

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ**



*имени  
П.Н. Лебедева*

**Ф И А Н**

ПРЕПРИНТ

**11**

Д.С. ЧЕРНАВСКИЙ, А.П. НИКИТИН,  
О.Д. ЧЕРНАВСКАЯ, О.И. КРИВОШЕЕВ,  
Д.С. ЩЕПЕТОВ

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ  
ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА  
В КУБИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ**

МОСКВА 2006

Проблема возникновения и исчезновения динамических окон в дискретных отображениях важна как в фундаментальном, так и в прикладном аспектах. Такие отображения часто используются в естественных и технических науках, а также в экономике и социологии. В хаотическом режиме горизонт прогнозирования поведения системы ограничен. В случае же образования «окна» горизонт прогнозирования бесконечен. Переход в окно и выход из него зависит от характера изменения управляющего параметра, от начальных условий и, что особенно важно, от деталей расчетной схемы. Вообще говоря, любая реальная система погружена в шумовое поле, влияние которого и определяет достоверность последней значащей цифры. Это означает, что в реальных задачах точность исходной информации (например, временного ряда) всегда ограничена, и мы имеем дело с округленными величинами. Поэтому и точность расчета должна быть адекватна целям задачи. Обработка данных в рамках модели с большей точностью не только не целесообразна, но может привести к артефактам.

В настоящей работе проведено аналитическое исследование возникновения динамических окон и их структурной (параметрической) устойчивости. Обсуждается проблема влияния вариантов округления (динамического или стохастического) на характеристики отображения. Представленные результаты могут быть полезны, когда наблюдаемый временной ряд в действительности порожден каким-либо сравнительно простым дискретным отображением, а входные величины определены с некоторой фиксированной точностью.

The problem of origin and disappearance of dynamic windows in different discrete maps is of fundamental as well as practical importance. Such maps are often applied in natural and technical science, economics and sociology. In the chaotic mode the horizon of prediction is strictly limited. Within a periodic window the horizon becomes actually unlimited. Transition to the window or out of it depends on changing control parameter, initial conditions, and (the most important) details of computing scheme. One can conclude that any real-world system is immersed into a noise field of some kind. The influence of the field determines the validity of the ultimate significant digit. It means that in any practical task the precision of the input information (time series, for example) is always limited and we are working with round-off values. Therefore the precision of calculations has to be adequate to the purposes of specific task. Data processing in the framework of high precision model is not expedient and could lead to some artifacts.

In the present paper we conducted analytical investigation of dynamic windows origin and their structural (parametric) stability. The influence of round-off option (dynamic or stochastic) on the map characteristics is discussed. The represented results can be used when the registered time series have been generated by some simple discrete map and the input data have been specified with some fixed precision.

## Введение.

Явление динамического хаоса в одномерных дискретных отображениях  $x_{i+1} = F(x_i)$  известно и достаточно хорошо изучено. Прежде всего, это касается логистического  $x_{i+1} = v(x_i - x_i^2)$ , кубического в однопараметрическом  $x_{i+1} = v(x_i - x_i^3)$  или двухпараметрическом  $x_{i+1} = a - bx_i + x_i^3$  вариантах, четвертого  $x_{i+1} = 1 - ax_i + bx_i^4$  отображений и некоторых других. Их свойства исследовались как аналитически, так и в ходе компьютерных вычислительных экспериментов.

Отметим, что, в основном, рассматривался вопрос о сценариях возникновения хаоса. Так, изучались типичные последовательности бифуркаций, наблюдаемых при адиабатически медленном изменении управляющих параметров, при котором происходит переход из области регулярного поведения (при  $v < v_{cr}$ ) до критической точки  $v = v_{cr}$  в область хаоса (при  $v > v_{cr}$ ). Среди этих сценариев — переходы к хаосу через каскад удвоений, через перемежаемость, через квазипериодичность. Были выявлены закономерности количественной универсальности и скейлинговых свойств динамики нелинейных систем у порога хаоса [Фейгенбаум, 1983].

В «закритической» области  $v > v_{cr}$  обнаруживается сложная картина областей, включающая множество ненулевой меры, соответствующее хаотическим режимам, и бесконечное число так называемых «окон» динамических периодических режимов [Шарковский и др., 1986]. Было найдено, что внутри каждого окна периодических режимов наблюдается каскад удвоений периода, завершающийся в соответствующей критической точке переходом к хаосу [Кузнецов, Кузнецов, 1993]. Также активно исследовалось влияние внешнего шума на возникновение хаоса (см. например, [Crutchfield et al, 1982], [Кузнецов, Капустина, 2000]).

Кубическое отображение  $x_{i+1} = v(x_i - x_i^3)$  представляет особый интерес, так как, в отличие от логистического, имеет два экстремума, т.е. является бимодальным. В частности, оно может служить простой моделью такого понятия теории динамических систем как «перемешивающий слой» [Колупаев, Чернавский, 1997; Чернавский, 2004, Курдюмов и др., 2005].

В кубическом отображении происходят следующие бифуркации [Rogers et al, 1983; Лоскутов, Михайлов, 1990; Palacios, 2002; Чернавский, 2004]. При  $v < 1$  имеется единственное устойчивое стационарное состояние  $x = 0$ . При  $1 < v < 2$  существуют два устойчивых состояния — одно положительное, другое — отрицательное, а конечный результат определяется начальными условиями. При  $2 < v < v_{cr}$  может иметь место хаотический режим, но смены знака  $x_i$  не происходит, т.е. этот выбор предопределен начальными условиями. При  $v > v_{cr} = 3\sqrt{3}/2 \approx 2,598$  тоже имеют место как хаотические, так и динамические режимы. При этом происходят перескоки от положительных к отрица-

тельными значениям  $x_i$  при любых ненулевых начальных условиях из  $(-1;1)$  (или, точнее, любых отличных по модулю от 0 и от 1 значениях  $|x_0| < \sqrt{(\nu+1)/\nu}$ ). При  $\nu > 3$  величина  $x_i$  неограниченно возрастает с увеличением  $i$ .

В перечисленных работах, в которых кубическое отображение было использовано для моделирования перемешивающего слоя, принималось, что параметр  $\nu$  медленно и монотонно уменьшается с течением времени (т.е., с возрастанием номера итерации), например, по экспоненциальному закону  $\nu = \nu_0 \exp(-t \gamma)$ , где  $\gamma \ll 1$ , и  $\nu_{cr} \leq \nu_0 \leq 3$ . В данной работе мы акцентируем внимание на другом аспекте кубического отображения. Именно, известно, что при изменении управляющего параметра  $\nu$  в области  $\nu > \nu_{cr}$  хаотическое поведение системы (перескоки) перемежается сравнительно узкими областями  $\Delta\nu$ , в рамках которых возникают устойчивые циклы и поведение системы жестко детерминировано.

Проблема возникновения и исчезновения динамических окон важна как в фундаментальном, так и в прикладном аспектах. Так, упомянутые выше модели часто используются в естественных и технических науках, а также в экономике и социологии. Во всех случаях речь идет о прогнозировании поведения системы. В хаотическом режиме горизонт прогнозирования ограничен. В случае образования «окна» горизонт прогнозирования бесконечен.

Тем не менее, переход в окно и выход из него зависит от изменения управляющего параметра, от начальных условий и, что особенно важно, от деталей расчетной схемы (точности расчета и характера округления). Забегая вперед, отметим, что в зависимости от расчетной схемы могут появляться так называемые «ложные» окна (те, которые отсутствуют при более или менее точном расчете) и/или исчезать реальные динамические окна.

С другой стороны, точность расчета должна быть адекватна целям конкретной задачи. Это означает, что в реальных задачах точность исходной информации (например, временного ряда) всегда ограничена. Обработка этих данных в рамках модели с большей точностью не только не целесообразна, но может привести к артефактам (возникновению ложных окон).

Цель предлагаемого сообщения - исследование возникновения и исчезновения окон (в частности, ложных) в рамках модели кубического отображения.

## **2. Динамические окна в перемешивающем слое.**

Обсудим подробнее смысл термина. Динамическими окнами будем называть интервал  $\Delta\nu$  управляющего параметра  $\nu$ , внутри которого имеется притягивающий цикл, содержащий  $k$  итераций. Далее число  $k$  будем называть длиной периода. Уместно сделать несколько замечаний.

і). Предполагается, что длина периода конечна и не велика. Дело в том, что в реальных задачах длина последовательности  $L$  всегда ограничена. Если

длина периода  $k$  больше  $L$ , такая последовательность неотличима от хаотической. Более того, при компьютерном счете массив чисел велик, но ограничен (в современных компьютерах он порядка  $10^{20}$ ). Поэтому последовательность, полученная в результате итераций любого дискретного числа отображений, будет периодической. При этом длина периода будет не больше  $10^{20}$ .

ii). Слова «притягивающий цикл» означают, что существует конечный интервал условий  $\Delta x$ , таких, что все траектории, выходящие из этого интервала, с течением времени выходят на один и тот же цикл длины  $k$ . Это означает, что «окно» динамически устойчиво (не исчезает при малых вариациях начальных условий).

iii). Интервал управляющего параметра  $\Delta v$  конечен и достаточно велик. Это означает, что этот интервал должен быть больше допустимой (в данной задаче) погрешности измерений параметра (или компьютерного счета). То есть должно выполняться условие  $\Delta v > \delta v$ . В этом случае динамическое окно можно считать параметрически (или структурно) устойчивым.

iv). Как мы увидим ниже, понятие «цикл длины  $k$ » должно быть уточнено. В действительности в окне имеет место квазипериодический режим. Он содержит два (или более) перемежающихся периода одинаковой длины с близкими промежуточными значениями.

## 2.1. Аналитическое исследование возникновения и устойчивости окон.

Известно, что динамическая устойчивость периодических решений зависит от величины

$$\lambda = \left| \prod_{i=0}^{k-1} F'(x_i) \right| - 1 \quad (1)$$

где  $F'(x_i)$  - первая производная функции  $F(x_i)$  в точке  $x_i$ ,  $k$  — длина цикла. Величина  $\lambda$  играет ту же роль, что и число Ляпунова в непрерывных динамических системах.

Из (1) вытекает ряд следствий.

Во-первых, устойчивый цикл должен содержать точку  $x_0$ , соответствующую вершине  $x_v$  функции  $F(x)$ . Действительно, если  $x_0 = x_v$ , то  $F'(x) = 0$  и  $\lambda = -1$ , т.е. цикл устойчив (можно легко показать, что для кубического отображения  $x_v = \pm 1/\sqrt{3}$  и не зависит от  $v$ ).

Если точка  $x_0$  близка к вершине, так что  $|F'(x_0)| = \varepsilon < 1$ , то знак  $\lambda$  зависит от величины  $\prod_{i=1}^{k-1} F'(x_i)$ . Производные  $F'(x_i)$  во всех точках  $x_i$  не равны нулю и могут быть достаточно велики. В этом случае знак  $\lambda$  зависит от длины цикла. Если цикл не содержит точек внутри интервала  $x_0 \pm \Delta x$  и производные  $|F'(x_0 \pm \Delta x)| \geq 1$ , то цикл наверняка неустойчив. Отсюда и следует, что устойчи-

вое окно должно содержать точку  $x_0$ , близкую к вершине.

