

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ**



*имени  
П. Н. Лебедева*

**Ф И А Н**

ПРЕПРИНТ

Д.В. БАРИШПОЛЬЦЕВ, С.Ю. ГУСЬКОВ,  
Е.М. ИВАНОВ, П.С. КОТЕГОВ, В.Б. РОЗАНОВ

**33**

**ВЫХОД ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ СФЕРИЧЕСКОЙ  
ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ – АНАЛИТИЧЕСКИЕ  
МОДЕЛИ РАСЧЁТА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЯРКОСТИ  
ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ОБЪЕКТОВ  
РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ**

МОСКВА 2006

## **Аннотация**

Получены аналитические зависимости для вероятности выхода фотона с поверхности от оптической толщины, а также спектральной яркости для однородной плазмы сферической геометрии, с учётом поглощения излучения.

Вероятность выхода фотона и спектральная яркость найдены также для плазмы с цилиндрической геометрией и плазмы в виде сферического слоя. Данные зависимости получены в интегральной форме, найти их аналитическую форму т.е. вычислить интегралы, не удаётся, однако они могут быть найдены численно.

Получена формула для спектральной яркости в случае излучения двух плоских слоёв с отличными друг от друга составом, толщиной, термодинамическими и спектральными характеристиками.

Проведён сравнительный анализ выражений для сферического и плоского случаев. Установлено при каком соотношении размеров сферическим случаем можно аппроксимировать плоский. Были установлены критерии применимости и точности такого приближения.

В качестве примеров применения полученных выражений были рассчитаны и построены спектры излучения плазмы алюминия, углерода, меди и кислорода.

## 1. Введение

В настоящее время большое внимание уделяется лазерной плазме, как источнику с определённым, в зависимости от решаемой задачи, спектром излучения. Примеры такого использования лазерной плазмы многочисленны. Определённые надежды связаны с развитием вакуумной ультрафиолетовой литографии (ВУФ– литография) [1]. В данной технологии в качестве рабочего вещества предполагается использовать плоские мишени из Sn, In твердотельной плотности или низкоплотные ( $10^{-2}$  г/ см<sup>3</sup>) пористые мишени с разной микроструктурой с добавками указанных элементов. После облучения мишени лазерным импульсом, с определённо подобранными характеристиками излучения, образуется лазерная плазма, в спектре излучения которой присутствуют линии с  $\lambda = 13.5$  нм (в случае использования олова в качестве вещества мишени) или  $\lambda = 14.4$  нм (индий). Эти длины волн хорошо отражают многослойные зеркала на основе Si, Mo которые предполагается использовать в оптической части технологической установки. На пути создания ВУФ – литографии возникает достаточное количество задач, таких как достижения высокой мощности излучения в полосе частот, соответствующей хорошему отражению многослойных зеркал, определение параметров разлетающегося вещества мишени (дебриса) с целью его уменьшения для сохранения оптических частей, главным образом многослойных зеркал и других. Решение этих задач открывает перспективы в развитии микроэлектроники, связанные с возможностью создания при применении литографического процесса следующего поколения полупроводниковых устройств с характерными размерами формируемого рисунка  $< 40$  нм.

Другие возможности применения лазерной плазмы связаны с использованием её в качестве рентгеновского источника. Создание источников мягкого рентгеновского излучения (МРИ) с энергией квантов до  $\sim 500$  эВ, обеспечат в сочетании со строящими изображения оптическими элементами возможность микроскопии живых объектов на внутриклеточном уровне [2]. Такие источники найдут широкое применение в материаловедческих исследованиях в связи с бурным развитием в последнее время нанотехнологий и необходимостью измерения и контроля мелкомасштабных структур поверхностей и тонких плёнок с пространственным разрешением порядка  $10 - 20$  нм.

Использование рентгеновского излучения лазерной плазмы для сжатия термоядерных капсул. Термоядерную капсулу помещают в массивный конвертор цилиндрической формы, изготовленный из тяжелого металла (например, золота). Через входные отверстия на внутреннюю поверхность конвертора падают пучки мощного лазерного излучения, поглощаются и образуют плазму, которая излучает в рентгеновском диапазоне, сжимая таким образом капсулу [3].

Все эти примеры показывают широкие перспективы использования излучения лазерной плазмы. Однако, на пути их реализации возникает большое количество фундаментальных задач, требующих подробного исследования. Одной из них, является задача о распространении излучения лазерной плазмы различной конфигурации. Точное решение данной задачи требует совместного решения уравнений газодинамики, переноса излучения, расчета оптических характеристик вещества и пр. Всё это делает процесс расчета довольно долгим, трудоёмким и дорогостоящим. Найденные в данной работе спектральные яркости для различных конфигураций плазмы дадут возможность значительно упростить расчет. Как показывает практика, в основном лазерные мишени изготавливаются плоской, сферической либо цилиндрической геометрии. Известно точное решение распространения излучения в виде геометрии плоского слоя [4]. На основе представленной в работе аналитической модели расчета вероятности выхода фотона из плазмы заданной конфигурации, изложено также известное, но достаточно подробно не рассмотренное решение задачи о распространении излучения в случае сферической геометрии источника и получено точное аналитическое решение для данной задачи. Также рассмотрен вопрос распространения излучения в случае цилиндрической геометрии, сферического слоя и двух плоских слоёв.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим излучающее тело определённой формы и имеющее однородные или близкие к однородным по всему объёму: состав, температуру, плотность, и прочие характеристики. Пусть известны зависящие от них спектральная излучательная способность и коэффициенты поглощения для интересующих нас частот. Данные, использованные нами, были рассчитаны на основе столкновительно - радиационной модели [5,6], подробнее о ней будет рассказано ниже.

Необходимо найти, какая часть энергии, излучаемой на данной частоте, выходит за границы тела.

Мощность излучение спектрального состава  $d\nu$  испускаемого объёмом тела  $dV$  в малый угол  $d\Omega$  равна

$$dP_\nu = j_\nu dV d\Omega, \quad (1)$$

где  $j_\nu$  – спектральная излучательная способность вещества (т.е. плотность мощности излучения в единичном спектральном диапазоне  $\nu$ , излучаемая в единичный телесный угол; в рассматриваемом нами случае зависит только от частоты).

Для выхода излучения за границы тела, ему необходимо преодолеть определённый путь  $l$ . При прохождении участка этого пути  $dl$ , мощность излучения  $dP_\nu$  уменьшится на  $d(dP_\nu) = \kappa_\nu dP_\nu dl$ , где  $\kappa_\nu$  – коэффициент поглощения на данной частоте. Отсюда видно, что мощность спадает по экспоненте, и её значение при выходе из тела равно:

$$dP_{\nu l} = j_\nu dV d\Omega e^{-\kappa_\nu l} \quad (2)$$

Проинтегрировав (1) по объёму и телесному углу, получим полную мощность, излучаемую внутри тела на частоте  $\nu$ ; а проинтегрировав (2), получим полную мощность излучения, испускаемого с поверхности тела на той же частоте. Отношение этих двух мощностей даётся выражением:

$$W_\nu = \frac{\int \int_{V \Omega} j_\nu \exp(-\kappa_\nu l) d\Omega dV}{\int \int_{V \Omega} j_\nu d\Omega dV} \quad (3)$$

Заметим, что в поставленной задаче  $j_\nu$  и  $\kappa_\nu$  постоянны по всему объёму и при любом направлении распространения излучения, а путь  $l$  очевидно зависит как от положения  $\mathbf{r}$  объёма  $dV$  в теле, так и от направления излучения  $(\theta, \varphi)$ .

В дальнейшем вместо коэффициента поглощения  $\kappa_\nu$  мы будем пользоваться обратной ей величиной, пробегом излучения  $l_\nu$ . Напишем теперь (3) в новом виде:

$$W_\nu = \frac{\int \int_{V \Omega} j_\nu \exp\left(-\frac{l(r, \varphi, \theta)}{l_\nu}\right) d\Omega dV}{\int \int_{V \Omega} j_\nu d\Omega dV} = \frac{\int \int_{V \Omega} \exp\left(-\frac{l(r, \varphi, \theta)}{l_\nu}\right) d\Omega dV}{\int \int_{V \Omega} d\Omega dV} \quad (4)$$

Вид интеграла и способ его вычисления зависят только от функции  $l(\mathbf{r}, \varphi, \theta)$ , то есть от формы и размера излучающего тела и от расположения системы координат.

## 2.1. Столкновительно – радиационная модель расчета излучательной способности и коэффициента поглощения

В основе модели лежат следующие физические положения. Рассматривается однородная оптически прозрачная плазма с заданной температурой и плотностью. Плазма может быть как однокомпонентной так и состоящей из смеси ионов нескольких химических элементов. Также рассматривается случай наиболее приближенный к реальному: отсутствие ионизационного равновесия.

В области высоких температур, характерных для лазерной плазмы, основной вклад дают тормозные, рекомбинационные и линейчатые радиационные потери. Формула для расчетов спектральной излучательной

способности, т.е. плотности мощности излучения в единичном спектральном диапазоне в единичный телесный угол (размерность Вт см<sup>-3</sup> эВ стер<sup>-1</sup>), выглядит следующим образом [5,6]:

$$j_\nu = 5 \times 10^{12} \varepsilon^3 \left\{ \sum_Z \sum_m \sum_{n>m} N_Z^n \frac{g_m}{g_n} \sigma_{nm}^{bb}(\varepsilon) + \sum_Z \sum_{n,m} N_{Z+1}^n \sigma_{mn}^{fb}(\varepsilon, T_e) + \sum_Z N_i N_e \sigma_Z^{ff}(\varepsilon, T_e) \right\},$$

где  $\varepsilon = h\nu$  - энергия фотона;  $T_e$ - электронная температура (температура и энергия фотонов в кэВ);  $N_i$  и  $N_e$ -ионная и электронная концентрации;  $N_Z^n$  - населённость уровня  $n$  иона с зарядом  $Z$ ;  $g_m$  и  $g_n$ - статистические веса нижнего и верхнего уровней;  $\sigma_{mn}^{bb}(\varepsilon)$  - сечение поглощения в линии при переходе с уровня  $m$  на уровень  $n$ ;  $\sigma_{mn}^{fb}(\varepsilon, T_e)$ -эффективное сечение фоторекомбинации с уровня  $n$  иона кратности ионизации  $Z+1$  на уровень  $m$  иона кратности ионизации  $Z$ ;  $\sigma_Z^{ff}(\varepsilon, T_e)$  - эффективное сечение обратнотормозного поглощения. В случае плазмы сложного химического состава в вышеприведённой формуле необходимо также добавить суммирование по всем химическим элементам, входящим в состав смеси.

