РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Физический институт имени П.Н. Лебедева

ФИАН

Д.С. ЧЕРНАВСКИЙ, А.П. НИКИТИН,
О.Д. ЧЕРНАВСКАЯ, О.И. КРИВОШЕЕВ

ПРЕПРИНТ

20

ГЕНЕРАЦИЯ И АНАЛИЗ КВАЗИХАОТИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Часть 2. Скейлинговые эффекты

МОСКВА 2005

В работе продолжено исследование динамической модели, включающей шумовую компоненту, которая позволяет генерировать квазихаотические временные ряды. Эти ряды имитируют явление «перемешивающего слоя», т.е. сценарий: хаотическое поведение – бистабильный режим (перескоки между двумя существенно различными состояниями) – выбор одного стабильного состояния. Детально рассмотрена зависимость от параметров модели так называемого «момента истины», начиная с которого становится возможным с некоторой заданной вероятностью предсказать, что текущее состояние системы далее не изменится, т.е. не произойдет переход в другое стационарное состояние. В частности, проанализировано влияние шумов, амплитуда которых задается различными распределениями: гауссовым, гауссовым с положительным и отрицательным эксцессом, асимметричным, экспоненциальным, Парето, гамма. Обнаружены и изучены скейлинговые эффекты, т.е. различные степенные зависимости исследуемых статистических характеристик временных рядов от параметров модели.

In the present paper, the study of the dynamical model involved the "noise" component has been continued. This model provides an opportunity to generate quasi-chaotic time sets imitating the effect of the "mixing layer", that is, the scenario "chaotic behavior — bistable regime (jumps between two considerably different states) — choice of one specific stable state". The dependence of the so-called "moment of truth" on the model parameters has been examined in detail. The notion "moment of truth" corresponds to the moment when it possible, with the given probability, to predict that the current state of the system remains invariable, that is there will be no jumps to another stable state. The influence of the type of incorporated noise, which amplitude is given by Gaussian, leptokurtic, platykurtic, asymmetrical, exponential, Pareto or gamma distributions, has been analyzed. A variety of the scaling effects, that is, the presence of different power relationships between statistics of the studied time sets and the model parameters has been found out and studied.

Введение

В первой части настоящей работы [*Чернавский и др., 2005*] была поставлена задача анализа квазихаотических временных рядов, сгенерированных на базе уравнения Ланжевеновского типа с медленно убывающим шумом.

Более конкретно, рассматривалось уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = (x - x^3) + g(t)\cdot\xi(t) \qquad (1)$$

Величина $g(t)$ — монотонно убывающая функция. Ниже рассматривается вариант $g(t) = g_0 e^{-\nu t}$, где ν — параметр модели.

Величина $\xi(t) = \xi_t(t)\cdot\xi_A$ представляет собой случайный дельта-коррелированный шум с нормированной амплитудой ξ_A. Плотность вероятности реализации значения ξ_A описывается некоторым заданным распределением (гауссовым, экспоненциальным, распределением Парето и др.). Отметим, что ниже каждый раз будет особо оговариваться вид этого распределения. Шумовая компонента $\xi_t(t)$ отлична от нуля только в моменты времени $t = \tau\cdot i$, где $i = 1\ldots N$ — целое число.

Предполагается, что и «измерение» переменной $\boldsymbol{x}$ происходит с той же периодичностью τ. В этой интерпретации τ представляет собой некоторый естественный временной масштаб мониторинга системы. Очевидно, что возможны и другие постановки, в которых периодичность шума отлична от периодичности измерения. В случае более частых измерений фрагменты наблюдаемой последовательности $\{x(t)\}$ между импульсами шума будут описывать чисто динамическое поведение модели. В случае более редких измерений придется допустить наличие нескольких шумовых «импульсов» между элементами x_i и x_{i+1}, что, очевидно, приведет к большему разбросу в любых рассчитываемых статистических характеристиках.

Также можно отказаться от эквидистантных шумовых воздействий и ввести распределение $\xi_t(t)$ по времени, использовав, например, пуассоновскую модель. Подобное рассмотрение вполне логично, но в настоящей работе мы преследуем цель получить на относительно простой модели базовые представления и качественные характеристики поведения временных рядов, которые затем можно подробно исследовать в более сложных вариантах исходной задачи.

Итак, генерируется и анализируется временной ряд $X(t_i) = x(t_i = t_0+\tau i)$, в котором случайные импульсы с частотой $1/\tau$ вызывают мгновенное изменение координаты x.

Особенностью подобных временных рядов является их бистабильный характер, т.е. наличие двух устойчивых состояний ($x = +1$ и $x = -1$) и событий переходов (перескоков) между ними. Основное внимание в первой части работы было уделено возможности прогнозирования так называемых «моментов истины» $t_{\text{ист}}(P)$, т.е. моментов времени, начиная с которых можно с заранее заданной вероятностью P утверждать, что текущее состояние системы останется впредь неизменным. Это означает, что переход в противоположное состояние может произойти с вероятностью $1–P$.

