

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ**



*имени  
П. Н. Лебедева*

**Ф И А Н**

ПРЕПРИНТ

Д.С. ЧЕРНАВСКИЙ, А.П. НИКИТИН,  
О.Д. ЧЕРНАВСКАЯ

**10**

**КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЕРИОДИЧНОСТИ ТРАЕКТОРИЙ  
КУБИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ  
В ЗАКРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ**

МОСКВА 2006

## Аннотация.

В работе проанализированы особенности количественных характеристик периодических траекторий от показателя дискретности при компьютерной реализации кубического отображения в закритической области управляющего параметра. Целью исследования было рассмотрение возможностей использования характеристик периодичности в качестве информативных признаков описания состояния системы для случая медленно изменяющегося управляющего параметра.

Показано, что при заданных показателях дискретности и значениях управляющего параметра реализуется лишь несколько устойчивых циклов (в экспериментах не было обнаружено более 11 различных периодов циклов). Обнаружено отсутствие плавных зависимостей среднего периода цикла, среднего времени перехода к циклу и других статистических характеристик периодичности от значения управляющего параметра.

Изучены скейлинговые свойства характеристик периодичности траекторий. Показано их соответствие значению корреляционной размерности кубического отображения.

The quantitative characteristics of periodical trajectories in the cubic discrete map have been studied. Their dependence on the computation precision has been analyzed. The aim of the present paper was to consider a possibility to use the above-mentioned periodicity characteristics as the informative features. It was supposed that such features could describe the current state and the evolution of the corresponding discrete system in a case of slowly varying control parameter.

It has been shown that at specified computation precision and fixed control parameter there were only several stable cycles of quite short, yet different periods. During performed series of computer experiments we have not found more than 11 different periods. Also it was shown that the dependences of average cycle period, average interval from an arbitrary initial condition till a stable cyclic mode and other statistical characteristics on the value of the control parameter were neither monotonic nor smooth.

The scaling properties of the periodicity characteristics have been examined. Their correspondence to the value of the correlation dimension has been pointed out.

## Введение.

Одномерные и многомерные дискретные отображения продолжают оставаться предметом активного научного исследования. В частности, изучаются характеристики динамического хаоса в таких отображениях и сценарии перехода к хаосу. Одним из важных практических свойств этих моделей является тот факт, что их решения качественно совпадают с решениями моделей реальных процессов, а интерпретация результатов с их помощью достаточно наглядна.

Предметом нашего рассмотрения является математическая модель кубического отображения  $x_{i+1} = v(x_i - x_i^3)$ . Отметим, что в научной литературе собственно кубическое отображение встречается достаточно редко, особенно по сравнению с логистическим отображением, отображениями вращения или отображениями типа  $x_{i+1} = 2x_i \bmod 1$ . По нашему мнению, это не вполне справедливо, так как бимодальная природа кубического отображения придает ему важные с практической точки зрения особенности.

В предыдущих работах была показана роль кубического отображения в процессах генерации информации и эволюции ее ценности [Колупаев, Чернавский, 1997]. Также были рассмотрены некоторые качественные особенности поведения модели при ее численной реализации на универсальных компьютерах [Чернавский, 2005]. Кроме того, обсуждались методологические моменты, связанные с интерпретацией получаемых результатов и границами их применимости.

В частности, было проиллюстрировано известное по литературе (см., например, [Blank, 1994], а также библиографию в [Чернавский, 2005]) влияние ограниченной точности компьютерных вычислений на поведение моделей отображений. Машинное представление приводит к тому, что континуум вещественных чисел заменяется на набор дискретных значений, который характеризуется некоторым параметром дискретности  $\varepsilon$ . Такой набор может быть очень велик по объему, но, в любом случае, конечен. В результате поведение нелинейных систем при компьютерной реализации может самым существенным образом видоизменяться [Diamond, Pokrovskii, 2001; Palasios, 2002].

Важно подчеркнуть, что такие особенности являются не только артефактами приближенного компьютерного моделирования по отношению к точным аналитическим расчетам. По нашему мнению, существует широкий класс реальных систем (прежде всего, социально-экономических), в которых внутренние переменные обладают конечной предельной точностью (их значения описываются конечным числом значащих цифр). И потому проблема не исчерпывается только тем соображением, что возникновение артефактов различного рода является следствием ограниченной точности компьютерных расчетов при неограниченной точности (континуальности) внутренних

переменных изучаемой системы.

## 2. Периодичность траекторий.

Количественный анализ периодических и квазипериодических траекторий (орбит) играет важную роль в исследовании хаотических систем. Разрабатываются специальные вычислительные методики, позволяющие эффективно выделять такие траектории при различных начальных условиях [Davidchack, Lai, 1999].

Достаточно интересной проблемой является изучение компьютерных реализаций хаотических систем. Так как в обычных компьютерах используется конечное представление вещественных чисел в двоичной системе счисления, то, вообще говоря, любая траектория, получаемая в детерминированных дискретных отображениях, окажется периодической. Иными словами, с помощью компьютерных вычислений при отсутствии шума принципиально невозможно получить истинно хаотическую орбиту.

Тем не менее, может быть поставлена задача обеспечить настолько большое значение периода траекторий, чтобы гарантировать видимое отсутствие этой периодичности при любых осмысленных длинах  $L$  последовательностей  $\{x_i\}$ . В ее рамках могут быть сформулированы следующие вопросы относительно компьютерной реализации дискретного отображения:

- каковы периоды обнаруживаемых циклов;
- насколько велики бассейны притяжения, т.е. какая доля начальных условий приводит в конце концов к циклу определенного периода;
- чем характеризуется скорость перехода траектории к циклу, т.е. количество итераций, необходимых для этого перехода от произвольного начального  $x_0$ .

Используем, следуя [Wang et al, 2003], для таких траекторий аббревиатуру *CRCT* (от *computer realization of chaotic trajectories*). Ранее достаточно часто предполагалось, что средний период таких траекторий по порядку величины совпадает с размерностью пространства чисел, определяемых точностью вычислений. Например, при представлении с «двойной» *double* точностью (подробнее см. следующий раздел), количество различных чисел, которые можно задать в диапазоне  $(0; 1)$ , составляет не менее  $2^{+52}$ .

Будь такое предположение верным, то средний период *CRCT* траекторий составил не менее  $T_{av} \sim 10^{+15}$ . Естественно, даже такой период недостижим для большинства компьютерных вычислений. Еще одним следствием (принимая во внимание, что каждый хаотический аттрактор включает бесконечное число неустойчивых периодических траекторий) был бы факт наличия крайне большого числа различных периодов *CRCT*.

Однако указанное предположение о среднем периоде *CRCT* оказалось неверным и было показано, что средний период намного короче и

пропорционален  $\varepsilon^{-D_2/2}$ , где  $\varepsilon$  — компьютерная точность, а  $D_2$  — корреляционная размерность данного хаотического аттрактора (см. библиографию в [Wang et al, 2003]). Это, в частности, накладывает существенные ограничения на использование последовательностей  $\{x_i\}$  в качестве основы генераторов случайных чисел или в криптографических приложениях (*chaos encryption*).

