

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ**



*имени
П. Н. Лебедева*

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ С.Д. ЗАХАРОВ, А.С. КРЮКОВ

18

**ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ ОБЪЕКТОМ,
ДВИЖУЩИМСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВОДОЕМА**

МОСКВА 2006

ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ ОБЪЕКТОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВОДОЕМА

Захаров С.Д., Крюков А.С.

*Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
119991 Москва, ГСП-1, В-333, Ленинский проспект, 53
stzakhar@sci.lebedev.ru*

Содержание

1. Введение.....	4
2. «Большая волна трансляции».....	5
3. Присоединенная волна Крылова	8
4. Постановка проблемы.....	10
5. Условия возникновения солитона Рассела	12
6. Уравнение для предельных волновых возмущений, генерируемых судном.....	16
7. Сравнение феноменов Рассела и Крылова	18
8. Обсуждение.....	22
9. Заключение.....	29
Литература.....	31

1. Введение

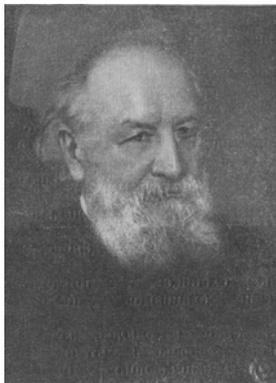
Изучение динамической структуры воды выдвинулось в последние годы на одно из первых мест в междисциплинарной научной тематике [1-3]. Это вполне понятно - нет ни одной области науки и практики, где прогресс в этом направлении не нашел бы полезного приложения. Однако широкий поток данных, доставляемых химией, биологией и физикой, не столько дает ответы на прежние вопросы, сколько порождает новые загадки. Многие исследователи видят ключ к загадкам воды в ее пространственной микроструктуре [4-6]. Поскольку при таком подходе трудности не уменьшаются, было бы небесполезно дополнить эти усилия взглядом с другого ракурса. Макромасштабная динамика воды также должна содержать ценную информацию и могла бы послужить источником перспективных разработок. Такая динамика самым естественным образом проявляется в гравитационных волнах на водной поверхности [7].

Прямой путь определения динамических характеристик сложной системы – воздействовать на нее внешней силой и регистрировать особенности ответной реакции. Среди разнообразных способов возбуждения волн на воде - ветер, перепады атмосферного давления, землетрясения, оползни и т.д., наиболее удобен управляемый способ генерации волн движущимся кораблем. Хотя это направление относят к области гидромеханики, именно от него в науку вошел необычный динамический объект. В 1834 г. англичанин Скотт Рассел увидел необычную одинокую волну без впадин, запущенную его баржей в канале [8]. Дискуссии теоретиков на тему - имеет ли такой объект право на существование – продлились, с некоторыми перерывами, более века. Странное обстоятельство: никто из участников дискуссии не предложил разрешить



Джон Скотт Рассел
(1808-1882)

многолетний спор посредством повторного эксперимента. Внимание же этот вопрос заслуживает еще и по той причине, что, судя по описанию Рассела, его солитон был вторичным продуктом уникального резонансного процесса.



Алексей Николаевич
Крылов
(1863-1945)

На фоне драматической истории с «резонансом Рассела» другое явление в системе корабль-волна, также сопровождаемое генерацией солитона, хотя и иного типа, остается почти незамеченным. Впервые его описал в 1915 г. создатель современной теории корабля, гидромеханик и математик А.Н. Крылов [9, с. 364-368]. Оно явно имеет резонансную природу и упоминается во многих монографиях, но вскользь, без анализа механизма. Проблема особенно интересна тем, что образование как «резонанса Рассела», так и «резонанса Крылова» не удается получить из уравнений гидродинамики. Это наводит на мысль, что мы сталкиваемся здесь с неизвестными свойствами воды в больших пространственных масштабах.

Авторов настоящей работы вдохновило оригинальное описание этих двух, на первый взгляд, различных явлений, и мы поставили себе задачу рассмотреть условия их воспроизведения и попытаться выяснить, не скрываются ли за ними неизвестные динамические свойства водных масс.

2. «Большая волна трансляции»

Джон Скотт Рассел (1808-1882 гг.), выдающийся кораблестроитель и естествоиспытатель, сделал свое открытие во время службы на канале Эдинбург - Глазго. Для перевозок по каналу еще продолжали использовать небольшие баржи на конной тяге, но уже сложились предпосылки для перехода к паровым двигателям. С этой целью инженер Рассел проводил опыты с баржами различной формы,

движущимися с разными скоростями. Тогда и было обнаружено явление, описанное им в знаменитом «Докладе о волнах» [8], впоследствии многократно цитировавшемся:

I was observing the motion of a boat which rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped – not so the mass of water in the channel which it had put in the motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well defined heap of water which continued its course apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling at a rate of some eight to nine miles per hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. . Such, in the month of August, 1834, was my first chance interview with the singular and beautiful phenomenon .*

Сообщение Рассела было подвергнуто жесткой критике авторитетными учеными. Королевский астроном Д.Б. Эйри подчеркивал, что формула Рассела для скорости его «большой волны трансляции» не получается из теории волн на мелкой воде, а длинные волны в каналах не могут сохранять постоянную форму. Свой отзыв в работе «О колебательных волнах» (1847 г.) дал и Д.Г. Стокс. Он также утверждал, что

* «Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно встала; однако масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась. Вместо этого она собралась у носа судна в состоянии яростного бурления, затем неожиданно оторвалась от него, покотившись вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т.е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, продолжавшего свой путь вдоль канала, не меняя формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом и когда нагнал, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохраняя первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от фута до фута с половиной. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые довелось столкнуться с необычным и красивым явлением ...».

форма волны в жидкости не сохраняется даже в случае пренебрежимо малой вязкости. Этого было достаточно, чтобы об уединенной волне надолго забыли - все, кроме самого Рассела. Приобретя известность на инженерном поприще (проект и постройка крупнейшего океанского лайнера «Грейт Истерн», с которого был проложен первый трансатлантический телеграфный кабель), он продолжал опыты в домашней лаборатории и не терял веры в свою Волну. Ещё при его жизни ученые молодого поколения Ж.В. де Буссинеск и Дж.В. Стрэтт (лорд Рэлей) нашли приближенное математическое описание формы и скорости уединенной воды на мелкой воде, но в кругу специалистов сомнения не исчезли – слишком велик был авторитет Эйри и Стокса.

Окончательная ясность в проблему была внесена на рубеже веков голландцами Д.И. Кортвегом и его учеником Г. де Фризом [9]. Обобщив метод Рэлея, они получили в 1895 г. довольно простое нелинейное уравнение и нашли точные решения, соответствующие, в пределе очень больших длин, уединенным волнам. Уравнению Кортвега де Фриза (сокращенно КдФ) суждено было сыграть большую роль во втором рождении Волны Рассела. Оно дало описание не только волн на мелкой воде, но и ряда других волновых явлений, положив начало построению глубокой и важной математической теории. Однако и это достижение не сразу нашло отклик. Лишь в 1965 г. американские ученые М. Крускал и Н. Забуски, применив метод компьютерного моделирования, убедились, что уединенные волны проходят друг через друга без изменения формы и тем аналогичны частицам. Тогда они убрали из названия слово «волна», а из слова «уединенная» (solitary) составили термин «солитон» (soliton), созвучный «электрону» или «протону». С этого момента начинается новейшая история солитона; ныне это своеобразный раздел математической физики, насчитывающий десятки тысяч публикаций. Но вот что любопытно – название, по-видимому, оказывает магическое действие: раз этот объект зачислен в семейство, включающее

элементарные частицы, мало кто интересуется его внутренней структурой. И до сих пор никому не довелось увидеть зрелища, так потрясшего воображение хладнокровного англичанина.