Подчеркнем особо, что дополнительно вводится промежуточное состояние «0» в окрестности неустойчивой точки $x = 0$. Поэтому понятие «переход» подразумевает некоторое минимальное изменение координаты Δx. Границы между состояниями «+1» и «0», а также «0» и «–1» были выбраны из естественных соображений и равны +0.5 и –0.5 соответственно. Таким образом, гипотетическая траектория {+0.1; –0.1; +0.1} не будет иметь в такой интерпретации ни одного перехода.

Кроме того, факт пребывания системы в состоянии «+1» или «–1» определяется не одномоментно, а с помощью расчета усредненной статистики по конечному интервалу времени Δt. В результате «переход» между «+1» и «–1» или обратно оказывается не мгновенным событием, а событием с минимально возможным характерным временем Δt. Ниже в большинстве случаев справедлива оценка $\Delta t{\sim}10\tau$.

Представляется, что такой подход, хотя и требует априорного постулирования понятий «состояние» и «переход», более соответствует условиям решения реальных задач анализа временных рядов, чем использование вычислительной модели с фактически неограниченной точностью как по времени, так и по координате.

В качестве базового признака для решения задачи прогнозирования была введена статистика D_4, по сути являющаяся средним значением модуля приращений x_i, вычисленным по отдельным фрагментам исходного ряда $\{x_i\}$.

Во второй части настоящей работы мы представим некоторые обнаруженные зависимости характеристик временных рядов от типа шума и других параметров модели. В частности, будут прослежены зависимости от параметра ν, определяющего темп убывания амплитуды шума, и от параметра τ, связывающего периодичность шума с характерным динамическим временем системы. Мы называем эти закономерности «скейлинговыми эффектами», так как они выражаются в различных степенных зависимостях исследуемых статистик от перечисленных параметров.

1. Дополнительные типы шумов.

Перечислим типы шумов, введенные в текущей части работы дополнительно к использованным в [*Чернавский и др., 2005*] шумам, амплитуда которых подчиняется нормальному гауссову, экспоненциальному и Парето распределениям. С их помощью будут сгенерированы и далее проанализированы квазихаотические временные ряды при следующих диапазонах параметров модели (1): $\nu\in[5\cdot10^{-5}, 3\cdot10^{-4}]$ и $\tau\in[0.01, 0.7]$.

1.1. Гамма-шум. «Гамма-шумом» будем называть шум с амплитудой, плотность вероятности $\rho(x)$ которой описывается Гамма-распределением $\rho(x) \sim Sign(i)\dfrac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x}$, где a — параметр формы, $\Gamma(a)$ — гамма функция, $Sign(i)$ — случайно выбираемый знак i-го импульса шума. Для определенности было выбрано значение $a = 2$. Для получения Гамма-распределения использовался алгоритм Марсальи-Цзяна [*Marsaglia, Tsang*, 2000]. Экспериментальная $\rho(x)$ показана на рис. 1.

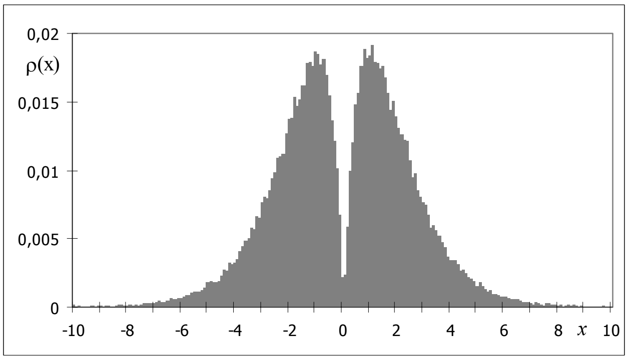


Рис. 1. Экспериментальное распределение для гамма-шума

Приведем основные статистические характеристики полученного экспериментально гамма-шума: среднее $\bar{x} = 0.0002$, стандартное отклонение $\sigma = 2.446$, эксцесс $E = 0.360$, асимметрия $A = -0.005$, среднее по положительным значениям $\bar{x}_+ = 1.994$.

Таким образом, гамма-шум является примером ситуации, когда существует некоторый характерный масштаб флуктуаций. При этом малые флуктуации (меньше данного масштаба) оказываются относительно редки.

1.2. *Platykurtic* шум. Предметом изучения в данном случае стал шум, плотность вероятности которого описывается гауссовым распределением с отрицательным эксцессом (так называемое *platykurtic* распределение). *Platykurtic*–шум был имитирован с помощью свободно распространяемой программы *RandGen* [*Lohninger*]. На рис. 2. отображена экспериментальная плотность вероятности для такого шума. Приведем ее основные статистические характеристики: $\sigma = 0.999$, $\bar{x} = 0$, $E = -0.543$, $A = -0.003$.

Отметим, что при смещении среднего значения распределения, например, до $\bar{x} = -0.0157$ (при асимметрии $A = -0.001$) наблюдается двухкратный перевес финальных состояний «–1» над «+1». Таким образом, условия равенства нулю как среднего значения шума, так и асимметрии распределения его амплитуды принципиально важны при прогнозировании. В противном случае финальные состояния неравновероятны, а потому вероятность наличия или отсутствия последующего перескока будет зависеть от того, каково текущее состояния системы: «+1» или «–1».