В работе [Чернавский, 2005] обсуждалось, почему при динамическом округлении хаос исчезает. Физический смысл этого явления прост. Если малая девиация в неустойчивом цикле периода  $T$  при возвращении в исходную точку возрастает, но оказывается меньше  $\varepsilon$  округления, то в результате округления полученное значение  $x_{i+T}$  точно совпадает с исходным  $x_i$ . Распределение ошибок округления при этом остается постоянным. Это означает, что эффект неустойчивости при округлении не возникает. Иной результат достигается при использовании случайного (стохастического) округления, когда выбор направления округления вверх или вниз производится случайно.

Наиболее часто периодичность траекторий исследовалась для логистического отображения  $x_{i+1} = \nu x_i(1 - x_i)$  и некоторых его модификаций. Например, в цитированной выше работе [Wang et al, 2003] исследовалось влияние конечной компьютерной точности на периодичность хаотических траекторий и переходные процессы к периодичности именно для логистического отображения. В работе [Lanford, 1998] исследованы циклы, возникающие в отображении  $x_{i+1} = [2x + 0,5x(1 - x)] \bmod 1$ .

Кроме того, общеизвестна сильная зависимость хаотических траекторий от начальных условий (см. например, обсуждение и библиографию в [Setti et al, 2002]). В этой связи изучение отдельной реализации последовательности  $\{x_i\}$  несет мало информации об общих свойствах данной динамической системы. Прагматически ценную информацию может предоставить изучение достаточно объемных выборок таких реализаций при различных начальных условиях  $x_0$ .

Таким образом, проблема количественных характеристик периодичности CRCT траекторий имеет как теоретическое, так и практическое значение. В частности, характеристики периодичности важны при изучении поведения кубического отображения с адиабатически медленно изменяющимся параметром  $\nu$ , при приближении «сверху» к точке бифуркации  $\nu_{cr}$ . Прогнозирование «поведения» системы в таком случае может основываться на чередовании интервалов отрицательных и положительных значений  $x_i$ , т.е. длительности «пребывания» отображающей точки в различных квадрантах диаграммы Ламерея. Предварительные эксперименты показывают, что в качестве элементов решающих правил могут использоваться характерные длины таких интервалов. Естественно предположить, что такие правила будут работать только, если продолжительность наблюдения ряда при условно

постоянном  $v$  будет меньше вероятного периода  $CRCT$ .

Подчеркнем особо, что в рамках настоящей работы при исследовании бассейнов притяжения сравниваются группы циклов различного периода. Важно, что при компьютерной реализации кубического отображения могут существовать и действительно существуют несколько несовпадающих циклов с одним и тем же периодом. Так, могут реализовываться пары циклов, симметричных относительно нуля. Соответственно, можно различать и бассейны притяжения таких циклов, рассматривая, какие диапазоны начальных условий или какие конкретные начальные условия приводят к тому или иному циклу.

Помимо этого часть устойчивых циклов  $CRCT$  оказывается несимметричной в том смысле, что количество положительных элементов цикла не совпадает с количеством отрицательных. Одним из следствий является наличие циклов с нечетным числом элементов.

С другой стороны, можно предполагать, что такие «тонкие» особенности не будут существенны для решения упомянутой выше задачи прогнозирования. Тем не менее, мы планируем уделить внимание этим вопросам в дальнейших публикациях.

### **3. Техника вычислительных экспериментов.**

Проведено исследование характеристик периодичности траекторий кубического отображения  $x_{i+1} = v(x_i - x_i^3)$  в закритической области  $v > v_{cr} = 3\sqrt{3}/2 \approx 2,598$ .

Сделаем несколько необходимых комментариев по поводу компьютерного представления вещественных чисел (при этом подразумевается ОС *Windows* и процессоры фирм *Intel* или *AMD*).

Обратимся к такому широко распространенному средству разработки программных приложений как *Delphi* фирмы *Borland*. В *Delphi* существует несколько типов вещественных чисел: *single* (длиной 4 байта), *real48* (длиной 6 байт, используется для обратной совместимости), *double* (8 байт), *extended* (10 байт). Все они называются числами с плавающей точкой (*floating point numbers*), а общий формат их одинаков: они состоят из знака числа, экспоненты и мантиссы, выраженных в двоичной системе счисления.

Операции с вещественными числами выполняются в сопроцессоре, причем выполняются в формате *extended*, а форматы *single* и *double*, используемые для экономии памяти, получаются путем усечения лишних битов.

Общая характеристика указанных типов представлена в табл. 1.

Таблица 1

## Вещественные типы (из [Григорьев])

Тип	Размер, бит	Размер мантиссы, бит	Размер экспоненты, бит	Диапазон значений	Количество значащих цифр
<i>single</i>	32	23	7	$1,5 \cdot 10^{-45} \div 3,4 \cdot 10^{38}$	7–8
<i>real48</i>	48	40	8	$2,9 \cdot 10^{-39} \div 1,7 \cdot 10^{38}$	11–12
<i>double</i>	64	52	11	$5,0 \cdot 10^{-324} \div 1,7 \cdot 10^{308}$	15–16
<i>extended</i>	80	64	15	$3,6 \cdot 10^{-4951} \div 1,1 \cdot 10^{4932}$	19–20

Отсюда следует, например, что встречающиеся в литературе упоминания «точность вычислений  $2^{-52}$ » неявно подразумевают использование при расчетах чисел типа *double*.

За счет используемой формы представления вещественных чисел их «плотность» при приближении к 0 становится выше. Понятно, что при этом формально можно повышать точность путем задания соответствующих значений экспоненты числа. В остальной части диапазона (0,1) точность типа *double* ограничена 15-16 знаками после запятой. Заметим, что для получения «равномерной» по интервалу значений точности может использоваться модификация исходного дискретного отображения, приводящая к интервалу (1, 2).

Существенной проблемой при компьютерном моделировании может оказаться та особенность, что конечные десятичные дроби далеко не во всех случаях могут быть представлены в виде конечных двоичных дробей. В результате в компьютерном представлении будут фигурировать не точные, а приближенные значения. Например, определим переменную  $R_1$  типа *single*. Приравняв  $R_1$  к 0,001, окажется, что в результате преобразования в двоичный вид на самом деле в переменную будет записано число, соответствующее  $R_{1s} = 0,00100000004749745$ . При  $R_2 = 0,002$  на самом деле операции будут выполняться над  $R_{2s} = 0,0020000000949949$ . Очевидно, что и разность  $R_{2s} - R_{1s}$  не равна шагу дискретности  $\varepsilon = 0,001$ . В настоящей работе эта проблема воспринимается *as is* («как есть»), а для вычислений используется тип *extended*, позволяющий минимизировать подобные эффекты на уровне точности  $2^{-64}$ .

В среде разработки *Delphi Personal Edition* нами были реализованы программные средства генерации и анализа последовательностей  $\{x_i\}$  для различных показателей дискретности округления  $h$ . Каждому  $h$  соответствует точность  $\varepsilon = 10^{-h}$ . Таким образом, каждое  $x_i$  округляется до ближайшего  $\hat{x}_i = \text{Round}(10^h \cdot x_i) / 10^h$ . Очевидно, что  $|\hat{x}_i - x_i| \leq \varepsilon / 2$ .