В стороне от научной моды оказался и феномен, родственной эффекту Рассела. Мы имеем в виду явление «присоединенной» волны, которая иногда возникает за кормой движущегося корабля. Его первое научное описание было дано в 1915 г (опубликовано в 1931 г. в «Бюллетене Научно-технического комитета») А.Н. Крыловым, однако упоминание об этом явлении можно найти у того же Скотта Рассела*.

3. Присоединенная волна Крылова

А.Н. Крылов описал происшествие, имевшее место с кораблем Военно-морских сил России вблизи побережья Норвегии. В 1912 году миноносец «Новик» проходил 20-ти узловым ходом на расстоянии 6 миль мимо пристани возвышающейся над водой на 9 футов (3 м). Был мертвый штиль; на пристани лежала вверх дном шлюпка, и играли два мальчика десяти и шести лет. Старший заметил, что на пристань надвигается высокая волна, и бросился бежать, а младший остался на пристани. Волна вкатила на пристань, смыла шлюпку, и всё, что было на пристани, в том числе и мальчика, который и утонул. С корабля ничего этого видно не было, и лишь по приходе на базу командиру была доставлена телеграмма о произошедшем несчастье. Организованное по этому поводу следствие установило, что на открытом плесе по пути «Новика» была короткая банка с глубиной воды 35 футов. Эта глубина является как раз критической для скорости $V = 20$ узлов: $V = \sqrt{gH}$ (V – скорость, H – глубина воды, g –

* «...Горячая лошадь, впряженная в лодку, одного из владельцев предприятия (перевозка на канале Глазго-Ардроссан), испугалась и понесла, волоча лодку за собой. К своему удивлению, мистер Хаустон увидел, что пенящаяся кормовая волна, которая обычно опустошала берега, исчезла, и судно шло по воде сравнительно плавно с очень сильно уменьшенным сопротивлением». М-р Хаустон обладал практичностью и осознал коммерческое значение этого факта для компании канала». Он внедрил на этом канале новый метод движения судов со скоростью до 9 миль в час, что увеличило доходы владельцев [8].

ускорение силы тяжести). В результате образовалась громадная волна, которая затем побежала дальше и натворила беду» [10, с. 367].

А вот другой случай, описанный академиком А.Н. Крыловым. «На Лукулльской мерной миле (в Черном море, глубина 20 м) в 1915 г. работала комиссия по производству приемных испытаний шести миноносцев типа «Быстрый» (водоизмещение 1350 т, машина в 30 000 л.с., ход 35 узлов). В числе контрактных условий было оговорено 10-часовое испытание при скорости в 30 узлов, что требовало мощности около 2/3 от полной. Однако, хотя машина развила мощность не 20 000, а 30 000 сил и даже больше, ход оставался равным 29 узлам и дальше не возрастал. За кормой бежала громадная волна, и, по протесту представителя завода (с записью в акт испытаний и в вахтенный журнал), испытания были прерваны. Вскоре близ мыса Сарыч, где глубина составляла около 100 сажень, миноносец свободно развил 30 узлов при мощности, несколько большей 20 000 сил».

Сущность явления по Крылову состоит в следующем. При скорости $V = \sqrt{gH}$, образуется т.н. присоединенная волна, скорость бега которой равна скорости хода корабля. Добавочная мощность, развиваемая корабельной машиной, затрачивается не на увеличение скорости хода, как было бы на глубокой воде, а на поддержание этой волны. Скорость 30 узлов составляет 51 фут в секунду и как раз является критической для глубины Лукулльской мили. Чтобы достичь этой скорости, машина должна была развить мощность 33 000 сил, т.е. большую, нежели предельная [10, с. 366-367].

Генерация присоединенной волны наблюдалось неоднократно для кораблей различных размеров. С приближением к критической скорости возникает тормозящая сила, и она тем больше, чем больше мощность судовой машины. Механизм происходящих при этом процессов до сих пор не вполне понятен, так как из классической гидродинамики он не вытекает. Предпринимались попытки описать силу торможения корабля при

приближении к критической скорости, но расчеты были построены на традиционных представлениях о потенциальном течении несжимаемой, невязкой жидкости. Не удивительно, что результаты, даже на качественном уровне, не отражают того, что наблюдается на опыте.

4. Постановка проблемы

Попытки воспроизвести солитон Рассела предпринимались неоднократно, но их преследовали неудачи. Парадоксальный факт – наблюдение более чем полуторовековой давности породило новую сферу научного знания, а воспроизвести его оказалось трудной проблемой. Вот как закончилась одна из таких попыток, красочно описанная очевидцем:

«Между прочим, повторить, казалось бы, такой простой опыт Рассела на самом деле не так-то просто. В этом убедились участники конференции «Солитон-82», съехавшиеся в Эдинбург из 24 стран на

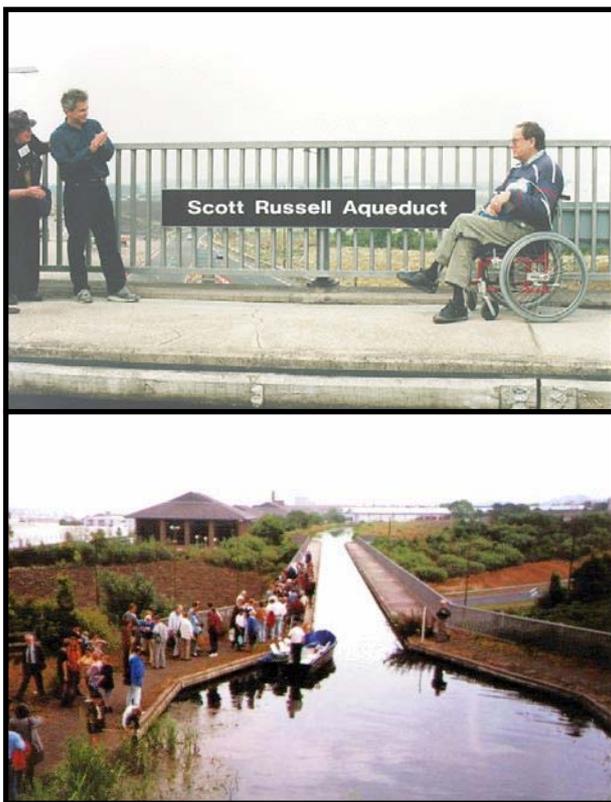


Рис. 1, 2. Торжественное открытие акведука им. Джона Скотта Рассела.

форум, приуроченный к столетию со дня смерти Рассела. Они попытались получить уединенную волну на том же месте, где её наблюдал Рассел. Канал сохранился, и по-прежнему по нему плавали лодки и баржи, многие из которых сохранили старинные формы. Всё вроде бы благоприятствовало мероприятию. Но то ли из-за замены лошадиных сил человеческими (энтузиасты на время стали бурлаками), то ли из-за того, что на берегу за полторы сотни лет выросли деревья, то ли

из-за плохой погоды, то ли по какой-то другой причине, а волна из уединения не вышла. Не получился солитон!» [11].