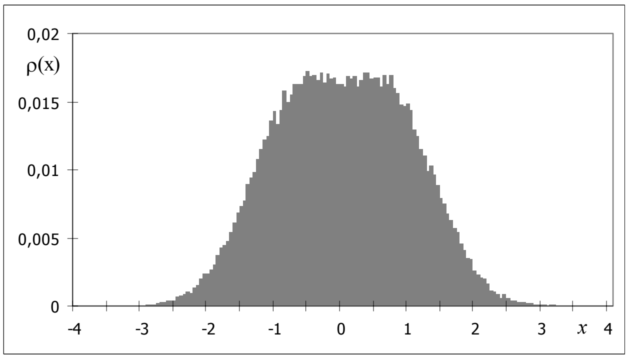


Рис. 2. Экспериментальное распределение *platykurtic* шума

1.3. *Leptokurtic* шум. Под «*leptokurtic*-шумом» понимается шум, плотность вероятности амплитуды которого описывается нормальным распределением с положительным эксцессом. Такой шум был также имитирован с программы *RandGen* [*Lohninger*]. На рис. 3. приведена экспериментальная плотность вероятности $\rho(x)$. Приведем статистические характеристики смоделированного шума: $\sigma = 1$, $\bar{x} = 0$, $E = +0.737$, $A = 0.001$.

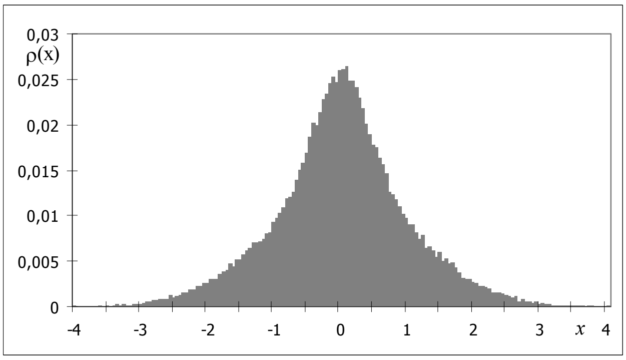


Рис. 3. Экспериментальное распределение *leptokurtic* шума

Platykurtic и *leptokurtic* шумы были выбраны нами по той причине, что обыденное представление о широкой распространенности в реальных задачах нормального (гауссова) распределения во многом не соответствует действительности. Понимание этого факта находит все большее распространение в последнее время. Поэтому растет практический интерес к различным распределениям, так или иначе отклоняющимся от нормального.

1.4. Асимметричный шум.

Шум с асимметричным распределением был также имитирован с помощью программы *RandGen* [*Lohninger*]. На рис.4 приведено экспериментальное распределение для такого шума. Рассчитанные характеристики распределения таковы: $\sigma = 1.001$, $\bar{x} = 0.0063$, $E = 0.746$, $A = –0.737$.

Для смоделированного шума 43.7% элементов последовательности имеют отрицательные значения и, соответственно, 56.3% — положительные. При этом меньшее количество отрицательных значений компенсируется тем, что по модулю они больше (среднее для отрицательных значений $\bar{x}_- = –0.88$ в сравнении с $\bar{x}_+ = 0.69$ для положительных). Финальное состояние системы также несимметрично. В эксперименте состояние «+1» была достигнуто в 14.4%, а состояние «–1» — в 85.6% реализаций.

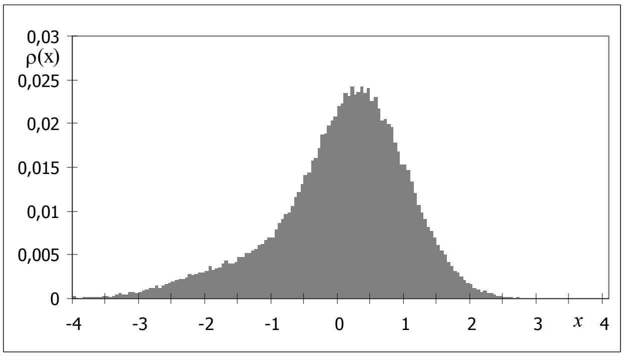


Рис. 4. Экспериментальное распределение для асимметричного шума.

Отметим, что ниже в текущей работе этот факт неравновероятности финальных состояний особо не рассматривается и не обсуждается. Подобное рассмотрение мы планируем сделать в дальнейшем.

2. Зависимость моментов истины от параметра ν.

В части 1 настоящей работы [*Чернавский и др., 2005*] были рассмотрены зависимости $P(D_4)$, описывающие характерные значения параметра D_4, соответствующие «моментам истины» с различной вероятностью P (см. рис. 5 и далее). Было показано, что для модели с гауссовым шумом может быть использована следующая аппроксимация:

$$P(D_4) = 1 - \exp\left(-\frac{\nu_0}{\nu} \left[\frac{D_4}{D_4^{(0)}} \right]^A \right), \qquad (2)$$

где $D_4^{(0)}$ — характерная величина D_4, полученная при фиксированном $\nu_0 = 10^{-4}$, а A — параметр, не зависящий от ν. При этом ν выбиралось из диапазона $\nu \in (1\pm0.2)\cdot\nu_0$.