Во вторых, длина устойчивого цикла  $k$  должна быть достаточно мала. Действительно, из (1) следует, что в устойчивом цикле

$$\sum_{i=0}^{k-1} \ln|F'(x_i)| \leq k \ln(|F'(x_0 \pm \Delta x_0)|). \text{ Обозначив } \sum_{i=0}^{k-1} \ln|F'(x_i)| = k \langle \ln|F'(x_i)| \rangle, \text{ полу-}$$

$$\text{чим оценку для длины устойчивого цикла } k \leq \frac{\ln(|F'(x_0 \pm \Delta x_0)|)}{\langle \ln|F'(x_i)| \rangle}.$$

Величина  $\ln(|F'(x_0 \pm \Delta x_0)|)$  зависит от точности определения величины  $x_0$  и/или точности счета. Величина  $\langle \ln|F'(x_i)| \rangle$  в силу усреднения является грубой (в смысле Андронова), т.е. слабо зависит от малых девиаций.

Таким образом, устойчивые циклы должны содержать точки, близкие к вершинам функции  $F(x)$  и, кроме того, не могут быть слишком длинными.

## 2.2. Структурная устойчивость динамических окон.

Обсудим вопрос о том, при каких значениях параметра  $v$  могут возникать динамические окна и какова их структурная (параметрическая) устойчивость. Пусть имеется отображение:

$$x_{i+1} = F(v, x_i), \quad (2)$$

где  $v$  — управляющий параметр. Пусть одна из точек  $x_i$ , для определенности  $x_0$ , находится на вершине функции  $F(v, x)$ . Цикл длины  $k$  при данном  $v$  существует, если точка  $x_k$  совпадает с точкой  $x_0$ , т.е.

$$x_0 - x_k = 0. \quad (3)$$

Согласно (2),

$$x_k = F(v, x_{k-1}) = F(v, F(v, x_{k-2})) = F(v, F(v, F(v, x_{k-3}))) = \dots = F(v, F(v, \dots F(v, F(v, x_0) \dots))). \text{ Тогда условие (3) приобретает вид}$$

$$F(v, k) = F(v, F(v, \dots F(v, F(v, x_0) \dots))) - x_0 = 0 \quad (4)$$

Выражение (4) является алгебраическим уравнением, определяющим значения параметра  $v$ . Цикл длины  $k$  существует при тех значениях параметра, которые являются вещественными и положительными корнями уравнения (4). Обозначим такие корни  $v_j(k)$ , где  $j$  — номер корня.

Цикл, соответствующий корню  $v_j(k)$ , структурно устойчив при следующих условиях.

1). При малых изменениях  $v$  величина  $F(v, k)$  в области  $v \cong v_j(k)$  меняется мало. Отсюда следует условие  $\left. \frac{\partial F(v, k)}{\partial v} \right|_{v=v_j(k, x_0)} = 0$ .

Оно означает, что в точке  $v_j(k, x_0)$  совпадают два (или более) корней функции  $F(v, k)$ . Иными словами, в точке  $v_j(k, x_0)$  кривая  $F(v, k)$  касается абсциссы. Далее такие точки будем обозначать как  $v_j^{(l)}(k, x_0)$ . Дополнительную информацию о ширине устойчивости  $\Delta v$  такого окна дает вторая производная:

$$\sigma = \left. \frac{\partial^2 F(v, k)}{\partial v^2} \right|_{v(k)=v^{(t)}(k)}. \quad (5)$$

Ширина окна обратно пропорциональна корню из этой величины.

2). Точки существования и устойчивости других циклов  $v_j^{(l)}(l)$  (длины  $l \neq k$ ) не должны совпадать с точками  $v_j^{(k)}(k, x_0)$  (или располагаться вблизи них). В противном случае может возникнуть перемежаемость, т.е. непредсказуемые перескоки с цикла длины  $k$  на циклы длины  $l$  и обратно. В случае, когда  $l$  кратно  $k$ , совпадение корней неизбежно, но оно не приводит к перемежаемости.

Обсудим случай, когда корни уравнения (4) сближаются, но не сливаются, так что между ними остается интервал  $\Delta v \cong \varepsilon \ll 1$ . Отметим, что именно этот случай, в свете сказанного выше, является более общим. Внутри этого интервала функция  $F(x)$  не равна нулю, но мала в меру  $F(x) \cong 2\sigma\varepsilon^2$ . Это означает, что конечная точка цикла не совпадает с  $x_0$  и равна  $x_k = x_0 + \delta x$  (где  $\delta x \cong 2\sigma\varepsilon^2$ ). Девиацию  $\delta x$  можно компенсировать изменением величины  $x_0$  так, чтобы  $F(v_a, x_0 + \delta x_0) = 0$ , где  $v_a$  — любое значение параметра  $v$  внутри интервала  $\Delta v = v_{n+1} - v_n$ , а величина  $\delta x_0$  того же порядка, что и  $\delta x$ . При этом должно соблюдаться условие динамической устойчивости цикла, т.е.  $F'(x_0 + \delta x_0) \ll 1$ . Последнее накладывает ограничение на величину  $\delta x_0$  и, следовательно, на ширину окна  $\Delta v$ .

Отсюда следуют выводы.

1. На краях окна возникают циклы, содержащие точку  $x_0$ , но отличающиеся значениями  $x_i$  на величину порядка  $\delta x_i \ll |F'(x_i)|/\delta x_0$ .

2. В интервале  $\Delta v$  возникают циклы той же длины  $k$ , не включающие точку  $x_0$ , но проходящие через близкие к ней точки  $x'_0 = x_0 \pm \delta x_0$ . Промежуточные точки также близки точкам других циклов в меру  $\delta x_i$ . Это означает, что в окне  $\Delta v$  имеет место перемежаемость циклов одинаковой длины, но отличающимися значениями  $x_i$ . Иными словами, в окне  $\Delta v(k)$  возникает квазипериодический режим с длиной периода  $k$ , в котором значения  $x_i$  варьируются в пределах  $\delta x_i$ . Если величина  $\delta x_i$  не выходит за пределы точности (измерения, расчета и т.д.) величины  $x$ , то такой квазипериодический режим не отличается от периодического.

В нашем случае интерес представляет динамические окна в области хаотического режима с перескоком. Они располагаются в области параметров  $3 > v > v_{cr}$ . Функция  $F(v, k)$  в уравнении (4) представляет собой полином степени  $3^k + 1$ . На рис.1 приведены кривые  $F(v, k)$  для разных  $k$ .

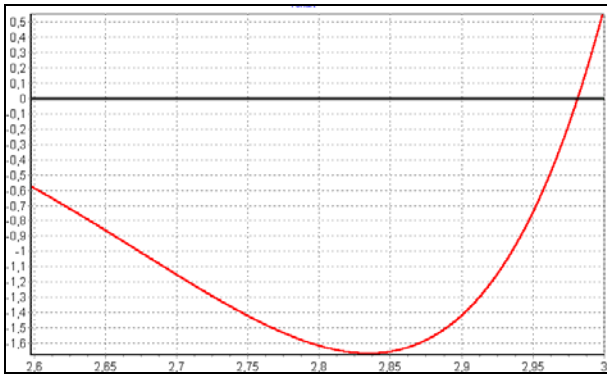


Рис. 1а.  $F(v, 3)$

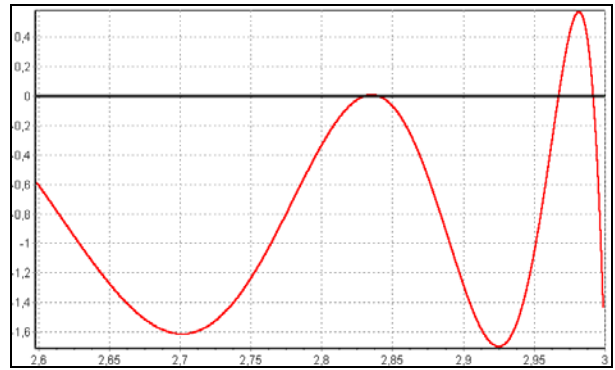


Рис. 1б.  $F(v, 4)$

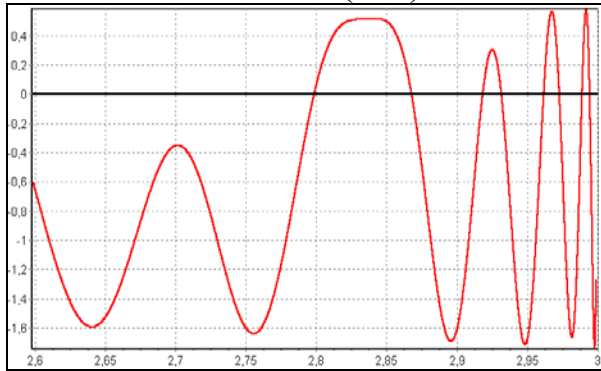


Рис. 1с.  $F(v, 5)$

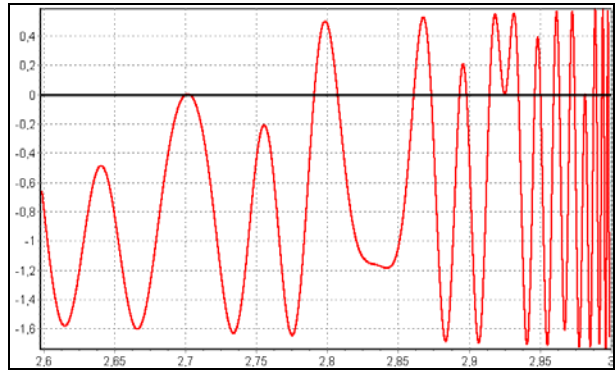


Рис. 1д.  $F(v, 6)$

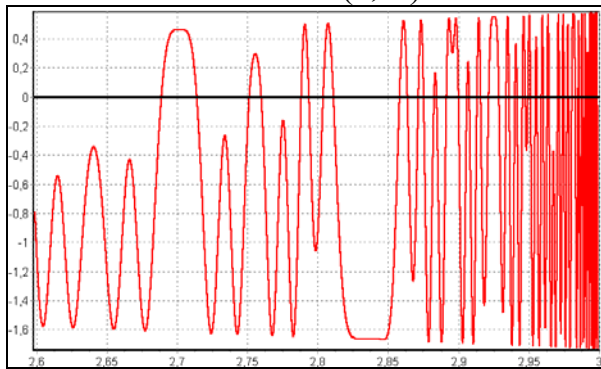


Рис. 1е.  $F(v, 7)$

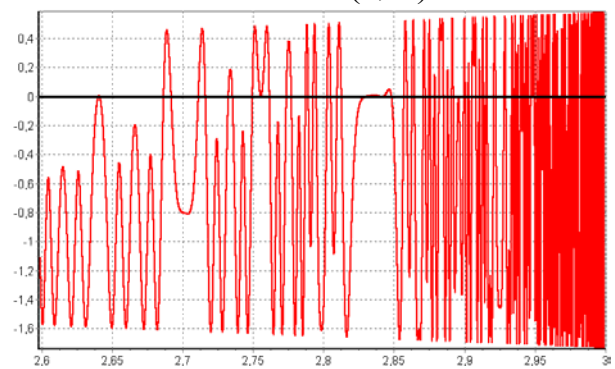


Рис. 1ф.  $F(v, 8)$

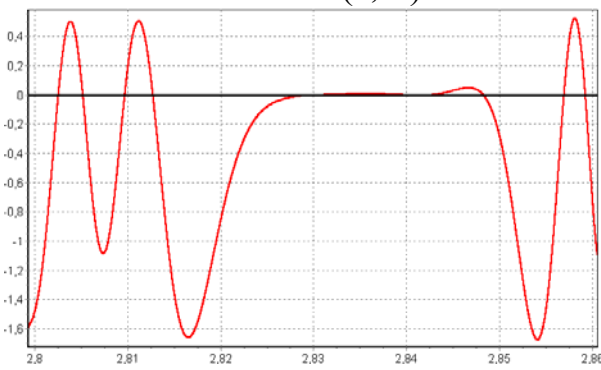


Рис. 1г.  $F(v, 8)$  (фрагмент)