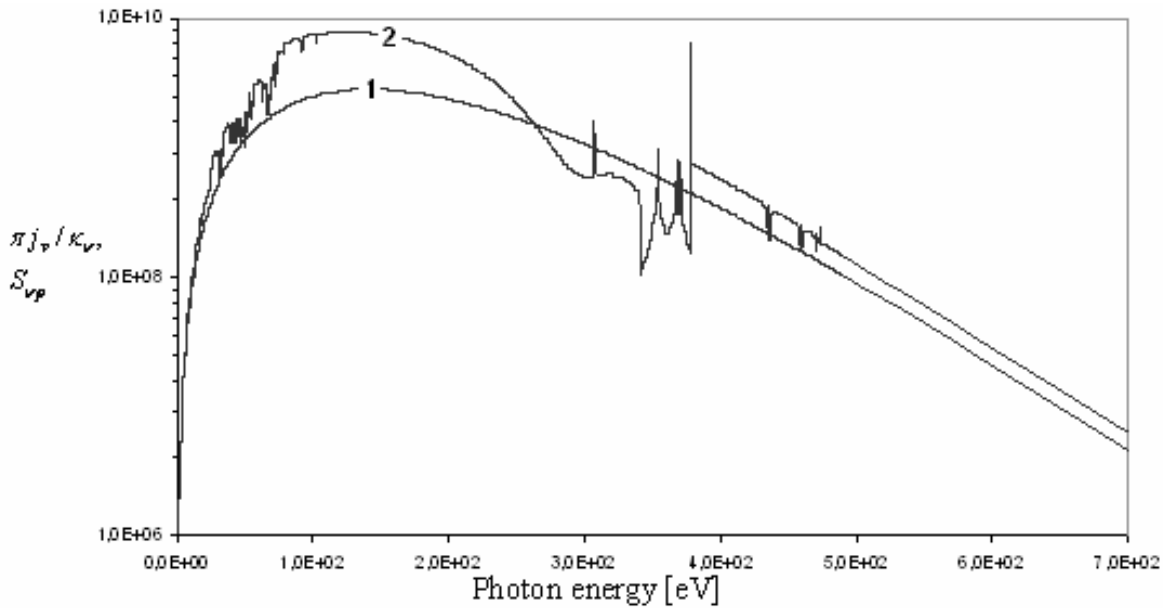
Для сечений свободно – свободных и свободносвязанных переходов использовались квазиклассические выражения Крамерса. Сечение поглощения в линии задаётся формулой

$$\sigma_{nm}^{bb}(\varepsilon) = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{nm} \Psi(\varepsilon), \text{ где } f_{nm} \text{ – сила осциллятора; } \Psi(\varepsilon) \text{ – контур спектральной}$$

линии, нормированный на единицу;  $m_e$  – масса электрона. Вычисленные с помощью данной модели излучательные способности и коэффициенты поглощения для плазмы Al, C, Cu, O представлены на рис.11, 13, 15, 17 соответственно.

Хорошей проверкой точности вычисленных коэффициентов поглощения и излучательной способности в условиях локального термодинамического равновесия (ЛТС) служит соотношение  $\pi j_\nu / \kappa_\nu = S_{vp}$ , где  $S_{vp}$  – спектральная яркость абсолютно чёрного тела. Проведём проверку на примере вычисленных значений для плазмы углерода

( $T = 50$  эВ,  $N_e = 4,2 \cdot 10^{21}$  см<sup>-3</sup>,  $\rho = 2 \cdot 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>). Результат представлен на рис.1.



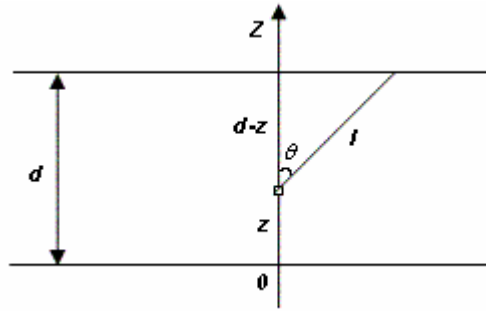
**Рис.1.**Графики зависимостей 1) спектральной яркости чёрного тела 2) отношения  $\pi j_\nu / \kappa_\nu$  от энергии фотона.

Видно, что график  $\pi j_\nu / \kappa_\nu$  не совсем совпадает с  $S_{\nu p}$ . Связано это с тем, что в данной модели коэффициент поглощения и спектральная излучательная способность считаются независимо друг от друга и для их счёта используются немного разные формулы для сечений переходов, соотношение  $\pi j_\nu / \kappa_\nu = S_{\nu p}$  нигде в модели явно не используется. Выход линий за спектральную яркость чёрного тела происходит потому, что контуры их считаются крайне приближённо без учёта эффектов влияния оптической толщины плазмы на профиль линии. Однако представленная модель, несмотря на все её недостатки даёт весьма хорошее согласие с экспериментальными данными и с результатами других моделей.

### 3. Излучающий плоский слой

Найдём величину  $W_\nu$  для излучающего плоского слоя толщины  $d$ . Для интегрирования по объёму введём декартовы координаты с осью  $z$ , перпендикулярной плоскости слоя. Полярный угол  $\theta$  направления распространения излучения будем отсчитывать от оси  $z$ , а азимутальный угол  $\varphi$  – от любой перпендикулярной ей оси (Рис.2). Тогда путь  $l$ , проходимый излучением, равен:

$$l(z, \theta) = \frac{d - z}{\cos \theta} \tag{5}$$



**Рис.2.** Схема к задаче об излучении плоского слоя.

При подстановке этого выражения в (4), отметим, что оба подынтегральных выражения не зависят от  $x, y$  и  $\varphi$ , поэтому интегрирование по этим переменным можно сократить. В результате:

$$W_v = \frac{\int_0^d \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{d-z}{l_v \cos \theta}} \sin \theta d\theta dz}{\int_0^d \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta dz} \quad (6)$$

Произведём замены:  $\mu = \cos \theta$ ,  $t = (d-z)/l_v$  и введём безразмерную оптическую толщину слоя  $x = d/l_v$ . После замен выражение упростится:

$$W_v = \frac{\int_0^x \int_0^1 e^{-\frac{t}{\mu}} d\mu dt}{\int_0^x \int_0^1 d\mu dt} = \frac{1}{x} \int_0^x \int_0^1 e^{-\frac{t}{\mu}} d\mu dt = \frac{1}{x} \int_0^1 \mu \left[ 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} \right] d\mu = \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{2} - \int_0^1 \mu e^{-\frac{x}{\mu}} d\mu \right]$$

В конечном выражении мы получили интеграл, который не считается аналитически, но после замены  $s = \mu/x$  его значение можно найти численно с любой заданной точностью:

$$W_v = \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{2} - x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} s e^{-\frac{1}{s}} ds \right] \quad (7)$$

Сравним формулу (7) с результатом полученным в задаче о плоском излучающем слое в книге Я. Б. Зельдовича и Ю. Б. Райзера [4]. Для спектральной яркости (т.е. количества энергии, выходящей в 1 сек с  $1 \text{ см}^2$  поверхности тела во всех направлениях) плоского слоя постоянной температуры в [4] получено следующее выражение:



$$S_v = \pi \cdot I_{vp} [1 - 2E_3(\tau_v)], \quad (8)$$

где  $I_{vp}$  – равновесная интенсивность излучения,  $\tau_v$  – оптическая толщина слоя (в наших обозначениях –  $x$ ), а  $E_3(z)$  – интегральная экспонента третьего порядка:

$$E_3(z) = \int_1^\infty e^{-zw} \frac{dw}{w^3} \quad (9)$$

В тех же обозначениях, энергия, выделяемая внутри слоя на единицу площади будет равна:  $4\pi \cdot I_{vp} \tau_v$ , и отношение удвоенной(у слоя две стороны) спектральной яркости к этой энергии будет иметь вид:

$$W_v = \frac{1}{\tau_v} \left[ \frac{1}{2} - \int_1^\infty \exp(-w\tau_v) \frac{dw}{w^3} \right] \quad (10)$$

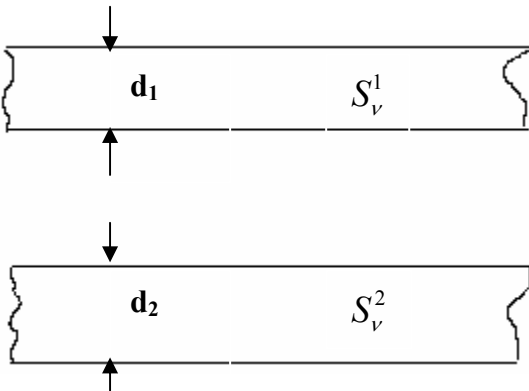
Поменяв переменную интегрирования на  $s = 1/w\tau_v$ , мы придём к выражению:

$$W_v = \frac{1}{\tau_v} \left[ \frac{1}{2} - \tau_v^2 \int_0^{\frac{1}{\tau_v}} s e^{-\frac{1}{s}} ds \right] \quad (11)$$

что совпадает с полученным ранее выражением (7) с точностью до обозначений.

#### 4. Суммарная спектральная яркость двух плоских слоев

Рассмотрим два плоских слоя толщины  $d_1$  и  $d_2$ , отделённых вакуумной прослойкой (рис.3).



**Рис.3.** Два плоских слоя толщины  $d_1$  и  $d_2$  отделённых друг от друга вакуумной прослойкой

В общем случае при различных толщинах, термодинамических и спектральных характеристиках слоёв, суммарная спектральная яркость  $S_v^\Sigma$  складывается из спектральной яркости верхнего слоя  $S_v^1$  и спектральной яркости

нижнего слоя  $S_v^2$  с учётом потери излучения в верхнем слое, без ограничения общности, рассматриваем излучение снизу вверх:

$$S_v^\Sigma = S_{vp}^{(1)} [1 - 2E_3(x_v^{(1)})] + 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta I_v^{(2)}(\theta) e^{-x_v^{(1)}/\cos \theta} d\theta, \quad (12)$$

где первое слагаемое  $S_v^1$ , а второе  $S_v^2$ ,  $I_v^{(2)}(\theta) = I_{vp}^{(2)} [1 - e^{-x_v^{(2)}/\cos \theta}]$  -интенсивность излучения у поверхности нижнего слоя в направлении образующей угол  $\theta$  с нормалью [4],  $e^{-x_v^{(1)}/\cos \theta}$  -учитывает потери излучения в верхнем слое. Подставляя явное выражение  $I_v^{(2)}(\theta)$  в (12) получим

