то в неподвижной системе отсчета должно наблюдаться проявление доплеровского эффекта. В такой системе отсчета частота Ω квазипериодического волнового движения должна определяться при $k > 0$ так:

$$\Omega = \frac{kv}{2} \pm \omega_B = \frac{ck^2}{2k_0} \pm \frac{c^3 t^2 \xi^2}{2k_0^3 a^8 \left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)^2},$$

где знак \oplus берется для $\xi > 0$, а знак \ominus — для $\xi < 0$. Это означает, что значение величины частоты Ω зависит от того, в каком месте ξ она наблюдается — перед движущимся импульсом ($\xi > 0$) или за ним ($\xi < 0$).

Интересующие нас зависимости $\varphi_{,\xi}(\xi)$, $\Omega(\xi)$ в разные моменты времени t изображены на рис. 10.

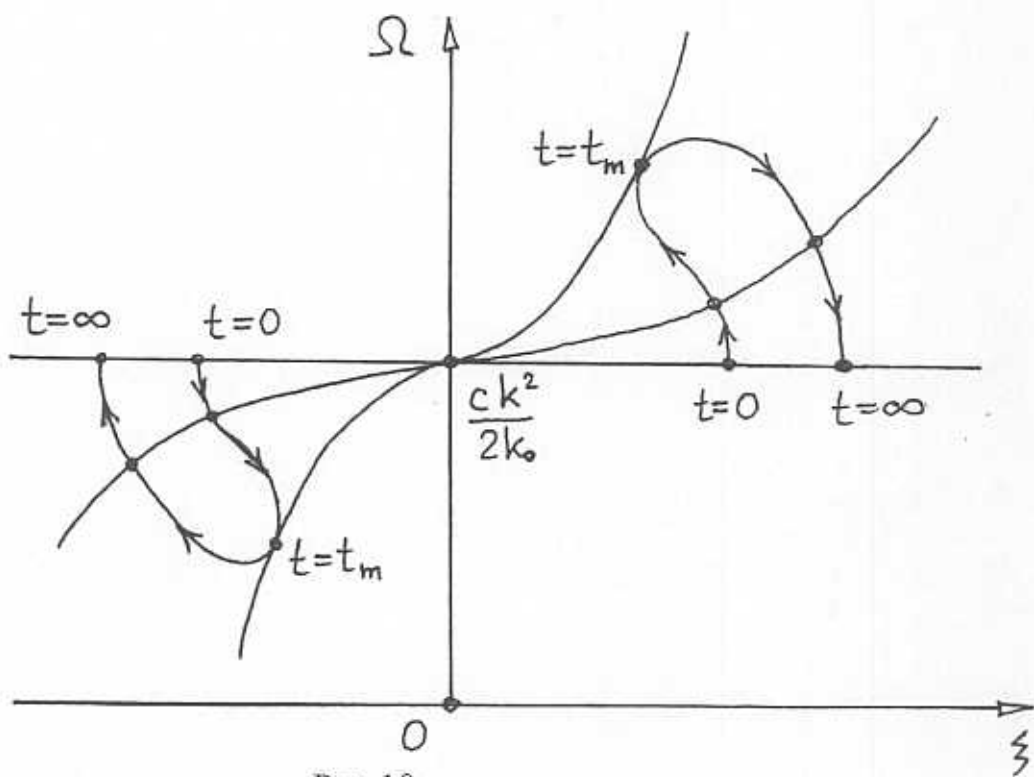
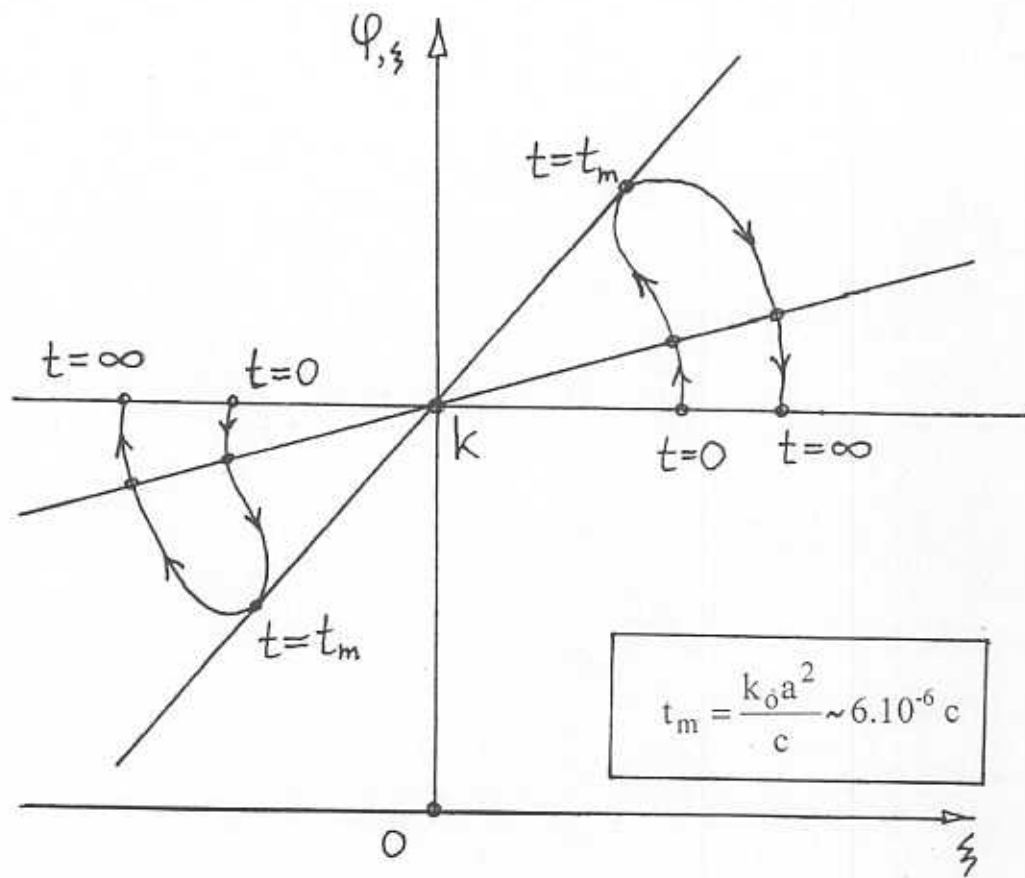


Рис.10.

Из этого рисунка следует вывод. С точки зрения резонансной накачки мод наибольший интерес представляет область $t \gg t_m = \frac{k_0 a^2}{c} \sim 6 \cdot 10^{-6}$ с. В ней процесс дисперсионного растяжения импульса наиболее заметен и зависимость $\varphi_{,\xi}(x)$ с увеличением t становится слабее. Это свойство является необходимым для резонансной накачки мод с пространственными $\dot{\alpha}_n = \frac{\pi n}{\ell}$ и временными $\omega_n = \frac{c \dot{\alpha}_n^2}{2k_0} = \frac{\pi^2 c n^2}{2k_0 \ell^2}$ собственными частотами.

Следует отметить, что в точках на плоскости (x, t) , где выполняется резонансное условие $\varphi_{,\xi} = \dot{\alpha}_n$, условие $\omega = \omega_n$ может не выполняться, поскольку величина ω , по определению, содержит «лишнюю» в рассматриваемом процессе информацию об аperiodических временных колебаниях поля импульса в целом. Такие колебания являются фоном, на котором происходит резонансная перекачка энергии из ψ в моды $\{W_n\}$.

При выполнении указанных условий будет происходить процесс накачки мод $\{W_n\}$. С глобальной точки зрения он сопровождается искажением гауссовой зависимости $\rho(\hat{x}, ct)$, где \hat{x} - пространственная координата в направлении распространения исходного гауссова импульса, а ct - временная координата, вдоль которой измеряется временная протяженность импульса. В фиксированный момент времени \hat{t} движения импульса в целом это показано на рис. 11.

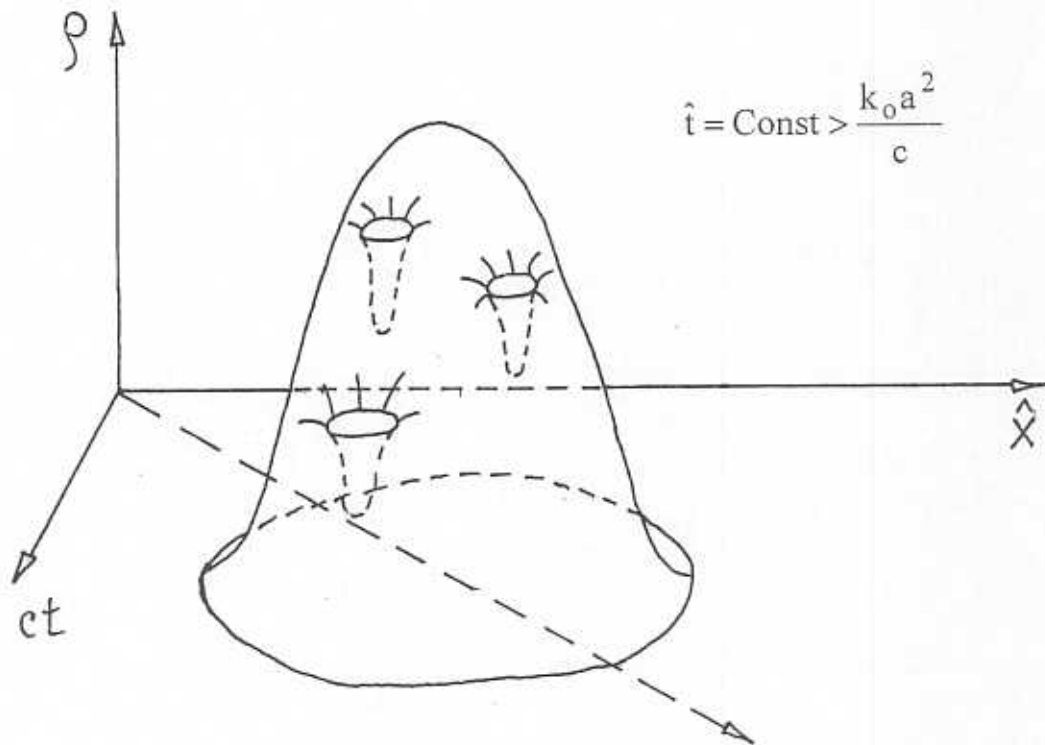


Рис. 11.

Из рисунка видно, что в гауссовой зависимости $\rho(\hat{x}, ct)$ появляются дыры, через которые происходит перекачка энергии из $\psi(\hat{x}, ct)$ в $\{W_n\}$.

5.3. Модель двухуровневой квантовомеханической системы для описания процесса накачки моды W шумовым колебанием E . Ее недостаток.

Следующим этапом исследования является изучение процесса возбуждения отдельной моды W из набора $\{W_n\}$ посредством процесса резонансного взаимодействия W с шумовым полем ψ . Сначала рассмотрим этот процесс в отношении к резонансному взаимодействию полей ψ и W через единственную дыру в зависимости $\rho(\hat{x}, ct)$, изображенную на рис. 11. Воспользуемся моделью сосредоточенной колебательной системы. Будем анализировать процесс перекачки энергии из шумового колебания E в колебание W . Сначала опишем этот процесс в рамках модели двухуровневой квантовомеханической системы [19].