С помощью средств регрессионного анализа можно для модели с гауссовым шумом получить (например, при $\tau = 0.1$) следующие оценки коэффициентов: $D_4^{(0)} = 0.082$ и $A = 13.6$. При этом $D_4^{(0)} \approx D_4(63.5\%)$, т.е. соответствует вероятности наличия перескока P =63.5%.

Отметим, что значения коэффициентов $D_4^{(0)}$ и A зависят от τ: так, при $\tau = 0.25$ они равны $D_4^{(0)} = 0.136$ и $A = 14.1$, а при $\tau = 0.02$ $D_4^{(0)} = 0.0355$ и $A = 12.8$.

Исследуем вопрос, насколько адекватна данная аппроксимация при различных типах шума и различных значениях параметра ν, в том числе, и при ν, значительно отличающемся от ν_0. Чтобы не перегружать изложение, остановимся на фиксированном $\tau = 0.1$.

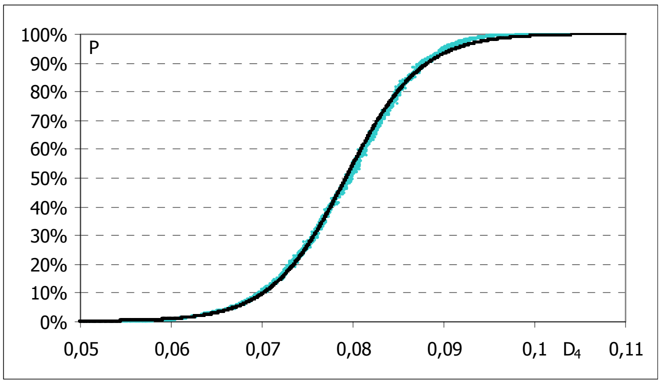
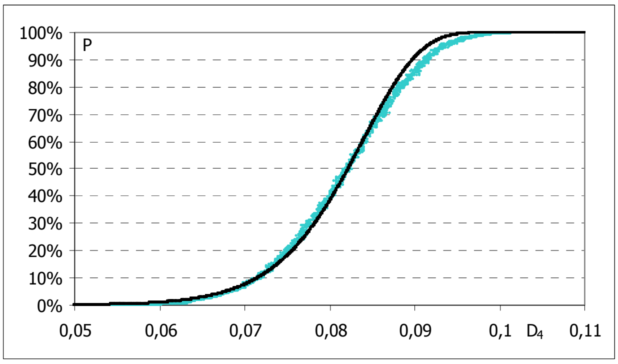


Рис. 5. Зависимость $P(D_4)$ для гауссова шума ($\tau = 0.1$; $\nu_0 = 10^{-4}$) (серая линия — экспериментальные данные, черная — аппроксимация (2))



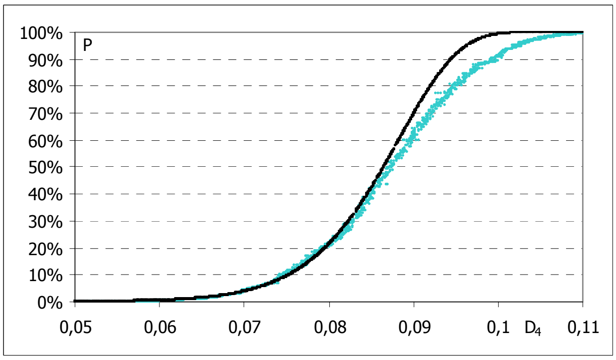


Рис. 6. Качество аппроксимации (2) при различных отклонениях от ν_0 (6a, слева — $\nu = 1.5\cdot10^{-4}$, 6b справа — при $\nu = 3\cdot10^{-4}$)

Выясняется, что, если для $\nu = 1.5\cdot10^{-4}$ формула (2) еще обеспечивает приемлемые результаты, то, например, для $\nu = 3\cdot10^{-4}$ расхождение теоретической и экспериментальной кривых $P(D_4)$ уже очень значительно (см. рис. 6b). Причина этого в том, что существенно изменяется характер кривой в области P = 80÷100%. При этом вероятность перехода начинает отличаться от

100% значительно раньше (и по D_4 , и по времени t), чем предсказывается формулой (2). Так, производная $\partial P/\partial D_4$ при P = 90% уменьшается примерно на 25% для $\nu = 3\cdot 10^{-4}$ по сравнению с $\nu = 1.5\cdot 10^{-4}$.

Конечно, можно применить и другие способы аппроксимации. Мы остановимся на двух:

$$P(D_4) = 1 - \exp\left(-\left[\frac{D_4}{D_4^{(2)}} \right]^B \right), \qquad (3)$$

с двумя параметрами $D_4^{(2)}$ и B и

$$P(D_4) = \frac{1}{1 + \exp\left[-\left(D_4 - D_4^{(3)} \right) / C \right]}, \qquad (4)$$

также с двумя параметрами: $D_4^{(3)}$ и C.

Недостатком регрессионных моделей (3) и (4) является то, что все четыре параметра оказываются функциями от ν. Тем не менее, с их помощью удается значимо снизить средний модуль остатков регрессии и. соответственно, остаточную сумму квадратов. Причем, аппроксимация (4) в большинстве случаев лучше описывает экспериментальную кривую по сравнению с (3).