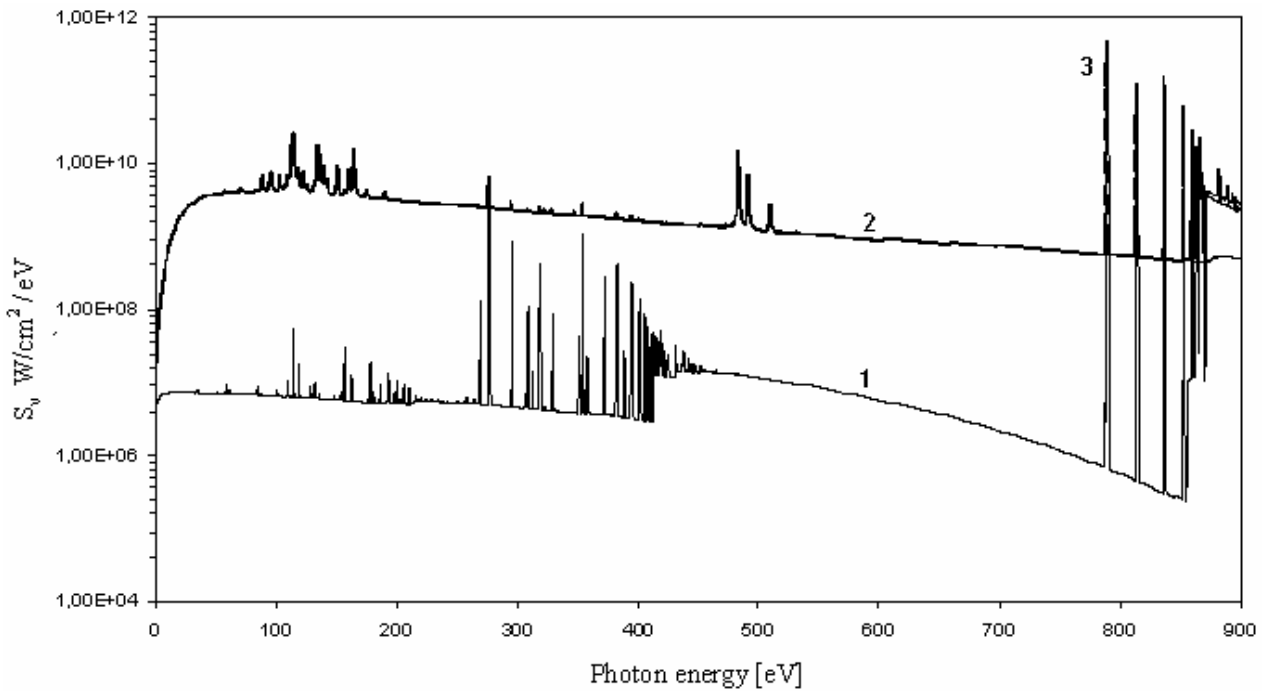
$$S_v^\Sigma = S_{vp}^{(1)} [1 - 2E_3(x_v^{(1)})] + 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta I_{vp}^{(2)} [1 - e^{-x_v^{(2)}/\cos \theta}] e^{-x_v^{(1)}/\cos \theta} d\theta$$

после замены  $y = 1/\cos \theta$ , приходим к следующему

$$S_v^\Sigma = S_{vp}^{(1)} [1 - 2E_3(x_v^{(1)})] + 2\pi I_{vp}^{(2)} \int_1^\infty \frac{1}{y^3} [1 - e^{-x_v^{(2)}y}] e^{-x_v^{(1)}y} dy. \text{ В результате } (I_{vp} = S_{vp} / \pi)$$

$$S_v^\Sigma = S_{vp}^{(1)} [1 - 2E_3(x_v^{(1)})] + 2S_{vp}^{(2)} [E_3(x_v^{(1)}) - E_3(x_v^{(1)} + x_v^{(2)})] \quad (13)$$

Рассмотрим пример: два плоских слоя толщиной 10 мкм, нижний слой плазма алюминия ( $T = 325$  эВ,  $N_e = 1.25 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$ ,  $\rho = 5 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$ ), верхний слой плазма меди ( $T = 320$  эВ,  $N_e = 2.339 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ,  $\rho = 1,055 \cdot 10^{-1} \text{ г/см}^3$ ) т.е алюминий светит через медь. Суммарная спектральная яркость изображена на рис. 4.



**Рис.4.** 1.Спектральная яркость одиночного слоя алюминия. 2. Спектральная яркость одиночного слоя меди. 3.Суммарная спектральная яркость меди и алюминия.

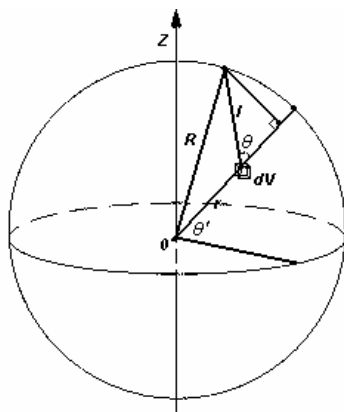
Рассмотрим частный случай, пусть слои имеют одинаковую толщину, одинаковый состав, температуру, плотность, спектральную излучательную способность и коэффициенты поглощения. Найдём  $S_v^\Sigma$ . Согласно (13)  $S_v^\Sigma = S_{vp} [1 - 2E_3(x_v)] + 2S_{vp} [E_3(x_v) - E_3(2x_v)] = S_v(2d)$  т.е. суммарная спектральная яркость двух одинаковых слоёв есть спектральная яркость слоя удвоенной толщины.

## 5. Излучающий шар

Найдём величину  $W_v$  для излучающего шара радиуса  $R$ . При интегрировании по объёму, воспользуемся сферической системой координат ( $dV = r^2 dr d\varphi' \cos \theta' d\theta'$ ). По направлению излучения также будем интегрировать в сферических координатах ( $d\Omega = d\varphi \cos \theta d\theta$ ), угол  $\theta$  будем отсчитывать от оси, проходящей через центр шара и объём  $dV$  (рис.5).

В этих координатах путь, проходимый излучением, равен:

$$l = -r \cdot \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 (1 - \cos^2 \theta)} \quad (14)$$



**Рис.5.**Схема к задаче об излучении шара.

Путь  $l$  зависит только от переменных  $r$  и  $\theta$ , следовательно при подстановке выражения для  $l$  в (4), интегралы  $\int_0^{2\pi} d\varphi$ ,  $\int_0^{2\pi} d\varphi'$  и  $\int_0^\pi \cos \theta' d\theta'$  можно вынести отдельно в числителе и знаменателе. Тогда они сокращаются и для  $W_v$  остаётся следующее выражение:

$$W_v = \frac{\int_0^R \int_0^\pi \exp\left[-\frac{-r \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 (1 - \cos^2 \theta)}}{l_v}\right] r^2 \sin \theta d\theta dr}{\int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta dr}, \quad (15)$$

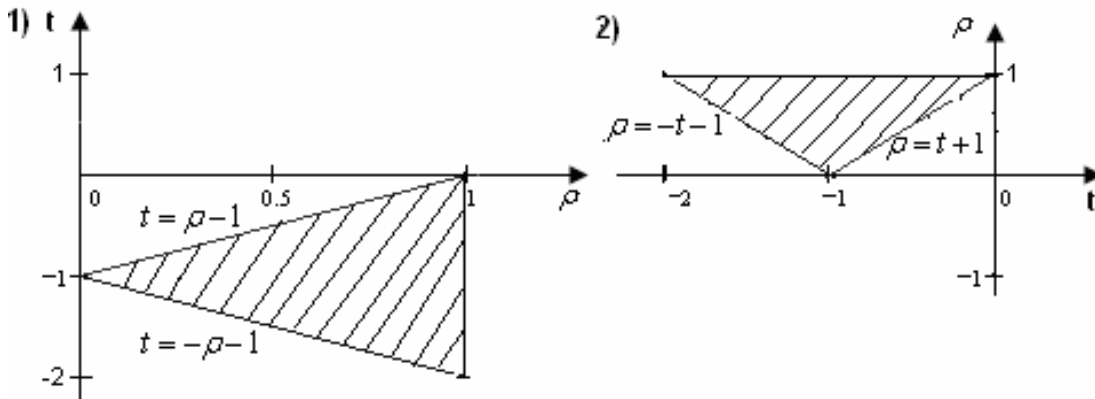
после замен:  $\rho = \frac{r}{R}$ ,  $\mu = \cos \theta$  и обозначения  $y = \frac{R}{l_v}$  ( $y$  – величина, аналогичная оптической толщине плоского слоя), обезразмерим интегралы и, вычислив нижний интеграл, получим:

$$W_v = \frac{3}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 \exp\left[-y\left(-\rho\mu + \sqrt{1 - \rho^2(1 - \mu^2)}\right)\right] \rho^2 d\mu d\rho,$$

вместо  $\mu$  введём переменную  $t = \rho\mu - \sqrt{1 - \rho^2(1 - \mu^2)}$ , интеграл упростится:

$$W_v = \frac{3}{4} \int_0^1 \int_{-\rho-1}^{\rho-1} e^{yt} \left(\rho + \frac{\rho}{t^2} - \frac{\rho^3}{t^2}\right) dt d\rho,$$

поменяем порядок интегрирования (рис.6):



**Рис.6** Замена порядка интегрирования 1) до 2) после (штриховая область – поверхность по которой проводится интегрирования)

$$W_v = \frac{3}{4} \int_{-1}^0 dt \int_{t+1}^1 e^{yt} \left(\rho + \frac{\rho}{t^2} - \frac{\rho^3}{t^2}\right) d\rho + \frac{3}{4} \int_{-2}^{-1} dt \int_{-t-1}^1 e^{yt} \left(\rho + \frac{\rho}{t^2} - \frac{\rho^3}{t^2}\right) d\rho.$$

Заметим, что подынтегральная функция  $e^{yt} \left(\rho + \frac{\rho}{t^2} - \frac{\rho^3}{t^2}\right)$  нечётна по  $\rho$  и её

интеграл в симметричных пределах  $\int_{-t-1}^{t+1} d\rho$  будет равен нулю. Поэтому мы

можем заменить пределы интегрирования с  $\int_{-t-1}^1$  на  $\int_{t+1}^1$  при этом два интеграла

можно будет совместить в один

$$W_v = \frac{3}{4} \int_{-2}^0 e^{yt} \int_{t+1}^1 \left( \rho + \frac{\rho}{t^2} - \frac{\rho^3}{t^2} \right) d\rho dt$$

после интегрирования по  $\rho$  интеграл заметно упростится

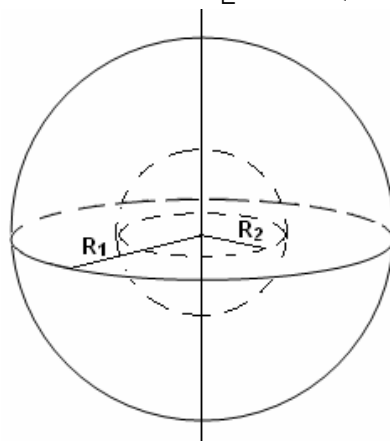
$$W_v = \frac{3}{16} \int_{-2}^0 e^{yt} (4 - t^2) dt$$

Полученный интеграл разбивается на два интеграла, первый из которых тривиален, а второй легко считается интегрированием по частям. В результате:

$$W_v = \frac{3}{8} \left( \frac{2}{y} - \frac{1}{y^3} + \frac{2}{y^2} e^{-2y} + \frac{1}{y^3} e^{-2y} \right) \quad (16)$$