Шумовое колебание E будем моделировать двухуровневой системой. Перед воздействием на эту систему возмущающего колебания W , она находится на верхнем энергетическом уровне E_n . После действия возмущения она переходит на нижний энергетический уровень E_s . Рассмотрим процесс резонансного взаимодействия, когда $E_n - E_s = \hbar\omega_q$, где ω_q - частота собственного колебания W . В процессе взаимодействия колебание E теряет квант энергии $\hbar\omega_q$, который получает колебание W .

Под гамильтонианом взаимодействия будем понимать величину

$$H = \Delta t \cdot V \cdot \frac{r\rho}{\tau_q} \cos(\omega_q t) = A r \rho \cos(\omega_q t),$$

где $\tau_q = \frac{2\ell}{v_q}$ - время двойного прохода фазы волны между стенками ямы;

$v_q = \frac{\omega_q}{k_q}$; ω_q, k_q - временная и пространственная собственные частоты

колебания W ; $V \cdot \Delta t$ - объем в пространстве-времени, где расположена дыра, r - амплитуда колебания W .

Амплитуды r и ρ связаны между собой законом сохранения энергии:

$$\rho^2(t) + r^2(t) = \text{Const} = \rho_0^2.$$

Введем комплексные амплитуды $a_n(t), a_s(t)$ вероятности нахождения колебания E на верхнем и нижнем уровнях. Для них выполняется закон сохранения

$$a_n a_n^* + a_s a_s^* = 1.$$

Тогда предыдущее соотношение можно записать так:

$$\underbrace{\rho_0^2 a_n a_n^*}_{\rho^2(t)} + \underbrace{\rho_0^2 a_s a_s^*}_{r^2(t)} = \rho_0^2$$

Отсюда

$$r(t) = \rho_0 \sqrt{a_s a_s^*},$$

$$\rho(t) = \rho_0 \sqrt{1 - a_s a_s^*}.$$

Уравнения движения $a_s(t)$, $a_n(t)$, согласно [19], имеют вид:

$$\dot{a}_s = -\frac{i}{\hbar} a_n \text{He}^{-i\omega_q t} \approx -\frac{i}{2\hbar} a_n \text{Ar}\rho,$$

$$\dot{a}_n = -\frac{i}{\hbar} a_s \text{He}^{i\omega_q t} \approx -\frac{i}{2\hbar} a_s \text{Ar}\rho,$$

поскольку $\cos(\omega_q t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_q t} + e^{-i\omega_q t})$ и существенны только медленно осциллирующие по сравнению с ω_q^{-1} слагаемые.

Умножив эти уравнения на a_n^* , a_s^* , комплексно сопрягая их и комбинируя, получим уравнение относительно вероятности $P_s = a_s a_s^*$:

$$\ddot{P}_s - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{P_s} - \frac{1}{1-P_s} \right) (\dot{P}_s)^2 + \Omega^2 \left(\frac{3}{2} P_s - P_s^2 - \frac{1}{2} \right) P_s = 0,$$

где $\Omega = \frac{\text{Ar}\rho_0^2}{\hbar}$, $0 < P_s \leq 1$.

Переменные r , ρ выражаются через P_s так:

$$r(t) = \rho_0 \sqrt{P_s(t)},$$

$$\rho(t) = \rho_0 \sqrt{1 - P_s(t)}.$$

При начальных условиях

$$P_s(0) = P_0 \ll 1, P_0 > 0, \dot{P}_s(0) = 0$$

движение $P_s(t)$ изображено на рис. 12.

Из качественного анализа решения задачи $P_s(t)$ следует, что характерное время T возбуждения моды W не может быть короче, чем τ_q :

$$T > \tau_q = \frac{2\ell}{v_q} = \frac{4k_0 \ell^2}{\pi c q} \sim 10^{-5} \text{с}, (\lambda_0 = 300 \text{ нм}, \ell = 1 \text{ см}, q = 1).$$

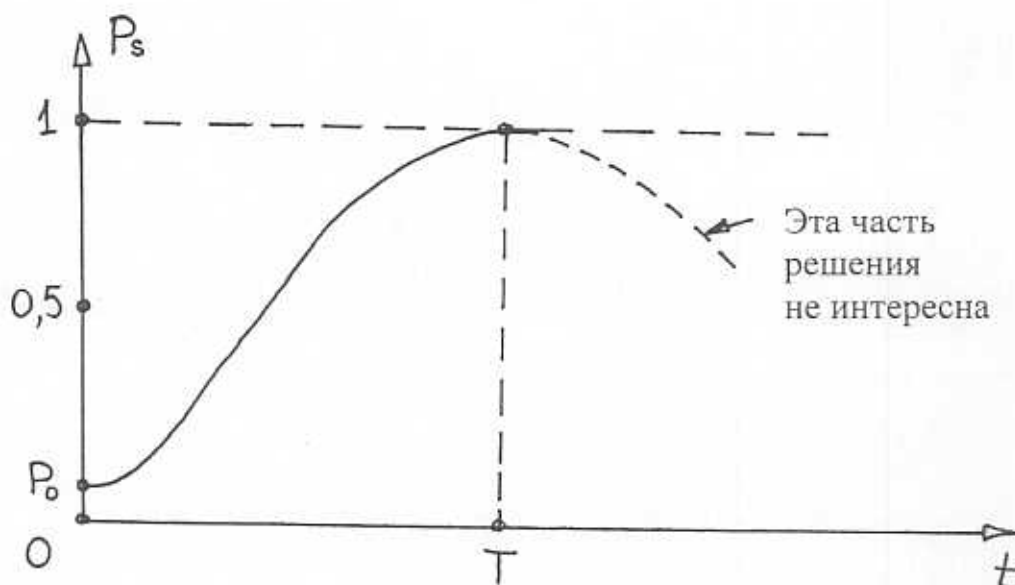


Рис. 12.

Таково представление о процессе возбуждения моды W шумовым колебанием E , основанное на представлении о квантовомеханической двухуровневой модели. Основным недостатком такого представления является неопределенность выбора исходной, начальной амплитуды $r(0)$ колебания W , выраженная в неопределенности начального значения P_0 величины P_s . Априорно предполагалось, что значение P_0 должно быть малым ($P_0 \ll 1$), но не равным нулю.

Это свойство неопределенности P_0 часто используют в качестве основного аргумента для перехода от классического метода описания поля лазерного излучения к квантовополевому. При этом считается, что основным недостатком классической теории поля лазерного излучения является несостоятельность надежного определения значения величины P_0 .

Ниже мы покажем, как избежать этого недостатка, оставаясь в рамках представлений классической теории поля лазерного излучения.

5.4. Модель связанных гармонических осцилляторов для описания процесса накачки моды W шумовым колебанием E .

Отмеченного выше недостатка при описании процесса возбуждения моды W шумовым колебанием E в рамках двухуровневой квантовомеханической модели лишен метод описания этого процесса посредством классической модели связанных между собой гармонических осцилляторов W и E :

$$\begin{cases} \ddot{E} + \omega^2 E = \alpha W, \\ \ddot{W} + \omega_q^2 W = \alpha E, \end{cases}$$

где: ω, ω_q – собственные частоты свободных колебаний E и W ;

$$\alpha = \frac{1}{\tau_q^2}; \tau_q = \frac{2\ell}{v_q}.$$

Выражая E и W через амплитуды ρ, r и фазы φ, χ колебаний

$$E = \rho(t)e^{i\varphi(t)},$$

$$W = r(t)e^{i\chi(t)}$$

(предполагается, что ρ, r, φ, χ – вещественные функции, причем $\rho, r \geq 0$), из исходных уравнений получим систему уравнений относительно ρ, φ, r, χ :

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \omega^2\rho = \alpha r \cos(\chi - \varphi), \\ 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \alpha r \sin(\chi - \varphi), \\ \ddot{r} - r\dot{\chi}^2 + \omega_q^2 r = \alpha \rho \cos(\varphi - \chi), \\ 2\dot{r}\dot{\chi} + r\ddot{\chi} = \alpha \rho \sin(\varphi - \chi). \end{cases}$$

Эта система нелинейных дифференциальных уравнений наиболее подробно описывает физические свойства процесса движения связанных между собой гармонических осцилляторов E и W .

Из анализа третьего уравнения этой системы следует важный вывод.

Положим $r(0) = \dot{r}(0) = 0, \rho(0) = \rho_0 = \text{Const} > 0, \cos(\varphi - \chi) = \text{Const} > 0$.

Тогда, вместо этого уравнения, имеем уравнение

$$\ddot{r} = \alpha \rho_0 \cos(\varphi - \chi) = \text{Const} > 0$$

с решением

$$r(t) = \frac{1}{2} \alpha \rho_0 \cos(\varphi - \chi) \cdot t^2.$$

Это решение показывает, что возбуждение колебания W возможно из сначала невозбужденного его состояния ($r(0) = \dot{r}(0) = 0$). Это свойство является следствием проявления хорошо известного эффекта в теории вынужденных колебаний.

Таким образом, в рассматриваемой модели неопределенности начального значения $r(0)$ не существует. Очевидно, $r(0) = 0$.

Легко заметить, что в общем случае подробный анализ движения осцилляторов E и W затруднен из-за сложной структуры системы нелинейных дифференциальных уравнений относительно ρ, φ, r, χ .

Примитивное, поверхностное представление о движении E и W можно получить в рамках линейного приближения. Найдем решение задачи в таком приближении для интересного случая резонансного взаимодействия осцилляторов ($\omega = \omega_q$).

Вместо переменных E и W введем новые переменные $Q = E + W$ и $P = E - W$. Из исходной системы уравнений относительно E, W следует, что движение Q и P описывается уравнениями

$$\ddot{Q} + \Omega_-^2 Q = 0,$$

$$\ddot{P} + \Omega_+^2 P = 0,$$

где $\Omega_{\pm} = \sqrt{\omega^2 \pm \alpha}$.

Их решениями являются функции

$$Q = Q_0 \sin(\Omega_- t + \psi_-),$$

$$P = P_0 \sin(\Omega_+ t + \psi_+)$$

с $Q_0 = E_0 + W_0$ и $P_0 = E_0 - W_0$, где E_0, W_0 - амплитуды колебаний E и W .

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ $E_0 = \text{Const} > 0$, $W_0 = 0$.

Тогда решением задачи является

$$E(t) = E_0 \cos\left(\frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\Omega_+ - \Omega_-}{2} t\right),$$

$$W(t) = E_0 \cdot \sin\left(\frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2} t + \pi\right) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_+ - \Omega_-}{2} t\right).$$

В интересующей нас ситуации

$$\frac{\alpha}{\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 q^2} \ll 1, (q = 1, 2, \dots).$$

Поэтому справедливо приближение

$$\Omega_{\pm} \approx \omega \left(1 \pm \frac{\alpha}{2\omega^2}\right).$$

Тогда решением задачи является

$$E(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos\left(\frac{\alpha t}{2\omega}\right)$$

$$W(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t + \pi) \cdot \sin\left(\frac{\alpha t}{2\omega}\right).$$

Наибольший интерес представляют низкочастотные составляющие этих колебаний (их огибающие). Они позволяют определить характерное время T возбуждения моды W :

$$\frac{\alpha T}{2\omega} = \frac{\pi}{2},$$

$$T = \frac{\pi\omega}{\alpha} = \frac{8\pi k_0 \ell^2}{c},$$

(не зависит от q).