В табл. 1 представлены рассчитанные значения параметров для различных ν.

Таблица 1

Зависимости коэффициентов аппроксимации от ν для гауссова шума.

ν, 10^{-4}	$D_4^{(2)}$	B	$D_4^{(3)}$	C	$P(D_4^{(2)})$, %	$P(D_4^{(3)})$, %
0.6	0.0789	14.0	0.0763	0.00379	67.5	50.0
1.0	0.0820	13.6	0.0793	0.00412	63.5	48.0
1.5	0.0850	12.4	0.0819	0.00460	64.5	49.5
2.0	0.0874	12.0	0.0842	0.00489	64.5	50.0
3.0	0.0907	11.6	0.0873	0.00540	64.5	50.0

Очевидно, что все параметры в табл. 1 демонстрируют слабую зависимость от ν. В каждом случае может быть применена линейная аппроксимация этой зависимости, которая, однако, не обладает особо высокой достоверностью (коэффициент детерминированности R^2 на уровне 0.96÷0.97). Отметим лишь, что $D_4^{(2)}$, $D_4^{(3)}$ и C слабо растут, B — слабо убывает с ростом ν.

Небезынтересно наложить зависимости $P(D_4)$ для различных ν на один график (см. рис. 7).

Из рис.7 видно, что $D_4(\nu)$, при которых P<5%, различаются существенно меньше, чем аналогичные значения при P>95%. В этом смысле кривые $P(D_4, \nu)$

несимметричны. Кроме того, они не могут быть совмещены путем сдвига по оси x.

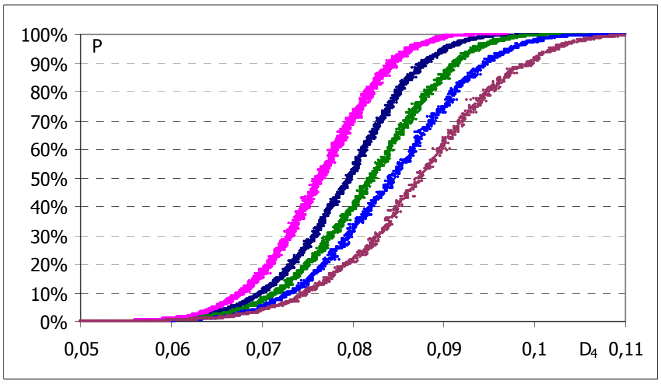


Рис. 7. Зависимости $P(D_4)$ для гауссова шума при $\tau = 0.1$ и различных ν (кривые слева направо: при $\nu = 0.6\cdot10^{-4}$, 10^{-4}, $1.5\cdot10^{-4}$, $2\cdot10^{-4}$, $3\cdot10^{-4}$).

Рассмотрим значения P, близкие к предельным, а именно $P = 99\%$ (наличие перехода «почти достоверно») и $P = 1\%$ (переход «крайне маловероятен»). В первом случае вероятность перехода фактически определяется стандартным отклонением для распределения шума. В случае крайне редких переходов их вероятность определяется «хвостами» распределения $\rho(x)$, т.е. тем, как $\rho(x)$ убывает при больших x. Зависимость моментов истины $D_4(99)$ и $D_4(1)$ при $\tau = 0.1$ представлена в табл. 2.

Таблица 2

Зависимость «предельных» моментов истины от ν

ν, 10^{-4}	Значение D_4, соответствующее вероятности P, для шума							
	гауссов		*platykurtic*		*leptokurtic*		асимметричный	
	P, 99%	P, 1%	P, 99%	P, 1%	P, 99%	P, 1%	P, 99%	P, 1%
0.6 (0.5)	0.0900	0.0602	0.0896	0.0620	0.0828	0.0559	0.0902	0.0606
1.0	0.0943	0.0610	0.0984	0.0646	0.0900	0.0567	0.0963	0.0610
1.5	0.0978	0.0635	0.1028	0.0655	0.0937	0.0584	0.1009	0.0603
2.0	0.1026	0.0639	0.1065	0.0674	0.0975	0.0598	0.1037	0.0620
3.0	0.1080	0.0636	0.1122	0.0673	0.1034	0.0600	0.1079	0.0624

Для всех перечисленных в таблице шумов дисперсия $\sigma^2 = 1$

Первая строка соответствует $\nu = 0.6\cdot10^{-4}$ для гауссова шума и $\nu = 0.5\cdot10^{-4}$ для остальных типов.

Таким образом, для всех шумов, приведенных в табл. 2, при увеличении ν в пять раз $D_4(99)$ увеличивается не менее, чем на 20%, а $D_4(1)$ — не более, чем на 5÷7%.

Более значимое увеличение $D_4(99)$ с ростом ν (по сравнению с $D_4(1)$) можно объяснить конечной дискретностью модели по времени, а именно, конечным интервалом времени, на котором определяется текущее «состояние» системы.