В среду 12 июля 1995 г. международный коллектив ученых стал свидетелем осуществления очередной попытки на Юнион-канале вблизи Эдинбурга. Собравшиеся были участниками конференции по нелинейным волнам в физике и биологии, организованной университетом Heriot-Watt, расположенным рядом с каналом. Публичная демонстрация проходила в присутствии почетных гостей Элвина Скотта (Alwyn Scott) и Лауры Крускал (Laura Kruskal) являлась частью запланированной церемонии, посвященной присвоению новому акведуку имени Джона Скотта Рассела (рис.1,2).

Акведук, проводящий канал над кольцевой дорогой вокруг Эдинбурга, имел длину 89.3, ширину 4.13 и глубину 1.52 метра. Для повторения опыта Рассела организаторы использовали моторную лодку. Лодка развила скорость около 4 м/с, и от неё оторвалась уединенная волна, ушедшая вперед (рис.3). Присутствующие пришли к единодушному выводу, что солитон Рассела воспроизведен [12]. Подстановка скорости лодки и глубины акведука в выражение для критической скорости



Рис. 3. Оторвавшаяся уединенная волна.

гравитационных волн \sqrt{gH} наводит на мысль, что на самом деле был воспроизведен солитон Крылова (KS). Скорость лодки очень близка к критическому значению, следовательно, она должна генерировать присоединенную волну незначительного масштаба, соответствующего малому водоизмещению судна. Авторы поинтересовались у экспериментаторов, остановилась ли

лодка, или хотя бы подверглась внезапному удару? Судя по ответам, такой эффект не был замечен. Форма оторвавшейся уединенной волны, как видно из фотографии, не является тем «округлым холмом», который описал Рассел, а вполне подходит под описанные Крыловым случаи. Причиной отрыва присоединенной волны от лодки, вероятно, служит вхождение последней в акведук.

Были и другие попытки воспроизвести феномен Рассела, однако все они производились при скорости лодки, близкой к предельной скорости для гравитационных волн. Присоединенная волна исправно генерировалась, и при надлежащих условиях происходил её отрыв (рис. 4,5) [13].

Таким образом, ни в 1995 г., ни в последующие годы, эффект Рассела так и не был повторен. Условия, которым необходимо при этом удовлетворить, не анализировались, и мы поставили перед собой эту задачу.

5. Условия возникновения солитона Рассела

Используя данные, сообщенные Расселом, и реконструируя недостающие параметры, покажем, что явление возникло в момент, когда длина корабельной волны, созданной его баржей, сравнялась с глубиной канала.



Рис. 4, 5. Видеокадры, демонстрирующие другие попытки воспроизведения феномена Рассела (Великобритания).

Солитон Рассела (RS) возникает в течение очень короткого времени. Баржа, имеющая значительную массу M и движущаяся с постоянной скоростью V , «внезапно» останавливается. В переводе на язык количественных оценок, время торможения составляет $\tau = 1-3$ секунды, поэтому явление может быть расценено как гидродинамический удар. Потерянное баржей количество движения должно передаваться за время τ водному окружению и, вероятно, воспринимается т.н. «присоединенной массой», по величине не превышающей M . Таким образом, динамически связанная с баржей вода за весьма малое время значительно ускоряется.

Столь же впечатляющи последующие стадии. Движущийся с повышенной скоростью водный поток не проходит по инерции, как ожидалось бы, мимо корпуса баржи, а тормозится, «фокусируется» перед ее носовой частью, образуя бурлящую массу. В этом водовороте формируется округлый «холм», который отрывается от баржи и уходит вперед со скоростью примерно 15 км/ч.

Столь сложное взаимодействие воды и движущегося в ней объекта наверняка привлекало внимание исследователей, но, по-видимому, представлялось чем-то аномальным. Точку зрения других, относящих описанное Расселом явление к уникальному сочетанию многих факторов, выразил Дж. Лайтхилл, назвав гидросолитон «диковинкой, едва ли встречающейся в природе» [7, с. 562].

Согласно данным морского энциклопедического справочника, современные речные баржи имеют водоизмещение от 100 до 1000 т и по форме, по-видимому, не сильно отличаются от предшественников позапрошлого века. Примем для габаритов баржи Рассела следующие ориентировочные параметры: длина $L = 12$ м, ширина $b = 4$ м и осадка около 1 м, т.е. $M = 50$ т и миделево сечение $S = 4 \text{ м}^2$. Исходя из этих предположений, оценим скорость баржи по формуле

$$P = \rho S V^3,$$

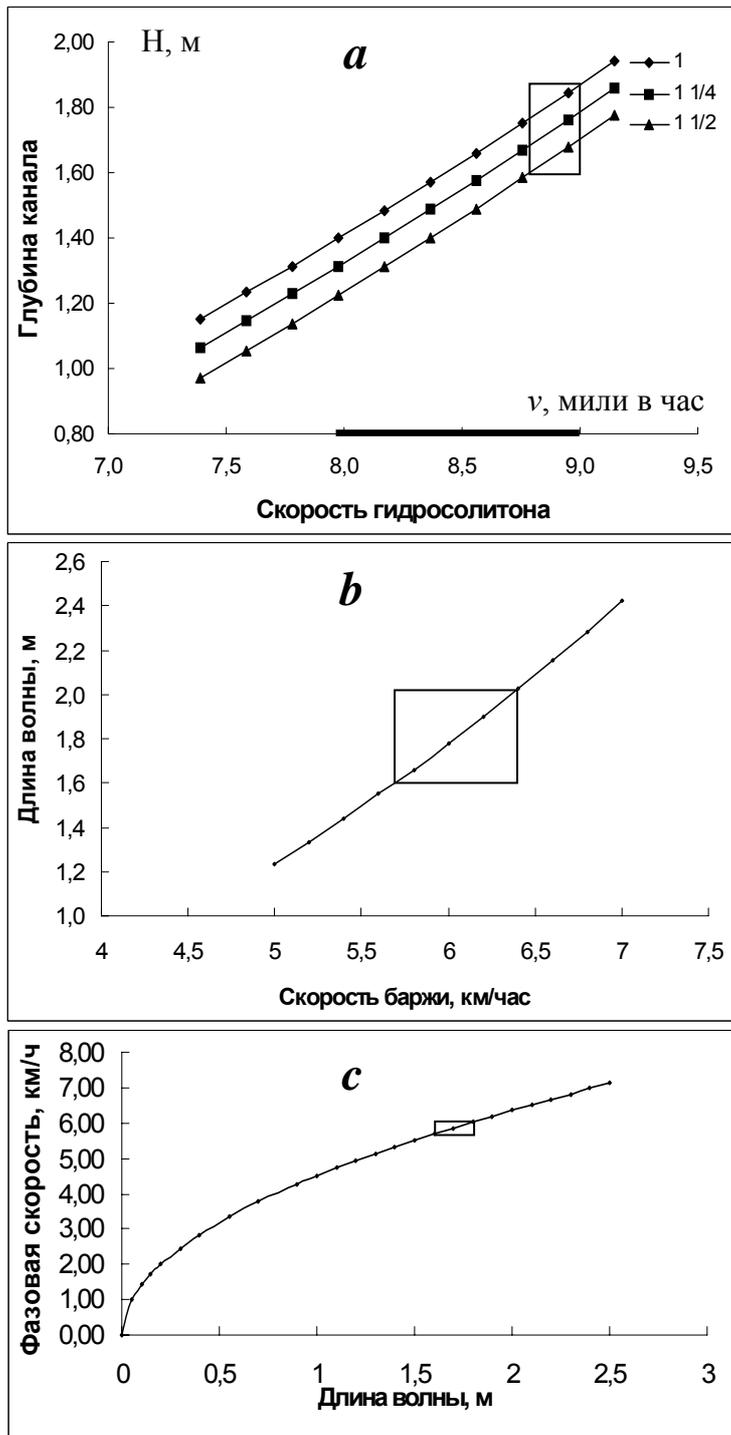


Рис. 6. Реконструкция эксперимента Рассела (прямоугольниками показаны области наиболее вероятных значений). Определение глубины канала из решения уравнения Кортевега – де Фриза; параметр – высота солитона в футах (a). Длинноволновая граница спектра возмущений, генерируемых баржей (b). Дисперсионное соотношение для гравитационных волн (c).