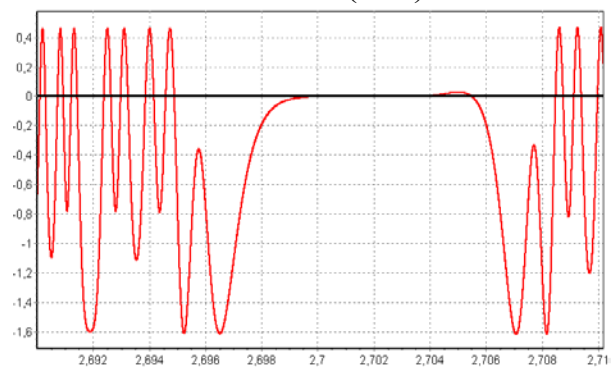


Рис. 1х.  $F(v, 12)$  (фрагмент)



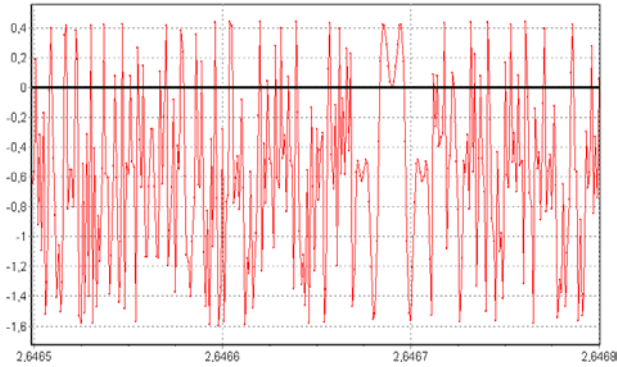


Рис. 1i.  $F(v, 20)$  (фрагмент)

Из этих рисунков видно, например, что окно цикла  $k = 6$  в окрестности  $v \approx 2.7$  возникло в результате сближения двух корней, а окно кратного цикла  $k = 12$  – в результате скопления многих корней. Характерные особенности других окон отмечены в таблице 1 (в приложении).

На рис. 1j показана экспериментальная зависимость

$$\lambda^*(v) = \left\langle \ln \left| \prod_{i=L_s}^{L_f} F'(v, x_i) \right| \right\rangle,$$

где усреднение выполнено по набору из  $M = 1000$  последовательностей  $\{x_i\}$  с генерируемыми случайным образом начальными значениями, а  $L_s$  и  $L_f$  — достаточно велики для того, чтобы система успела «выйти на аттрактор» (см. раздел 3). Для определенности  $L_s = 1800$  и  $L_f = 2700$ .

следовательностей  $\{x_i\}$  с генерируемыми случайным образом начальными значениями, а  $L_s$  и  $L_f$  — достаточно велики для того, чтобы система успела «выйти на аттрактор» (см. раздел 3). Для определенности  $L_s = 1800$  и  $L_f = 2700$ .

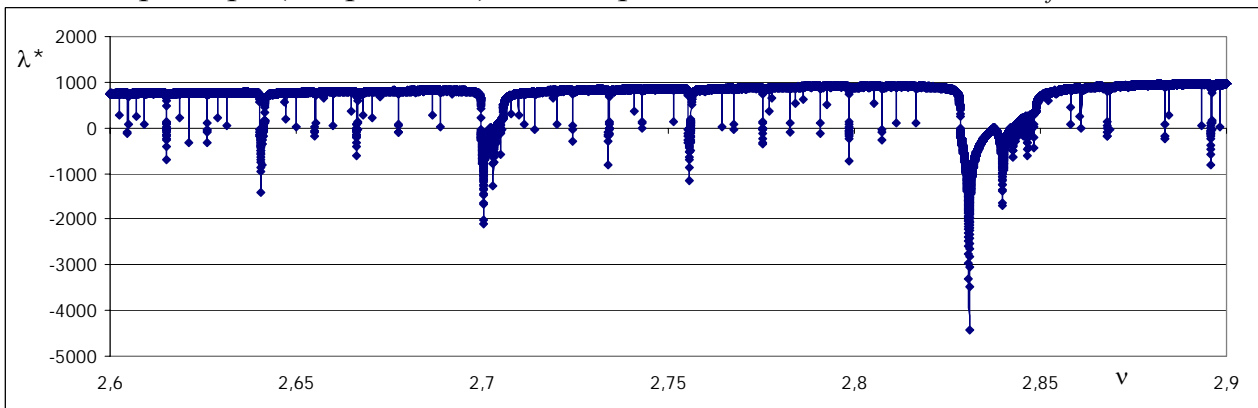


Рис. 1j. Усредненная характеристика устойчивости траекторий  $\lambda^*(v)$ .

Некоторые циклы проявляют более сложную картину. Например, цикл №8 с  $k = 5$  представляет собой (в приближении *double*) последовательность из 4 квазипериодических циклов общей длиной 20 элементов (0.576193661; 1.128393521; -0.904004731; -0.484399448; -1.086883211; 0.577739378; 1.12839954; -0.904054491; -0.484187657; -1.086699188; 0.576367262; 1.128395405; -0.904020308; -0.484333151; -1.086825647; 0.577310102; 1.128400301; -0.904060781; -0.484160885; -1.0866759). Показатели  $\lambda$  равны, соответственно, 1.67; -0.10; 1.27; -0.91. Общий цикл из 20 точек оказывается устойчив, так как  $\lambda = -0.49$ .

### 3. Техника вычислительных экспериментов.

Общепринятая технология компьютерного исследования отображений состоит из следующих этапов [Кузнецов А.П., 2000].

1). Выбираются интересующее значение параметра и случайное начальное значение  $x_0$ .

2). Выполняется несколько сот итераций отображения для того, чтобы система «вышла на аттрактор».

3). Выполняется несколько сот итераций непосредственно на аттракторе.

4). Для этих итераций текущее значение  $x_i$  сравнивается с предыдущими для определения периода движения  $T$ . Сравнение подразумевает достижение некоторой высокой, априорно заданной точности совпадения.

Первым качественным показателем поведения системы является развертка ряда  $\{x_i\}$ , которая может быть использована для визуальной оценки. На рис. 2а показан фрагмент модельной последовательности для кубического отображения при значении параметра  $\nu$ , соответствующем хаотическому режиму. Для сравнения на рис. 2б показан вид последовательности при попадании в динамическое окно.

Немаловажно, что выход на циклический режим может происходить не быстро. В зависимости от начальных значений он может потребовать от единиц до нескольких тысяч итераций. Разумеется, получив при компьютерном моделировании первые  $L$  элементов последовательности, нельзя гарантировать, что выход на цикл не произойдет на  $L+1$  элементе. Поэтому выбор  $L$  может основываться на различных критериях. При исследовании свойств формальной модели  $L$  может быть настолько велико, насколько позволяют имеющиеся вычислительные мощности.

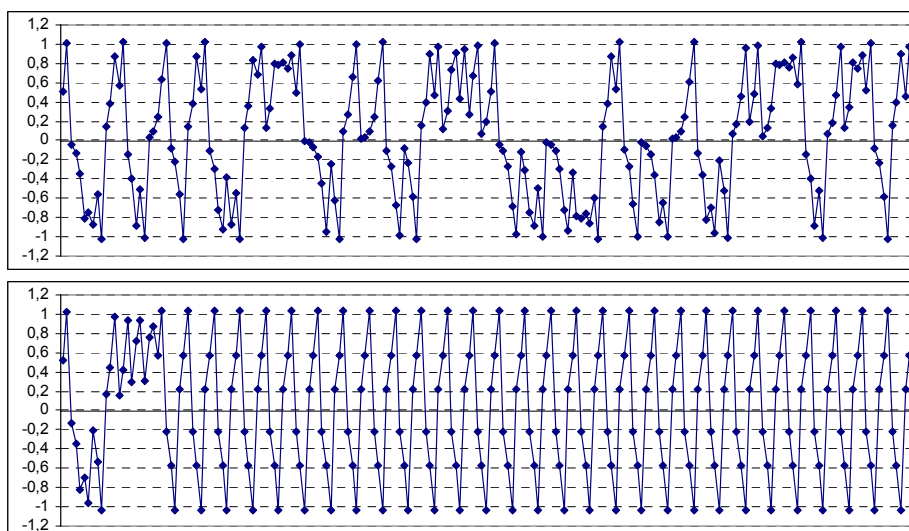


Рис. 2. Развертки кубического отображения в хаотическом режиме при  $\nu = 2.67$  и  $x_0 = 0.2$  (вверху, 2а) и в периодическом окне  $W_3$  при  $\nu = 2.70$  и  $x_0 = 0.2$  (внизу, 2б)

В нашем случае мы ограничили  $L$  тем соображением, что в большинстве практических задач длина временного ряда  $\{x_i\}$ , используемого в целях прогнозирования или принятия решений, не превышает нескольких тысяч элементов.

Другой характеристикой таких последовательностей является гистограмма плотности распределения  $H(r)$ . Ее построение сводится к стандартной процедуре. Во-первых, диапазон возможных значений  $x_i$  разбивается на осмысленное количество  $R$  интервалов  $r_j$  одинаковой ширины  $\Delta R = (x_{max} - x_{min})/R$ . Во-вторых, подсчитывается количество элементов  $x_i$ , попадающих в каждый интервал  $r_j$ .

Параметр  $R$  выбирается экспертным путем или с помощью эмпирических формул. При этом руководствуются теми общими соображениями, что недостаточное  $R$  нивелирует важные подробности, а избыточное  $R$  приводит к излишней «изрезанности» гистограммы. В нашем случае  $R$  было выбрано и с тем расчетом, чтобы обеспечить удобные для интерпретации интервалы  $\Delta R = 0.01$ .

Отметим, что для получения адекватных гистограмм необходимо, по крайней мере, несколько тысяч элементов последовательности. На рис. 3 показаны гистограммы (при  $L = 10000$ ), соответствующие разверткам с рис. 2.

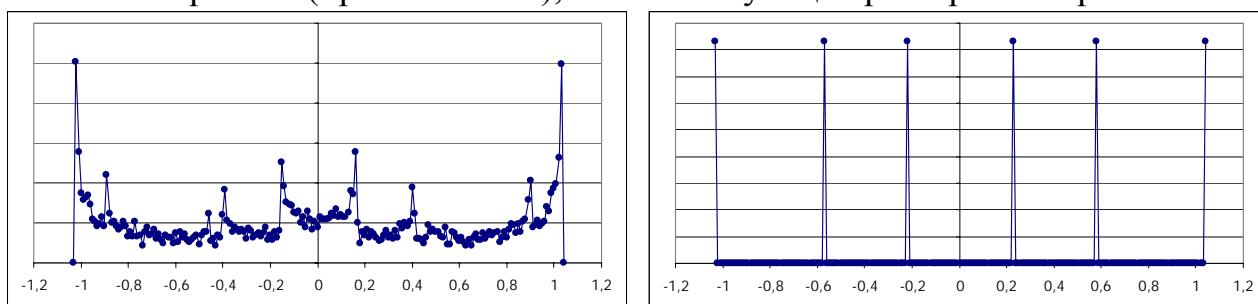


Рис. 3. Гистограммы плотности распределения  $H(r)$ , соответствующие хаотическому режиму с рис. 2а (слева, 3а) и циклическому режиму с рис. 2б (справа, 3б).