Для исследования зависимостей траекторий от показателя дискретности округления  $h$  использовался следующий подход.

1. Ввиду симметричности модели непосредственно рассматривались

только положительные начальные условия  $x_0$ , выбравшиеся из интервала (0, 1).

2. Для  $h \in [3, 7]$  проведен полный перебор реализаций рядов  $\{x_i\}$  в зависимости от начального условия  $x_0$ . Таким образом, последовательно просматривались все  $x_{0j} = \varepsilon \cdot j$ , где  $j = 1 \dots 10^h - 1$ .
3. Для  $h \in [8, 11]$  генерировались случайных  $x_0$  для получения наборов последовательностей общим числом  $N = 2000$  (для  $h = 8$ ),  $N = 1000$  (для  $h = 9, 10$ ) и  $N = 500$  (для  $h = 11$ ). При этом  $x_0$  округлялось до  $\hat{x}_0$  в соответствии с текущим  $h$ .
4. Длина наблюдения последовательностей  $L$  выбиралась с тем расчетом, чтобы гарантировать обнаружение устойчивых циклов. Например, для  $h = 10$  было выбрано  $L = 512000$ .
5. Для каждого  $h$  анализ выполнялся для набора  $v_m = 2,599 + \Delta v \cdot m$ , причем было выбрано  $\Delta v = 0,001$  и  $m = 1 \div 200$ .
6. Округление применялось к рассчитанному значению  $x_{i+1}$ , а все промежуточные вычисления выполнялись с точностью *extended*.

При интерпретации результатов следует учесть, что при выбранном шаге  $\Delta v$  в выборку по  $v$  попадают точки из нескольких гиперустойчивых окон:  $v = 2,641; 2,700; 2,701; 2,702; 2,703; 2,704; 2,705; 2,734; 2,756$ . Очевидно, что поведение системы при данных значениях управляющего параметра будет существенно отличаться от поведения в соседних точках  $v_m$ .

Проведена вычислительная оптимизация, основанная на сохранении и последующем использовании результатов для уже обработанных последовательностей. Используемые вычислительные средства на базе Pentium 4 2800HT с 512 МБ оперативной памяти позволили эффективно исследовать периодичность генерируемых рядов в широком диапазоне параметров. В результате, например, для  $h = 7$  полный перебор для конкретного  $v_m$  составлял порядка 5 секунд.

В качестве иллюстративного примера в табл. 2 приведем начало последовательности при  $v = 2,702$ ,  $x_0 = 0,9$  и  $h = 4$ .

Пример реализации последовательности с округлением

$i$	$x_i$	$\hat{x}_i$
0	0,900000000000	0,9
1	0,462042000000	0,462
2	0,9818767321...	0,9819
3	0,0951728155...	0,0952
4	0,2548991106...	0,2549
5	0,6439896133...	0,644
6	1,0184108632...	1,0184
7	-0,1021947995...	-0,1022
8	-0,2732601159...	-0,2733
9	-0,6832991424...	-0,6833
10	-0,9842521048...	-0,9843
11	-0,0828552085...	-0,0829
12	-0,2224564090...	-0,2225
13	-0,5714320900...	-0,5714
<b>14</b>	<b>-1,0398351554...</b>	<b>-1,0398</b>
15	0,2280897753...	0,2281
16	0,5842589882...	0,5843
17	1,0397733397...	1,0398
18	-0,2280897753...	-0,2281
19	-0,5842589882...	-0,5843
<b>20</b>	<b>-1,0397733397...</b>	<b>-1,0398</b>

Из примера видно, что после 14 итераций происходит выход на циклический режим с периодом  $T=6$ . Добавим, что при  $x_0 = 0,9001$  происходит выход на несимметричный цикл с  $T=14$  (количество положительных элементов цикла — 10, а отрицательных — 4). А при  $x_0 = 0,9002$  происходит выход на другой, не совпадающий с первым цикл с  $T=6$ .

Следует отметить, что непосредственное применение округления имеет существенный недостаток: значительная часть последовательностей (а при некоторых  $\nu$  — все последовательности) фактически обрывается/вырождается, когда на каком-либо шаге происходит округление  $x_i$  до 0,  $-1$  или  $+1$ . В результате «выживают» только последовательности, в которых сравнительно быстро формируется устойчивый цикл с тем или иным периодом.

Такой эффект появления устойчивых точек в отображениях в случае пространственной дискретности известен и обсуждается в литературе [Yuan, Yorke, 2000] под названием «коллапс хаоса» (*collapsing of chaos*).

Для логистического отображения также актуальна проблема обнуления  $\hat{x}_i$  при округлении, так как плотность  $H(x)$  логистического отображения пропорциональна  $1/(x(1-x))$  и соответственно значения  $x_i$ , близкие к 1 и 0, весьма вероятны. По этому поводу в [Wang et al, 2003] сформулировано замечание об исключении таких последовательностей, без конкретизации

способов учета их влияния на получаемые статистические характеристики. В других работах [Lanford, 1998] встречается рекомендация отбирать в качестве начальных условий только «типичные» значения, при этом 0 и 1 интуитивно рассматриваются как нетипичные.

В настоящей работе, для того чтобы избежать такого «вырождения» был использован следующий подход: при попытке округления до 0, -1 или +1 производится округление с заданной дискретностью  $\Delta x$  в другую сторону (например, до 0,000001, -0,000001 и т.п.). По нашему мнению, такое «отталкивание» от неустойчивой точки  $x=0$  не противоречит «здравому смыслу» и может иметь естественные объяснения.

#### 4. Корреляционная размерность для кубического отображения

Как известно, корреляционная размерность  $D_2$  — это количественная характеристика, несущая информацию о степени сложности поведения динамической модели. В этой связи представляет интерес ее расчет для кубического отображения (т.е. смоделированного с точностью *double* без округления). Для этого необходимо вычислить статистику

$$C(r) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} H(r - |x_j - x_i|),$$

где  $H(z)$  — функция Хэвисайда:  $H(z) = 0$  при  $z < 0$  и  $H(z) = 1$  при  $z \geq 0$ .

Далее строится зависимость логарифма  $C(r)$  от логарифма  $r$  и в получившемся логарифмическом масштабе на зависимости  $\lg C / \lg r$  выделяется область линейности (область скейлинга), так что можно установить функциональную связь  $\lg C = D_2 \cdot \lg r + k$ . Коэффициенты  $D_2$  и  $k$  могут быть получены с помощью аппарата регрессионного анализа.

На рис. 1 показан вид зависимости  $C(r)$  в диапазоне по  $r \in [0,005; 0,2]$ .