уравнения Кортевега – де Фриза [9],

где $P = FV$ - мощность, необходимая для сообщения судну скорости V в стационарном режиме движения, F - сила сопротивления, учитывающая потери на трение, ρ - плотность воды. Принимая, в соответствии с определением одной лошадиной силы (1,35 кВт), мощность развиваемую парой лошадей, тянущих баржу, 2,7 кВт. Отсюда получим нижнюю оценку скорости $V \sim 1\text{ м/с}$ (3,6 км/ч); в качестве более реалистической величины примем $V \approx 6\text{ км/ч}$.

Далее оценим глубину канала H подстановкой значений скорости и высоты «водяного холма» h , сообщенной Расселом, в предельное решение

$$v = \sqrt{gH} \left(1 + \frac{h}{2H} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + v) \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0,$$

где v – скорость солитона вдоль направления x , $c_0 = \sqrt{gH}$, $\sigma = \frac{1}{6}c_0H^2$, g – ускорение свободного падения. Погрешности, заявленные Расселом, дают нам разброс величины H от 1.2 до 1.9 м с наиболее вероятным интервалом 1.6-1.9 м (рис. 6а). Ширина канала значительно больше глубины, поскольку, она, по крайней мере, не меньше указанной длины солитона 9 м (30 футов). Это позволяет пренебречь влиянием боковых стенок канала и рассматривать явление, в первом приближении, происходящим в открытом водоеме.

Естественно предположить, что процесс образования RS инициируется подходящим возмущением водной поверхности, создаваемым баржей. Движущийся корабль, преодолевая сопротивление воды, «излучает» непрерывный спектр волн. Известно, что в результате интерференции в ближней зоне «выживает» одна, стационарная волна, скорость которой

$$c = V \cos \theta,$$

где θ есть угол между направлением распространения волны и траекторией корабля. Спектр начальных возмущений определяется числом Фруда $Fr = \frac{gL}{V^2}$, где L – длина судна. Когда $Fr \gg 1$, волновой пакет концентрируется вблизи длины волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi V^2}{g},$$

а угол θ стремится к нулю. Именно этот случай справедлив для эксперимента Рассела, так как $M = \rho SL$, и даже 50%-ная ошибка в меньшую сторону в нашей оценке длины баржи (12 м) сохраняет законность приближения. Зависимость λ_0 от скорости судна показана на рис. 6б. Получается примечательный результат: величина $\lambda_0 = 1.6 - 2.0$ м очень близка к глубине канала.

Вследствие того, что угол $\theta \approx 0$, скорость корабельной волны $c \approx V$, и можно использовать дисперсионное соотношение для гравитационных волн малой амплитуды в водоеме постоянной глубины

$$c^2 = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right) \operatorname{th} \left(\frac{2\pi H}{\lambda} \right),$$

чтобы определить длину корабельной волны независимым способом. Как свидетельствует рис. 6с, она равна глубине канала в пределах $\pm 6\%$. Это позволяет сделать окончательный вывод: феномен Рассела возникает в результате пространственного резонанса, когда длина корабельной волны равна глубине водоема, а скорость волны равна скорости судна.

Дополнительным условием, конечно, является постоянство глубины, либо очень слабый наклон дна и/или постоянная, либо очень медленно изменяющаяся скорость судна. Анализ оригинального текста Рассела дает основания в пользу того, что глубина канала была постоянной. Пара влекущих баржу лошадей медленно наращивала ход, и явление своеобразного гидродинамического удара произошло с приближением скорости к критическому значению V_R , удовлетворяющему условию:

$$\frac{2\pi V_R^2}{g} = H.$$

Сводка уточненных параметров эксперимента: глубина канала – 1.7 м, скорость баржи относительно течения в канале 3.2 мили в час (5.9 км/ч), значения высоты, длины и скорости солитона, экстраполированные к моменту его зарождения, 1.15 (1.0-1.5) фута, 29.5 (30) футов, 8.7 (8-9) миль/час соответственно; в скобках указаны данные Рассела.

6. Уравнение для предельных волновых возмущений, генерируемых судном

Ещё А.Н. Крылов обращал внимание на практическую ценность концепции Фруда для определения волнового сопротивления корабля. Несмотря на то, что эта концепция не вполне согласуется с положениями

классической гидродинамики, она тесно увязана с опытными данными и широко применяется в кораблестроении. Число Фруда V^2/gL также используется для определения граничных длин волн, генерируемых судном длиной L движущимся равномерно со скоростью V , однако какого-либо аналитического выражения не существует. Попытаемся восполнить этот пробел.

Рассмотрим дисперсионное соотношение для свободно распространяющихся синусоидальных гравитационных волн, выраженное через фазовую скорость:

$$c^2 = \frac{g}{k} \operatorname{th}(kH),$$

где k – волновое число, H – глубина водоема.

Произведем взаимно симметричные замены:

$$\frac{c^2}{g} \rightarrow \frac{1}{\tilde{k}},$$

$$\frac{1}{k} \rightarrow \frac{V^2}{g},$$

$$H \rightarrow L,$$

где \tilde{k} – волновое число для длинноволновой границы возмущений, генерируемых кораблем. В результате получим окончательное выражение:

$$\frac{1}{\tilde{k}} = \frac{V^2}{g} \operatorname{th}\left(\frac{g}{V^2} L\right).$$

В пределе $\frac{g}{V^2} L \gg 1$ («медленный ход») имеем $\frac{1}{\tilde{k}} \rightarrow \frac{V^2}{g}$, что полностью согласуется с имеющимися данными. В противоположном пределе $\frac{g}{V^2} L \ll 1$ («быстрый ход») имеем $\frac{1}{\tilde{k}} \rightarrow L$, или $\tilde{\lambda} \rightarrow 2\pi L$, что также вполне разумно.