Для экспоненциального шума обнаруживается схожее поведение всех статистик для гауссова шума, исследованных в этом подразделе. Более того (вероятно, из-за совпадения дисперсий шумов) практически совпадают коэффициенты наклона зависимостей $D_4^{(2)}(\nu)$, $D_4^{(3)}(\nu)$ и т.д. Аналогичное наблюдение справедливо и для гамма-шума, *platykurtic* и *leptokurtic* шумов.

Для Парето-шума оказывается, что аппроксимация (2) неадекватна (см. рис. 8).

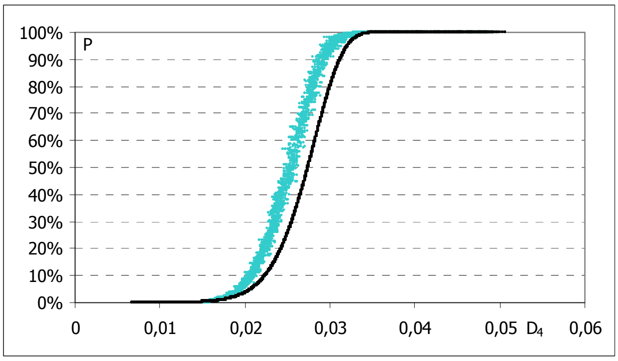


Рис. 8. Качество аппроксимации (2) для Парето-шума при $\nu = 2{\cdot}10^{-4}$.

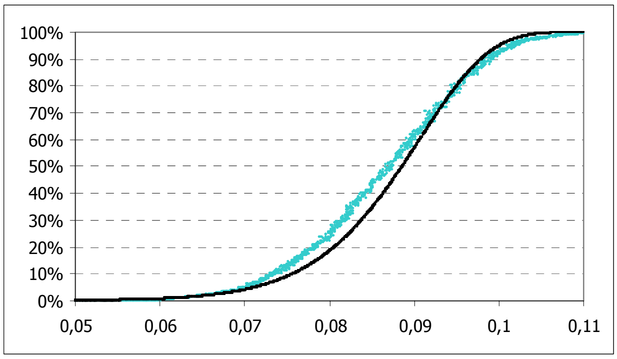


Рис. 9. Качество аппроксимации (2) для асимметричного шума при $\nu = 3{\cdot}10^{-4}$.

Для асимметричного шума аппроксимация (2) также не вполне адекватна (см. рис. 9). Причем, с достаточной точностью описывая «крылья» зависимости $P(D_4)$ при P, близких к 0 или 1, формула (2) дает большие отклонения в области $P = 10{\div}60\%$. Очевидно, для их коррекции требуется ввести зависимость от ν в параметр $\boldsymbol{A}$.

В табл. 3 для сопоставления приведены коэффициенты регрессии для различных типов шумов при фиксированных ν и τ.

Таблица 3

Зависимости коэффициентов аппроксимации для различных типов шума при фиксированных $\nu = 10^{-4}$ и $\tau = 0.1$.

	$D_4^{(2)}$	B	$D_4^{(3)}$	C	$P(D_4^{(2)})$, %	$P(D_4^{(3)})$, %
гауссов	0.0820	13.6	0.0793	0.00412	63.5	48.0
экспоненциальный	0.0709	11.8	0.0683	0.00403	65.0	49.0
Парето	0.0265	9.3	0.0251	0.00187	65.0	45.0
гамма	0.0822	13.7	0.0795	0.00424	63.5	50.0
platykurtic	0.0856	13.4	0.0828	0.00430	63.5	50.0
leptokurtic	0.0780	12.8	0.0752	0.00412	64.5	48.3
асимметричный	0.0834	12.0	0.0804	0.00470	65.0	50.0

По определению коэффициентов, при $\nu = 10^{-4}$ справедливы равенства $D_4^{(0)} = D_4^{(2)}$ и $A = B$.

Отметим, что Парето-шум отличается от других не только по размерным параметрам, что может быть объяснено различиями в дисперсии, но и по безразмерному параметру B.

3. Скейлинговые эффекты.

Рассмотрим для разных шумов зависимости $D_4(P, \tau)$ (см. рис. 10a, 11a и т.д.) в двойном логарифмическом масштабе. По оси абсцисс отложим $L_t = -\lg(\tau)$, а по оси ординат $L_d = -\lg(D_4(P, \tau))$. После чего попытаемся с помощью линейной регрессии найти коэффициент наклона соответствующей зависимости: $L_d = k(P, \nu) \cdot L_t + b$. Тем самым мы сконцентрируем внимание на общем виде этих зависимостей от τ, ν и типа шума, более тонкие детали оставив для обсуждения в разделе 4.