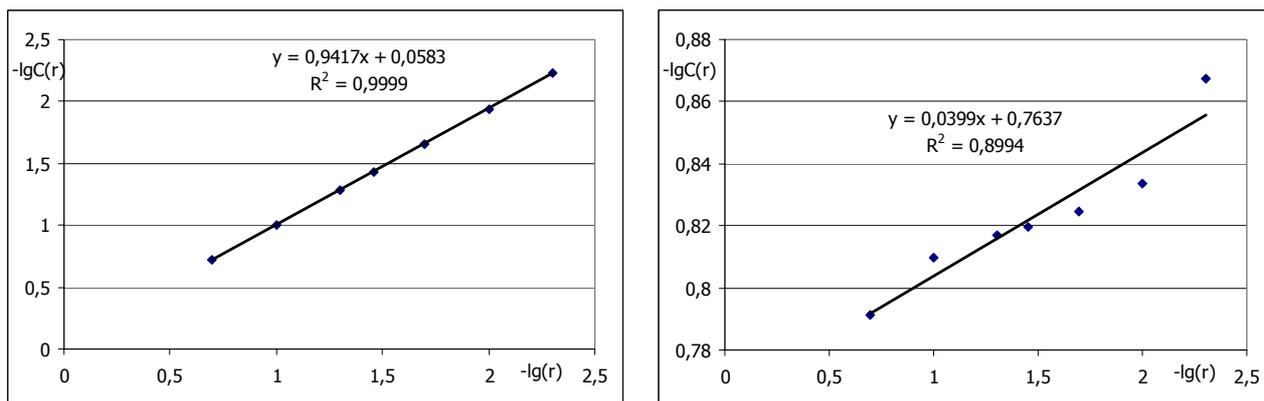


Рис. 1. Расчет корреляционной размерности  $D_2$  для  $\nu = 2,63$  (1а, слева) и  $\nu = 2,704$  (1б, справа) при  $x_0 = 0,01$

В гиперустойчивых окнах значения  $D_2$  могут быть рассчитаны только формально, так как, вообще говоря, на кривой  $\lg(C(r))/\lg(r)$  отсутствует

линейный участок (см. рис. 1b).

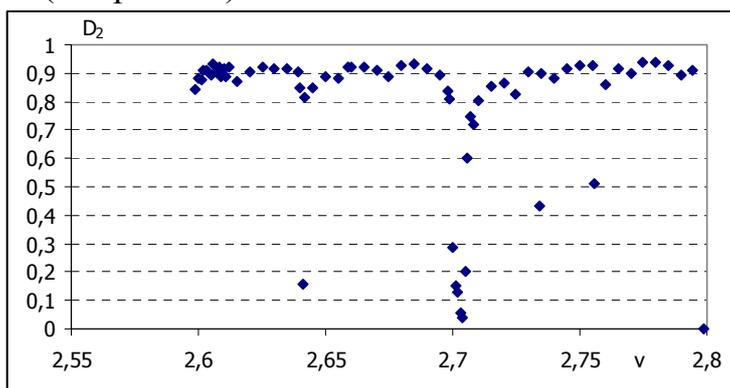


Рис. 2. Зависимость корреляционной размерности  $D_2$  от  $\nu$

Из рис. 2 видно, что корреляционная размерность  $D_2$  остается фактически постоянной в исследованном диапазоне  $\nu$ . Исключение составляют диапазоны  $\nu$ , соответствующие гиперустойчивым окнам. Окно W3 (в области  $2,700 \div 2,705$ ) представляет собой особенность, искажающую характер  $D_2(\nu)$  в диапазоне  $\nu = 2,698 \div 2,725$ . Также и гиперустойчивое окно W2 (в области  $2,641$ ) искажает  $D_2(\nu)$  в диапазоне  $\nu = 2,64 \div 2,645$ .

По остальным интервалам можно рассчитать среднее значение корреляционной размерности  $\bar{D}_2 = 0,906 \pm 0,006$ .

### 5. Анализ периодичности траекторий в зависимости от начальных условий.

Рассматривая отдельную траекторию  $X(j) = \{\hat{x}_i\}$ , начинающуюся с произвольного  $x_{0j}$ , можно выделить следующие характеристики периодичности:

$T(j)$  — период установившегося цикла;

$S(j)$  — интервал перехода, т.е. продолжительность перехода от  $x_0$  к циклу ( $S$  считается нулевым, если начальное значение  $x_0$  сразу попадает в устойчивый цикл);

$C(j)$  — «интервал хаоса», т.е. продолжительность интервала наблюдения, при котором еще нельзя установить периодичность траектории, т.е.  $C = S + T$ .

Поэтому при наблюдении реализации  $\{x_i\}$  в течение  $C$  итераций можно условно считать  $\{x_i\}$  хаотической.

В качестве характеристик всего набора из  $N$  последовательностей при фиксированных  $\nu_m$  и  $h$  использовались следующие показатели:

1) средний период цикла  $T_{av}(\nu_m, h) = \sum_{j=1}^N T(j) / N$ ;

2) количество последовательностей  $F(\nu_m, h)$ , приводящих к устойчивым фиксированным точкам, т.е. к точным (при данной дискретности

- $\varepsilon = 10^{-h}$ ) решениям уравнения  $v(1 - x^2) = 1$ ;
- 3) количество различных периодов траекторий  $TD(v_m, h)$ ;
  - 4) период наиболее часто наблюдаемого цикла  $TM(v_m, h)$  и доля траекторий, приводящих к нему  $TR(v_m, h)$ ;
  - 5) наибольший наблюдаемый период  $TL(v_m, h)$ ;
  - 6) массив наблюдаемых периодов  $TN(v_m, h, l)$ , где  $l$  — индекс по обнаруженным периодам;
  - 7) среднее  $S_{av}$ , медиана  $S_{med}$  и верхняя и нижняя квартили  $S_{q1}$ ,  $S_{q3}$  распределения  $H(S)$  — т.е. наблюдаемого распределения последовательностей по интервалам перехода к циклу;
  - 8) максимальное значение интервала перехода к циклу  $S_{max}$ ;
  - 9) среднее  $C_{av}$ , максимальное  $C_{max}$  значения и медиана  $C_{med}$  распределения  $H(C)$ , т.е. наблюдаемой функции распределения по длине интервалов «хаоса».

Кроме того, для оценки бассейнов притяжения циклов с определенным периодом  $T_l$  может использоваться нормированное значение  $TN(v_m, h, l)/N$ .

Отметим попутно, что значительная часть практических задач, связанных с анализом временных рядов, решается в условиях достаточно жестких ограничений по времени принятия решения. Это, в частности, накладывает ограничения на длину временных рядов исследуемых показателей. В этом смысле асимптотические (при стремящемся к бесконечности времени) свойства дискретных систем имеют существенно меньшую область практической применимости по сравнению с переходными характеристиками периодичности траекторий.

Итак, для  $h \in [3, 7]$  полный перебор начальных условий позволяет исследовать все периодические циклы, интервалы переходов и бассейны их притяжения. Для  $h \in [8, 11]$  случайный выбор начальных условий для достаточно большого суммарного числа реализаций позволяет получить общие представления о влиянии соответствующего шага дискретизации.

В следующих разделах мы проиллюстрируем перечисленные здесь характеристики для  $v_m \in [2,599 \dots 2,798]$ .

В качестве примера рассмотрим зависимости характеристик периодичности от начальных условий при нескольких фиксированных  $v_1 = 2,599$  и  $v_{10} = 2,608$  и дискретности  $h \in [5, 7]$  (см. рис. 3–5).

Для наглядности на рис. 3–5 проведены кривые, соответствующие скользящему среднему по 20 точкам.