Предложенное выражение для предельных волновых возмущений, генерируемых судном, по-видимому, имеет ту же степень точности и условия применимости, что и дисперсионное соотношение. Симметрия

обоих выражений особенно наглядна, если их записать в следующей форме:

$$\frac{c^2}{g} = \tilde{\lambda} \operatorname{th} \left(\frac{H}{\tilde{\lambda}} \right),$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{V^2}{g} \operatorname{th} \left(\frac{L}{V^2/g} \right).$$

Судно на «медленном ходе» генерирует узкий спектр волновых возмущений с энергией, сосредоточенной вблизи его длинноволновой границы $\tilde{\lambda} = 2\pi \frac{V^2}{g}$, т.е. длина волны в максимуме спектра $\lambda_m \approx \tilde{\lambda}$ [7]. Это возмущение формирует стационарную волну, гребни которой перпендикулярны траектории движения ($\theta = 0$), а скорость совпадает со скоростью судна. При больших скоростях спектр уширяется, а угол θ увеличивается. Примем естественное предположение, что стационарная волна рождается из максимально интенсивного волнового возмущения λ_m . В пределе $\frac{V^2}{gL} \rightarrow \infty$ интенсивность возмущений распределяется равномерно по спектру в диапазоне $0 - 2\pi L$, и $\lambda_m \rightarrow 2\pi L$ а $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда может быть предложена зависимость λ_m от параметров судна, удовлетворяющая указанным предельным случаям:

$$\lambda_m = 2\pi L \operatorname{th} \frac{V^2}{gL}.$$

При подстановке λ_m в дисперсионное соотношение получаем фазовую скорость стационарной волны c и находим угол между векторами \vec{c} и \vec{V} :

$$\theta = \arccos \frac{c}{V}.$$

7. Сравнение феноменов Рассела и Крылова

Особый случай возникает, когда скорость судна приближается к критическому значению \sqrt{gH} . Корабль опережает до того шедшую с ним

вровень стационарную волну с перпендикулярными движению гребнями. В соответствии с дисперсионным соотношением, единая волна должна раздвоиться с переходом от $\theta = 0$ к $\theta \neq 0$. Однако, произойдет ли такой переход или нет, зависит от ускорения судна. Поскольку групповая скорость волны меньше скорости корабля, в случае изменения их направления в кильватере должна иметь место интерференция. Она связана с перестройкой картины волн, требующей затраты энергии. При недостаточной подпитке энергией со стороны судна (при малом ускорении), волне энергетически более выгодно присоединиться к нему. Таково качественное объяснение образования присоединенной волны.

Возникающий при этом эффект аналогичен хорошо известному условию резонанса волны и частиц в плазме, обычно называемого затуханием Ландау. Если волна немного опережает частицы, то происходит перекачка волновой энергии в энергию частиц: волна затухает, а частицы ускоряется, или наоборот. Последний случай как раз и имеет место за тем существенным отличием, что в плазме волна и частицы считаются независимыми объектами. В нашем случае взаимодействие более сильное, отставание порожденной кораблем стационарной волны начинается раньше и находится из условия равенства скорости корабля и фазовой скорости генерируемой им предельной волны. Взяв в качестве условной границы отставания волны от корабля $\frac{V-c}{V} = 0.025$ (что соответствует $\text{th} \frac{2\pi H}{\lambda} = 2$), получим $V_s = 0.71\sqrt{gH}$, и если корабль (при ровном дне) ускоряется достаточно медленно, волна наращивает свою амплитуду, оставаясь в сцеплении с кораблем. Медленному ускорению соответствует характерное время перекачки энергии, которое может быть оценено следующим образом: $t_c \sim \frac{V-c}{V} \sqrt{\frac{H}{g}}$. Отсюда видно, что в пределе $V \rightarrow c$ время $t_c \rightarrow 0$, т.е. перекачка энергии тем быстрее, чем ближе скорость к критическому значению $V_c = \sqrt{gH}$. Профиль стационарной волны

становится более крутым: волна преобразуется в присоединенную волну солитоноподобного типа.

При достаточно медленном ускорении (см. ниже) амплитуда присоединенной волны в линейном приближении неограниченно растет. На практике высоту волны ограничивают нелинейности. Корабль может выбраться из собственной ловушки приложением ускоряющих импульсов, т.е. «толчками», как рекомендует Крылов. После перехода через критическое значение процесс обращается: волна постепенно отдает энергию кораблю вплоть до характерной скорости $V_f = 1.29\sqrt{gH}$. При переходе корабля на другую глубину или на другую ширину водоема (в канал или из канала, ширина которого сопоставима с характерным размером корабля) волна может оторваться от судна с изменением профиля на солитонную форму. (Это связано с тем, что скорость солитона $\sim \sqrt{g(H+h)}$ зависит как от глубины водоема, так и от высоты солитона h). Первый вариант очевиден: с уменьшением глубины волна отстанет от корабля, а с увеличением – обгонит его. Во втором случае необходимо учесть, что волна при входе в сужение увеличит свою высоту, следовательно, и скорость, поэтому уйдет вперед. Аналогично при входе в расширение она останется сзади. Оторвавшуюся присоединенную волну в дальнейшем будем называть солитоном Крылова.

Общее представление о связи параметров корабля и волн, при которых возникают резонансы Рассела и Крылова, дает рис. 7. По оси абсцисс отложена длина волны, относящаяся одновременно и к гравитационным волнам, и к предельным волновым возмущениям, генерируемым кораблем. Аналогично, по оси ординат отложен параметр $\frac{V^2}{g}$, в котором скорость одновременно относится и к скорости корабля, и к фазовой скорости волн. График построен при заданных значениях глубины и длины судна $H = 1$ м, $L = 7$ м. Вертикальная пунктирная линия соответствует резонансу Рассела $\lambda = H$, а горизонтальная – резонансу

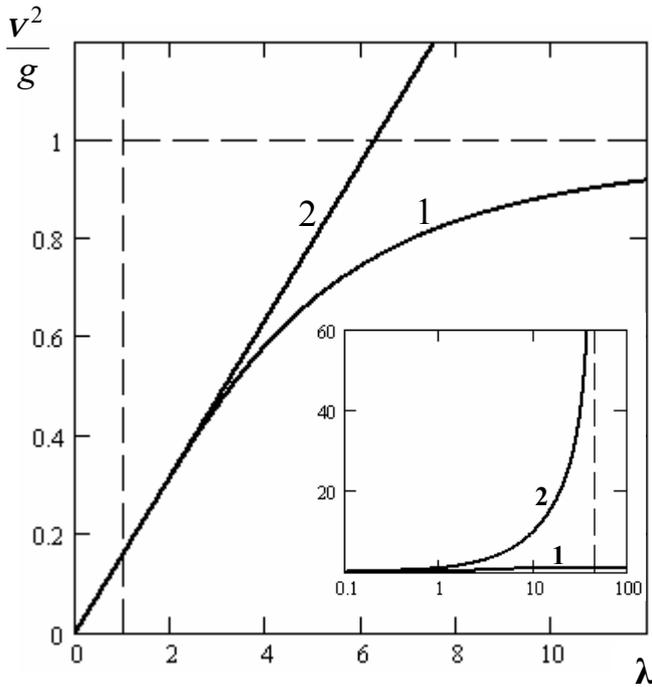


Рис. 7. Кинематическое представление резонансов Рассела и Крылова. Кривая 1 описывает дисперсию гравитационных волн, кривая 2 – уравнение предельных корабельных возмущений. Другие объяснения в тексте.

Крылова $V = \sqrt{gH}$. На врезке те же зависимости представлены в полулогарифмическом масштабе, что бы показать предел, к которому стремится длина корабельных волн (пунктирная линия $\lambda = 2\pi L$) при неограниченном возрастании скорости судна.

Сводка основных условий, при которых рождаются оба солитона, дана в таблице, а примерная форма солитонов показана на рис. 8.

Сравнительные характеристики солитонов, генерируемых судном, движущимся над ровным дном.