Для $\lambda_0 = 300$ нм, ($k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$), $\ell = 1$ см имеем

$$T \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Поскольку предполагается, что мода W устойчива по отношению к распаду в шумовое колебание E , то временная эволюция процесса ограничена интервалом $0 \leq t \leq T$.

Таково представление о процессе накачки моды W шумовым колебанием E , данное в рамках линейной модели связанных гармонических осцилляторов.

5.5. Определение понятия резонансов полей ψ и $\{W_n\}$. Представление об их движении в пространстве- времени (ξ, t) .

Следующим этапом решения проблемы является определение геометрии пространственно-временных точек взаимодействия полей Ψ и $\{W_n\}$ (резонансов) и закономерностей их движения.

Воспользуемся выведенной ранее формулой

$$\varphi_{,\xi} = k + \frac{ct\xi}{k_0 a^4 \left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)}$$

и определим резонансы условием

$$\varphi_{,\xi} = \dot{\alpha}_n = \frac{\pi n}{\ell}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем величину

$$K_n = \dot{\alpha}_n - k$$

и угол $\alpha(t)$, определенный так:

$$\text{tg}\alpha(t) = \frac{K_n}{\xi_n(t)} = \frac{ct}{k_0 a^4 \left(1 + \frac{c^2 t^2}{k_0^2 a^4}\right)},$$

где $\xi_n(t)$ – закон движения резонанса n вдоль координаты ξ . Это показано на рис.13.

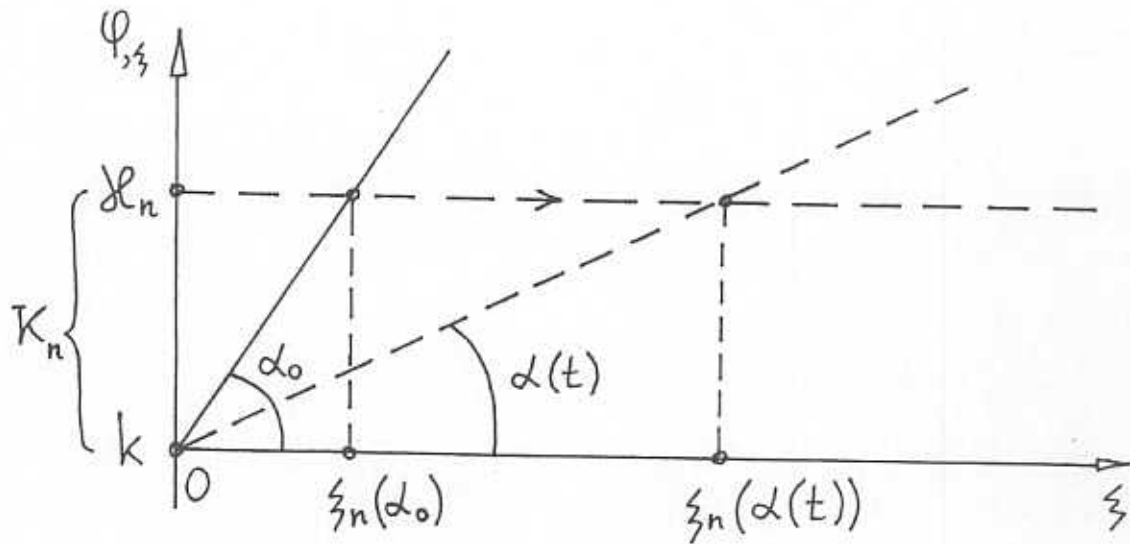


Рис. 13.

Угол α изменяется в пределах $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Максимальное значение $\alpha = \alpha_0$ существует при $t = \frac{k_0 a^2}{c} \sim 6 \cdot 10^{-6}$ с. В этом случае $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{2a^2}$. Наибольший интерес представляет движение резонансов во временном интервале $t \geq \frac{k_0 a^2}{c}$. Это движение разумно описывать временной переменной

$$\Delta t = t - \frac{k_0 a^2}{c}, \quad 0 \leq \Delta t < \infty.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}(\alpha(\Delta t)) = \frac{k_0 (c\Delta t + k_0 a^2)}{(c\Delta t + k_0 a^2)^2 + k_0^2 a^4}$$

и, следовательно,

$$\xi_n(\Delta t) = \frac{K_n}{\operatorname{tg}(\alpha(\Delta t))} = \frac{K_n [k_0^2 a^4 + (c\Delta t + k_0 a^2)^2]}{k_0 (c\Delta t + k_0 a^2)}$$

Скорость движения резонанса n тогда определяется так:

$$\frac{d\xi_n}{d(\Delta t)} = c \frac{K_n}{k_0} \left[1 - \frac{k_0^2 a^4}{(c\Delta t + k_0 a^2)^2} \right].$$

Очевидно,

$$0 \leq \frac{d\xi_n}{d(\Delta t)} < c \frac{K_n}{k_0}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \Delta t = 0 & & \Delta t \rightarrow \infty \end{array}$$

Закон движения расстояния $\Delta\xi_n$ между соседними резонансами с $K_n = \dot{a}_n - k > 0$ и $K_{n-1} = \dot{a}_{n-1} - k > 0$ определяется формулой

$$\begin{aligned}\Delta\xi_n(\Delta t) &= \frac{K_n - K_{n-1}}{\operatorname{tg}(\alpha(\Delta t))} = \frac{\pi}{\ell \operatorname{tg}(\alpha(\Delta t))} = \\ &= \frac{\pi[k_0^2 a^4 + (c\Delta t + k_0 a^2)^2]}{k_0 \ell (c\Delta t + k_0 a^2)}\end{aligned}$$

При $c\Delta t \gg k_0 a^2$:

$$\Delta\xi_n = \frac{\pi c \Delta t}{k_0 \ell}, \quad (\text{не зависит от } a).$$

Оценка для $\Delta t \sim T = 2 \cdot 10^{-4}$ с дает $\Delta\xi_n(T) \sim 10^2$ см.

**5.6. Ограничение, накладываемое на протяженность а
исходного гауссова импульса шумового поля.
Зависимость эффективности накачки мод $\{W_n\}$
от соотношения a/ℓ**

Основным замечанием, следующим из предыдущего анализа, является отсутствие величины a в формуле

$$\Delta\xi_n = \frac{\pi c \Delta t}{k_0 \ell},$$

справедливой при $\Delta t \rightarrow \infty$.

С другой стороны, дисперсионное растяжение ширины Δ гауссова импульса с начальным ее значением a во времени Δt при $\Delta t \rightarrow \infty$ существенно зависит от a и описывается формулой

$$\Delta = \frac{c \Delta t}{k_0 a}.$$

Отсюда легко увидеть, что в случае $\Delta > \Delta\xi_n$ области возмущения поля ψ при $\Delta t \rightarrow \infty$ будут пересекаться в пространстве. Выполнение этого условия гарантирует высокую эффективность взаимодействия полей. Количественно ее можно характеризовать величиной η :

$$\eta = \frac{\Delta}{\Delta\xi_n} = \begin{cases} \frac{\ell}{\pi a} & \text{при } \frac{\pi a}{\ell} \geq 1, \\ 1 & \text{при } \frac{\pi a}{\ell} < 1. \end{cases}$$

Наибольшая эффективность η взаимодействия полей ψ и $\{W_n\}$ будет наблюдаться при малых отношениях $\frac{a}{\ell} < \frac{1}{\pi}$.

5.7. Эффекты образования новых резонансов в процессе накачки моды W_n шумовым полем ψ . Оценки пороговых условий их возникновения. Движение резонансов в пространстве-времени $(\xi, \Delta t)$.

Процесс взаимодействия полей ψ и $\{W_n\}$ сопровождается искажением сначала гауссовой формы амплитуды $\rho(\xi)$ поля ψ . В ней начинают образовываться дыры. Образование каждой отдельной дыры, в свою очередь, должно сопровождаться проявлением дифракционного эффекта, искажающего сначала линейную зависимость $\rho_{,\xi}(\xi) = \tilde{\alpha}(\xi)$. Такое искажение может оказаться настолько сильным, что приведет к пространственному (вдоль ξ) дополнительному смещению ξ_n исходного резонанса, а также к образованию новых резонансов. Проанализируем эту ситуацию.

Обозначим через $\rho^0(\tilde{\xi})$ амплитуду поля импульса дыры, которую для простоты будем считать гауссовой функцией от координаты $\tilde{\xi}$ начало отсчета $\tilde{\xi} = 0$ которой находится в центре дыры. Это изображено на рис. 14а.

В обозначениях рис. 14а:

$$\rho^0 = A - B \exp\left(-\frac{\tilde{\xi}^2}{2\tilde{a}^2}\right).$$

Дифракционный эффект учитывается путем введения величины ε' (см. [8]):

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\tilde{\xi}) &= \frac{\rho^0_{,\tilde{\xi}\tilde{\xi}}}{k_0^2 \rho^0} = \frac{1}{k_0^2} \frac{\frac{B}{\tilde{a}^2} \left(1 - \frac{\tilde{\xi}^2}{\tilde{a}^2}\right) \exp\left(-\frac{\tilde{\xi}^2}{2\tilde{a}^2}\right)}{A - B \exp\left(-\frac{\tilde{\xi}^2}{2\tilde{a}^2}\right)} \approx \\ &\approx \frac{B}{k_0^2 A \tilde{a}^2} \left(1 - \frac{\tilde{\xi}^2}{\tilde{a}^2}\right) \exp\left(-\frac{\tilde{\xi}^2}{2\tilde{a}^2}\right). \end{aligned}$$

При записи последнего равенства предполагалось, что $A \gg B$. Зависимость $\varepsilon'(\tilde{\xi})$ изображена на рис. 14б.