Очевидным эффектом, проявившимся на рис. 3б, является «распад» непрерывного графика  $H(r)$  на отдельные «точки» при переходе к циклическому процессу.

Другой критерий существования цикла связан со спецификой кубического отображения в упомянутом интервале значений параметра  $v_{cr} \leq v \leq 3$ . Здесь важную роль играют перескоки между квадрантами. При этом необходимо отличать два понятия: «период цикла» и «периодичность». Под «периодичностью»  $P$  ниже понимается характерное количество элементов последовательности, через которое происходит изменение знака  $x_i$ . Поэтому на рис. 2б период  $T = 6$  сочетается с периодичностью  $P = 3$  элемента.

Генерация  $\{x_i\}$  при различных начальных условиях и фиксированном управляющем параметре, вообще говоря, должна приводить к повторению вида частотной гистограммы. Однако на самом деле может оказаться, что неко-

торые реализации (траектории) обладают нехарактерным переходным поведением, которое продолжается достаточно долго до перехода в регулярный циклический режим. Очевидным способом изучения таких особенностей является генерация достаточно больших массивов реализаций, каждая из которых соответствует случайно выбранным начальным условиям. Случайный выбор обычно подразумевает выбор из некоторого заданного «естественного» диапазона с помощью функции плотности вероятности, соответствующей равномерному распределению.

Для получения устойчивых и достоверных результатов в ходе вычислительных экспериментов использовались следующие меры:

1) случайная генерация ненулевого начального значения  $x_0$  из диапазона  $(-1; 1)$ ;

2) получение последовательностей различной длины (от  $L = 500$  и вплоть до  $L = 650000$  элементов);

3) исследование набора последовательностей (до  $Z = 10000$ ) при одних и тех же значениях параметров и различных начальных значениях с анализом суммированных статистик переходов по этому набору;

4) промежуточные значения  $x_i$  во всех случаях, кроме специально оговоренных, были определены как тип *double* — 8 байтовое вещественное число, позволяющее достичь точности в 15–16 знаков после запятой.

Исследование проводилось путем сканирования по диапазону параметра  $v \in [2.590 \dots 2.838]$  с различными шагами  $\Delta v$ . Для каждого  $v_j$  подсчитывалось число переходов, т.е. событий смены знака при  $v$  парах  $\{x_{i-1}; x_i\}$ . В качестве базовой статистики оценивалась величина  $A(v)$  — средняя доля переходов, равная отношению числа переходов к длине  $L$  анализируемой последовательности. Максимальное значение  $A(v)$  составляет 50%, т.е. соответствует ситуации, когда смена знака  $x$  происходит через каждые два элемента. Дополнительно проводилось осреднение  $A(v)$  по набору из  $Z$  последовательностей.

Кроме того, оказалось, что переход к точности типа *extended* (10 байтовое вещественное число, обеспечивающее 19-20 значащих цифр) не приводит к наблюдаемым изменениям качественного характера зависимостей  $A(v)$ .

Программная реализация была выполнена в среде *Delphi 5.0*. В качестве генератора псевдослучайных чисел использовался алгоритм Дж.Марсальи, обеспечивающий получение равномерно распределенных случайных величин в диапазоне  $[0, 1)$  с длиной неповторяющейся последовательности  $\sim 3 \cdot 10^{47}$ . В качестве реализации алгоритма использовался свободно распространяемый модуль *MRNG.pas* © *EFD Systems*. Для визуализации результатов использовались средства *Microsoft Excel*.

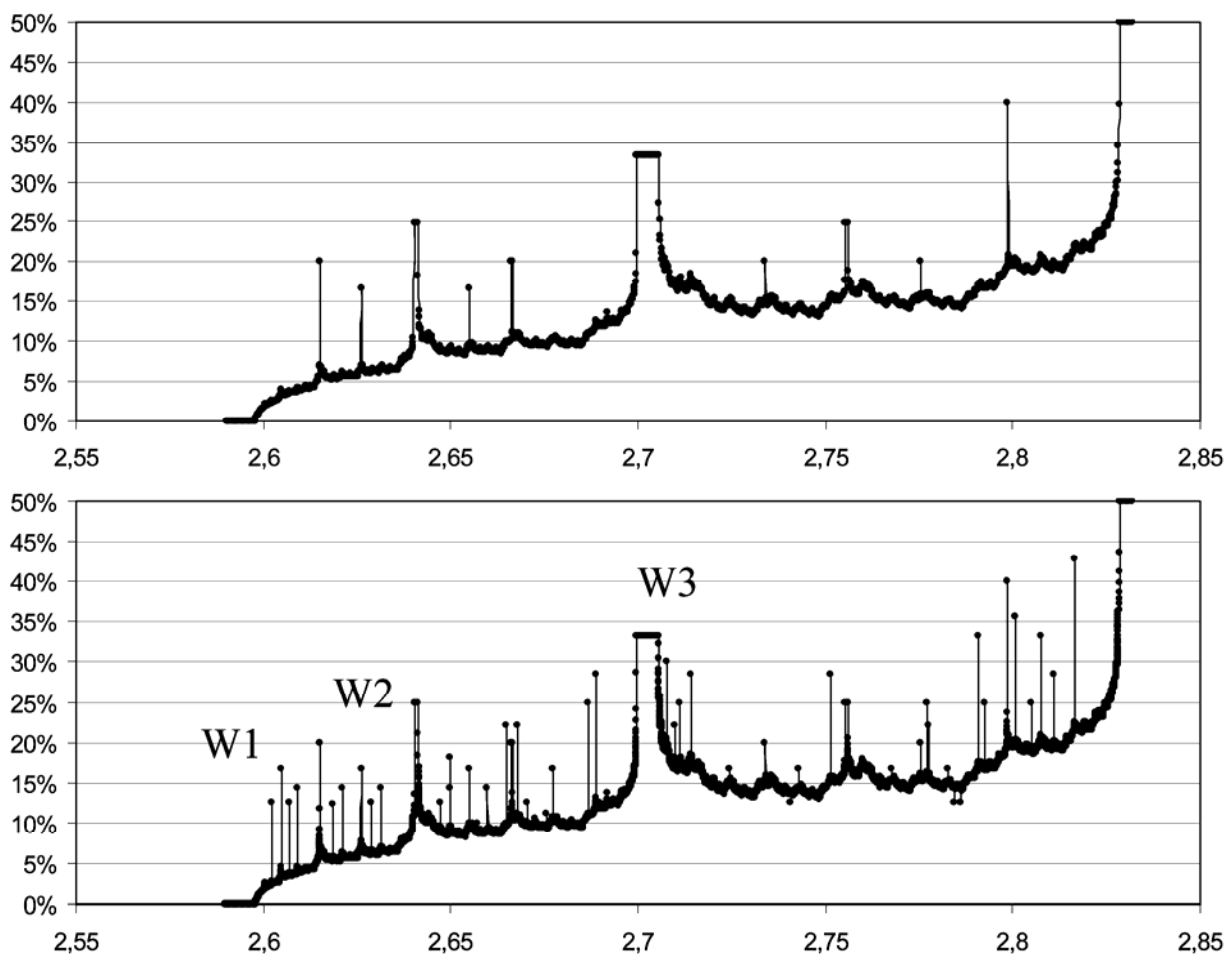


Рис. 4. Зависимости  $A(v)$  при различных шагах  $\Delta v$ :  
 $10^{-4}$  (вверху, 4a),  $10^{-5}$  (внизу, 4b).

На рис. 4 приведены результаты расчетов критерия  $A(v)$  при различных шагах сканирования по  $v$  ( $\Delta v = 10^{-4}$  и  $10^{-5}$ ). Видно, что окна проявляются достаточно четко. Отметим хорошее согласие с данными таблицы 1. На рис. 4a проявляются те окна, ширина которых  $\Delta v = 10^{-4}$ . На рис. 4b появляются дополнительные окна более длинных периодов.

Таким образом, аналитические оценки положения и ширины окон согласуются с компьютерными расчетами.

#### 4. Проблема точности измерений. Динамическое округление.

Подводя промежуточный итог, отметим, что «идеализированное» кубическое отображение в закритической области параметра  $v > v_{cr}$  проявляет целый набор различных особенностей. Их детальное исследование (например, чередования периодичностей и т.п.), несомненно, представляет определенный интерес. Однако большая часть этих особенностей проявляется, если допустить весьма высокую (а фактически неограниченную) точность определения состояния системы. Более конкретно, подразумевается, что состояние системы фиксируется с точностью до десяти или более значащих цифр. На самом деле

в реальных практических измерениях такая точность обычно недостижима.

Пусть временной ряд  $x_1, x_2, \dots, x_L$  описывает некоторый исследуемый процесс. Однако в большинстве случаев регистрируются величины  $y_i = x_i + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ , где  $\varepsilon_i$  — некоторые погрешности измерений. Одна из причин появления погрешностей — тот факт, что на практике результаты измерений обычно записываются рациональными десятичными числами с конечным и небольшим (не более 5–6) количеством значащих цифр. Под «измерениями» здесь могут быть пониматься результаты любых наблюдений, опытов, анализов, получаемых в технических, естественнонаучных, социально-экономических, медицинских и иных исследованиях.

Сказанное означает, что для описания любых реальных результатов наблюдений достаточно конечного количества значений. Например, если принять верхнюю границу точности в 6 значащих цифр, то возможные значения измерений будут записываться в виде  $(a, bcdef)10^k$ . В этой записи  $a$  может варьироваться от 1 до 9, а стоящие после запятой  $b, c, d, e, f$  — от 0 до 9. Очевидно, что показатель степени  $k$  для любых мыслимых измерений не выходит за пределы интервала  $(-100, +100)$ , покрывая, таким образом, диапазон от «обратного гугола» до «гугола» (см. также, [Чернавский, 2004]). Тогда общее количество возможных значений не превысит  $9 \cdot 10^5 \cdot 201$ , т.е. составит менее 200 миллионов.

Изучение ошибок округления, влияющих на пространственную дискретность динамических систем с дискретным временем (отображений), является объектом значительного интереса исследователей в последние годы. Отметим, в частности, работы М.Л. Бланка из Института Проблем Передачи Информации РАН [Бланк, 1989].

Был предложен достаточно развитый математический аппарат для теоретического исследования таких систем. Важно отметить, что в значительной мере изучались асимптотические свойства подобных динамических систем.

Было показано, что влияние даже достаточно малых ошибок округления может кардинально изменить поведение сложной хаотической системы. При этом результирующее поведение очень чувствительно к тонкой структуре фазового пространства дискретизации, соответствующей этим ошибкам [Grebogi et al, 1988; Vivaldi, 1994; Blank M. et al, 1997].

В настоящей работе нами были исследованы свойства динамических окон в кубическом отображении при округлении до ближайшей значащей цифры при различных дискретностях  $\Delta x$ :  $10^{-8}$ ,  $10^{-7}$  вплоть до  $10^{-3}$ . Такой алгоритм однозначен и следовательно, если процесс действительно циклический, то в конце этого процесса мы получаем (с заданной точностью) одно и то же число.