Параметры и условия образования	Солитон Рассела (RS)	Солитон Крылова (KS)
Размеры судна	Длина судна значительно превышает его ширину	
Скорость судна	$V_R = \sqrt{\frac{gH}{2\pi}}$	$V_K = \sqrt{gH}$
Длина стационарной волны	$\lambda_R = H$	$\lambda_K = 2\pi H$
Частота стационарной волны	$\omega_R = \frac{g}{V_R}$	$\omega_K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{g}{V_K}$
Скоростной интервал	Очень узкий	$(0.71 \div 1.29)\sqrt{gH}$
Реакция судна	Резкий удар, остановка	Мало заметна
Форма солитона	Двумерная волна (округлый холм)	Одномерная волна (округлый вал)

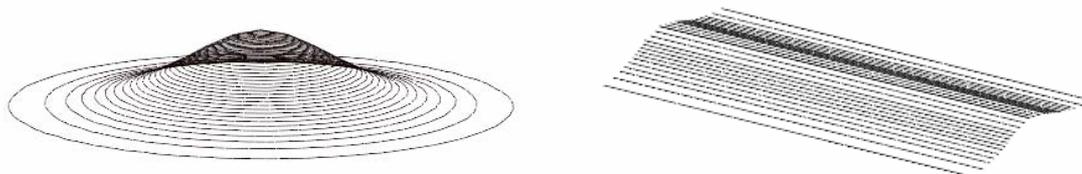


Рис. 8. Характерная форма поверхности солитонов Рассела (слева) и Крылова (справа).

Сделаем одно замечание. Рассматривая гидродинамику, не следовало бы забывать об акустике, поскольку они базируются на единых принципах. Здесь неуместно углубляться в сферу акустических проблем, и мы ограничимся одной аналогией. Имеется ввиду преодоление звукового барьера летательными аппаратами. Звуковые волны, в отличие от гравитационных, не имеют дисперсии, и поэтому следует ожидать специфики проявления эффекта. В момент равенства скоростей самолета и звука возникает сопутствующая самолету зона пониженного давления и резкого охлаждения, проявляющаяся в виде сконденсированного облака водяных паров (фото с выдержкой 1 мс). Явление длится доли секунды и при переходе на «сверхзвук» исчезает. Удивительно, то, что оно подразумевает «выметание» газа к фронту ударной волны и ныне связывается с сингулярностью Прандтля-Глауэрта.



Рис. 9. Прохождение звукового барьера. Время выдержки 1 мс.

8. Обсуждение

Известно, что движущийся корабль генерирует две волны: носовую и кормовую. Во всех отношениях они подобны друг другу за исключением фазы. Интерферируя, они образуют единую стационарную волну (рис. 10), и именно её взаимодействие с водоемом рассматривалось выше. Мы использовали приближения малых амплитуд для

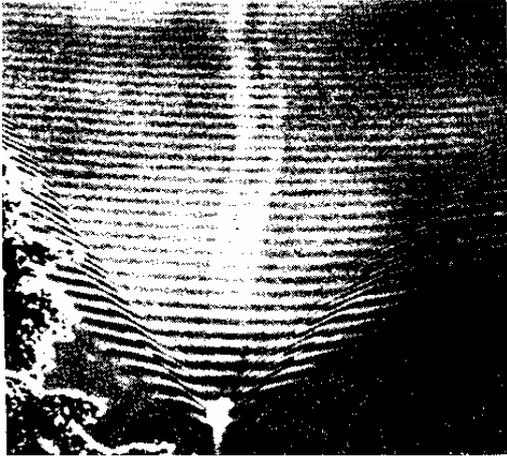


Рис. 10. След прошедшей моторной лодки.

синусоидальных волн, поэтому возникновение резонансов не зависит от амплитуды волны, и соответственно от массы судна. В разделе гидродинамики, изучающем генерируемые судами волны, обычно имеют дело с приближением «глубокой воды». Наш анализ относится к промежуточному случаю, когда длина волны сравнима с

глубиной.

При движении корабля по поверхности водоема сила сопротивления, связанная с потерями на генерацию волн, зависит от конкретных параметров его конструкции: отношения ширины к длине, носовых и кормовых обводов, осадки и т.п. Рассмотрение подобных деталей является предметом инженерной гидромеханики. Наша задача состояла в нахождении «особых точек» или, по терминологии В.И. Арнольда, «катастроф», возникающих при взаимодействии корабля с водной толщей. Под особыми точками мы понимаем точки в фазовом пространстве «скорость – глубина водоема – длина гравитационной волны», в окрестности которых происходит изменение характера движения в результате перехода энергии из одной формы в другую. Мы нашли (и, полагаем, что так думали сам первооткрыватель), что феномен Рассела выявляет такую особенность. Проанализировав известные и реконструировав неизвестные параметры классического опыта, мы пришли к заключению, что необходимо сравнить длину стационарной волны, генерированной баржей, с глубиной канала.

Опираясь на полуэмпирические данные, связывающие число Фруда с параметрами стационарной волны в пределе $L \gg \frac{V^2}{g}$, было замечено, что движение баржи Рассела удовлетворяет этому неравенству

(«медленный ход»). Тогда удалось получить основное условие «резонанса Рассела»: предельная длина волновых возмущений, генерируемых кораблем, совпадающая с длиной стационарной волны, равна глубине канала

$$\lambda = H.$$

Вводя явным образом скорость судна, это условие можно выразить через безразмерный параметр $\frac{V^2}{g\lambda}$, который целесообразно обозначить как **Ru** в честь Скотта Рассела. Число Рассела, очевидно, является модифицированным числом Фруда. Тогда условие резонанса Рассела запишется как **Ru** = 1.

Обобщая полученный результат, был сделан вывод, что ни осадка судна, ни ширина водоема не являются существенными лимитирующими факторами. Осадка баржи примерно 1 м лишь немного меньше глубины 1,8 м, но это никак не повлияло на проявление феномена. Условие, что ширина канала (≈ 10 м) больше длины солитона и ширины баржи, по-видимому, позволяет не учитывать влияния берега. Подчеркнем, что «резонанс» получается в линейном приближении, т.е. характер эффекта не должен зависеть от амплитуды волны. Следовательно, аналогичное явление может быть реализовано практически на любом корабле.

В этом пункте анализа оказалось возможным найти количественную связь между скоростью корабля и максимальным значением волнового числа создаваемых им возмущений. Было предложено связать эти параметры уравнением предельных (длинноволновых) корабельных возмущений:

$$\frac{1}{k''} = \frac{V^2}{g} \operatorname{th}\left(\frac{g}{V^2} L\right).$$

Значению «резонансной» частоты гравитационной волны $\omega' = \frac{g}{V'}$ в опыте Рассела отвечает период $T' \approx 1.0$ с, а ее торможение является аperiодическим процессом несколько большей длительности nT ($n > 1$),

скажем, два - три периода. Следовательно, ожидаемое время торможения составляет 2 - 3 с, что согласуется со словами Рассела «баржа внезапно остановилась». Это дает дополнительное подтверждение справедливости принятого нами анализа. Заметим, что в оценку скорости торможения не входит начальная скорость судна: $w_R = \frac{V'}{n\Gamma'} = \frac{g}{2\pi n} \approx \frac{1.56}{n} \text{ м/с}^2$.