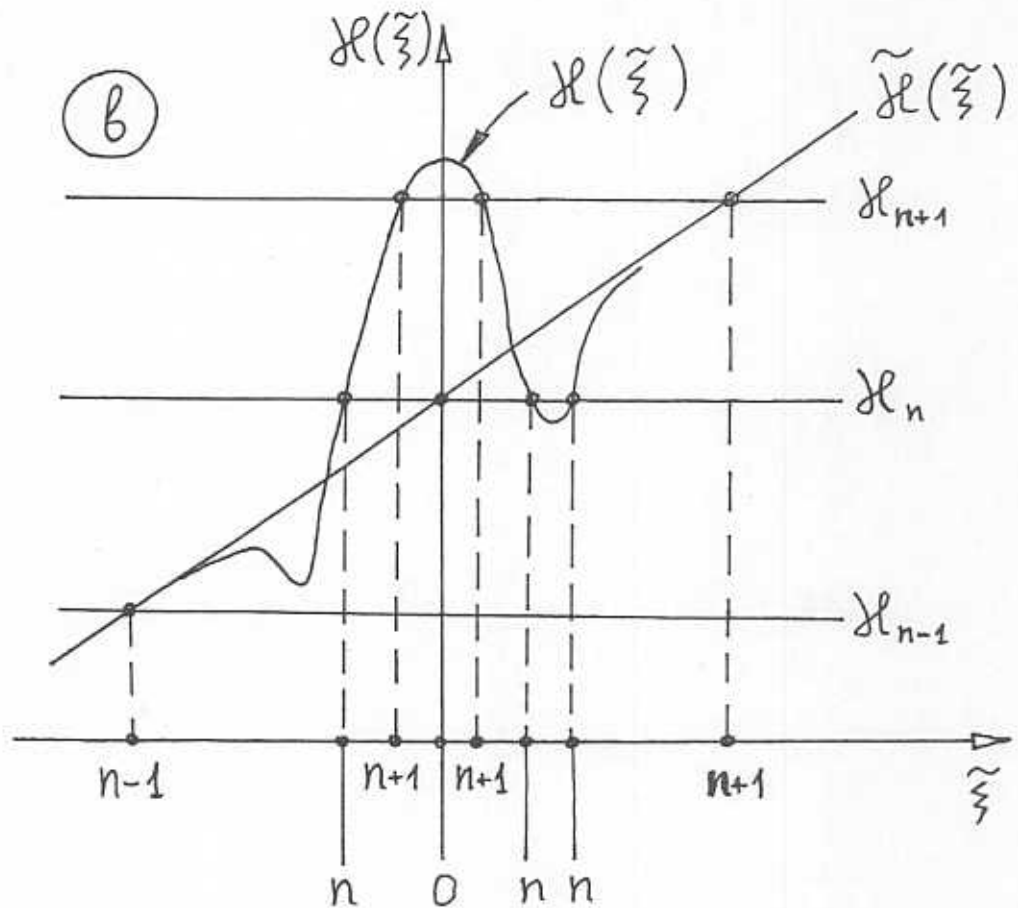
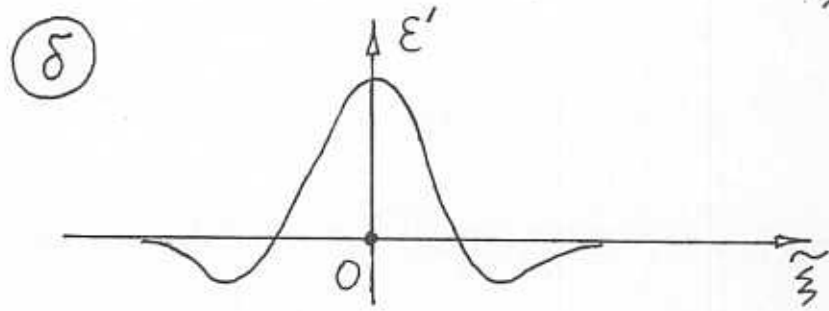
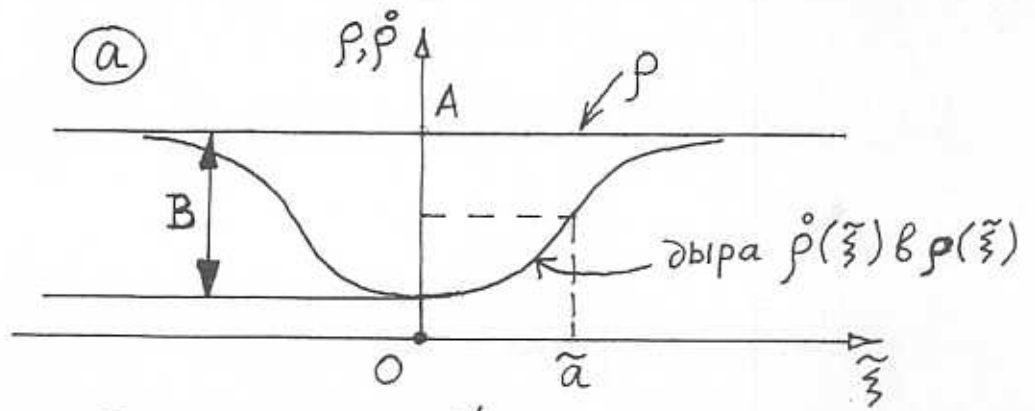


Рис. 14.

Тогда связь между искаженной дифракционным эффектом зависимостью волнового числа $\acute{\alpha}$ от $\tilde{\xi}$ и неискаженной зависимостью $\tilde{\alpha}$ от $\tilde{\xi}$ определяется соотношением

$$\acute{\alpha} = \tilde{\alpha} \sqrt{1 + \varepsilon'}$$

Эти зависимости показаны на рис. 14в.

Исходя из этих зависимостей, легко определить, как во времени Δt происходит смещение резонанса ξ_n и появление новых резонансов. Для этого следует представить процесс образования дыры ρ^0 во времени по мере увеличения B от нуля. На рис. 15 в координатах $(\Delta t, \xi - \xi_n(\Delta t))$ изображен этот процесс.

Из этого рисунка видно как при образовании дыры ρ^0 происходит смещение резонанса $\acute{\alpha}_n$ и возникновение новых резонансов $\acute{\alpha}_n$ и $\acute{\alpha}_{n+1}$.

Поскольку в интересующей нас ситуации

$$\tilde{\alpha}(\xi, \Delta t) \approx k + \frac{k_0 \xi}{c \Delta t}$$

и $B \ll A$, то

$$\acute{\alpha}(\xi, \tilde{\xi}, \Delta t) = \left(k + \frac{k_0 (\xi \pm \tilde{\xi})}{c \Delta t} \right) \cdot \left[1 + \frac{B}{2k_0^2 \tilde{a}^2 A} \left(1 - \frac{\tilde{\xi}^2}{\tilde{a}^2} \right) \exp\left(-\frac{\tilde{\xi}^2}{2\tilde{a}^2}\right) \right]$$

Это — основная формула для определения интересующих нас пространственных сдвигов $\tilde{\xi}$ резонансов и пороговых условий возникновения новых резонансов.

Определим эти факторы при постоянном значении Δt .

Сначала найдем сдвиг $\tilde{\xi}_n$ основного резонанса n , индуцированный дифракционным эффектом. Для этого положим в основной формуле

$$\acute{\alpha} = \acute{\alpha}_n = \frac{\pi n}{\ell}, \quad \xi \pm \tilde{\xi} \rightarrow \xi - \tilde{\xi}, \quad \xi \rightarrow \xi_n = \left(\frac{\pi n}{\ell} - k \right) \frac{c \Delta t}{k_0}$$

Разрешая полученное уравнение относительно $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_n$, получим

$$\tilde{\xi}_n = \frac{\pi n B c \Delta t}{2k_0^3 \tilde{a}^2 \ell A}$$

Найдем пороговое условие образования резонанса $(n+m)$ с $m \geq 1$ в дыре с начальным резонансом n . Резонанс $(n+m)$ образуется в точке $\xi_n(\Delta t)$, т.е. при $\tilde{\xi} = 0$. Положим в основной формуле

$$\acute{\alpha} = \frac{\pi(n+m)}{\ell}, \quad \xi = \xi_n = \left(\frac{\pi n}{\ell} - k \right) \frac{c \Delta t}{k_0}$$

Из анализа полученного уравнения получим искомое пороговое условие

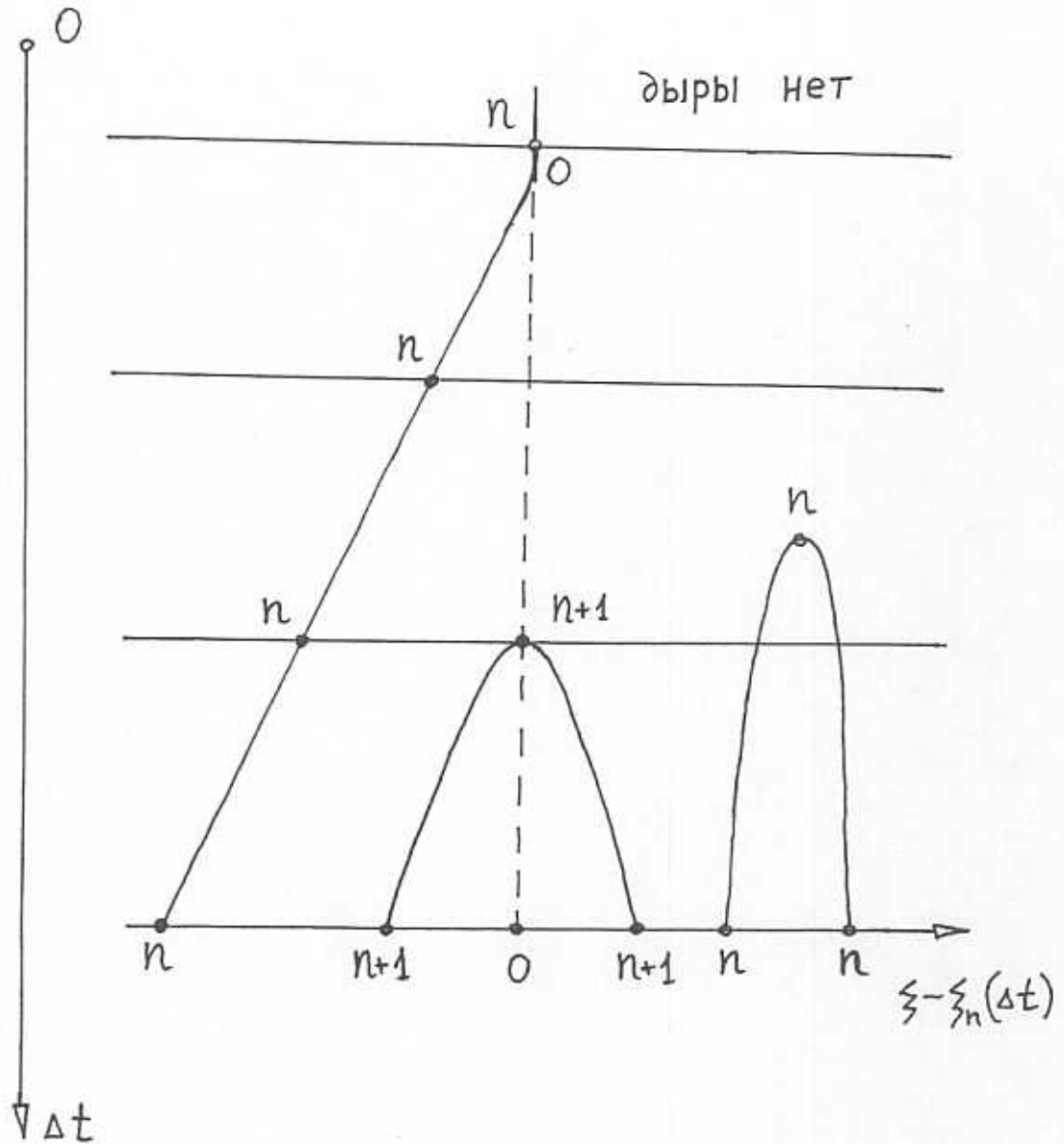


Рис. 15.

$$\frac{B}{A} \geq \frac{m}{n} \cdot 2k_0^2 \tilde{a}^2.$$

Найдем пороговое условие образования в окрестности исходного резонанса n двух новых резонансов n и координату $\tilde{\xi}_{\min}$, в которой они возникают.