Общей особенностью такого округления являются «размывание» тренда  $A(v)$  и появление многочисленных «выбросов» (см. рис. 5).

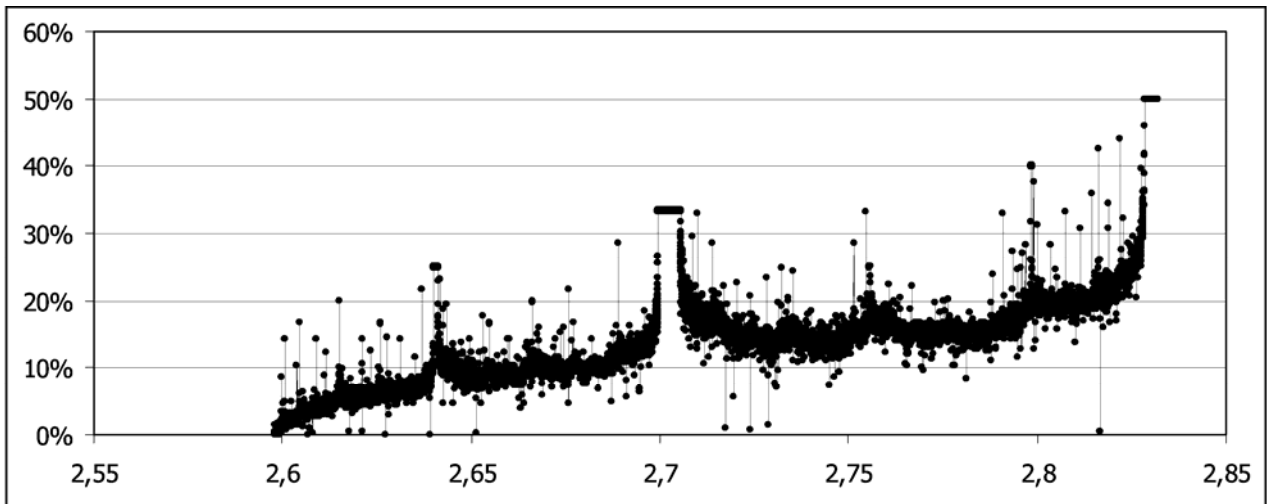


Рис. 5. Результат динамического округления до  $\Delta x = 10^{-8}$ .

Это связано с появлением при увеличении  $\Delta x$  дополнительных динамических окон, которые при точном счете отсутствуют. Иными словами, появляются артефакты.

На рис. 6 приведены примеры последовательностей без округления и с динамическим округлением.

На рис. 6b при округлении до  $\Delta x = 10^{-4}$  выделяется динамический цикл с периодом  $T = 42$ , а сама реализация процесса характеризуется наличием переходов с периодичностями  $P = 4, 6, 7$  и  $15$  элементов. При округлении до тысячных (рис. 7c) появляется цикл с периодом  $T = 14$  и периодичностью  $P = 7$  элементов. Это пример того, как в результате динамического округления возникают артефактные особенности  $A(v)$  в виде дополнительных устойчивых циклов.

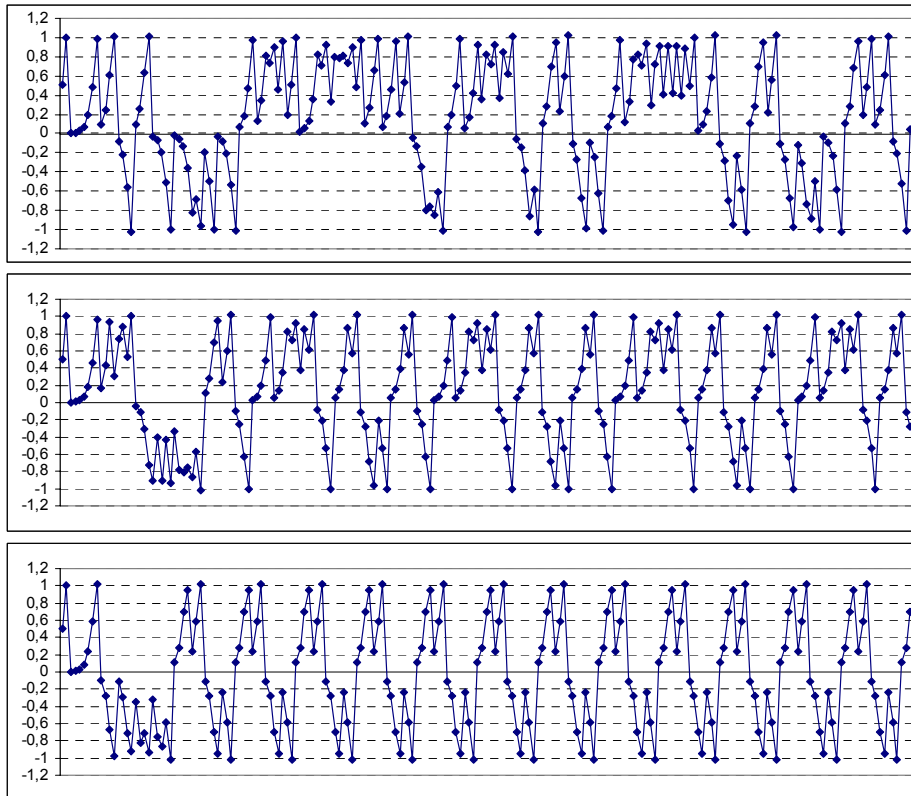


Рис. 6. Реализация последовательности при  $\nu = 2.65$ ,  $x_0=0.2$  без округления (вверху, 6a), с округлением до  $\Delta x = 10^{-4}$  (в середине, 6b),  $\Delta x = 10^{-3}$  (внизу, 6c).

Таким образом, при динамическом округлении хаос исчезает. Физический смысл этого явления прост. Если малая девиация в неустойчивом цикле при возвращении в исходную точку возрастает, но оказывается меньше  $\Delta x$  округления, то в результате округления полученное значение  $x_j$  точно совпадает с исходным  $x_i$ . Это означает, что эффект неустойчивости при округлении исчезает. Распределение ошибок округления при этом равномерно в диапазоне  $[-\Delta x/2; \Delta x/2]$ .

Следует отметить, что непосредственное применение округления имеет существенный недостаток: значительная часть последовательностей (а при некоторых  $\nu$  — все последовательности) фактически обрывается/ вырождается, когда на каком-либо шаге происходит округление  $x_i$  до 0,  $-1$  или  $+1$ . В результате «выживают» только последовательности, в которых сравнительно быстро формируется устойчивый цикл с тем или иным периодом.

Для того чтобы избежать такого «вырождения» можно использовать следующий подход: при попытке округления до 0,  $-1$  или  $+1$  производится округление с заданной дискретностью  $\Delta x$  в другую сторону (например, до  $0.000001$ ,  $-0.000001$  и т.п.). Результат представлен на рис. 7.



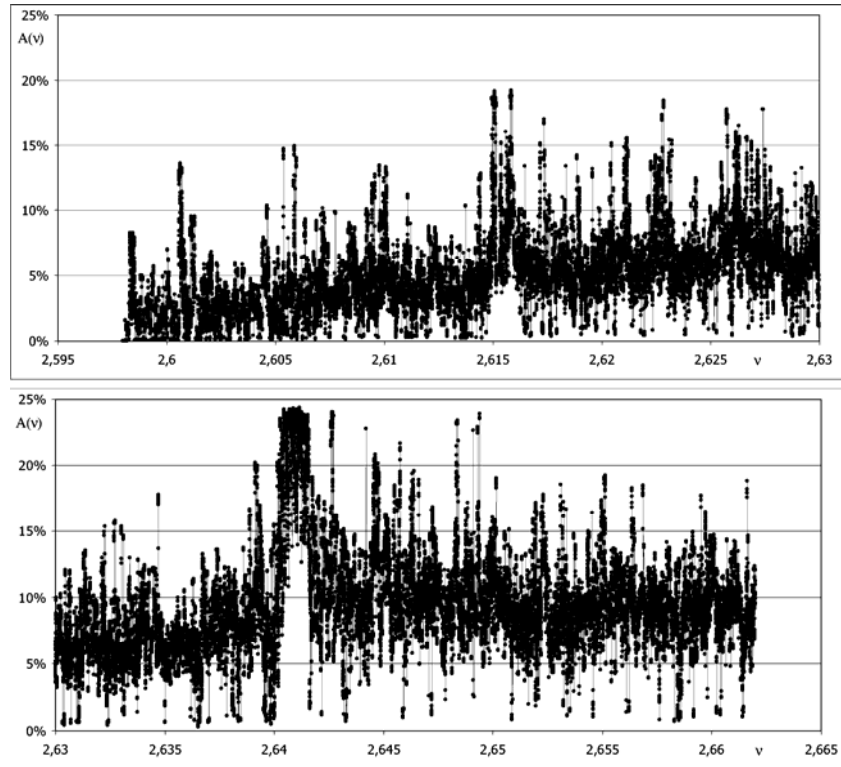


Рис. 7. Динамическое округление до  $\Delta x = 10^{-4}$

Из рис. 7 видно, что фактически весь интервал  $v$  состоит из динамических процессов и хаос практически отсутствует.

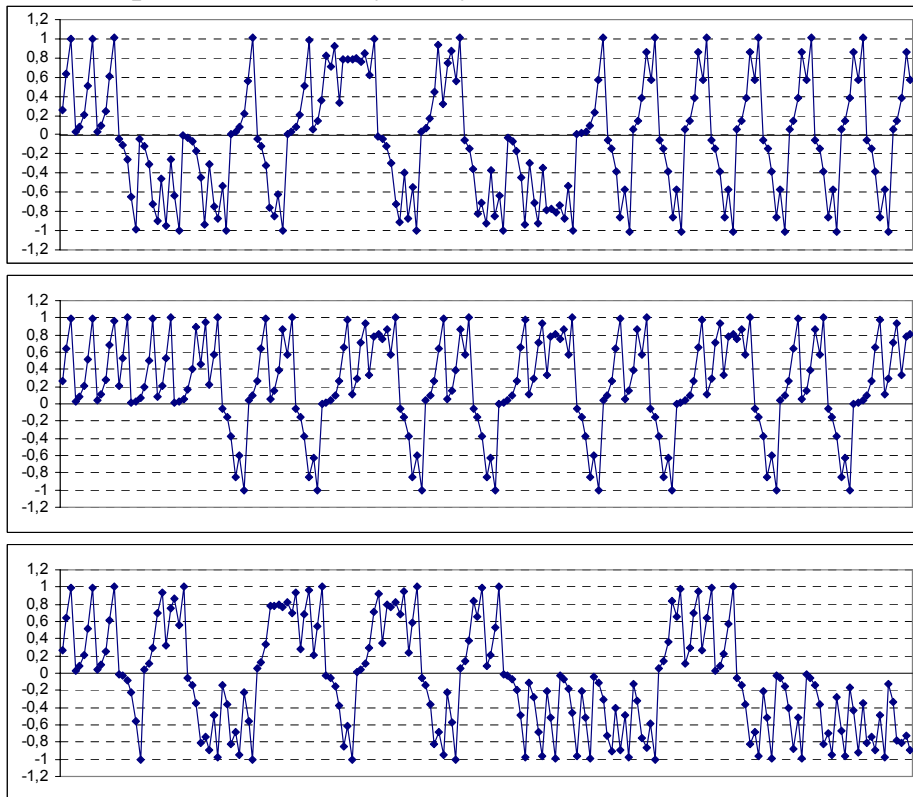


Рис. 8. Реализации при  $v = 2.6261$ ,  $x_0 = 0.1$  без округления (вверху, 8a) и с округлением до  $\Delta x = 10^{-4}$  (в середине, 8b), до  $\Delta x = 10^{-5}$  (внизу, 8c)

Здесь уместно сделать замечание, что при постоянном  $v$  и при любом динамическом округлении хаос, говоря математически строго, отсутствует. Например, при округлении до  $\Delta x = 10^{-4}$  число возможных значений  $x_i$  составляет порядка  $N \sim 20000$ . Так как при этом  $x_i$  детерминированно определяет  $x_{i+1}$ , то максимальный период цикла составляет  $T = N$  элементов. Поэтому наличие «хаоса» можно постулировать только таким образом, что мы называем «хаосом» ситуацию, когда при наблюдении  $L$  элементов последовательности периодические циклы не обнаруживаются. Либо следует установить ограничение сверху на принимаемые во внимание периоды таких циклов. Например, можно выбрать условную границу в  $T = 100$  и учитывать только циклы, имеющие меньший период.