Опыт Рассела пытались воспроизвести неоднократно, однако теперь можно утверждать: выполнить необходимые для этого условия методом проб и ошибок чрезвычайно сложно. Можно предположить, что и сам Рассел пытался хотя бы еще раз насладиться замечательным зрелищем, но больше ему уже не повезло. Скоростной интервал, при котором возбуждается резонанс, очень узок, и проходить его надо достаточно медленно. Хотя нам пока не удалось корректно определить предельную величину ускорения, с которым должно проходить критическое значение скорости $V' = \sqrt{\frac{gH}{2\pi}}$, мы все же попытались оценить её верхнее значение.

Перейти через критическую точку, очевидно, можно двумя способами: либо плавным ускорением (замедлением) на ровном дне, либо при постоянной скорости на дне с плавным уклоном. Критерием ровности дна служит отношение высоты неровностей (перепада глубин) по сравнению с глубиной. Усредненное значение неровности дна в канале Эдинбург – Глазго 1834 года на линейной базе 20 м мы приняли по порядку величины равным 1 см, т.е. $\frac{\Delta H}{H} \sim 10^{-2}$ и учли, что глубина пропорциональна квадрату

критической скорости: $\frac{\Delta H}{H} \sim \frac{1}{2} \frac{\Delta V'}{V'}$. Поэтому верхняя граница ускорения

$$w_R = \frac{\Delta V'}{(2 \div 3)\Gamma'} = \frac{\Delta V'g}{(2 \div 3)2\pi V'} = \frac{1}{2(2 \div 3)} \frac{\Delta H V' g}{H 2\pi V'} = \frac{1}{(8 \div 12)} \frac{\Delta H g}{\pi H} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2,$$

и ширина резонанса

$$\frac{\Delta V'}{V'} \leq \frac{w_R (2 \div 3)\Gamma'}{V'} = \frac{(2 \div 3)}{(8 \div 12)\pi} \frac{\Delta H g}{H} \frac{2\pi V'}{g} \frac{1}{V'} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta H}{H} \approx 5 \cdot 10^{-3}.$$

Поскольку в это выражение не входит скорость судна, то стоящую справа эмпирическую константу, точнее, ее оценочное значение, можно считать справедливой для любого корабля и любого водного бассейна.

Если вновь обратиться к основному условию «резонанса Рассела» $\lambda = H$, то бросается в глаза исчезновение в нем всякой специфичности корабля, который превращается в абстрактный объект, простую вынуждающую силу, генерирующую подходящее волновое возмущение. Это наводит на мысль, что непосредственной причиной развития неустойчивости данного типа является взаимодействие с водной толщей не самого судна, а генерируемых им волн. Ничто не препятствует запуску эффекта любым осциллятором, лишь бы он позволял создавать аналогичные волны. Отсюда вытекает вывод, что в открытом море, при надлежащих параметрах волн и глубин, могут наблюдаться резонансоподобные эффекты, причем в масштабах, коррелирующих с глубинами. О том, в какие стихийные явления они выливаются, говорить преждевременно, но пока нельзя исключить ни внезапной генерации больших волн при полном штиле, ни даже водных смерчей.

Несмотря на то, что в океанских просторах «банки» отнюдь не редкость, вероятность прохождения над одной из них судна с определенной, почти постоянной скоростью, безусловно, мала. Однако за большую историю судоходства такие опасные для кораблей события должны были происходить и фиксироваться. К сожалению, причины почти половины случаев гибели судов мирового флота остаются неизвестными. При поиске подобных фактов наше внимание привлекла ремарка известного исследователя моря В.В. Шулейкина о загадочных ударах судов, происхождение которых он объяснил подводными землетрясениями: *«...Землетрясение под водой порождает в самой воде продольные упругие волны, аналогичные звуковым. Эти волны при встрече с корпусом корабля дают впечатление настоящего удара. Весьма многочисленны записи в вахтенных журналах на кораблях о подобных*

«ударах» в таких областях океана, где никак нельзя допустить возможность действительно удара о подводную скалу: удар наносится не подводной скалой, а упругими волнами землетрясения. Именно в этих районах океана подводные землетрясения достаточно часты, для того, чтобы служить причиной для подобных ошибочных записей» [14].

Эта вполне логичная гипотеза имеет один, но важный изъян. При подчеркиваемой автором большой статистике, участники происшествий должны были фиксировать удары упругих волн приходящими со всевозможных направлений. Записи же однозначно свидетельствуют об ударах по курсу, и моряки приписывали их столкновению с подводной скалой только потому, что хорошо знали: при ударе о препятствие судно испытывает удар вдоль своей оси. Выше подчеркивалось, что «эффект Рассела» начинается с резкого торможения судна, а это есть ничто иное, как осевой удар. Противодействующая сила рассредоточена по всей подводной части судна и тем больше, чем больше его водоизмещение. Солитоны, в условиях продолжающей работать машины, могли не успеть сформироваться, а если и создавались, то не были замечены, что вполне понятно: в аварийной ситуации у капитана и команды была одна забота - судьба судна. Если в ходе дальнейших исследований наше объяснение найдет подтверждение, то станет возможным разработать эффективные приемы, повышающие безопасность мореплавания.

Вторая особая точка – «резонанс Крылова» $V \approx \sqrt{gH}$. Это условие можно также записать в виде $\frac{V^2}{gH} \equiv \text{Kr} = 1$, где число Крылова **Kr** является другим модифицированным числом Фруда. Резонанс Крылова легко воспроизводим. В своей последней книге-завещании [10] А.Н. Крылов высказал надежду, что теоретики уже владеют методом расчета связанных параметров. Однако его ожидания не оправдались – в рамках теории потенциального течения эффект не находит адекватного описания, и ему вообще не придают значения. Вероятно, поэтому родственное явление,

произошедшее во время торжественной церемонии 1995 года в акведуке, не было правильно интерпретировано: образовавшийся «солитон Крылова» приняли за «солитон Рассела» (см. п. 4, рис. 3). (Таким образом, классический опыт все еще остается не повторенным). Отметим, что стенки водовода, настолько узкого, что не развернуться и лодке, и тут не внесли заметных возмущений в условие формирования солитона. Это обстоятельство вполне согласуется со сделанным выше замечанием об отсутствии влияния стенок канала в опыте Рассела: волна, отраженная от берегов, не искажает заметным образом хода резонансных процессов. Мы не нашли этому разумного объяснения и рассматриваем пока как эмпирический факт. Ускорение, необходимое для перехода через «резонанс Крылова» без генерации солитона, можно оценить следующим

образом: $w_k \geq \frac{V_1}{(2 \div 3)T_1} = \frac{g}{(2 \div 3)2\pi\sqrt{2\pi}} \approx 0.25 \text{ м/с}^2$. Ширина резонанса Крылова

оказывается на два порядка больше ширины расселовского резонанса:

$\frac{\Delta V_1}{V_1} \approx 0.2$. Как и в случае Рассела, предельные значения ускорения и

добротности являются инвариантами в системе корабль-водоем.