Заменим  $y$  на  $x = 2y = \frac{2R}{l_v}$  и получим окончательный вид выражения:

$$W_v = 3 \left( \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} e^{-x} + \frac{1}{x^3} e^{-x} \right) = \frac{3}{x} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x} \right) \right] \quad (17)$$



**Рис.7.** Схема к задаче об излучении сферического слоя

В заключение данного пункта найдём вероятность выхода фотона из сферического слоя толщиной  $(R_1 - R_2)$ , где  $R_1$  – внешний радиус,  $R_2$  – внутренний (рис.7). Путь, проходимый фотоном точно такой же, как и в случае шара (14), изменяются только пределы интегрирования. Соответственно:

$$W_v^{(R_1-R_2)} = \frac{\int_{R_2}^{R_1} \int_0^\pi \exp \left( -\frac{-r \cos \theta + \sqrt{R_1^2 - r^2 (1 - \cos^2 \theta)}}{l_v} \right) r^2 \sin \theta d\theta dr}{\int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta dr} \quad (18)$$

после замен:  $\rho = \frac{r}{R_1}$ ,  $\mu = \cos \theta$  и обозначения  $k = \frac{R_1}{R_2}$ ,  $y = \frac{R_1}{l_v}$ , обезразмерим интегралы и, вычислив нижний интеграл, получим:

$$W_v^{(R_1-R_2)} = \frac{3}{2 \left(1 - \frac{1}{k^3}\right)^{\frac{1}{k}-1}} \int_0^1 \int_0^1 \exp \left[ -y \left( -\rho \mu + \sqrt{1 - \rho^2 (1 - \mu^2)} \right) \right] \rho^2 d\mu d\rho \quad (19)$$

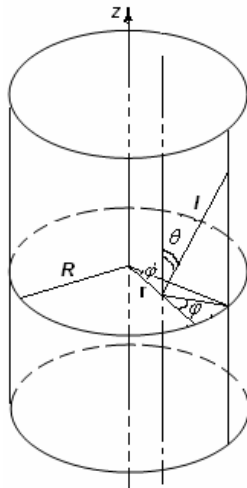
Получить аналитическую зависимость, как в случае шара или плоского слоя не удаётся. Данный интеграл может быть вычислен численно либо приближённо.

## 6. Излучающий цилиндр

Теперь найдём величину  $W_v$  для излучающего цилиндра радиуса  $R$  и неограниченного по высоте т.е по оси  $z$ . При интегрировании по объёму, воспользуемся цилиндрической системой координат ( $dV = r dr d\varphi dz$ ). По направлению излучения также будем интегрировать в цилиндрических координатах ( $d\Omega = d\varphi \cdot \sin \theta \cdot d\theta$ ) (рис.8).

В этих координатах путь, проходимый излучением, равен:

$$l = \frac{-r \cdot \cos \varphi + \sqrt{R^2 - r^2 (1 - \cos^2 \varphi)}}{\sin \theta} \quad (20)$$



**Рис.8.** Схема к задаче об излучении цилиндра.

Путь  $l$  зависит от переменных  $r$  и  $\theta$  и  $\varphi$ , следовательно при подстановке выражения для (20) в (4), интегралы  $\int_0^{2\pi} d\varphi'$  и  $\int_0^h dz$  (где  $h$  – некоторая высота цилиндра) можно вынести отдельно в числителе и знаменателе. Тогда они сокращаются и для  $W_v$  остаётся следующее выражение:

$$W_\nu = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp\left[-\frac{-r \cos \varphi + \sqrt{R^2 - r^2 (1 - \cos^2 \varphi)}}{l_\nu \sin \theta}\right] r \sin \theta d\theta d\varphi dr}{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin \theta d\theta d\varphi dr}, \quad (21)$$

сделаем замену:  $\rho = \frac{r}{R}$ , обозначим  $y = \frac{R}{l_\nu}$ , и вычислив нижний интеграл, получим:

$$W_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp\left[-\frac{y}{\sin \theta} \left(-\rho \cos \varphi + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \varphi}\right)\right] \rho \sin \theta d\theta d\varphi d\rho. \quad (22)$$

К сожалению точного аналитического решения, как это получается в случае плоского слоя или шара получить не удаётся. Это связано с тем, что интегрирование теперь приходится вести по двум углам  $\theta$  и  $\varphi$ . Однако данный интеграл может быть найден численно с любой заданной точностью.

## 7. Анализ и применение результатов

В предыдущих разделах мы получили выражения для вероятности выхода фотона из слоя вещества из шара и из цилиндра. С их помощью можно находить спектральную яркость излучения с этих двух типов тел. Для этого вероятность надо умножить на мощность, выделяемую в среде на единицу объёма (т.е. на  $4\pi \cdot j_\nu$ ) и на отношение объёма тела к его площади :

$$S_\nu^{(1)} = 4\pi j_\nu W_\nu^{(1)} \frac{d}{2} \text{ — для слоя,} \quad (23)$$

$$S_\nu^{(2)} = 4\pi j_\nu W_\nu^{(2)} \frac{R}{2} \text{ — для цилиндра} \quad (24)$$

$$S_\nu^{(3)} = 4\pi j_\nu W_\nu^{(3)} \frac{R}{3} \text{ — для шара.} \quad (25)$$

$$S_\nu^{(R_1-R_2)} = 4\pi j_\nu W_\nu^{(R_1-R_2)} \frac{R_1}{3} \left(1 - \frac{1}{k^3}\right) \text{ — для сферического слоя} \quad (26)$$

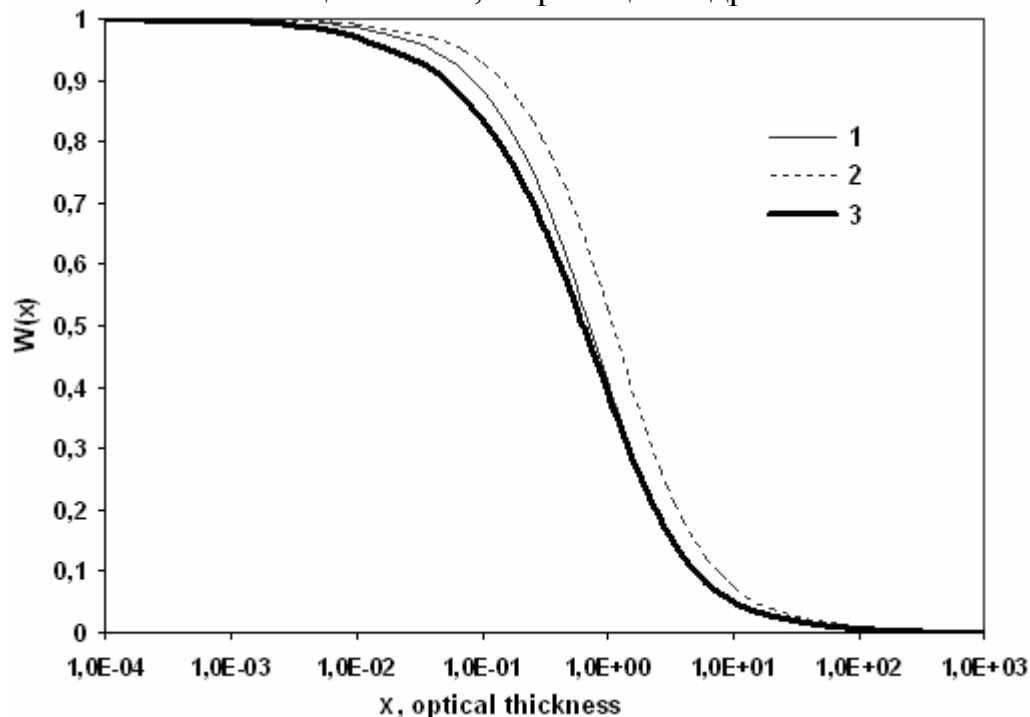
Рассмотрим поведение спектральной яркости при больших значениях оптической толщины. При больших  $x$  для шара и плоского слоя вероятности ведут себя как  $W_\nu^{(1)}(x) \approx \frac{1}{2x}$ ,  $W_\nu^{(3)}(x) \approx \frac{3}{2x}$ , для цилиндра результат получен

численно и представлен на рис.9. Спектральная яркость в этом случае равна:  $S_\nu = \frac{4\pi j_\nu l_\nu}{4}$ . Это соответствует ситуации, когда излучение выходит из тонкого

приповерхностного слоя толщины  $l_v$ , при этом половина излучения уходит внутрь тела, и половина из оставшегося поглощается до выхода из тела.

При малых  $x$  вероятности стремятся к единице, и это соответствует ситуации, когда излучение не поглощается в веществе и полностью выходит за его пределы.

На рис.9 представлены графики зависимости вероятности выхода фотона от оптической толщины слоя, шара и цилиндра.



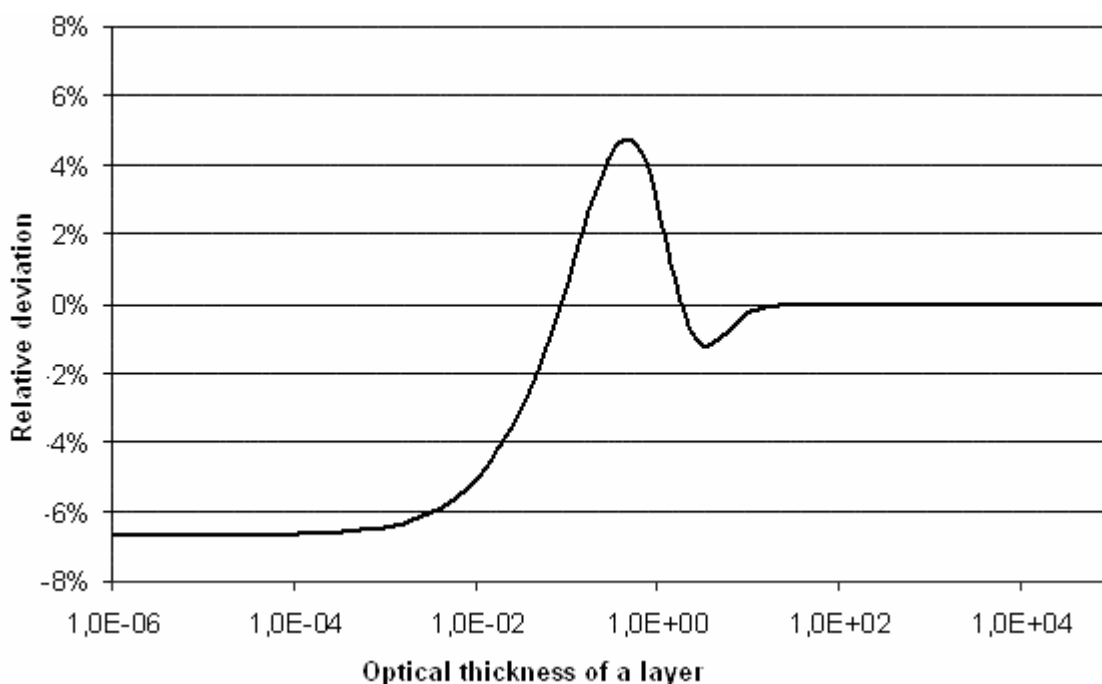
**Рис.9.** Зависимость вероятности выхода фотона из тела от оптической толщины. 1–цилиндр, 2–шар, 3– плоский слой.