3.1.Скейлинг для гауссова шума

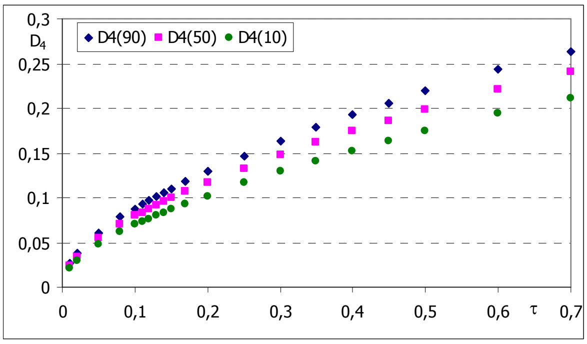


Рис.10a. Зависимость D_4 (90), D_4 (50) и D_4 (10) от τ при $\nu = 10^{-4}$ для гауссова шума

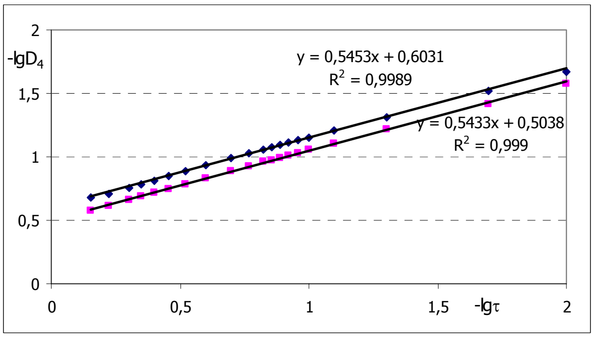


Рис. 10b. Зависимость D_4(90) (внизу) и D_4 (10) от τ в двойном логарифмическом масштабе при $\nu = 10^{-4}$.

Таким образом, с достаточной точностью выполняется линейная аппроксимация $-\lg D_4(P, \tau) = k(P)(-\lg \tau) + b(P)$, т.е. проявляется эффект скейлинга по τ (см. рис. 10b).

Обнаруживается, что для гауссова шума $k(P)$ не зависит от ν и очень слабо зависит от P: $k(P) = 0.5463 - 0.0035 \cdot (P/100)$. С точностью ± 0.002 можно считать коэффициент k константой $k(0) = 0.545$, не зависящей ни от P, ни от ν.

3.2. Скейлинг для экспоненциального шума.

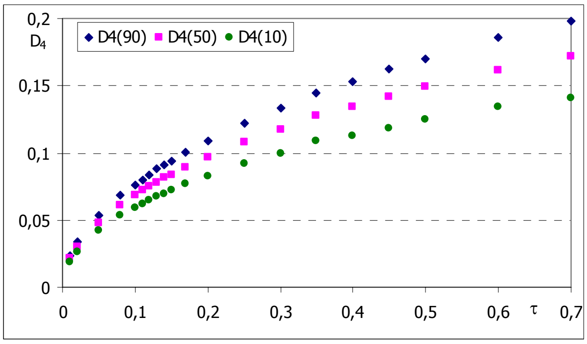


Рис.11a. Зависимость D_4 (90), D_4 (50) и D_4 (10) от τ при ν = 10^{-4} для экспоненциального шума

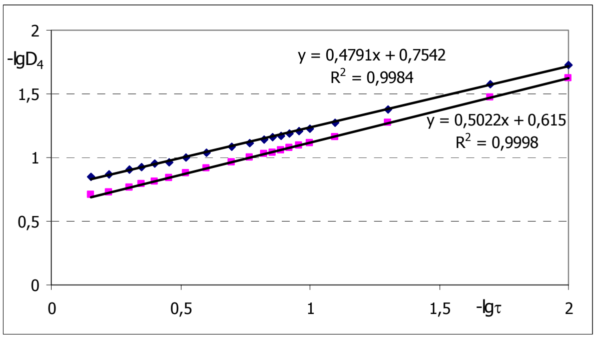


Рис. 11b. Зависимость D_4(90) (внизу) и D_4 (10) от τ в двойном логарифмическом масштабе при ν = 10^{-4}.

Из рис. 11b видно, что допустима линейная аппроксимация $L_d = k(P) \cdot L_t + b(P)$. Зависимость $k(P)$ слабо растет с ростом ν и также возрастает по P. Например, для τ =0.1 она имеет вид $k(P) = 0.479 + 0.0268\cdot(P/100)$. Зафиксируем, что зависимость $k(P)$ — слабо возрастающая, и возьмем усредненное значение константы $k(0) = 0.482$.

Дополнительно построим для экспоненциального шума зависимости $D_4(P)$ на шкале $\sqrt{\tau}$.

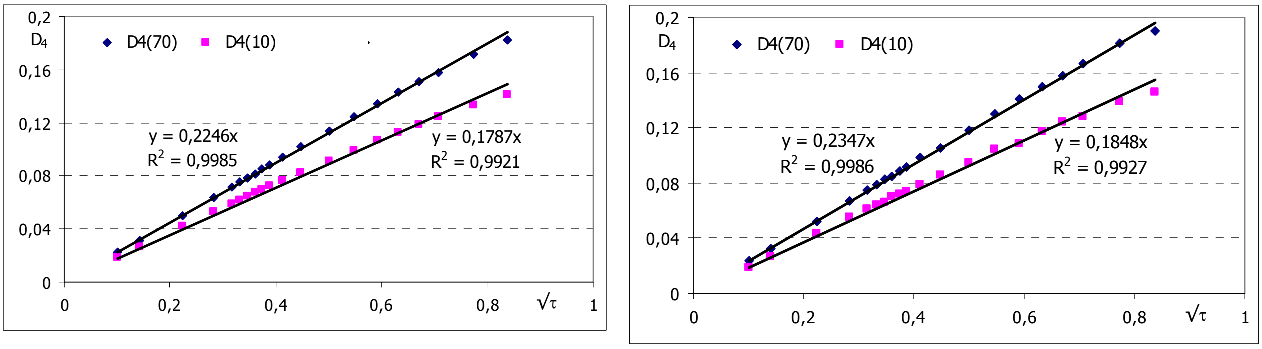


Рис. 12. Зависимости $D_4(P)$ для ν = 10^{-4} (12a, слева) и ν = $1.5\cdot10^{-4}$ (12b, справа)

Таким образом, зависимости $D_4(P, \tau)$ хорошо аппроксимируются кривыми более простого вида $D_4(P, \tau) = \beta(P)\sqrt{\tau}$ (см. рис. 12). Можно построить зависимость $\beta(P)$ (см. рис. 13).