На рис. 8 видно, что при переходе к округлению до  $\Delta x = 10^{-4}$  происходит замещение исходного цикла с периодом  $T = 12$  и периодичностью  $P = 6$  на цикл с  $T = 41$  и периодичностями  $P = 6, 11$  и  $18$  элементов. Интересно, что при округлении до  $\Delta x = 10^{-5}$  происходит разрушение исходного циклического режима и система переходит в хаотический (в обсуждавшемся выше смысле) режим.

### 5. Стохастическое округление.

Был исследован вопрос о возникновении артефактных (ложных) циклов при стохастическом округлении. Под «стохастическим округлением» понимается вариант, при котором округление до кратности  $\Delta x$  вверх или вниз производится случайно и равновероятно.

Было опробовано три алгоритмических варианта округления:

1).  $R1(\Delta x)$  — случайное округление текущего  $x$  до ближайшей дискретности  $\Delta x$ , если после этого окажется, что  $x$  равен  $-1, 0$  или  $1$ , то округление до уровня  $\Delta x/10$ . Если и на этом уровне  $x$  оказывается равен  $-1, 0$  или  $1$ , то переход к уровню  $\Delta x/100$  и т.д.

2).  $R2(\Delta x)$  — определение уровня дискретности  $\Delta x_z$ , соответствующего первой значащей цифре после запятой (при допущении, что целая часть модуля  $x$  —  $1$  или  $0$  — не влияет на количество значащих цифр). Далее производилось случайное округление до уровня, соответствующего произведению  $\Delta x$  и  $\Delta x_z$ . Таким образом гарантировалось, что в текущем  $x_i$  окажется ровно  $k$  значащих цифр, где  $k$  — модуль показателя степени  $\Delta x$ .

3).  $R3(\Delta x)$  — определение уровня дискретности  $\Delta x_z$ , соответствующего первой значащей цифре. Если  $\Delta x_z < \Delta x$ , то выполнялось случайное округление до уровня  $\Delta x_z$ , иначе — до уровня  $\Delta x$ . Таким образом гарантировалось, что в  $x$  оставалась хотя бы одна значащая цифра. Предполагалось, что результат  $R3(\Delta x)$  будет аналогичен  $R1(\Delta x)$ .

На рис.9 показаны зависимости  $A_{R1}(v, \Delta x)$  для варианта округления  $R1$  с различной дискретностью  $\Delta x$  в сравнении с «идеальной» (достигаемой при компьютерной *double* точности) кривой  $A_d(v)$  на интервале  $v \in (2.63; 2.6625)$ ,

позволяющем отразить мелкомасштабные особенности поведения кривых.

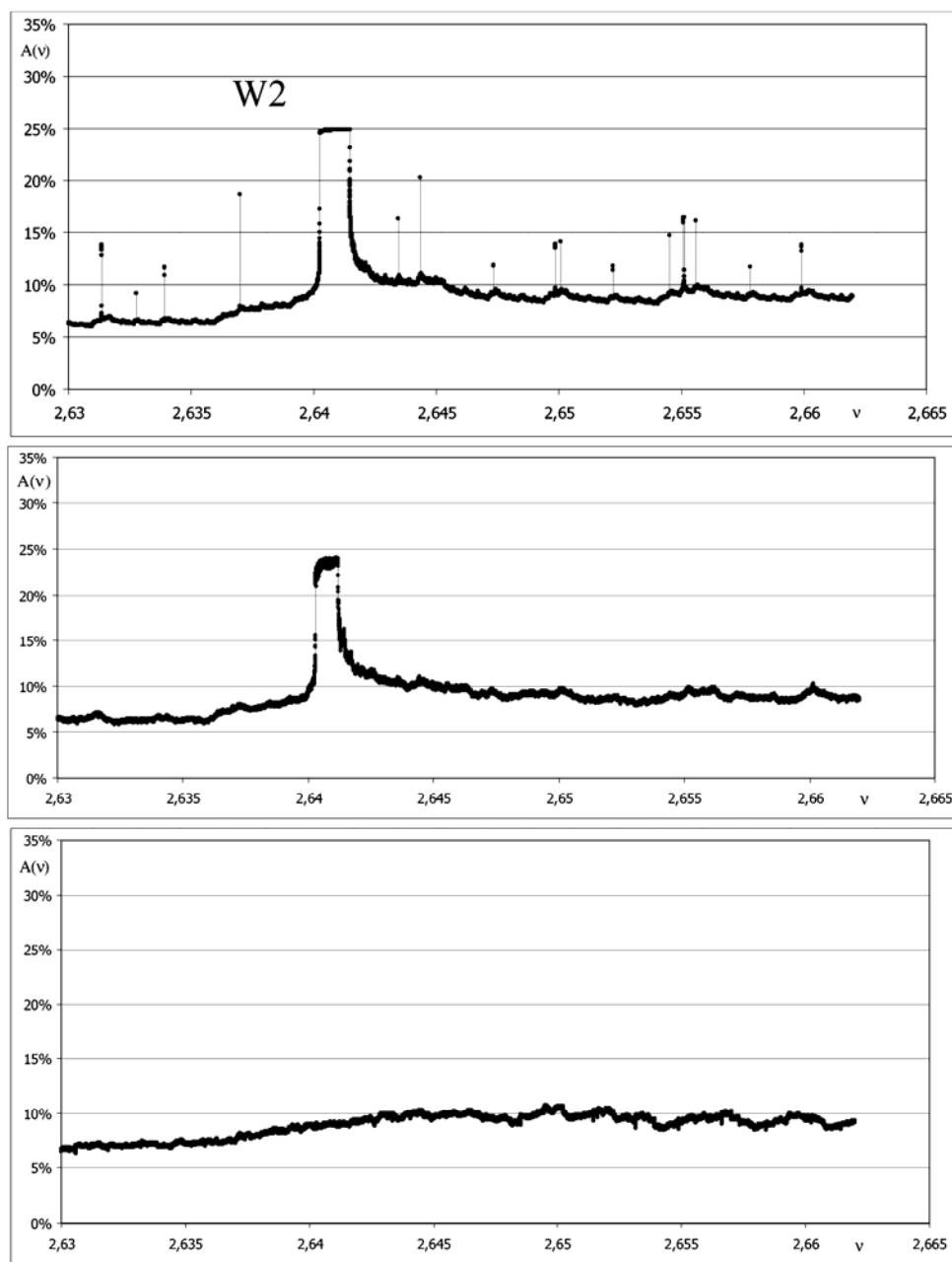


Рис. 9. Зависимость  $A_d(v)$  — без округления (вверху, 9a).  
Зависимости  $A(v)$  при стохастическом округлении  
до  $\Delta x = 10^{-4}$  (в середине, 9b) и до  $\Delta x = 10^{-3}$  (внизу, 9c)

Таким образом, уже при округлении до  $\Delta x = 10^{-4}$  зависимость  $A(v)$  становится гладкой и исчезают все артефакты, а также исходные особенности в виде «особых точек». При этом еще сохраняется устойчивый цикл W2 в области  $v \approx 2.641$  и гиперустойчивый цикл W3 в окрестностях  $v \approx 2.70$ .

При  $\Delta x = 10^{-3}$  окно W2 полностью исчезает, а W3 сохраняется, хотя и несколько суженное (см. рис. 10).

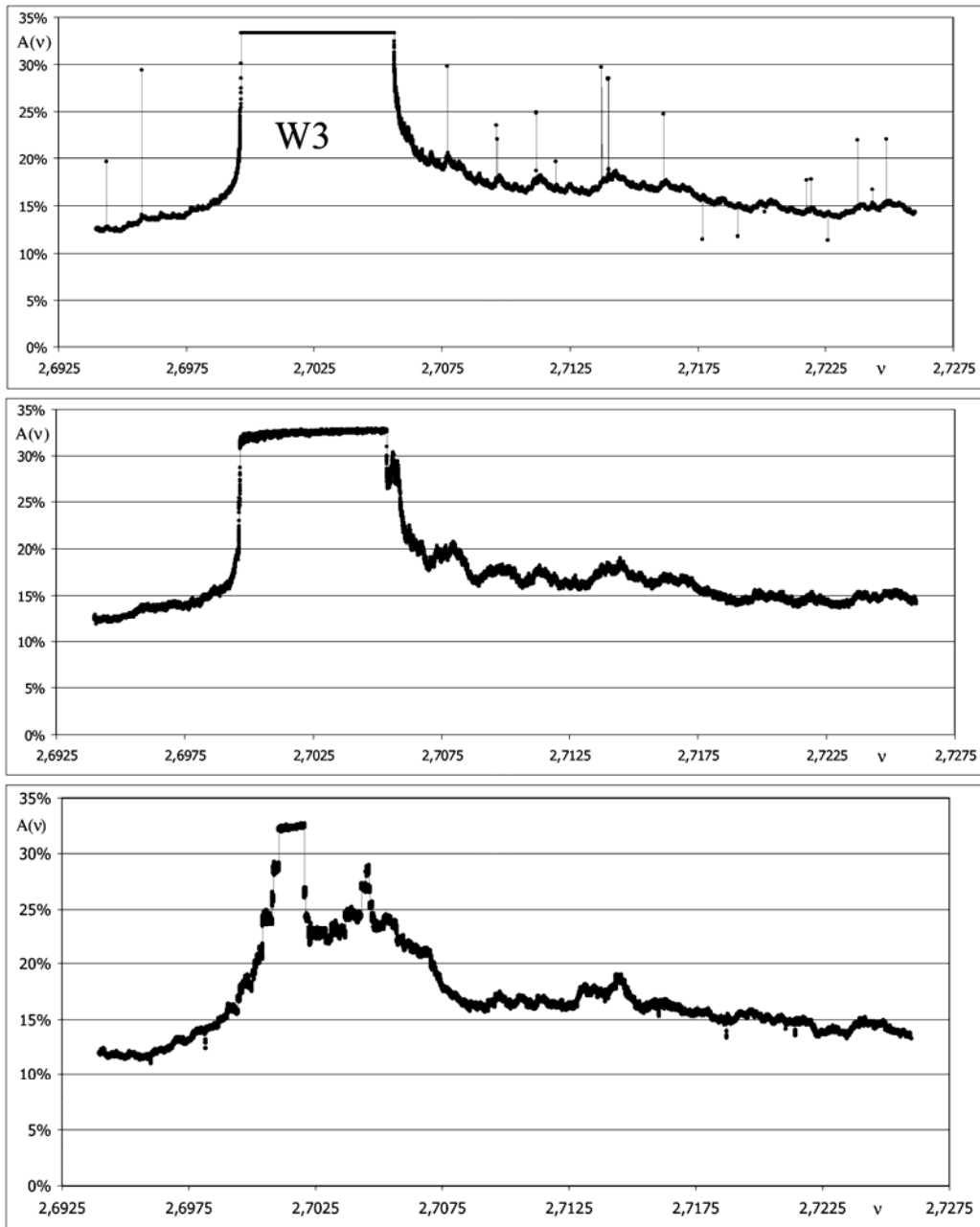


Рис. 10. Зависимость  $A_d(v)$  — без округления (вверху, 10a). Зависимости  $A_d(v)$  при стохастическом округлении до  $\Delta x = 10^{-4}$  (в середине, 10b) и до  $\Delta x = 10^{-3}$  (внизу, 10c)

Из рис.10 видно, что при стохастическом округлении до  $\Delta x = 10^{-4}$  устойчивый цикл в окне W2 сохраняется, а при  $\Delta x = 10^{-3}$  этот цикл исчезает.