Как правило, на практике требуется найти спектральную интенсивность излучения плоского слоя. Для этого приходится использовать формулу (7). В случае, если объём вычислений невелик, то интегрирование быстро проводится с помощью компьютера, но если данных очень много, и они разбросаны в широком диапазоне, то процесс вычисления замедляется. Вычисление же спектральной яркости шара по более простой формуле (25) происходит намного быстрее. Оказывается, что можно подобрать такой радиус шара, что спектральная яркость его будет ненамного отличаться от яркости слоя с такими же излучательными способностями и пробегами.

Было подобрано отношение:  $R = 1,4d$ , при котором спектральные яркости отличаются не более чем на 7%. Причём, при оптической толщине большей 0,1 значения практически совпадают.

Зависимость относительного отклонения приближенного значения от точного показана на рис.10.



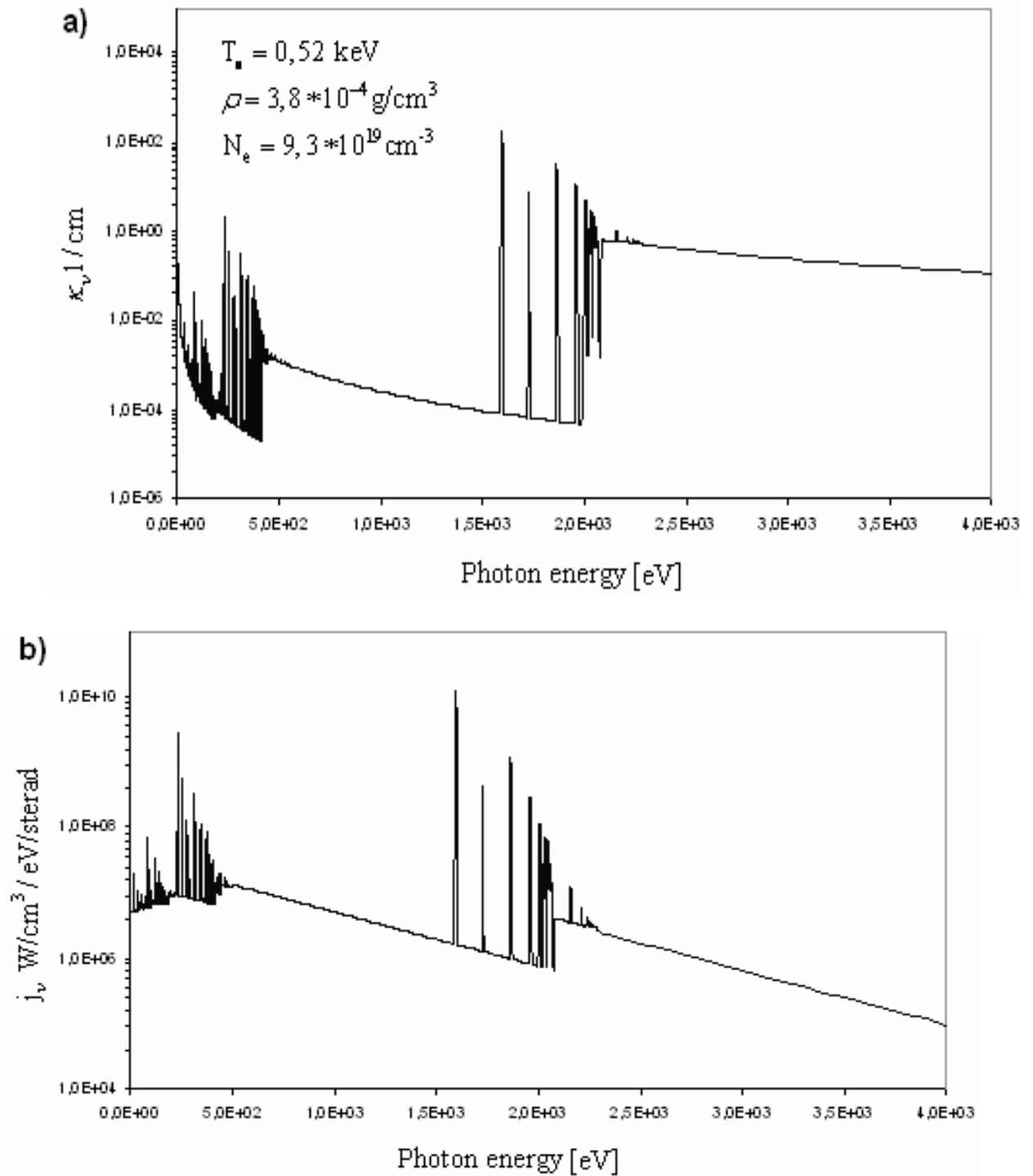


**Рис.10.** Отличие спектральной яркости излучения шара от яркости слоя.

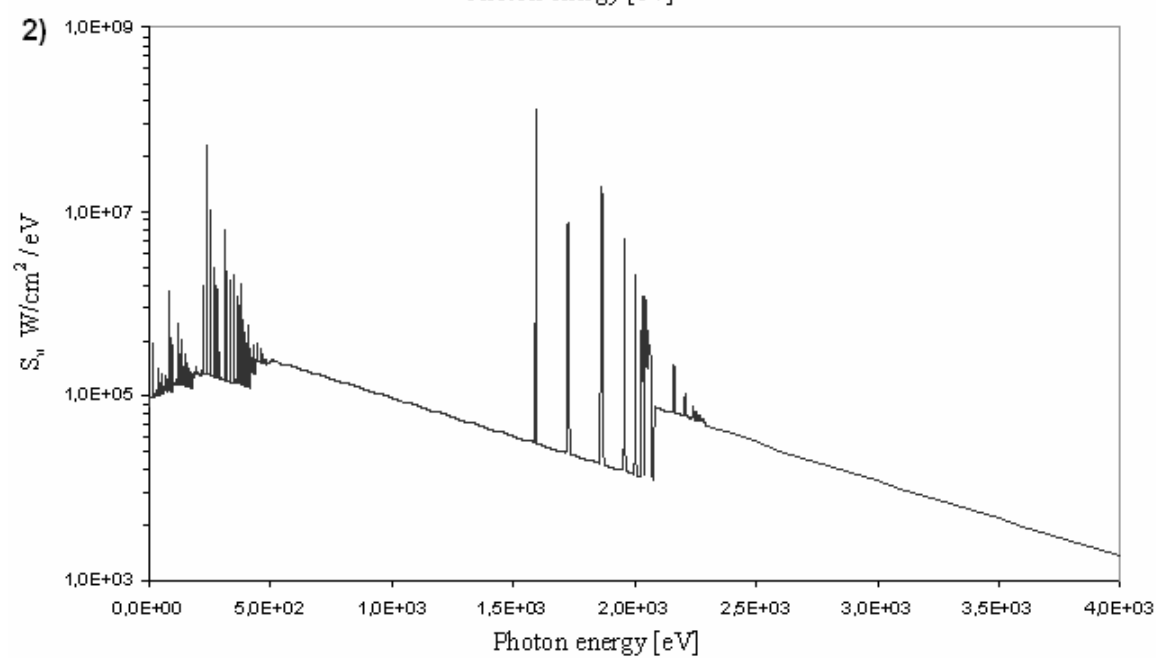
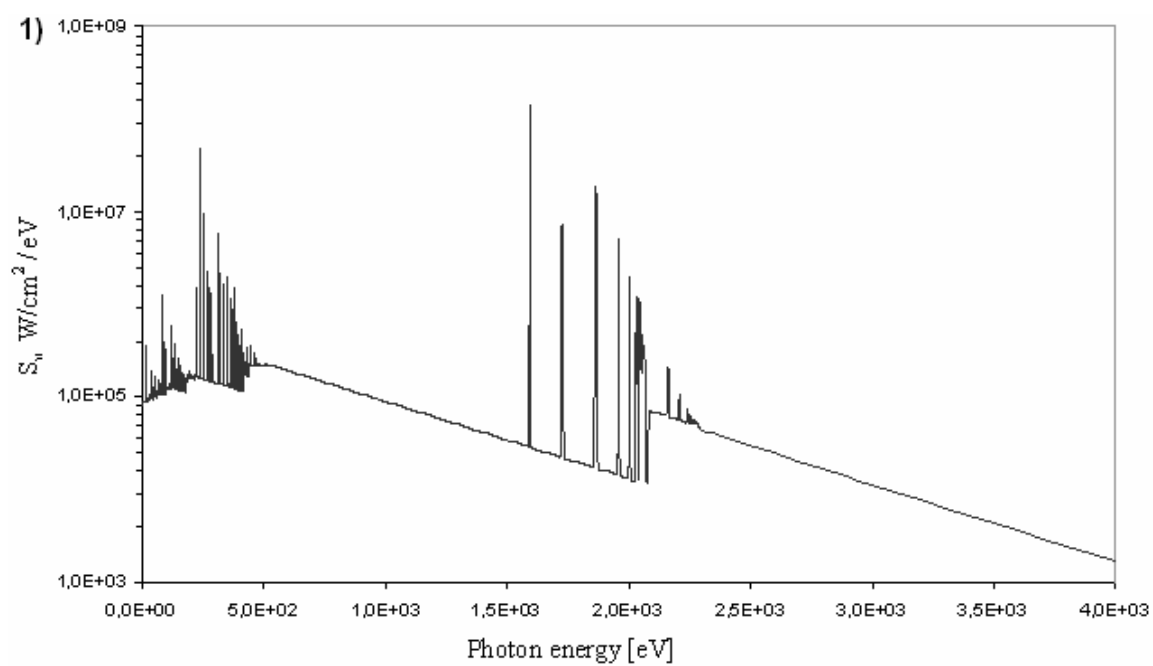
По известным данным о излучательных способностях и пробегах излучения были построены несколько спектров. В частности: для плазмы алюминия температуры 550 эВ излучательная способность и пробег фотонов которой изображён на рис.5 и построены графики спектральной яркости для случая плазменного шара и плоского слоя (рис.11 и рис.12, соответственно). Также для плазмы углерода температуры 50 эВ, меди температуры 300 эВ и плазмы кислорода построены аналогичные графики (рис.13,14; рис.15,16 и рис.17,18.).

На рисунках заметно, что вид спектральной зависимости яркости практически не изменился при переходе от точной к приближённой формуле, следовательно, формула для излучающего шара может использоваться для получения качественных результатов и количественных оценок спектров излучения.