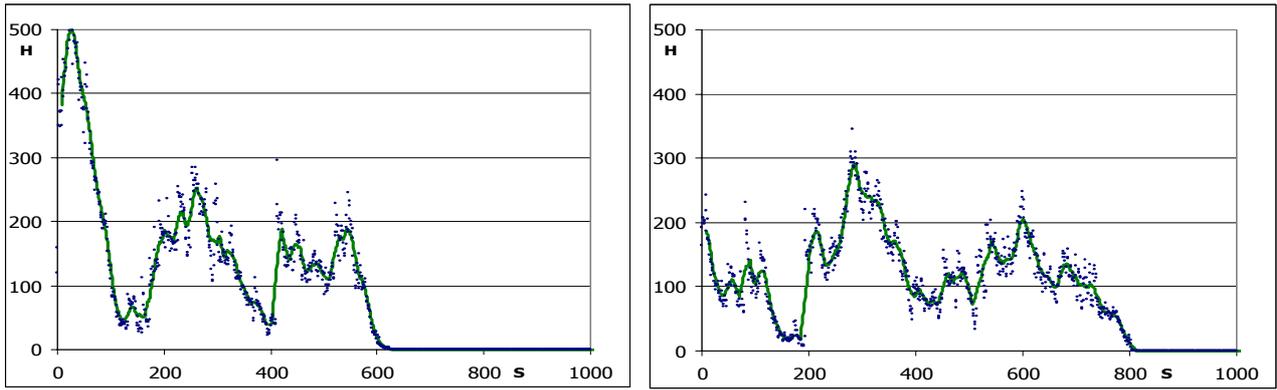


Рис. 3. Количество  $H$  реализаций, в которых наблюдается соответствующее время  $S$  перехода к циклу (для  $h = 5$ , 3а слева —  $v_1 = 2,599$ , 3б справа —  $v_{10} = 2,608$ )

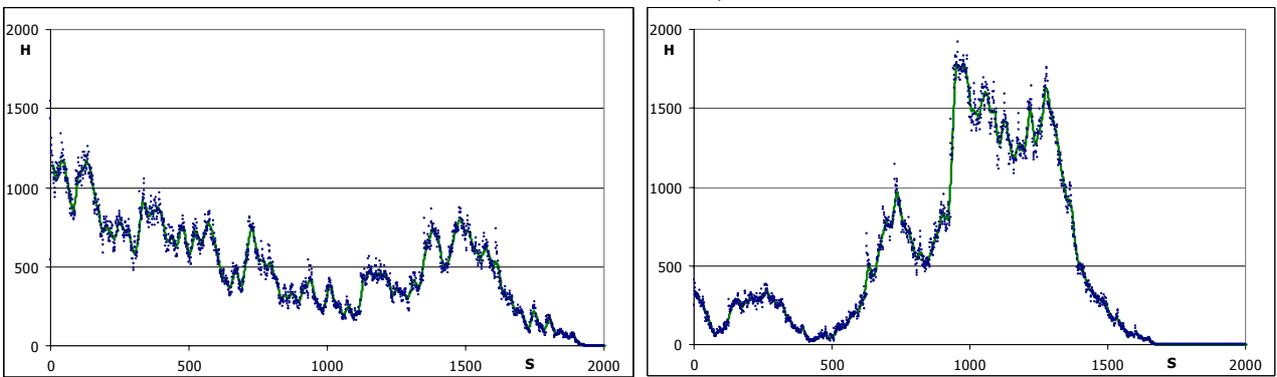


Рис. 4. Количество  $H$  реализаций, в которых наблюдается определенное время  $S$  перехода к циклу (для  $h = 6$ , 4а слева —  $v_1 = 2,599$ , 4б справа —  $v_{10} = 2,608$ )

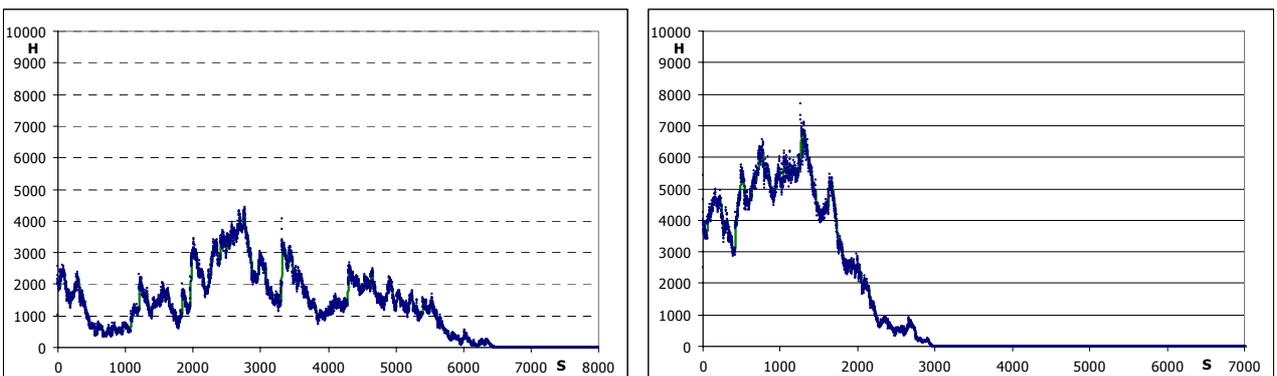


Рис. 5. Количество  $H$  реализаций, в которых наблюдается определенное время  $S$  перехода к циклу (для  $h = 7$ , 5а слева —  $v_1 = 2,599$ , 5б справа —  $v_{10} = 2,608$ )

Таким образом, как при различных  $v$ , так и даже при одинаковых  $v$  и различных  $h$  обнаруживается существенное различающееся поведение моделей. Каждая кривая  $H(S, h)$  характеризуется наличием нескольких

минимумов и максимумов и, в целом, немонотонным иррегулярным характером.

Интерес представляет также зависимость  $H(C)$  — т.е. функция распределения по возможным значениям «интервалов хаоса»  $C$ . На рис. 6 мы ограничились демонстрацией  $H(C)$  только для  $h = 7$ .

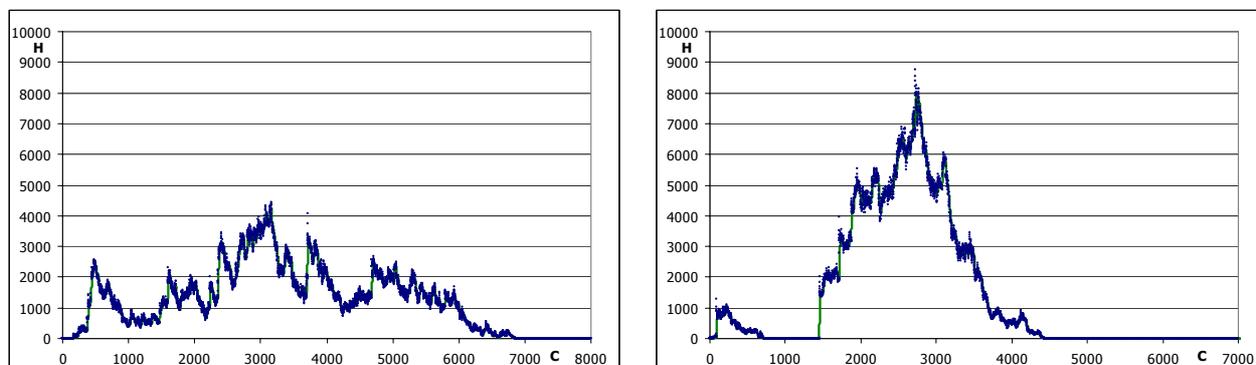


Рис. 6. Количество  $H$  реализаций, в которых наблюдается определенный «интервал хаоса»  $C$  (для  $h = 7$ , 6а слева —  $v_1 = 2,599$ , 6б справа —  $v_{10} = 2,608$ )

На рис. 6б видно, что весь набор реализаций разделяется на две группы, так как не существует реализаций с  $C \in [728; 1456]$ . Очевидной причиной этого факта, как будет проиллюстрировано в следующем разделе, является наличие циклов с сильно различающимися периодами.