Подставим в основную формулу

$$\dot{a} = \dot{a}_n = \frac{\pi n}{\ell}, \quad \xi = \xi_n = \left(\frac{\pi n}{\ell} - k \right) \frac{c \Delta t}{k_0}.$$

Из анализа полученного уравнения следует, что два резонанса n появляются в точке $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_{\min} = \sqrt{3} \tilde{a}$ при выполнении порогового условия

$$\frac{\pi n V c \Delta t}{k_0^3 \ell \tilde{a}^3 A} \geq e^{3/2} \sqrt{3}.$$

Общая картина движения резонансов и возмущенных областей ρ при $a < \frac{\ell}{\pi}$ показана на рис. 16.

Из проведенного выше анализа следует, что учет дифракционного эффекта в дырах $\rho(\xi, \Delta t)$ при движении импульса $\psi(\xi, \Delta t)$ приводит к лавинообразному процессу возникновения новых резонансов и к искажению траекторий $\xi_n(\Delta t)$ движения резонансов.

Это свойство важно принять во внимание при анализе статистических свойств полей ψ и $\{W_n\}$.

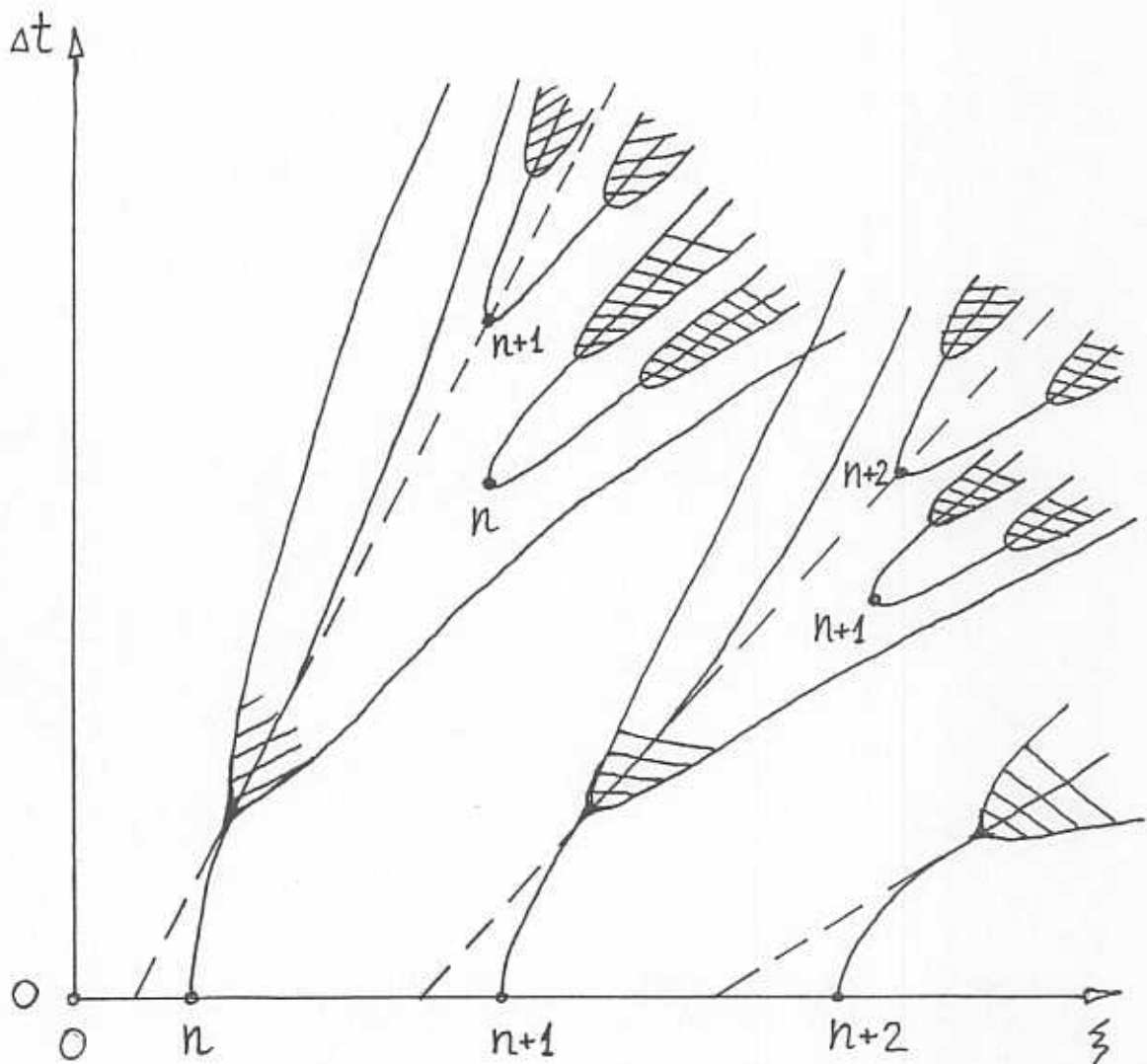


Рис. 16.

5.8. Понятие о точках резонансов полей ψ и $\{W_n\}$ на плоскости (\hat{x}, ct) в фиксированный момент времени $\hat{t} > 0$ без учета взаимодействия.

Проведенный выше анализ основывался на описании движения волнового поля ψ в (1+1) - пространстве-времени (\hat{x}, t) посредством уравнения

$$\frac{2ik_0}{c} \psi_{,t} + \psi_{,\hat{x}\hat{x}} = 0.$$

Такой метод описания поля ψ является частным по отношению к более общему методу описания движения волнового поля в (1+2) - пространстве-времени (\hat{x}, x_0, \hat{t}) , в котором движение импульса ψ во времени \hat{t} происходит как вдоль пространственной координаты \hat{x} , так и вдоль временной координаты x_0 . Вдоль \hat{x} измеряется пространственная протяженность импульса ψ , а вдоль x_0 - его временная протяженность. Разумно полагать, что волновые движения вдоль \hat{x} и вдоль x_0 ортогональны и описываются волновыми функциями ψ_1 и ψ_2 , удовлетворяющими уравнениям

$$\frac{2ik_0}{c} (\psi_1)_{,\hat{t}} + (\psi_1)_{,\hat{x}\hat{x}} = 0,$$

$$\frac{2ik_0}{c} (\psi_2)_{,\hat{t}} + (\psi_2)_{,x_0 x_0} = 0,$$

так что $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2$.

Используя такую точку зрения, заметим, что проведенный выше анализ основывался на описании волнового движения посредством только первого из этих уравнений, в котором полагалось $\hat{t} = t, \psi_1 = \psi$.

Из свойства одинаковой формы уравнений относительно ψ_1 и ψ_2 следует, что в случае эквивалентных начальных условий они будут иметь эквивалентные решения. Ниже воспользуемся этим свойством, предположив, что исходный гауссов импульс ψ_2 такой же, как и исходный гауссов импульс ψ_1 .

Понятие резонансов поля ψ_2 вводится аналогично понятию резонансов поля ψ_1 .

Система точек-резонансов в плоскости (\hat{x}, x_0) тогда будет иметь вид, изображенный на рис. 17.

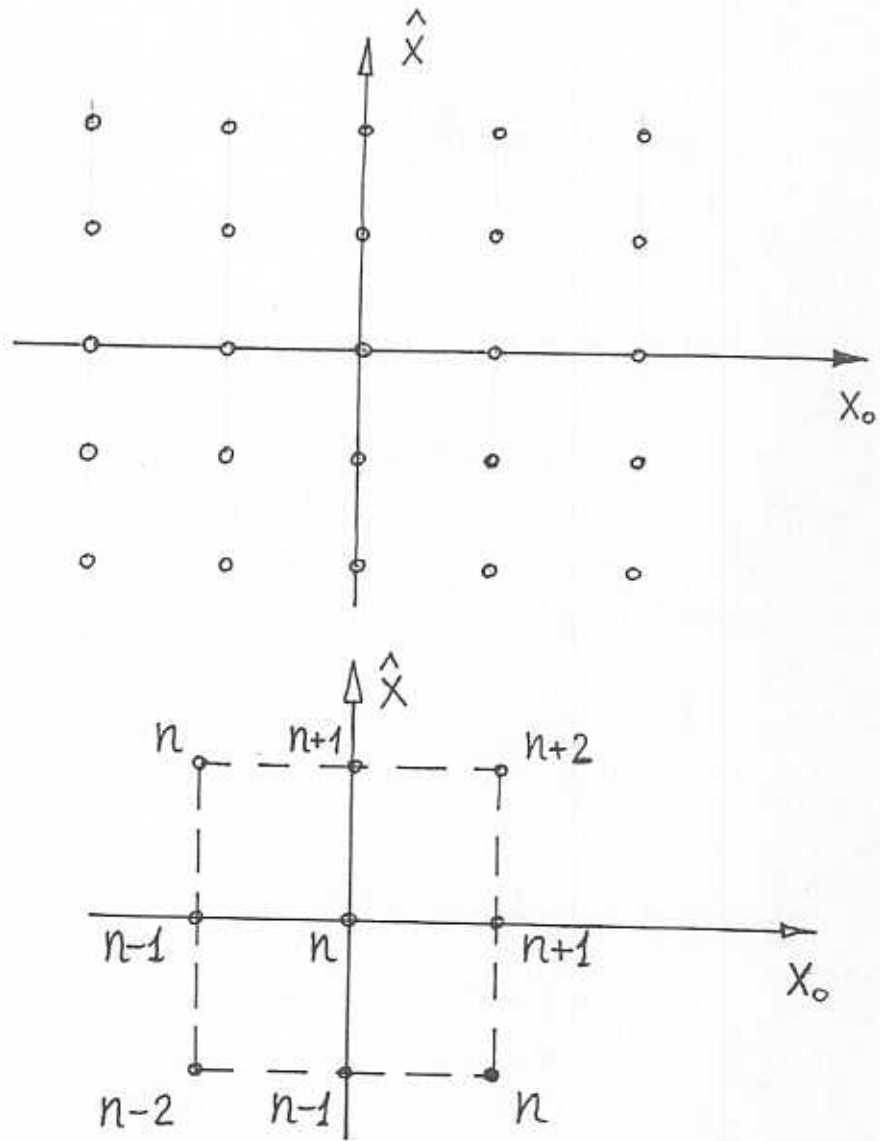


Рис. 17.