В качестве иллюстрации на рис. 11 показаны соответствующие развертки отображения для динамического окна W2.

На рис. 12 приведены развертки для гиперустойчивого окна W3. Видно, что при  $\Delta x = 10^{-4}$  цикл сохраняется, а при  $\Delta x = 10^{-3}$  начинает «разрушаться» — при этом последовательности из нескольких периодов цикла чередуются с интервалами хаотического поведения системы.

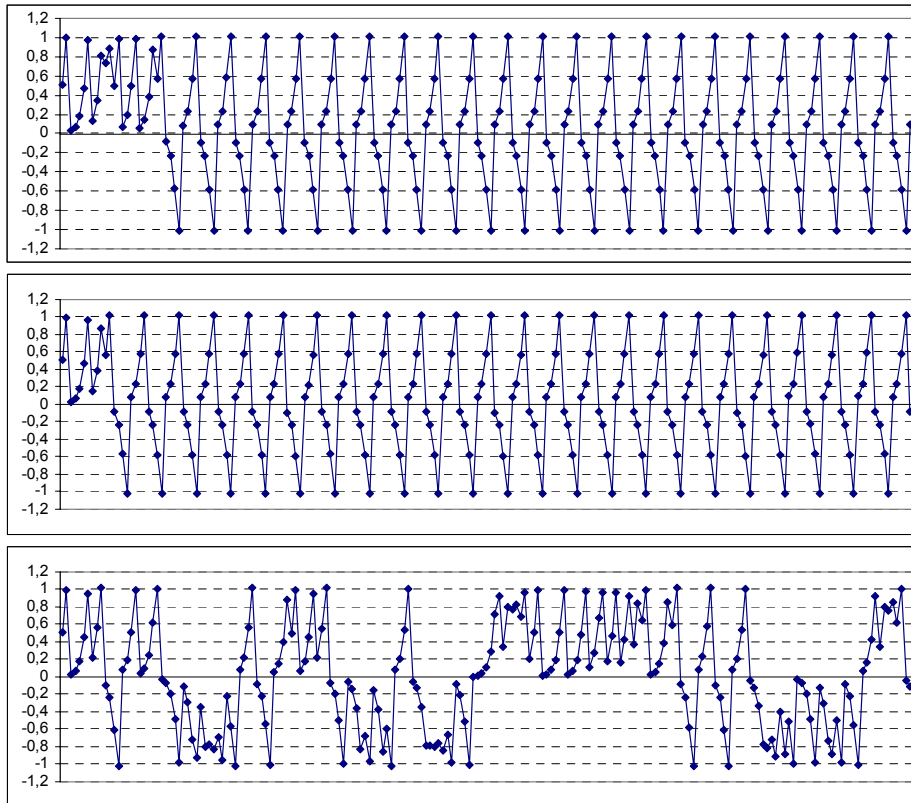


Рис. 11. Реализации при  $\nu = 2.641$ ,  $x_0=0.2$  без округления (вверху, 11a) и со стохастическим округлением до  $\Delta x = 10^{-4}$  (в середине, 11b),  $\Delta x = 10^{-3}$  (внизу, 11c)

Таким образом, при грубом стохастическом округлении исчезают, во-первых, циклы-артефакты, появившиеся при динамическом округлении, и, во-вторых, даже некоторые гиперустойчивые циклы. Физический смысл этого также прост. Если в гиперустойчивом цикле мы возвращаемся практически точно в исходное положение, то при стохастическом округлении мы приходим в соседнее положение, соответствующее кратности  $\Delta x$ . Причем это положение случайно в силу случайности направления округления.

### **Заключение.**

В современной науке все большую роль играет так называемый компьютерный эксперимент. Цель его — исследование свойств динамических моделей, т.е. систем уравнений, путем прямого расчета. Этот метод призван дополнить (или заменить) традиционный (аналитический) метод построения утверждений (теорем).

Однако эти подходы иногда вступают в противоречие, чему посвящена обильная литература. Причина разногласия в том, что при компьютерных расчетах используется дискретное представление вещественных чисел и точность его всегда ограничена. При аналитических исследованиях предполагается, что исходные данные (начальные условия и параметры) заданы с бесконечной точностью.

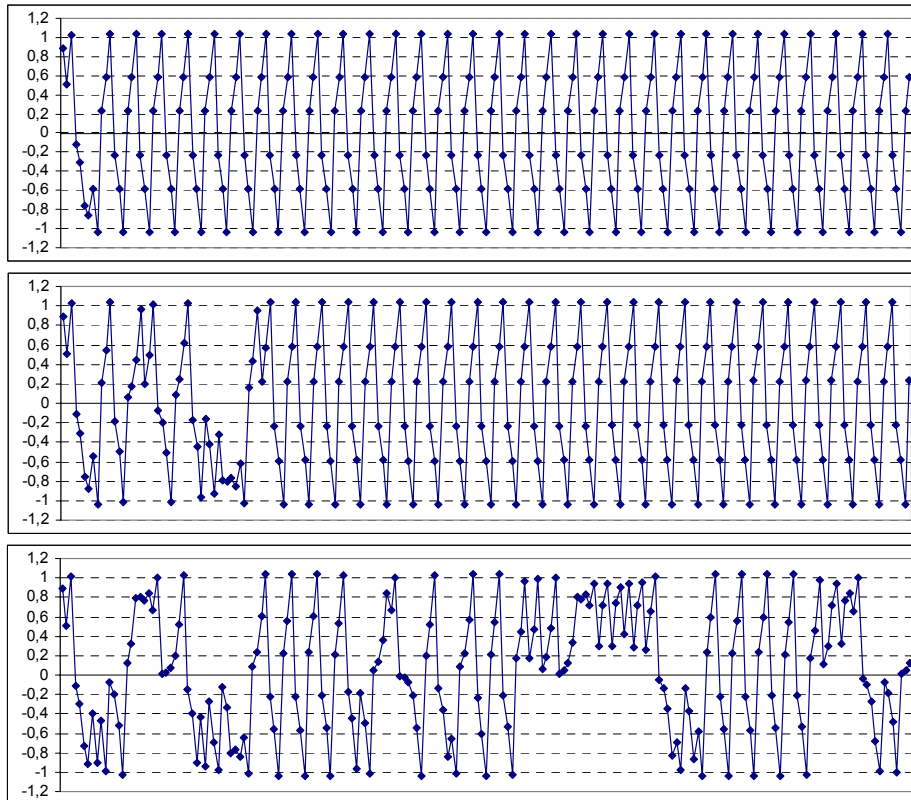


Рис. 12. Реализации при  $\nu = 2.7025$ ,  $x_0=0.75$  в пределах окна  $W3$  без округления (вверху, 12a) и со стохастическим округлением до  $\Delta x = 10^{-4}$  (в середине, 12b),  $\Delta x = 10^{-3}$  (внизу, 12c)

Если процесс, описываемый моделью, устойчив, динамически и структурно, то оба подхода приводят к одинаковым результатам. В противном случае, т.е. если процесс неустойчив, возникают противоречия, поскольку малые различия начальных условий и/или параметров нарастают со временем, что приводит к большим расхождениям. В этом случае возникает вопрос: какой из подходов адекватен целям конкретной задачи. Дело в том, что в любой конкретной задаче параметры и начальные условия задаются с определенной (конечной) точностью. Последняя определяется целью постановки задачи и возможностями измерения физических величин. Превышение точности не целесообразно, это утверждение очевидно и не ново. Менее очевидное утверждение: превышение точности может привести к артефактам, т.е., предсказанию эффектов, которые отсутствуют при менее и более точных расчетах.

Появление артефактов зависит также от характера округления. Подчеркнем, что это замечание носит не математический, а скорее физический (или методологический) характер. Из него следует, что при решении конкретной задачи с заданной целью необходимо определить точность измерения входящих в нее величин. Это определяет и точность компьютерного решения задачи. Превышение (или принижение) этой точности может привести к ложным выводам, которые в рамках поставленной задачи не реализуются.

Отметим, что проблема точности расчетов вставала в физике и ранее, до эры компьютеров, при описании неустойчивых процессов. Были введены понятия «гугол» (число  $10^{100}$ ) и «обратный гугол» (число порядка  $10^{-100}$ ). Было показано [Чернавский, 2004], что физические величины (измеренные в любых единицах) в нашей Вселенной не выходят за эти рамки. Этим определяется и максимально достижимая точность ( $10^{-100}$ ).

Точность современных компьютерных вычислений существенно ниже (порядка  $10^{-20}$ ). Фактически, величина такого порядка играет в компьютерных вычислениях ту же роль, что и обратный гугол. В большинстве реальных задач целесообразная точность еще ниже (порядка 5-7 десятичных знаков). Именно на этот диапазон мы ориентировались в нашем исследовании.

Отображения и динамический хаос были открыты и исследованы как некий математический объект. Математические результаты в этой области основываются либо на очень точных компьютерных, либо на аналитических расчетах. Во всех физических приложениях (технических, экономических, социальных) все наблюдаемые и измеряемые величины регистрируются, а затем используются в расчетах с некоторой точностью. Иными словами, в реальных задачах мы всегда имеем дело с округленными величинами. Алгоритмическое округление до ближайшего кратного  $\Delta x$  является динамической процедурой, которая в реальных ситуациях, как правило, не выполняется. Любая реальная система погружена в шумовое поле, влияние которого и определяет достоверность последней значащей цифры.

Из изложенного видно, что отнюдь не все математические утверждения и теоремы имеют отношение к действительности. Поэтому вслед за [Орлов, 2004] можно отметить, что «бесконечность натурального ряда и континуум числовой прямой — это математические абстракции, надстроенные над дискретной и состоящей из конечного числа элементов реальностью». Видно также, что реальный интерес представляют в конкретных задачах только те утверждения, которые сохраняют силу в шумовом поле, характерном для данной задачи.

В частности, при округлении, например, до  $\Delta x = 10^{-3}$  утверждения об устойчивых циклах, порог устойчивости которых меньше  $\Delta x$  к реальным задачам уже не относятся.