Сделаем попутно одно важное, на наш взгляд, замечание. Решение задач распознавания требует изучения не только усредненных статистических показателей, характерных для всего класса объектов, но и выявления шаблонов-паттернов, свойственных отдельным группам объектов (подвыборкам данных). Такой подход в последнее время активно развивается в приложениях интеллектуального анализа данных (*Data Mining*). Подобный структурный анализ групп позволяет решать задачи в условиях недостаточности и неполноты входной информации, не опираясь на априорные предположения о функции распределения объектов в пространстве признаков их описания. В смысле сказанного представляет интерес разбиение всего множества объектов (для текущей задачи — это реализации последовательностей в отображениях) на компактные в некотором определенном смысле группы-кластеры. Такая постановка, в частности, подразумевает и адекватный учет начальных условий.

## 6. Количество устойчивых циклов с различными периодами и бассейны притяжения.

Для двух наборов реализаций при  $v_1 = 2,599$ ,  $v_{10} = 2,608$  и  $h = 7$  рассмотрим, какие различные периоды могут обнаруживаться при различных начальных условиях (см. табл. 3).

Таблица 3

Перечень наблюдаемых периодов циклов

№ п/п	$v_1 = 2,599$		$v_{10} = 2,608$	
	Период	Количество реализаций	Период	Количество реализаций
1	394	9499048	1457	7071671
2	438	328425	1718	2649017
3	382	95965	93	269860
4	168	64567	162	5261
5	258	11873	46	3466
6	9	114	70	407
7	1	7	8	145
8			6	96
9			10	59
10			5	13

Таким образом, для  $v_1$  обнаруживается 7 различных периодов циклов, а для  $v_{10}$  — 10. Период длины  $T=1$  очевидно означает фиксированную устойчивую точку, к которой для  $v_1$  сходится 7 реализаций. Упомянутая выше особенность с рис. 6b объясняется отсутствием для  $v_{10}$  циклов с периодами  $T \in [163; 1456]$ .

На рис. 7 приведена зависимость от  $v$  количества циклов различного периода при  $h = 6$ .

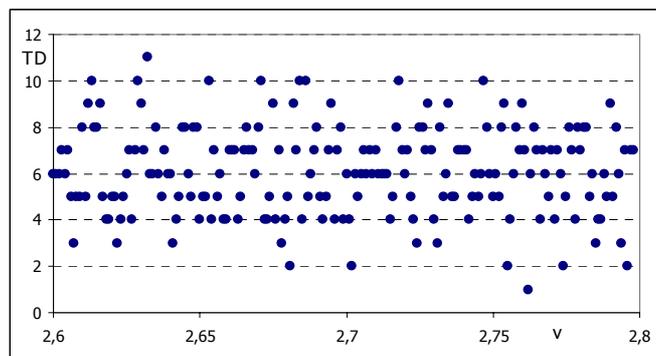


Рис. 7. Количество  $TD$  циклов различного периода (при  $h = 6$ ).

Дополнительно, в диапазоне  $h \in [3, 7]$ , где был осуществлен полный перебор начальных условий, обнаружена линейная зависимость среднего по исследованному диапазону  $v$  значения  $TD$ , т.е. числа различных периодов, от показателя дискретности  $h$ . Эта зависимость

$$\overline{TD} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m TD(v_j, h) = 1,0885h - 0,4735 \quad \text{характеризуется} \quad \text{высоким} \quad \text{значением}$$

коэффициента детерминированности  $R^2=0,9983$ . Так как при  $h > 7$  очевидно были пропущены некоторые циклы с малым бассейном притяжения, то данная зависимость может быть использована для экстраполяции числа циклов.

Для иллюстрации относительных размеров бассейнов притяжения циклов с различными периодами на рис. 8 приведена зависимость  $TR(v)$ . Эта зависимость показывает долю траекторий, приводящих к наиболее часто встречающемуся циклу. Можно рассчитать среднее значение по исследованному диапазону  $v$ :  $\overline{TR} \approx 0,755$

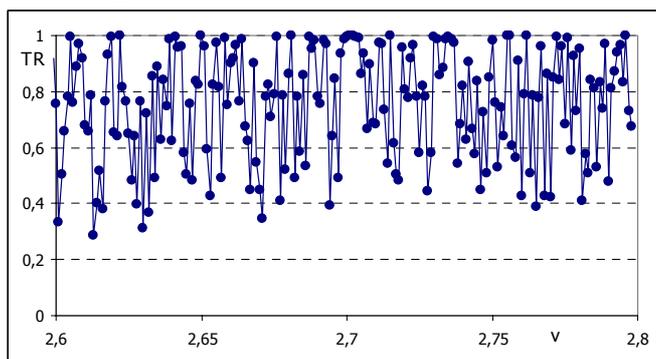


Рис. 8. Доля траекторий, приводящих к наиболее часто встречающемуся периоду циклов (при  $h = 6$ ).

### 7. Характеристики периодичности траекторий.

В настоящем разделе мы рассмотрим еще несколько статистических характеристик периодичности траекторий (см. рис. 9–15). Для иллюстративности все диаграммы соответствуют одинаковому показателю дискретности  $h = 6$ .

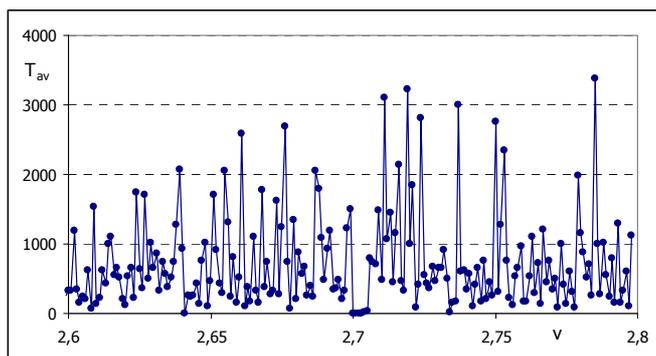


Рис. 9. Зависимость среднего периода цикла  $T_{av}$  от  $v$  (при  $h = 6$ ).