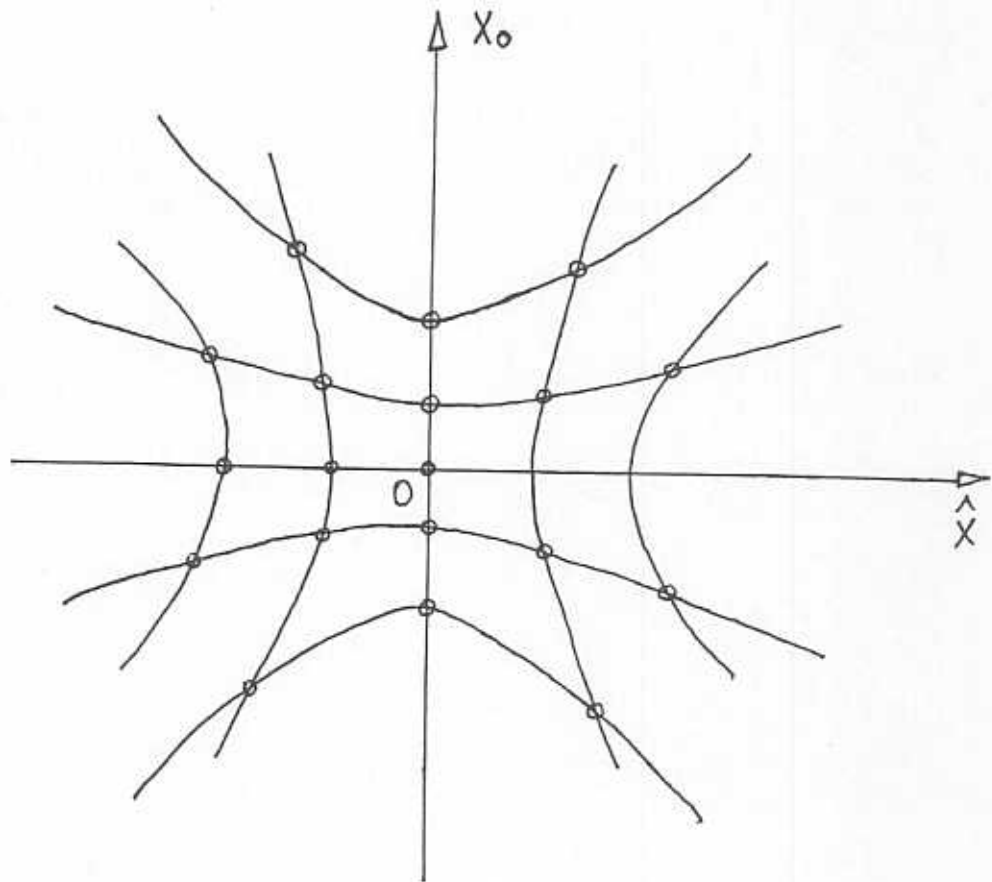
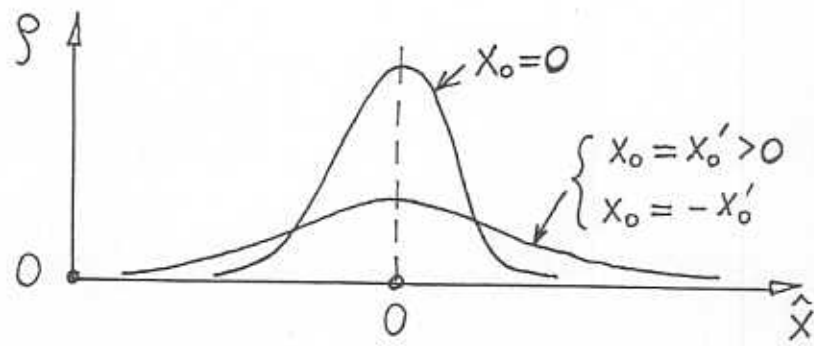
Если принять во внимание свойство растяжения контура гауссова импульса при удалении от его центра $\xi = 0$ как в пространственном, так и во временном отношении, то геометрия расположения точек-резонансов на плоскости (\hat{x}, x_0) изменится. Это показано на рис. 18.

Совершим переход от плоскости (\hat{x}, x_0) к плоскости (\hat{x}, ct) . Для этого необходимо установить связь масштабов δx_0 и $\delta(ct)$. Введем понятие фазовой скорости $v_{\text{фт}}$ временной волны:

$$v_{\text{фт}} = \frac{\omega_t}{\kappa_t} = \frac{c\kappa_t^2}{2k_0\kappa_t} = \frac{c\kappa_t}{2k_0}.$$

С другой стороны,

$$v_{\text{фт}} = \frac{dx_0}{dt}.$$



Начало отсчета \hat{x} и x_0 совпадает с центром импульса.

Рис. 18.

Из соотношения

$$\frac{1}{\delta x_0} \frac{dx_0}{dt} = \frac{1}{\delta t}$$

и данных определений $v_{фт}$ следует искомая связь:

$$\delta(ct) = \frac{2k_0}{\chi_t} \cdot \delta x_0.$$

Индукцированная этим соотношением геометрия системы точек-резонансов на плоскости (\hat{x}, ct) в момент времени $\hat{t} = \frac{k_0 a^2}{c}$ изображена на рис. 19.

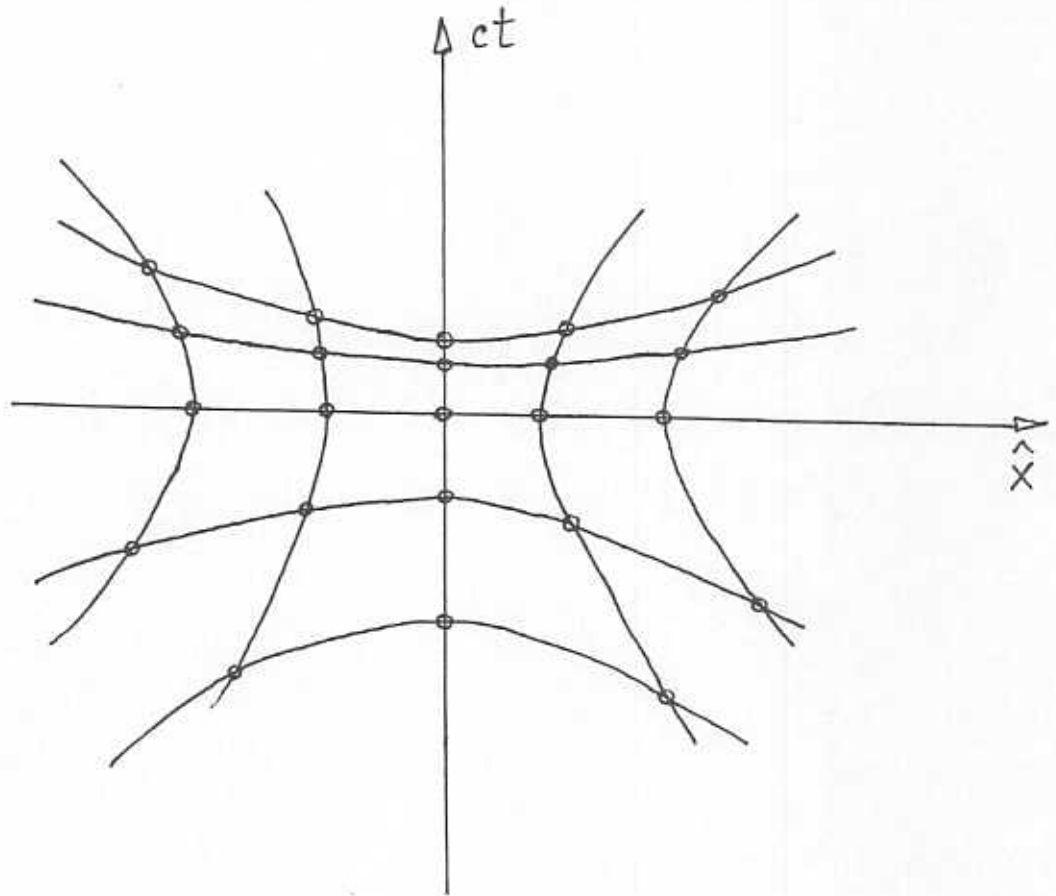


Рис. 19.

Таково представление о геометрии системы резонансных точек в плоскости (\hat{x}, ct) .

5.9. Размеры и формы областей взаимодействия полей ψ и $\{W_n\}$ в плоскости (\hat{x}, ct) на начальном этапе движения.

Минимальные размеры областей взаимодействия полей ψ и $\{W_n\}$ в плоскости (\hat{x}, ct) определяются следующим образом.

Вдоль координаты \hat{x} такой размер равен 2ℓ , а вдоль координаты $ct \rightarrow ct_n = \frac{2\ell c}{v_n}$, где $v_n = \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{\pi c n}{2\ell k_0}$. Отсюда

$$ct_n = \frac{4\ell^2 k_0}{\pi n}.$$

Геометрия областей взаимодействия полей в плоскости (\hat{x}, ct) на начальном этапе движения изображена на рис. 20.

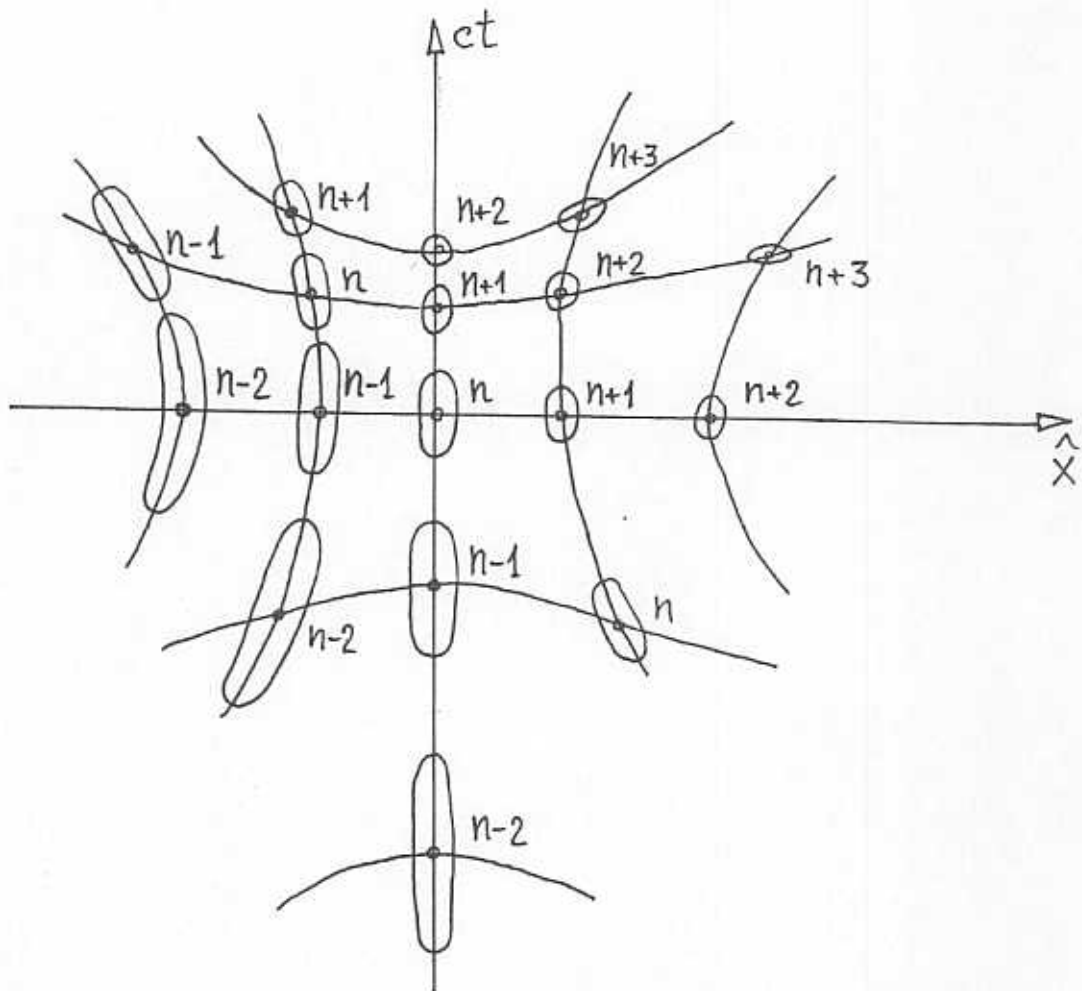


Рис. 20.