Эффект, описанный Крыловым, своеобразно проявляется совершенно в других условиях. В фиордах, у берегов Норвегии нередко сталкиваются с явлением, получившим название «мертвой воды». Суда, движущиеся с небольшой скоростью, неожиданно «застревают», и попытки вырваться из плена путем увеличения оборотов двигателя обычно ни к чему не приводят: судно не увеличивает хода. Это бывает в местах, где в море впадают реки или стекают талые воды. Пресная вода не сразу перемешивается с морской, а, имея меньшую плотность, располагается над ней, отдельным слоем с четко выраженной горизонтальной границей раздела. Перемещаясь в верхнем слое, судно возбуждает внутреннюю волну на границе двух сред [15]. О том, что здесь имеет место «резонанс Крылова», свидетельствуют следующие рассуждения. Дисперсионное соотношение для гравитационных внутренних волн:

$$\omega^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \operatorname{th} k H_f,$$

где ρ_1 и ρ_2 - плотности пресной и морской воды соответственно, H_f - толщина слоя пресной воды, и критическое условие «резонанса Крылова» видоизменяется:

$$\tilde{V}_K = \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} g H_f}.$$

Обычно коэффициент $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ принимает значения от 0.11 до 0.12 [7].

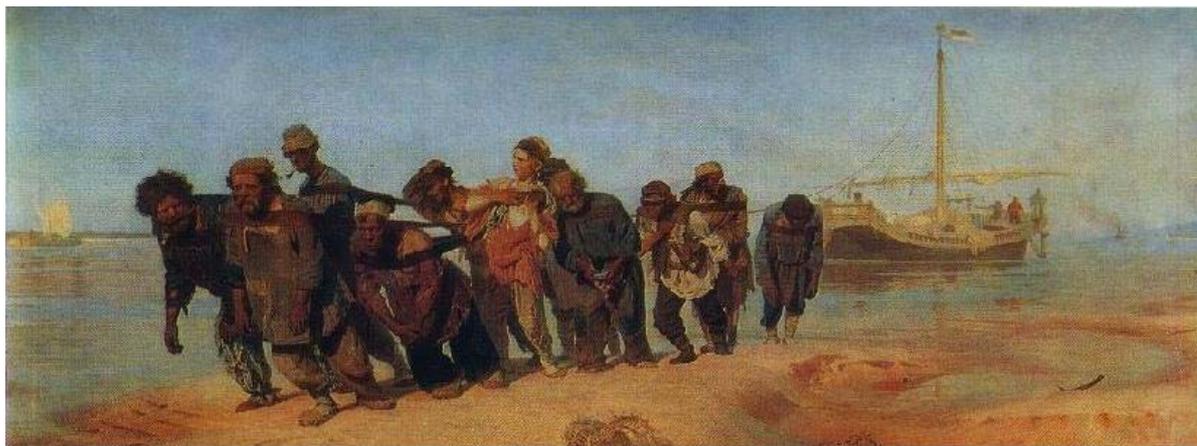
Следовательно, при толщине слоя пресной воды около 3 м, наслоенной на морскую воду много большей глубины, величина критической скорости должна составлять около 2 м/с. Такие значения скорости типичны для небольших судов, маневрирующих в узких заливах.

9. Заключение

Корабль, движущийся по водной поверхности, генерирует гравитационные волны, и они связывают его с водоемом в единую систему. Эта система имеет в фазовом пространстве параметров «скорость судна V , длина волны λ , глубина H » две особые точки $\mathbf{Ru} = 1$, $\mathbf{Kr} = 1$, где введенные нами числа Рассела $\mathbf{Ru} = \frac{V^2}{g\lambda}$ и Крылова $\mathbf{Kr} = \frac{V^2}{gH}$ являются модифицированными выражениями известного в гидромеханике числа Фруда $\mathbf{Fr} = \frac{V^2}{gl}$. Поведение системы в окрестности этих точек может иметь резонансный характер, сопровождаясь образованием солитонов. Возникновение резонансов определяется величинами ускорения $\frac{dV}{dt}$ и уклона дна $\frac{dH}{dx}$. Определены границы, в пределах которых в системе возникают резонансы и образуются солитоны. Оба явления не вытекают из уравнений гидродинамики [7, 16, 17] и, вероятно, связаны с существованием водных структур, обнаруженных в лабораторных

экспериментах (масштаб 10^{-2} см [18]), и в мировом океане (масштаб $1-10^7$ м [19]).

Анализ показывает, что в истории с резонансом Рассела рано ставить точку. Без пары его коней никак не удастся повторить загадочный феномен. Но чтобы авторов не заподозрили в особой приверженности к теме «Роль лошади в науке», помещаем фотографию с картины Ильи Репина «Бурлаки на Волге».



Авторы выражают глубокую благодарность за помощь в работе и обсуждение ее результатов Г.И. Соловьевой (Государственный архив РФ), Г.М. Мельниковой (ФИАН), В.Е. Захарову (Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау), А.Г. Молчанову (ФИАН), В.В. Смолянинову (ИМАШ РАН), Е.А. Куликову и А.Б. Рабиновичу (Институт океанологии РАН), А.В. Пустошному (ЦНИИ им. А.Н. Крылова), Крису Элбеку (Chris Eilbeck) и Дикку Хазелвуду (Dick Hazelwood) (Великобритания), Дж. А. Пинкстеру (J.A. Pinkster) (Дания).

Литература.

1. *Franks F.* Water: 2nd Edition A matrix of life. Cambridge: Royal Society of Chemistry, 2000.
2. *Finney J.L.* The water molecule and its interactions: the interaction between theory, modeling and experiment. *J. Mol. Liquids.* Vol. 90, 2001. pp. 303-312.
3. *Errington J.R., Debenedetti P.G.* Relationship between structural order and the anomalies of liquid water. *Nature:* Vol. 409, 2001. pp. 318-321.
4. *M. F. Chaplin.* A proposal for the structuring of water. *Biophys. Chem.* Vol. 83, 2000. pp. 211-221.
5. *Müller A., Bögge H., Diemann E.* Structure of a cavity-encapsulated nanodrop of water. *Inorg. Chem. Commun.* Vol. 6, 2003. pp. 52-53. Corrigendum: idem, Vol. 6, 2003 p. 329.
6. *Roy R., Tiller W.A., Bell I., Hoover M.R.* The structure of liquid water; novel insights from materials research; potential relevance to homeopathy. *Mat. Res. Innovat.* Vol. 9-4, 2005. pp. 93-124.
7. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Изд. Мир, 1981. 600 с.
Lighthill, J. Waves in Fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
8. *Russel, J. Scott.* Report on Waves. British Assotiation Reports, 1844.
9. *Korteweg, D.J. & de Vries, G.* *Phil.Mag.* Vol. 39, 1895. 422-443.
10. *Крылов А.Н.* Мои воспоминания. Л.: Изд. Судостроение, 1984. 480 с.
11. *Филиппов А.Т.* Многоликий солитон. М.: Наука, 1986. 224 с.
12. *Nature,* Vol. 376, No. 6539, 1995, p. 373; *Optics and Photonic News,* Vol. 6, No. 10, 1995, p. 9.
13. *Waterways World,* April 2005.
14. *Шулейкин В.В.* Физика моря, 4-ое изд. М. Наука, 1968. с. 210.

15. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд. АН СССР, 1957. 502 с.
16. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Изд. Наука, 1997. 815 с.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Курс теоретической физики. Т. 5. Гидродинамика. М.: Наука, 1985.
18. *Смирнов А.Н., Сыроешкин А.В., Лапшин В.Б., Балышев А.В., Лебедев И.М.* Супранадмолекулярные комплексы воды. Рос. хим. журн. Т.48., 2004. с. 125-135.
19. *Rantsev-Kartinov V.A.* Evidences for skeletal structures in the ocean. Phys. Letts. A. Vol. 334/2-3. pp. 234-242.