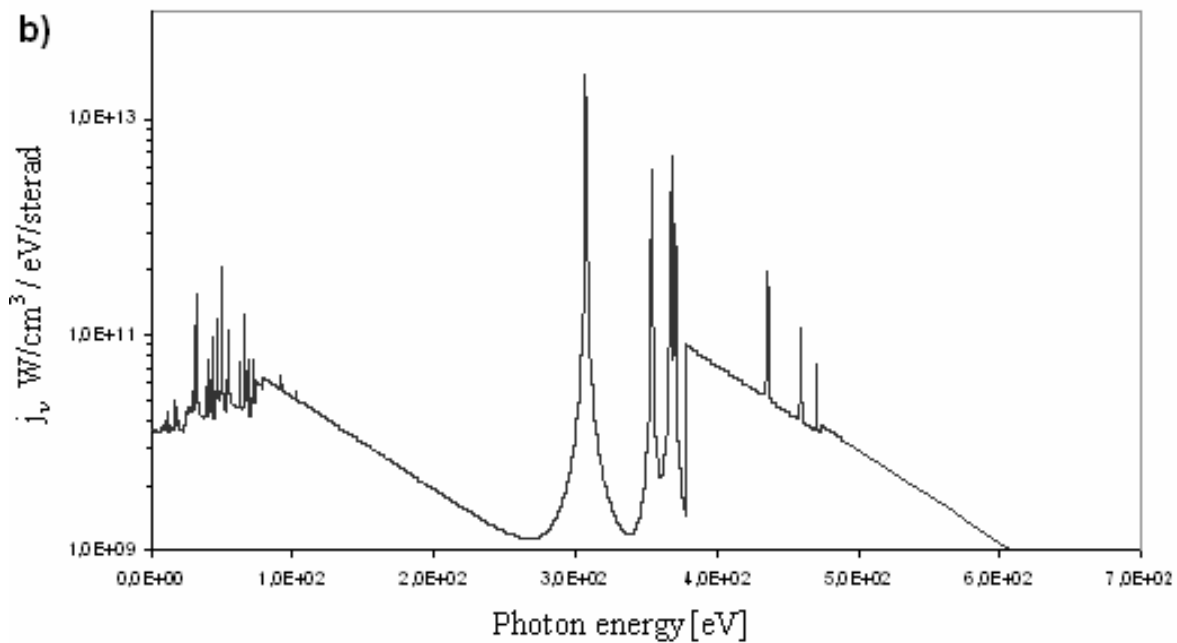
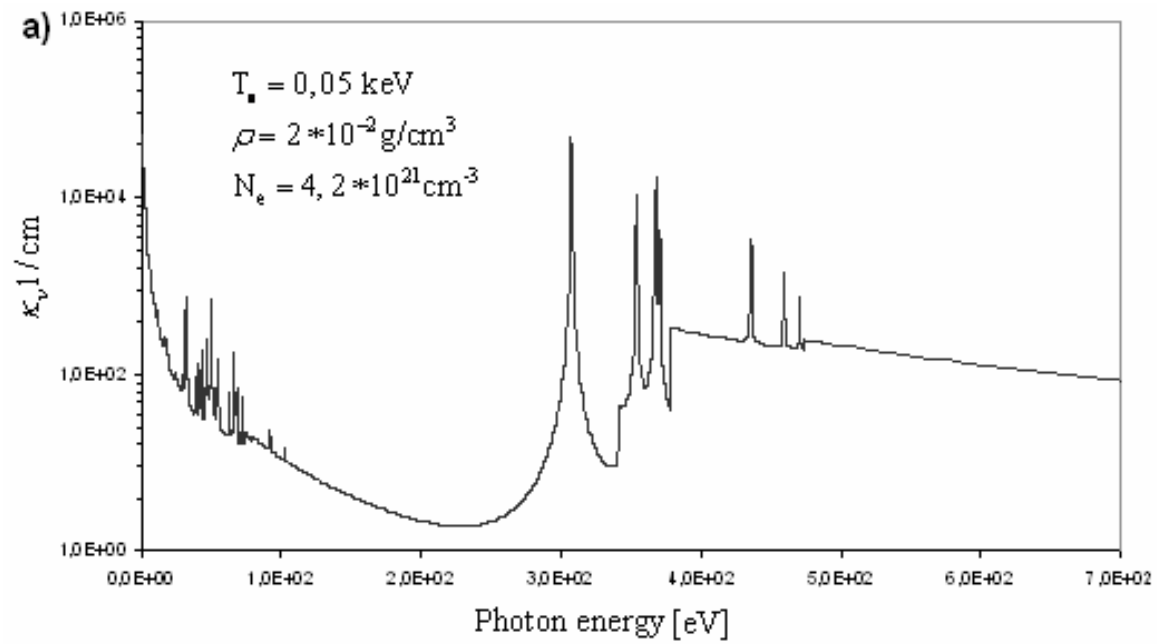
Отметим, что интегральная по спектру яркость также отличается от приближённой на величину не большую максимального отклонения спектральной яркости, т.е. не более чем на 7%.



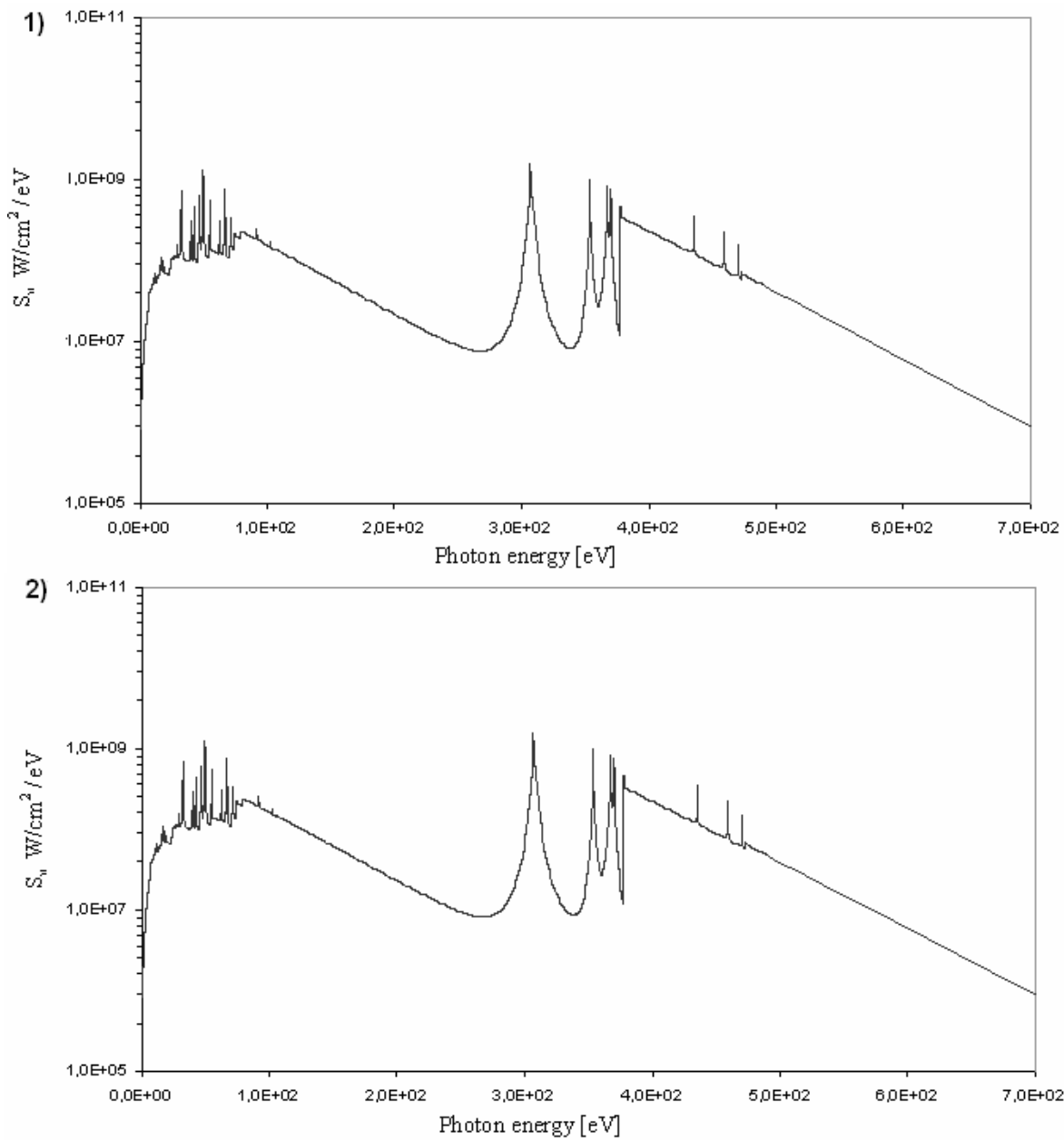
**Рис.11.** Графики зависимостей а) коэффициента поглощения, б) излучательной способности от энергии фотона для плазмы алюминия.