По нашему мнению, представленные результаты могут быть полезны и актуальны в тех случаях, когда наблюдаемый временной ряд в действительности порожден каким-либо простым отображением, а входные величины определены с точностью до значения  $\Delta x$ .

Работа выполнена при поддержке грантов РГНФ №04-03-00069а и НШ-2071.2003.4.

### Список литературы.

1. Бланк М.Л. Малые возмущения в хаотических динамических системах // *Успехи математических наук.* – 1989. – т. 44. – №6. – с. 3–28.
2. Колупаев А.Г., Чернавский Д.С. Перемешивающий слой. // *Краткие сообщения по физике.* – 1997. – №1–2. – с.12–18.
3. Кузнецов А.П. Наглядные образы хаоса // *Соросовский образовательный журнал.* – 2000. – т. 6. – №11. – с. 104–110.
4. Кузнецов А.П., Капустина Ю.В. Свойства скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // *Известия ВУЗов «Прикладная и нелинейная динамика».* – 2000. – т.8. – №6. – с. 78–86.
5. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений. Часть 1. Сценарий Фейгенбаума // *Известия ВУЗов «Прикладная и нелинейная динамика».* – 1993. – т.1. – №1. – с. 15–32.
6. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Чернавский Д.С., Режимы с обострением, джокеры, перемешивающий слой. Новый взгляд на нелинейную динамику. Препринт ИПМ, 2005. Представлено в ДАН.
7. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. – 272 с.
8. Орлов А.И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2004. – 656 с.
9. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // *Успехи физических наук.* – 1983. – т. 141. – №2. – с. 343–374.
10. Чернавский Д.С. Синергетика и информация (динамическая теория информации). Изд. второе. М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 288 с.
11. Чернавский Д.С., Карп В.П., Родитат И.В., Никитин А.П., Чернавская Н.М. Распознавание. Аутодиагностика. Мышление. М.: Радиотехника, 2004. – 272 с.
12. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Ю.Е. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986.
13. Blank M., Krüger T., Pustyl'nikov L. A KAM type theorem for systems with round-off errors / <http://arxiv.org/pdf/chao-dyn/9706005>
14. Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A. Fluctuations and simple chaotic dynamics // *Phys. Reps.* – 1982. – v. 92. – p. 45–82.
15. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Roundoff-induced periodicity and the correlation dimension of chaotic attractors // *Phys. Rev. A.* – 1988. – v. 38. – p. 3688–3692.
16. Palacios A. Cycling chaos in one-dimensional coupled iterated maps // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* – 2002. – v. 12. – No. 8. – p.1859–1868.
17. Rogers T., Whitley D.C. Chaos in the cubic mapping // *Math. Model.* – 1983. – v.4. – p.9–25
18. Vivaldi F. Periodicity and transport from round-off errors // *Experimental Mathematics.* – 1994. – v.3. – No. 4. – p.303–312.



Таблица 1

## Некоторые динамические окна в кубическом отображении

| № п/п | k | Ширина окна         | Исследованное $\nu$ | $x_0 \dots x_{k-1}$                                                                             | $\lambda$       | Комментарий                                                                            |
|-------|---|---------------------|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | 3 | 2.98178÷<br>2.98200 | 2.98190             | 0.577322770 1.147733841<br>-1.085912200 0.580281404<br>1.147689396 -1.085521008                 | -0.96<br>(по 6) | квазипериодический цикл, по первым трем $\lambda = -0.98$ , по след. $\lambda = +1.02$ |
| 2.    | 4 | 2.82843÷<br>2.84900 | 2.84000             | 0.577026710 1.093115995<br>-0.605065196 -1.089277664                                            | -0.95           | симметричный цикл                                                                      |
| 3.    | 4 | 2.96755÷<br>2.96759 | 2.96755             | -1.032605166 0.203082163<br>0.577801495 1.142209481                                             | -0.32           | асимметричный устойчивый цикл 3 +1 элемент                                             |
| 4.    | 4 | 2.99193             | 2.99193             | -1.151594394 1.123814197<br>-0.884164162 -0.577359106                                           | -0.97           | — * —                                                                                  |
| 5.    | 5 | 2.79859÷<br>2.79871 | 2.79865             | 0.577634265 1.077200496<br>-0.483441182 -1.036769811<br>0.217302280                             | -0.76           | асимметричный устойчивый цикл 3+2 элемента                                             |
| 6.    | 5 | 2.86782÷<br>2.86787 | 2.86784             | 0.576728840 1.103830213<br>-0.691499114 -1.034843643<br>0.210418660                             | -0.08           | — * —                                                                                  |
| 7.    | 5 | 2.91841÷<br>2.91842 | 2.91841             | 0.577761848 1.123295676<br>-0.858220165 -0.659867374<br>-1.087238046                            | -0.21           | — * —                                                                                  |
| 8.    | 5 | 2.93167÷<br>2.93168 | 2.93167             | 0.577310102 1.128400301<br>-0.904060781 -0.484160885<br>-1.086675900                            | -0.91           | — * —                                                                                  |
| 9.    | 5 | 2.96177             | 2.96177             | 0.577509145 1.139985675<br>-1.011451787 0.069004815<br>0.203403218                              | -0.35           | несимметричный цикл 4 + 1 элемент в разных квадрантах                                  |
| 10.   | 5 | 2.97284             | 2.97284             | 0.577133115 1.144246407<br>-1.052133352 0.334628978<br>0.883404315                              | +0.06           | — * —                                                                                  |
| 11.   | 6 | 2.69964÷<br>2.70570 | 2.70300             | 0.577289131 1.040385168<br>-0.231725722 -0.592721382<br>-1.039269210 0.224957685                | -0.98           | Широкое гиперустойчивое окно W3 из-за сближения двух корней                            |
| 12.   | 6 | 2.79092             | 2.79092             | 0.577644348 1.074225191<br>-0.461583150 -1.013770163<br>0.078457755 0.217621425                 | -0.25           | набор асимметричных циклов 4+2 элемента (приведен пример устойчивого)                  |
| 13.   | 6 | 2.80737÷<br>2.80739 | 2.80739             | 0.575389130 1.080546234<br>-0.508356891 -1.058340783<br>0.356794220 0.874147021                 | +2.52           | набор циклов 4+2 элемента (пример неустойчивого)                                       |
| 14.   | 6 | 2.86109             |                     |                                                                                                 |                 | аналогично №12 и №13                                                                   |
| 15.   | 6 | 2.89336             |                     |                                                                                                 |                 | аналогично №12 и №13                                                                   |
| 16.   | 6 | 2.89830             |                     |                                                                                                 |                 | аналогично №12 и №13                                                                   |
| 17.   | 6 | 2.92488÷<br>2.92592 | 2.92500             | 0.577230525 1.125832952<br>-0.880893382 -0.577230525<br>-1.125832952 0.880893382                | —<br>0.999      | симметричный гиперустойчивый цикл                                                      |
| 18.   | 6 | 2.98178÷ 2.98200    |                     |                                                                                                 |                 | удвоение цикла №1                                                                      |
| 19.   | 7 | 2.68888             | 2.68888             | 0.577240419 1.034950338<br>-0.197922939 -0.511343252<br>-1.015432272 0.084922047<br>0.226698424 | -0.72           |                                                                                        |
| 20.   | 7 | 2,71401             | 2,71401             | 0.577216783 1.044622852<br>-0.258667284 -0.655053931<br>-1.014966834 0.083073236<br>0.223905646 | -0.54           |                                                                                        |
| 21.   | 8 | 2.64028÷            | 2.64080             | 0.580688982 1.016393309                                                                         | -0.05           | квазипериодические циклы,                                                              |

| № п/п | k  | Ширина окна         | Исследованное $\nu$ | $x_0 \dots x_{k-1}$                                                                                                                                                                                                                                                                  | $\lambda$ | Комментарий                                                                   |
|-------|----|---------------------|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------|
|       |    | 2.64148             |                     | -0.088723607 -0.232456909<br>-0.580700876 -1.016392944<br>0.088721584 0.232451693                                                                                                                                                                                                    |           | окно W2                                                                       |
| 22.   | 8  | 2.75541÷<br>2.75616 | 2.75580             | 0.576850046 1.060706721<br>-0.365675594 -0.872976678<br>-0.572355913 -1.060589197<br>0.364906428 0.871705540                                                                                                                                                                         | -0.67     | устойчивый цикл                                                               |
| 23.   | 8  | 2.82843÷ 2.84900    |                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |           | Очень широкое окно, связанное со сгущением многих корней и удвоением цикла №2 |
| 24.   | 8  | 2.89579÷<br>2.89599 | 2.89590             | 0.577340287 1.114632429<br>-0.782451845 -0.878646918<br>-0.580088061 -1.114594774<br>0.782154468 0.879366856                                                                                                                                                                         | -0.99     | устойчивый цикл                                                               |
| 25.   | 8  | 2.96755÷ 2.96759    |                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |           | удвоение цикла №3                                                             |
| 26.   | 9  | 2.98178÷ 2.98200    |                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |           | утроение цикла №1                                                             |
| 27.   | 9  | 2.66783             | 2.66783             | 0.577260217 1.026848208<br>-0.149073667 -0.388865060<br>-0.880550446 -0.527693704<br>-1.015781007 0.086205765<br>0.228273226                                                                                                                                                         | -0.11     | асимметричный цикл 4+5                                                        |
| 28.   | 10 | 2.61501÷<br>2.61522 | 2.61510             | 0.578718310 1.006543976<br>-0.034562998 -0.090277721<br>-0.234161156 -0.578778538<br>-1.006543212 0.034558924<br>0.090267107 0.234134078                                                                                                                                             | -0.03     | окно W1                                                                       |
| 29.   | 10 | 2.73393÷<br>2.73407 | 2.73400             |                                                                                                                                                                                                                                                                                      | -0.63     | устойчивый цикл                                                               |
| 30.   | 12 | 2.60474÷<br>2.60476 | 2.60475             | 0.577292146 1.002568727<br>-0.013433390 -0.034984308<br>-0.091013847 -0.235104558<br>-0.578539336 -1.002562359<br>0.013399960 0.034897279<br>0.090787990 0.234530841                                                                                                                 | -0.78     | устойчивый цикл                                                               |
| 31.   | 12 | 2.62608÷<br>2.62612 | 2.62610             |                                                                                                                                                                                                                                                                                      | -0.61     | — * —                                                                         |
| 32.   | 12 | 2.72433÷<br>2.72435 | 2.72434             |                                                                                                                                                                                                                                                                                      | -0.42     | — * —                                                                         |
| 33.   | 14 | 2.72012             | 2.72012             | 0.577548233 1.046974491<br>-0.273841133 -0.689022905<br>-0.984431868 -0.082726838<br>-0.223486904 -0.577548225<br>-1.046974492 0.273841133<br>0.689022905 0.984431868<br>0.082726840 0.223486908                                                                                     | -0.18     |                                                                               |
| 34.   | 20 | 2.64669             | 2.64669             | 0.577325288 1.018711453<br>-0.101844136 -0.266754024<br>-0.655776782 -0.989238617<br>-0.056047871 -0.147875346<br>-0.382821842 -0.864722110<br>-0.577325288 -1.018711453<br>0.101844136 0.266754024<br>0.655776782 0.989238617<br>0.056047871 0.147875346<br>0.382821842 0.864722110 | -0.27     |                                                                               |