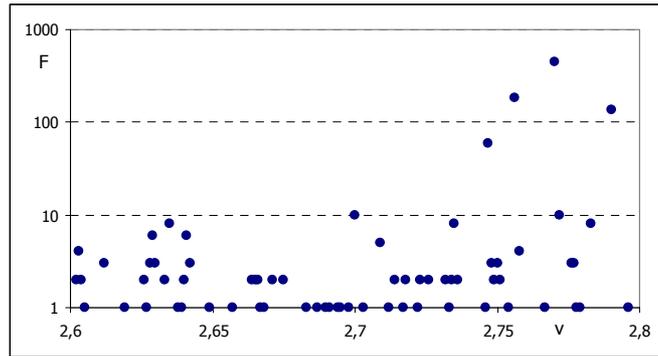


Рис. 10. Количество последовательностей (из 999999 реализаций), приводящих к устойчивым фиксированным точкам (при  $h = 6$ ).

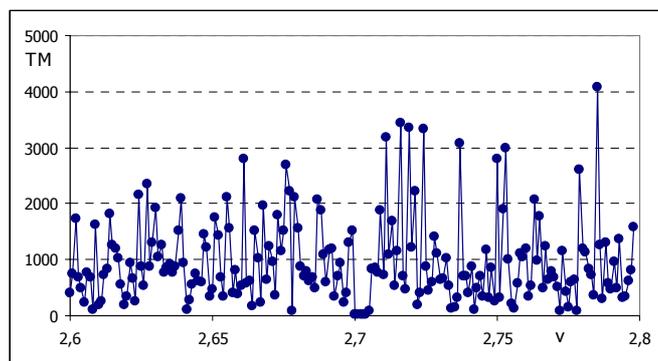


Рис. 11. Зависимость максимальной длины цикла  $TM$  от  $v$  (при  $h = 6$ ).

Итак, при  $h = 6$  максимальный период цикла равен  $TM(v = 2,785) = 4088$ , что примерно в 500 раз меньше, чем возможное число значений  $x_i$ .

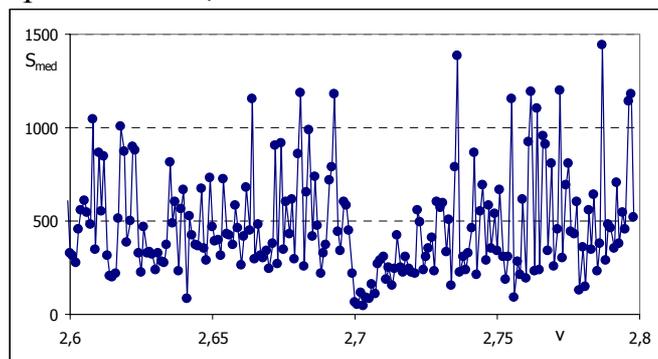


Рис. 12. Зависимость медианы  $S_{med}$  интервала перехода к устойчивому циклу от  $v$  (при  $h = 6$ ).

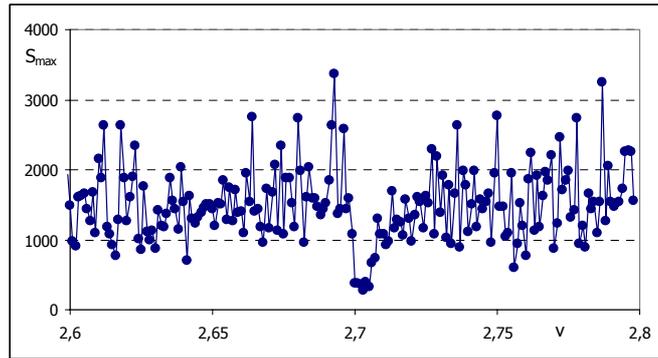


Рис. 13. Зависимость максимального интервала  $S_{max}$  перехода к циклу от  $\nu$  (при  $h = 6$ ).

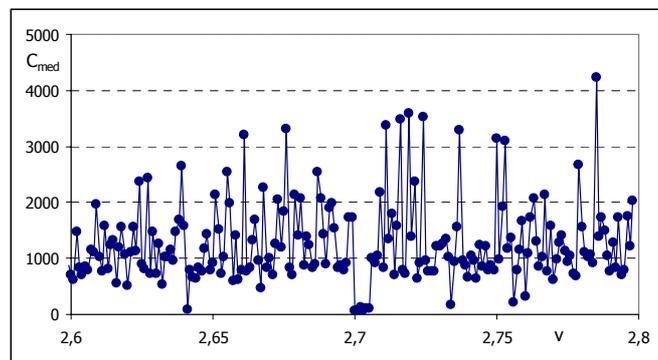


Рис. 14. Зависимость медианы  $C_{med}$  от  $\nu$  (при  $h = 6$ ).

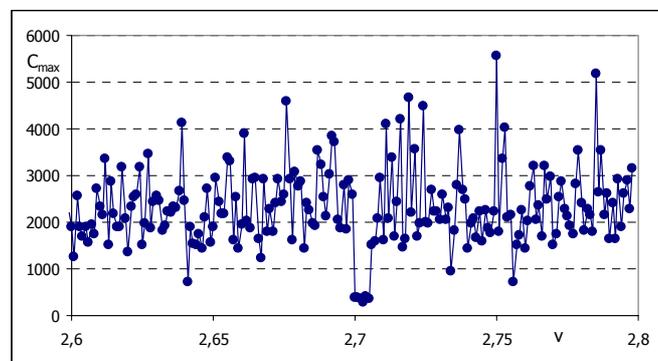


Рис. 15. Зависимость максимальной продолжительности «интервала хаоса» от  $\nu$  (при  $h = 6$ ).

Приведенные на рис. 9–15 диаграммы демонстрируют, что, за исключением диапазонов  $\nu$ , соответствующих гиперустойчивым окнам, отсутствуют какие-либо очевидные зависимости предложенных показателей от  $\nu$ . В частности, фактически не изменяются средние значения показателей при сканировании по интервалам (т.е. тренды, вообще говоря, не выявляются).

## 8. Скейлинговые свойства характеристик периодичности траекторий.

Как говорилось в разделе 2, теоретические выкладки [Grebogi et al, 1988] показывают, что средние периоды  $CRCT$  траекторий степенным образом зависят от пространственной дискретности и корреляционной размерности, т.е. пропорциональны  $10^{hD_2/2}$ . Исследуем, проявляются ли такие свойства для кубического отображения. Для этой цели остановимся на трех показателях: средней длине цикла  $T_{av}$ , медиане интервала перехода к циклу  $S_{med}$  и максимальной продолжительности «интервала хаоса»  $C_{max}$ . Изучим поведение этих показателей при фиксированном  $v$  и  $h \in [3, 11]$ .

Анализ базируется на рассмотрении зависимости логарифма показателя от  $h$ . Используется линейная аппроксимация, позволяющая определить коэффициент  $\alpha$  наклона этой зависимости. На рис. 16 в качестве примера приведены зависимости для  $v_{21} = 2,62$ .