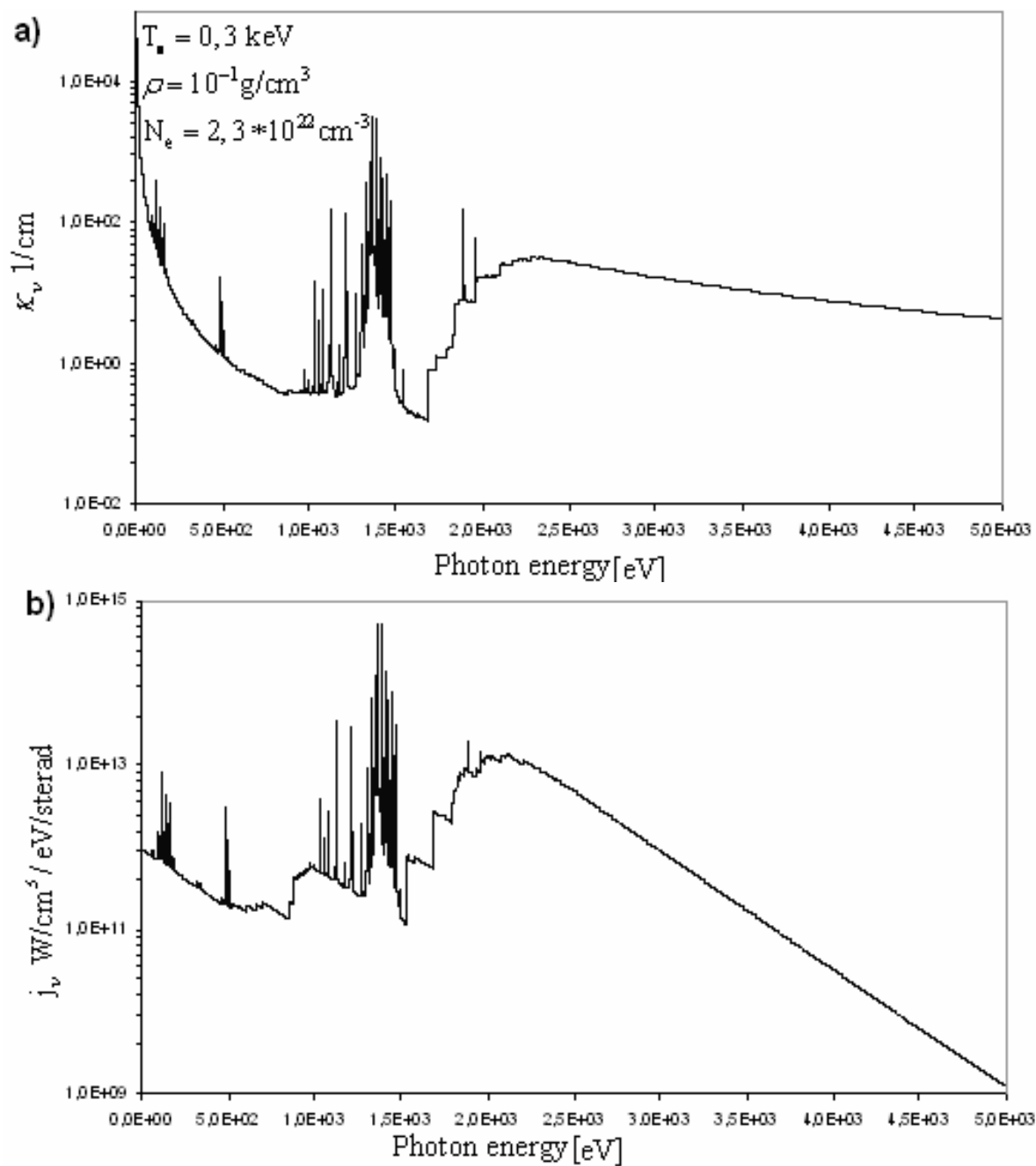
**Рис.12.** Спектральная яркость плазмы алюминия. 1) шар радиуса  $R = 42$  мкм  
2) плоский слой ширины  $d = 30$  мкм.



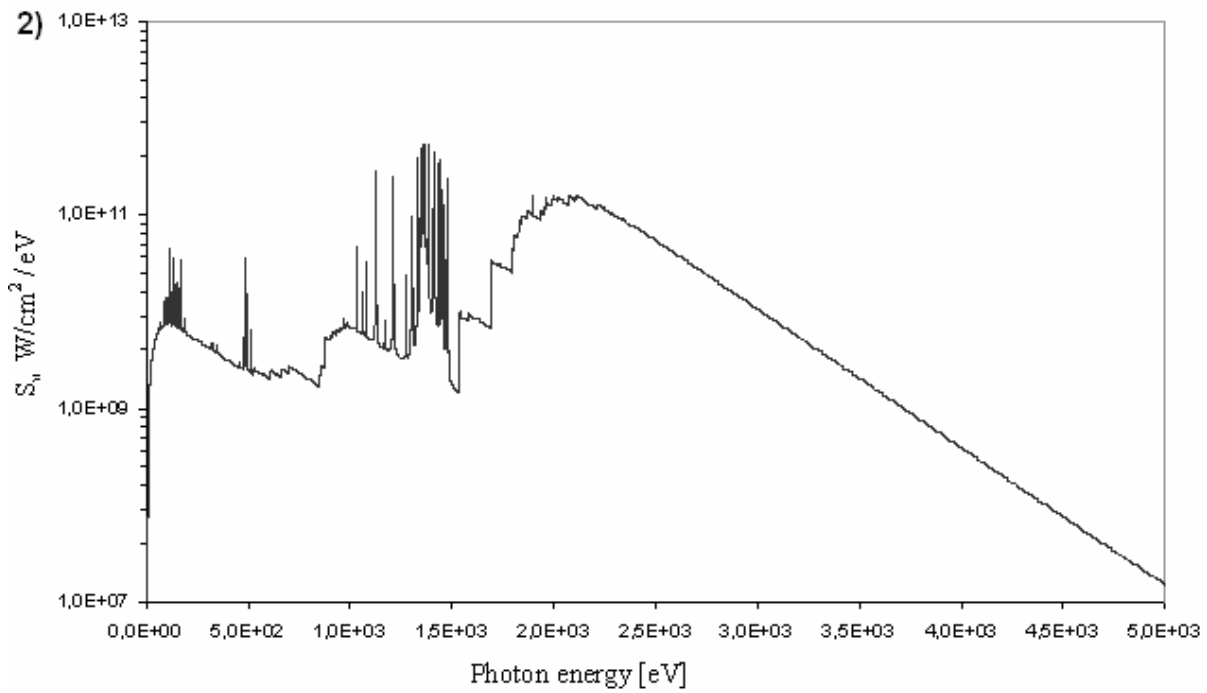
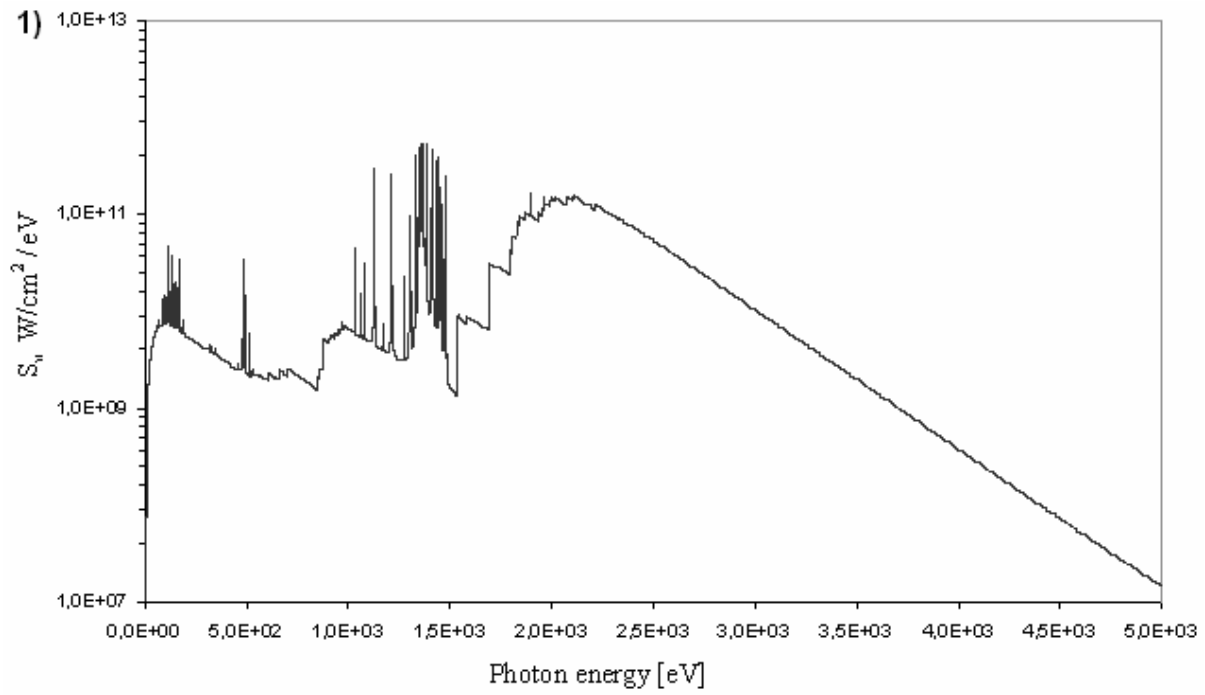
**Рис.13.** Графики зависимостей а) коэффициента поглощения, б) излучательной способности от энергии фотона для плазмы углерода.



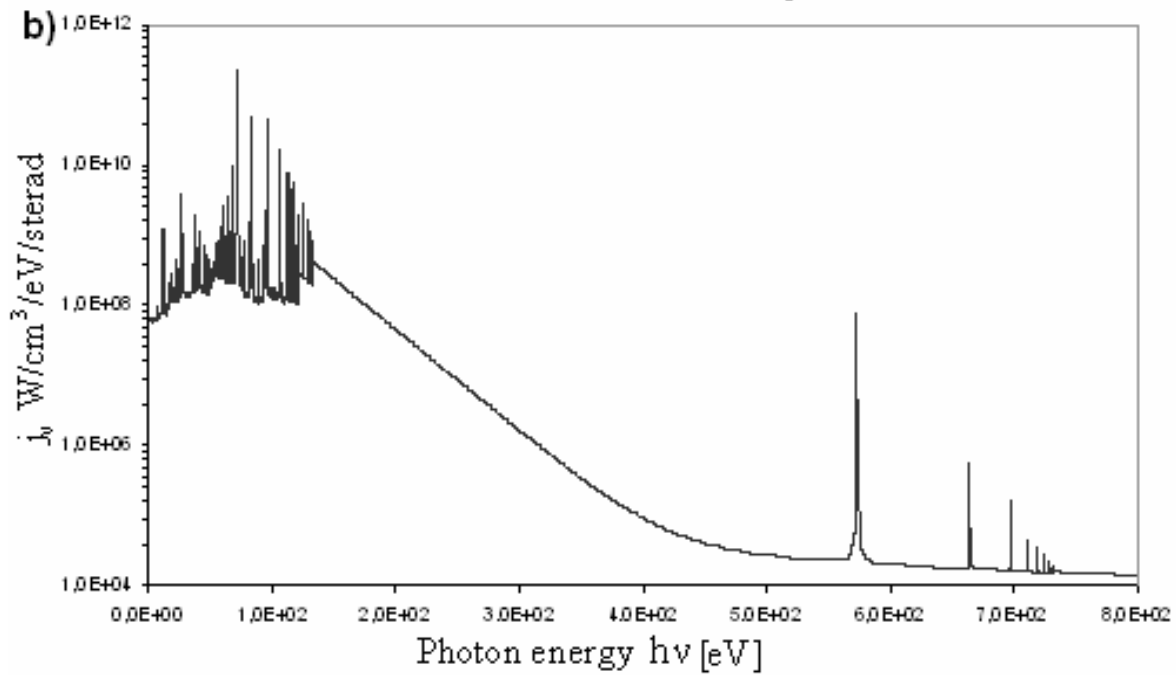
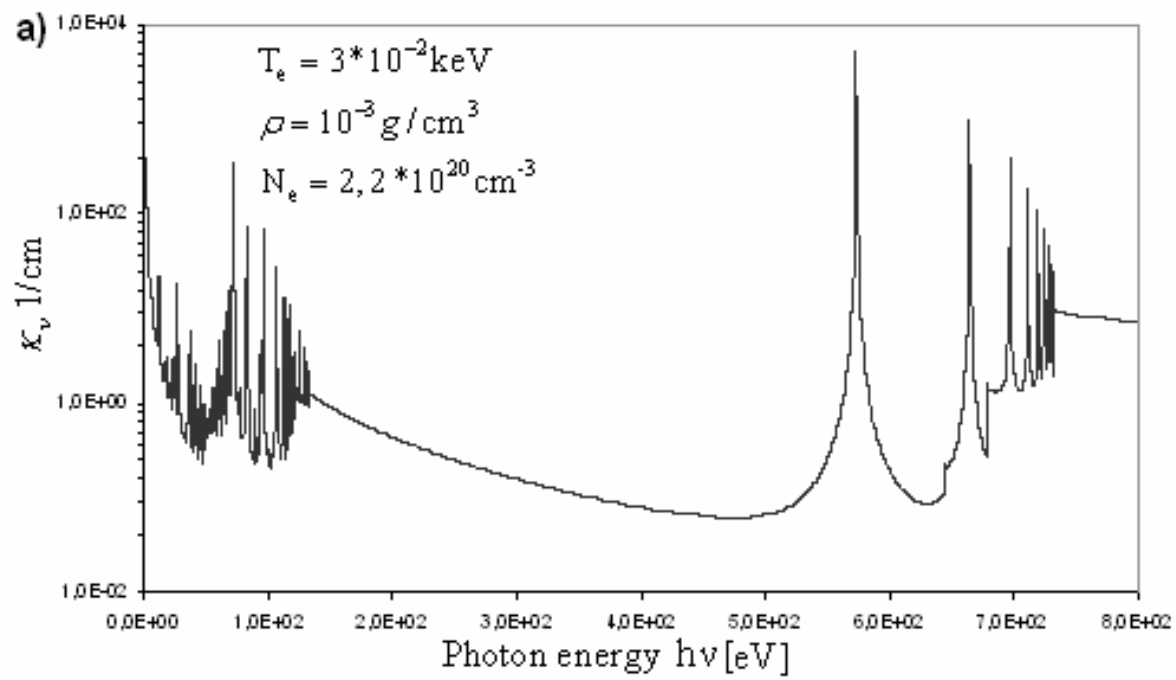
**Рис.14.**Спектральная яркость плазмы углерода. 1) шар радиуса  $R = 14$  мкм  
2) плоский слой ширины  $d = 10$  мкм