Видно, что низшие моды имеют большую площадь взаимодействия.

Вследствие пространственного и временного дисперсионного эффекта размеры областей взаимодействия на плоскости (\hat{x}, ct) в процессе движения импульса ψ растягиваются как вдоль \hat{x} , так и вдоль ct .

5.10. Движение областей возмущения поля ψ на плоскости (\hat{x}, ct) во времени \hat{t} с учетом образования новых резонансов.

Проведенный выше анализ позволяет изобразить движение областей возмущения поля ψ на плоскости (\hat{x}, ct) во времени \hat{t} с учетом образования новых резонансов. Это сделано на рис. 21.

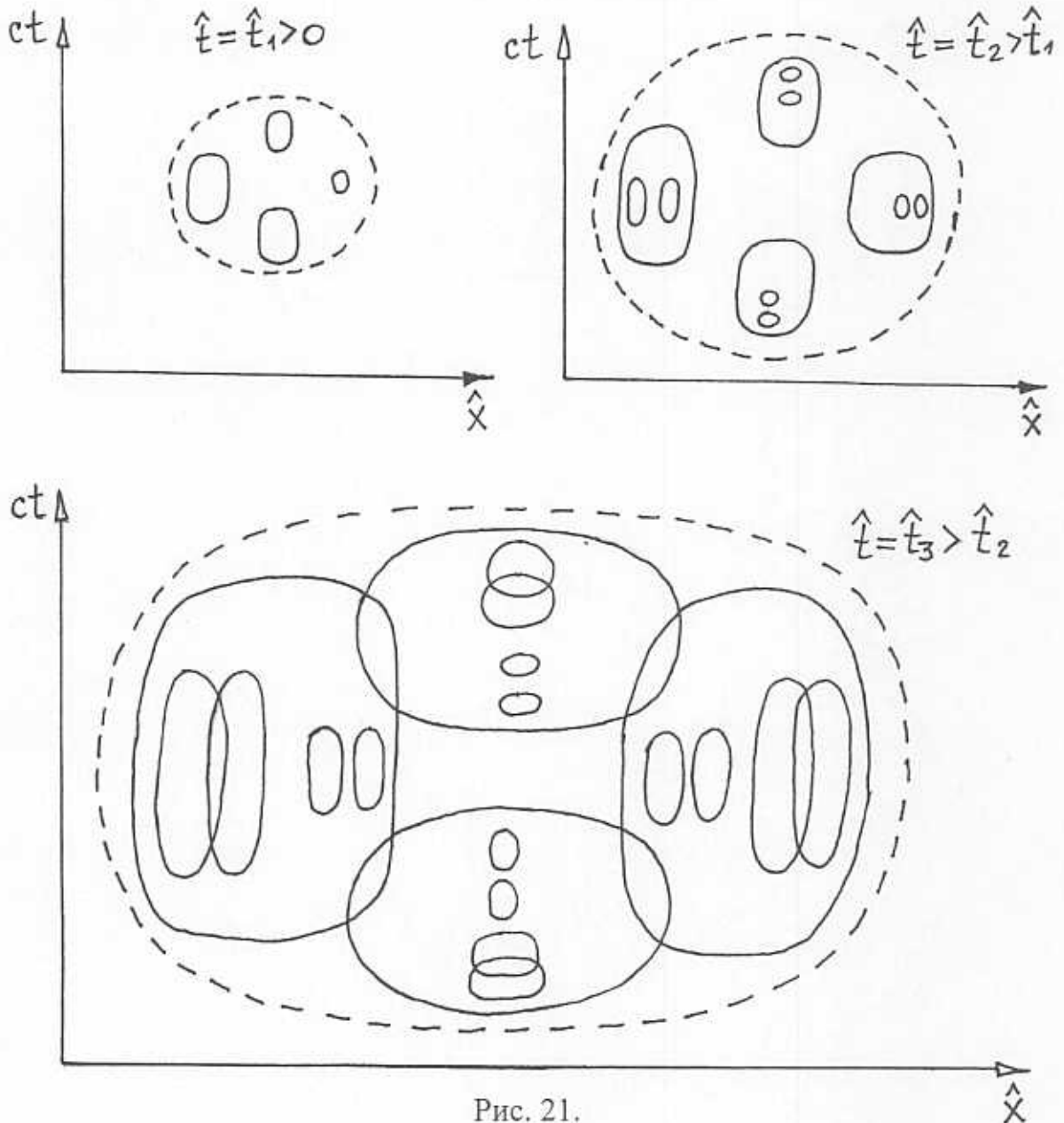


Рис. 21.

Из этого рисунка видно, что в процессе движения во времени \hat{t} внутри сначала выделенных четырех областей возмущения поля ψ , вследствие проявления дифракционного эффекта, образуются новые области взаимодействия и возмущения.

На рис. 21 также показано, как во времени \hat{t} происходит дисперсионное растяжение областей возмущения и их перекрытие.

5.11. Переход к задаче с непрерывным источником шумового поля.

Выше мы продемонстрировали метод решения проблемы возбуждения модовой структуры поля $\{W_n\}$ из шума ψ , который задавался сначала гауссовым импульсом. В основе проведенного анализа фигурировал элементарный физический полевой объект – гауссов импульс, свойства которого хорошо известны. На практике, однако, представляют интерес более сложные модели шумового поля ψ , например, шумовое поле от непрерывного источника. Движение амплитуды ρ такого поля в переменных (\hat{x}, ct, \hat{t}) изображено на рис. 22.

Отметим, что решения проблемы с этой и другими моделями шумового поля ψ не содержат принципиально новых физических эффектов, по сравнению с физическими эффектами, уже рассмотренными нами выше. Такие решения представляют интерес только в техническом, но не в физическом отношении. Все эти решения находятся методом, указанным выше, но для нас они интереса не представляют.

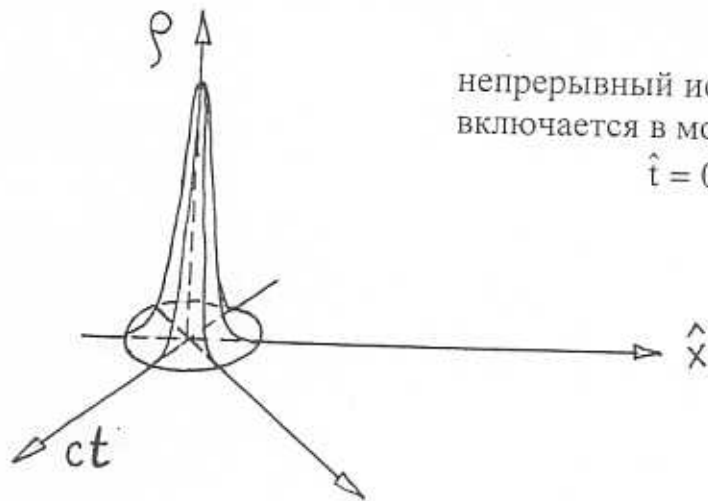
5.12. Замечания к п. 5.

В п. 5 были рассмотрены два метода оценки характерного времени T возбуждения мод в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Оба метода основывались на модели сосредоточенной колебательной системы. В первом методе использовалась квантовомеханическая модель двухуровневой системы. Ее недостатком является неопределенность начального состояния колебательной системы. Тем не менее, оказалось возможным оценить нижнее значение T :

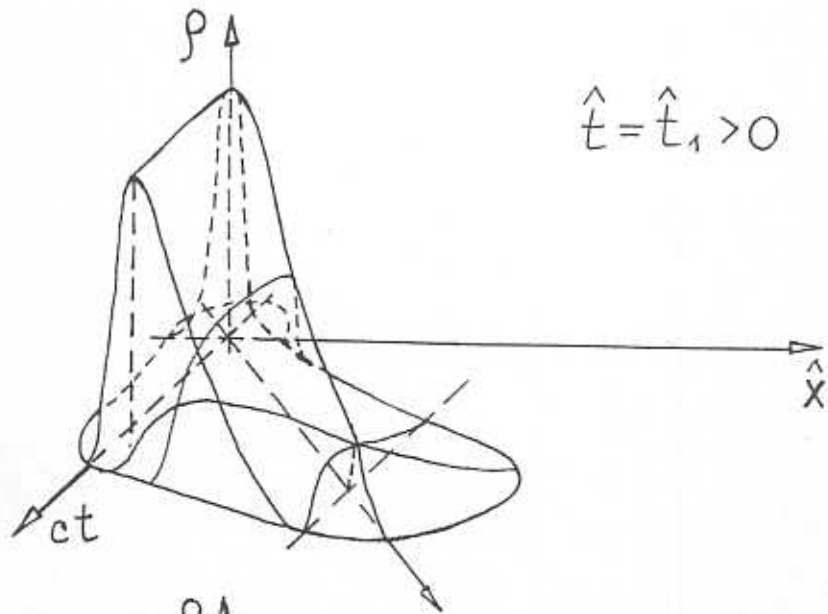
$$T > \frac{2l}{v_q} = \frac{4k_0 l^2}{\pi c q} \sim 10^{-5} \text{ с.}$$

Второй метод основывался на классической модели связанных гармонических осцилляторов. В линейном приближении был получен результат

непрерывный источник поля ψ
включается в момент времени
 $\hat{t} = 0$



$\hat{t} = \hat{t}_1 > 0$



$\hat{t} = \hat{t}_2 > \hat{t}_1$

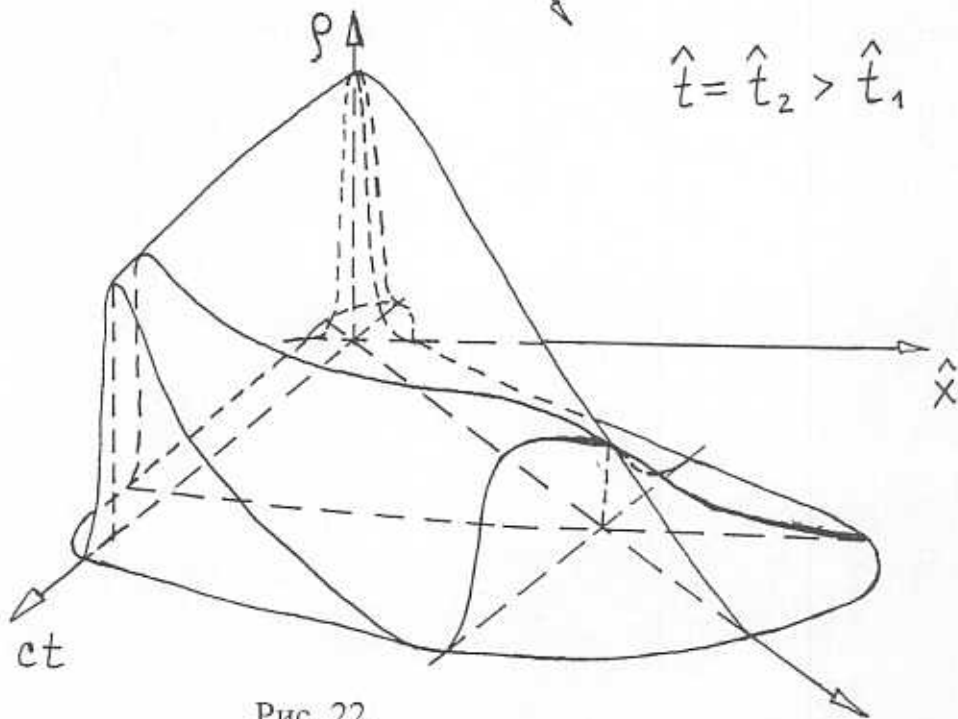


Рис. 22.

$$T = \frac{8\pi k_0 \ell^2}{c} \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ с},$$

т.е. время T оказалось приблизительно на два порядка больше периода низшего по энергии собственного колебания поля W .