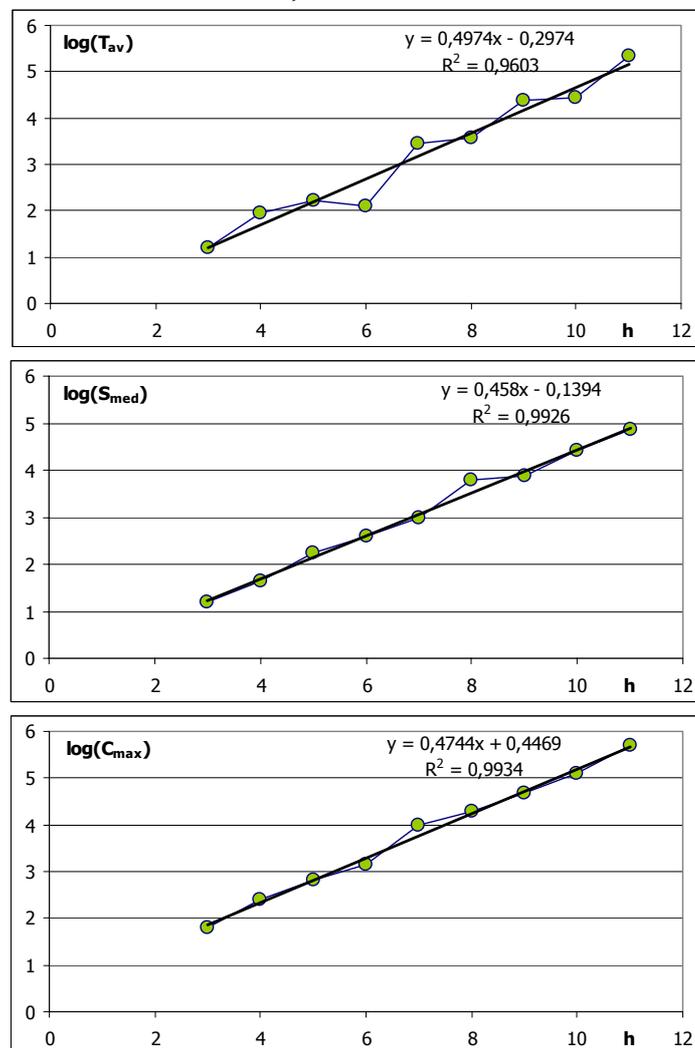


Рис. 16. Скейлинговый характер зависимостей  $\lg T_{av}(h)$  (16а вверху),  $\lg S_{med}(h)$  (16b в середине) и  $\lg C_{max}(h)$  (16с внизу). Следует отметить, что линейная зависимость  $\lg T_{av}(h)$  соблюдается, в

целом, существенно хуже, чем аналогичные зависимости  $\lg S_{med}(h)$  и особенно  $\lg C_{max}(h)$ . Обозначим коэффициенты наклона как  $\alpha_T$ ,  $\alpha_S$  и  $\alpha_C$  соответственно и рассчитаем средние значения этих коэффициентов по исследованному диапазону  $v$ . При этом исключим  $v_m$ , соответствующие гиперустойчивым циклам, так как в них сильно искажается линейность зависимостей. В результате получены следующие средние значения и стандартные отклонения коэффициентов  $\overline{\alpha_T} \approx 0,507$ ;  $\sigma_T \approx 0,051$ ;  $\overline{\alpha_S} \approx 0,477$ ;  $\sigma_S \approx 0,029$ ;  $\overline{\alpha_C} \approx 0,471$ ;  $\sigma_C \approx 0,017$ . Таким образом, ярче всего скейлинговые свойства проявляются в зависимостях  $C_{max}(v_m = \text{const}, h)$ .

Сравним рассчитанные параметры скейлинга со значением корреляционной размерности  $D_2 = 0,906$ , полученным в разделе 4 для исходного (без округления) кубического отображения. Следовательно,  $D_2/2 \approx 0,453$ . Это значение попадает в интервалы  $\overline{\alpha_S} \pm \sigma_S$  и  $\overline{\alpha_C} \pm 2\sigma_C$ .

### **Заключение.**

В работе проанализированы некоторые особенности количественных характеристик периодичности траекторий для компьютерной реализации кубического отображения в зависимости от значения управляющего параметра  $v$  (в диапазоне от 2,599 до 2,798) и показателя дискретности  $h$  (в диапазоне от 3 до 11).

Показано, что каждой паре  $(v_j, h_k)$  соответствует всего несколько устойчивых циклов (в экспериментах не было обнаружено более 11 различных периодов циклов). Обнаружено отсутствие плавных зависимостей среднего периода цикла, среднего времени перехода к циклу и других статистических характеристик периодичности от значения параметра  $v$ .

Изучены скейлинговые свойства характеристик периодичности траекторий. Показано их соответствие значению корреляционной размерности кубического отображения.

Отметим еще раз, что исследование тонких особенностей структуры бассейнов притяжения (по диапазонам начальных условий) предполагается в дальнейшем, как одно из направлений развития представленной работы.

Работа выполнена при поддержке грантов РГНФ №04-03-00069а и НШ-2071.2003.4.

### Список литературы.

1. Григорьев А. Неочевидные особенности вещественных чисел. <http://www.delphikingdom.com/asp/viewitem.asp?catalogID=374>.
2. Колупаев А.Г., Чернавский Д.С. Перемешивающий слой. // *Краткие сообщения по физике.* – 1997. – №1-2. – с.12–18.
3. Чернавский Д.С., Никитин А.П., Чернавская О.Д., Кривошеев О.И. О некоторых свойствах динамического хаоса в кубическом отображении. / *Препринт ФИАН, 2005 (в печати)*
4. Blank M. Pathologies generated by round-off in dynamical systems // *Physica D.* – 1994. – v. 78. – p. 93-114
5. Davidchack R.L., Lai Y.-C. Efficient algorithm for detecting unstable periodic orbits in chaotic systems // <http://arxiv.org/pdf/chao-dyn/9906007>.
6. Diamond P., Pokrovskii A. The statistics of simulating chaos // *Statistics and Computing.* – 2001. – v. 11. – p. 217–228.
7. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Roundoff-induced periodicity and the correlation dimension of chaotic attractors // *Phys. Rev. A.* – 1988. – v. 38. – p. 3688–3692.
8. Iglesias A, Gutierrez J.M., Guemez J., Matias M.A. Chaos suppression through changes in the system variables and numerical rounding errors // *Chaos, Solitons & Fractals.* – 1996. – v.7. – No.8. – p. 1305–1316.
9. Lanford O.E. Informal remarks on the orbit structure of discrete approximations to chaotic maps // *Experimental Mathematics.* – 1998. – v. 7. – No. 4. – p.317–324.
10. Palacios A. Cycling chaos in one-dimensional coupled iterated maps // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* – 2002. – v. 12. – No. 8. – p.1859-1868.
11. Setti G., Mazzini G., Rovatti R., Callegari S. Statistical modeling of discrete-time chaotic processes— basic finite-dimensional tools and applications // *Proceedings IEEE.* – 2002. –v. 90. – No. 5. – p. 662–690
12. Wang Sh., Liu W., Lu H., Kuang J., Hu G. Periodicity of chaotic trajectories in realizations of finite computer precisions and its implication in chaos communications // <http://arxiv.org/pdf/nlin.CD/0309005>
13. Yuan G., Yorke J.A. Collapsing of chaos in one dimensional maps // *Physica D.* 2000. – v. 136. – p. 18-30.