**Рис.15.** Графики зависимостей а) коэффициента поглощения, б) излучательной способности от энергии фотона для плазмы меди.

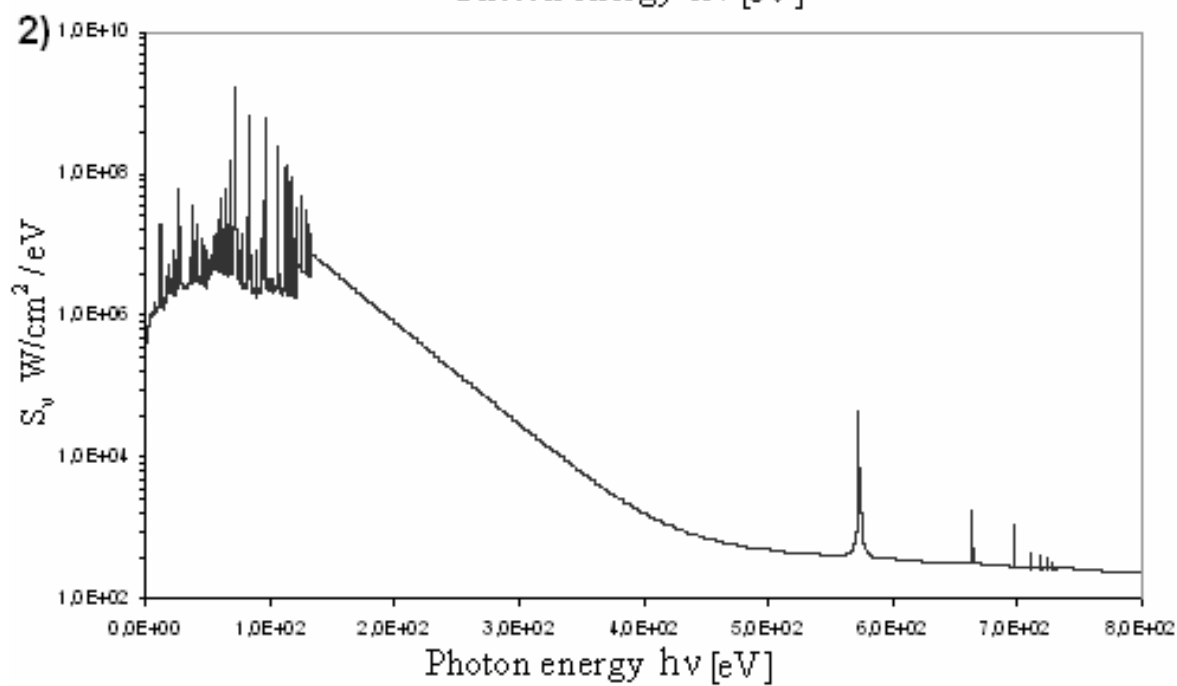
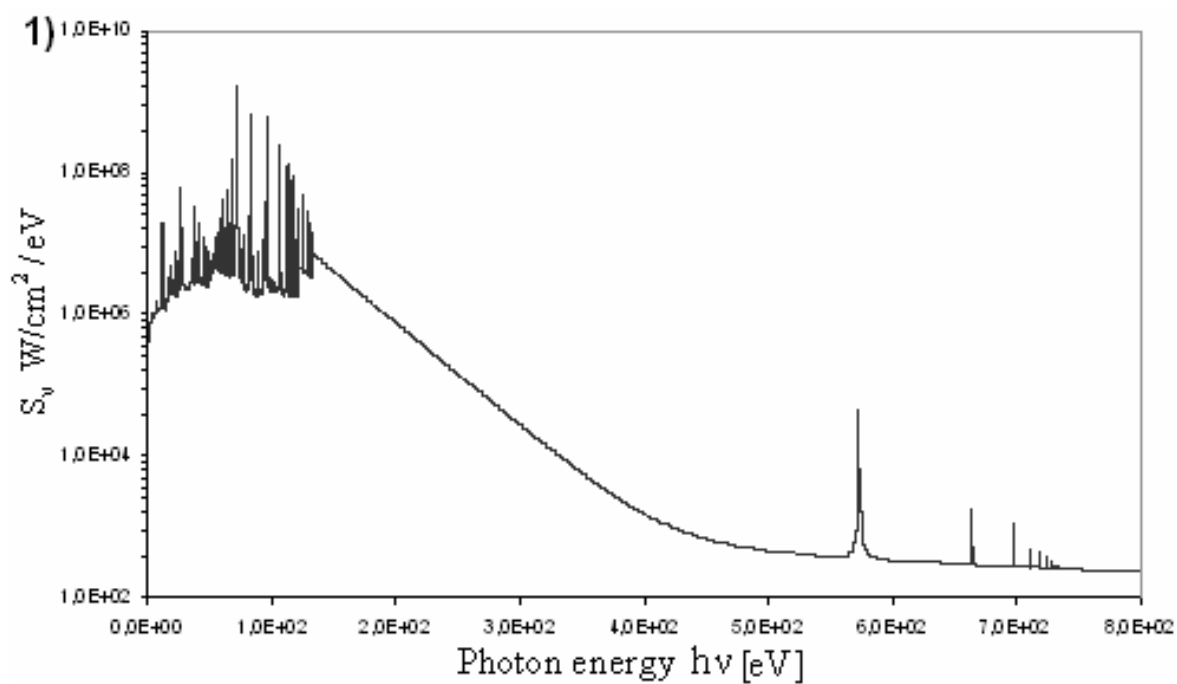


**Рис.16.** Спектральная яркость плазмы меди. 1) шар радиуса  $R = 28$  мкм  
2) плоский слой ширины  $d = 20$  мкм



**Рис.17.** Графики зависимостей а) коэффициента поглощения, б) излучательной способности от энергии фотона для плазмы кислорода.





**Рис.18.** Спектральная яркость плазмы кислорода. 1) шар радиуса  $R = 40$  мкм  
 2) плоский слой ширины  $d = 28,6$  мкм

## Заключение

Рассмотрена аналитическая модель расчёта выхода излучения с поверхности однородной плазмы.

В рамках данной модели решена задача выхода излучения с поверхности сферической плазмы, для данной задачи удалось получить аналитическую зависимость спектральной яркости от оптической толщины плазмы.

Аналогичная задача рассмотрена в случае плазмы в виде сферического слоя и цилиндра. Полученные зависимости представлены в интегральной форме, найти их аналитическую форму т.е. вычислить интегралы, не удаётся, однако они могут быть найдены численно.

Получена формула для спектральной яркости с поверхности плоского слоя, когда за этим слоем находится ещё один слой, отличный от первого по толщине, составу, температуре.

Проведённый сравнительный анализ спектральной яркости плазмы в виде плоского слоя и шара (при одинаковых спектральных яркостях и пробегах) показал, что можно подобрать такое соотношение между толщиной слоя и радиусом шара, что их спектральные яркости отличаются не более чем на 7%, причём, при оптической толщине большей 0,1 значения практически совпадают. С помощью столкновительно – радиационной модели, описанной в пункте 2.1, были вычислены излучательная способность и пробеги фотонов для равновесной и однородной плазмы Al, Cu, C, O. На основе них построены графики спектральной яркости для плазмы сферической и плоской геометрии, причём при построении использовалось найденное соотношение между радиусом сферы и толщиной слоя. Они наглядно показывают, что спектральные яркости обоих видов конфигураций практически не отличаются. Это позволит в случае плоской конфигурации плазмы, когда имеется большой объём данных, достаточно быстро произвести вычисления по более простой формуле (25) для спектральной яркости шара.

## Литература

1. M.Murakami, S. Fujioka, H. Nishimura, T. Ando, and N. Ueda, “Conversion efficiency of extreme ultraviolet radiation in laser-produced plasmas”, *Physics of Plasmas*, 13, (2006)
2. Proceedings on XXVIII ECLIM (European Conference on Laser Interaction with Matter) Roma 2004.
3. Розанов В.Б. “О возможности сжатия мишеней с термоядерным горючим при использовании для облучения двух лазерных пучков”, *УФН*, том 174, №4, М.: Наука 2004, с.372-382.
4. Зельдович Я.Б., Райзер, Ю.П. “Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений”, М.: Наука, 1966.
5. Б.А. Брюнеткин, В.С. Беляев, А.П. Матафонов, Г.А. Вергунова, Н.Н. Демченко, В.Б. Розанов, Е.М. Иванов”Излучательные потери плазмы при взаимодействии ультракоротких лазерных импульсов с веществом”, препринт ФИАН № 9 ,2001.
6. Г.А. Вергунова, Е.М. Иванов, В.Б. Розанов “Спектры излучения плазмы при воздействии лазерных импульсов малой длительности и высокой интенсивности на твердотельные мишени”, *Квантовая электроника*, 33, №2 (2003), с.105-109.