Далее, в рамках модели сначала короткого гауссова импульса ($a < \ell$) шумового поля, движущегося в потенциальной яме, было установлено, что необходимые условия для возбуждения мод возникают не ранее, чем через промежуток времени $(k_0 a^2 / c)$ с момента начала движения импульса ψ .

Далее было замечено, что максимальная эффективность возбуждения мод имеет место при условии

$$\frac{\pi a}{\ell} < 1,$$

т.е. при достаточно коротком исходном гауссовом импульсе.

Затем было установлено, что учет дифракционного эффекта шумового поля в пространственной области резонансного взаимодействия полей приводит к образованию в этой области новых резонансов и соответствующих им областей резонансного взаимодействия. В процессе движения количество резонансов лавинообразно возрастает, причем возбуждение мод $\{ W_n \}$ происходит через несколько различных резонансных областей.

Учет этого эффекта приводит к ускорению процесса возбуждения и накачки мод. Следовательно, его длительность может быть короче времени

$$T = \frac{8\pi k_0 \ell^2}{c} \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Далее следует заметить, что при переходе к глобальной формулировке проблемы в пространстве-времени (\hat{x}, ct, \hat{t}) количество N резонансов становится приблизительно равным N^2 .

Оказалось также, что при отсутствии учета взаимодействия между полями пространственно-временные резонансные области у низших по энергии мод больше, чем у высших.

Было замечено, что физическое содержание рассматриваемых эффектов не меняется при переходе к другим моделям шумового поля, например, к модели с непрерывным источником шумового поля.

В заключение заметим, что рассмотренные в п. 5 конфигурации полей в $(1+2)$ -пространстве-времени (\hat{x}, ct, \hat{t}) сводятся к обычно фигурирующим в физике конфигурациям полей в (x, ct, \hat{t}) внутри потенциальной ямы протяженностью ℓ путем свертки координаты \hat{x} с периодом 2ℓ и соответствующего закона сложения-вычитания полей.

6. Общие замечания и основной вывод.

В данной статье сделана попытка выйти за пределы круга традиционно используемых сейчас методов численного анализа процесса формирования поперечной волновой структуры поля излучения в лазерных открытых резонаторах. В основе проведенного нами анализа проблемы лежит аналитический метод исследования. Он приближенный, но содержит наиболее важные физические черты изучаемого объекта. Важно отметить, что некоторые из них, порой, трудно обнаружить при традиционном численном решении проблемы. С этой точки зрения наш метод имеет значительные преимущества. При изучении процесса движения волновых полей в $(1+2)$ -пространстве-времени (\hat{x}, ct, \hat{t}) его достоинства бесспорны.

Одно из важнейших замечаний проведенного выше исследования заключается в следующем. Было установлено, что процесс возбуждения поперечных мод поля излучения в резонаторе шумовым полем обусловлен проявлением свойств двух физических эффектов шумового поля – дифракционным и дисперсионным. Отметим, что оба эти эффекта трактовались нами как нелинейные волновые эффекты, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Важно указать на то, что оба эти эффекта в предложенной нами трактовке фигурируют в теории классических волновых полей и отсутствуют в теории квантованных волновых полей.

Тем доказано следующее положение, являющееся основным выводом проведенного выше исследования.

На современном этапе развития теории поля лазерного излучения нельзя отдать предпочтения классическим или квантовым методом его изучения. Каждый из этих методов обладает своими преимуществами и недостатками.

Достоинства классического метода исследования волнового поля лазерного излучения были продемонстрированы в данной статье.

Необходимо понимать, что использование только одного, современного, квантово-полевого метода исследования в физике поля лазерного излучения неизбежно приведет к неполноте физического смыслового восприятия свойств этого излучения.

7. Заключение

Материал изложенной выше статьи полезен в следующих отношениях.

1). Он содержит перечисление физических эффектов, которые необходимо принимать во внимание при построении статистических пространственно-временных моделей движения поперечной волновой структуры поля лазерного излучения в резонаторе. С этой точки зрения он интересен при изучении как импульсного, так и непрерывного режимов генерации лазерного излучения.

2). Он представляет интерес с методической точки зрения. Используемый в данной статье метод исследования проблемы не имеет аналогов в известной нам научной литературе по лазерной физике.

3). Он полезен с педагогической точки зрения.

Проблема рассмотрена в рамках представлений классической волновой механики. Это позволило просто, наглядно и надежно установить ее физическое смысловое содержание, полезное для студентов.

4). Проведенный в статье анализ демонстрирует достоинства использования при решении поставленной проблемы физического аппарата теории классических волновых полей. Использование этого аппарата позволило установить в рассмотренной проблеме фундаментальное значение дифракционного и дисперсионного эффектов, трактуемых в терминах нелинейных дифференциальных уравнений. Без учета этих эффектов разумное решение проблемы было бы невозможным. Отметим, что в физическом аппарате квантовой теории поля понятия о таких эффектах отсутствуют. Физическое существо проблемы в этом аппарате формулируется более абстрактным образом, что является его существенным недостатком, по крайней мере, в отношении к рассматриваемой проблеме.

5). Простота и глубина физической трактовки рассмотренного явления позволяют рекомендовать ее для дальнейших использований в лазерной физике.

6). Предложенный нами в данной статье физический метод описания процесса возбуждения собственных колебаний волнового поля с уровня шумового поля, кроме лазерной физики, имеет более широкую область применений. Его можно использовать при анализе процесса возбуждения собственных колебаний поля в резонаторах другой физической природы (акустических резонаторах, ядерных реакторах и т.д.).

7). Оценка характерного времени $T \sim 2 \cdot 10^{-4}$ с возбуждения поперечных мод поля излучения в резонаторе, сделанная в данной статье, имеет очень важное значение. Особенно велико ее значение в отношении импульсных лазеров, например, эксимерных. В таких лазерах время радиационного распада верхнего уровня лазерного перехода молекулы имеет порядки $\tau \sim 10^{-9} \div 10^{-6}$ с $\ll T$. Поперечные моды излучения за такие короткие времена не успевают возбудиться. По этой причине движение поперечной структуры

поля излучения в таких лазерах в значительной мере случайно и должно изучаться методами статистической волновой механики.

Поскольку, по указанной причине, поддерживать значительное заселение верхнего лазерного уровня эксимерных молекул на протяжении $2 \cdot 10^{-4}$ с трудно (если, вообще, возможно?), то когерентная составляющая поперечной структуры пучков излучения эксимерных лазеров должна иметь плохое качество.

Впрочем, исключением в этой ситуации является случай поля в устойчивом конфокальном резонаторе с предельно малым поперечным размером гауссова пучка излучения в нем. Тогда $T \sim 10^{-7}$ с.

Такие же замечания относятся к азотному лазеру ($\tau \sim 40$ нс) и к лазеру на электронном переходе полосы Ангстрема молекулы CO ($\tau \sim 20$ нс).

В данной публикации заложены основы для построения физически корректных моделей описания пространственно-временных статистических свойств поперечной структуры поля излучения в резонаторах таких лазеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. «Quantum Optics», ed. by R.J.Glauber, Academic Press, N.Y.(1969).
2. H.Haken. «Light». Volume 2. «Laser Light Dynamics». North-Holland Physics Publishing. Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo (1985).
3. P.A.M.Dirac. «Lectures on Quantum Field Theory». Published by Belfer Graduate School of Science Yeshiva University, New York (1967).
4. W.E.Lamb, Jr. «Theory of an Optical Maser». Phys. Rev., 134, № 6A, A1429-A1450 (1964).
5. H.Kogelnik, W.W.Rigrod. «Visual Display of Isolated Optical-Resonator Modes». Proc. IRE (Correspondence), 50, p. 220, February (1962).
6. H.Kogelnik, T.Li. «Laser Beams and Resonators». Appl. Opt., 5, № 10, 1550-1567 (1966).
7. Дж. В.Стретт (Лорд Рэлей). «Теория звука», ГИТТЛ, М., 1, 326-370 (1955).
8. А.Н.Логунов. «Физические основания симметричного исследования конфигураций поля пучков лазерного излучения в вакууме». Препринт ФИАН, № 17 (2005).
9. H.Lamb. «The Dynamical Theory of Sound». Second Edition. London, Edward Arnold and Co. (1931).
10. A.G.Fox, T.Li. «Resonant Modes in a Maser Interferometer». Bell Syst. Tech. J, 40, № 2, 453-488 (1961).
11. D.B.Rensch, A.N.Chester. «Iterative Diffraction Calculations of Transverse Mode Distributions in Confocal Unstable Laser Resonators». Appl. Opt. 12, № 5, 997-1010 (1973).
12. A.N.Chester. «Three-Dimensional Diffraction Calculations of Laser Resonator Modes». Appl. Opt. 12, № 10, 2353-2366 (1973).
13. D.B.Rensch. «Three-Dimensional Unstable Resonator Calculations with Laser Medium». Appl. Opt. 13, № 11, 2546-2561 (1974).
14. A.E.Siegman, E.A.Sziklas. «Mode Calculations in Unstable Resonators with Flowing Saturable Gain. 1. Hermite-Gaussian Expansion». Appl. Opt. 13, № 12, 2775-2792 (1974).
15. E.A.Sziklas, A.E.Siegman. «Mode calculations in unstable resonators with flowing saturable gain. 2: Fast Fourier transform method». Appl. Opt. 14, № 8, 1874-1889 (1975).
16. A.Einstein. «Generalization of Theory of Gravitation». The Meaning of Relativity, fourth edition. Princeton (1953).
17. N.F.Mott, H.S.W.Massey. «The Theory of Atomic Collisions». Second Edition, Oxford (1949).
18. S. Flügge. «Practical Quantum Mechanics. 1.» Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1971).
19. E.Fermi. «Notes on Quantum Mechanics». A Course Given by Enrico Fermi at the University of Chicago. The University of Chicago Press (1961).