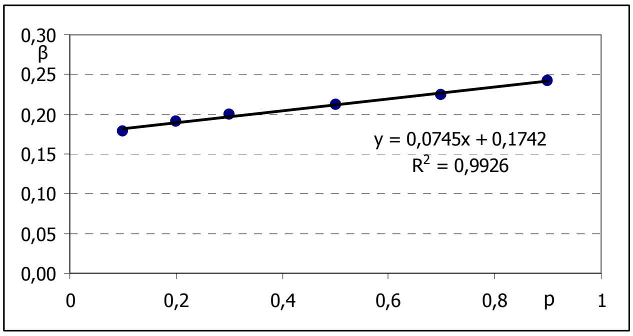


Рис. 13. Изменение коэффициента наклона β при выборе вероятности, соответствующей моменту истины, для экспоненциального шума

3.3. Скейлинг для Парето-шума.

Скейлинговый характер зависимостей D_4 для Парето-шума обладает определенными особенностями (см. рис. 14, 15).

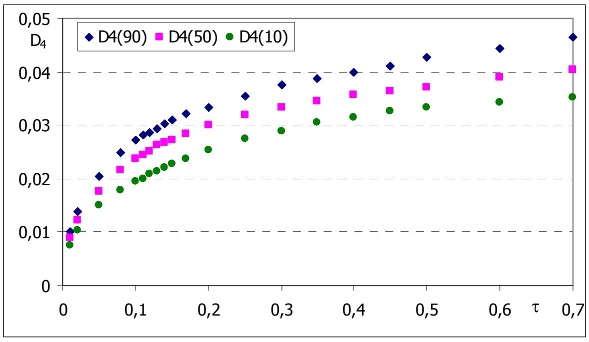


Рис. 14a. Зависимость D_4 (90), D_4 (50) и D_4 (10) от τ при ν = 10^{-4} для Парето-шума

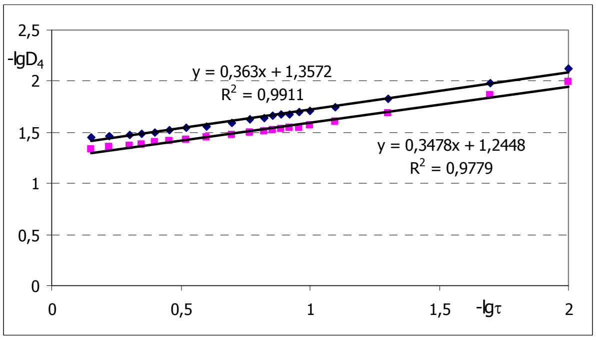


Рис. 14b. Зависимость D_4(90) (внизу) и D_4 (10) от τ в двойном логарифмическом масштабе при ν = 10^{-4}.

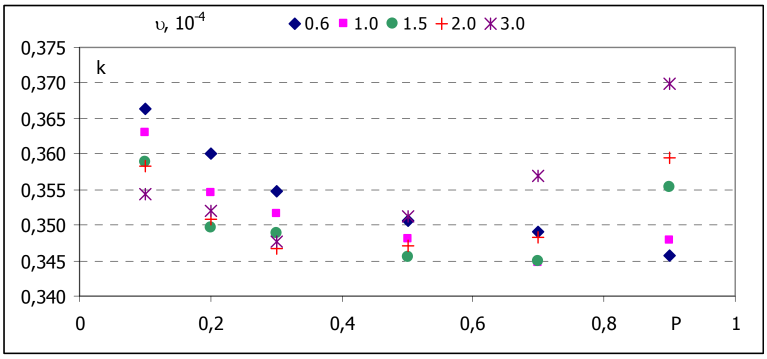


Рис. 15. Зависимость коэффициента наклона ***k*** от вероятности *P* и параметра ν для Парето-шума

Оказалось, что в рамках проведенных экспериментов не удается установить общий вид зависимостей $k(P, \nu)$ (см. рис. 15). Зафиксируем условное среднее $k(0)$=0.355.

Для оставшихся типов шумов подтверждается аналогичный линейный характер зависимости $L_d = k(P) \cdot L_t + b(P)$, поэтому кратко представим общие результаты анализа.

3.4. Скейлинг для гамма-шума. Показатель k практически не зависит (в пределах ±1%) ни от ν, ни от P: $k(0) = 0.523$.

3.5. Скейлинг для platykurtic шума. Зависимость $k(P)$ в пределах ошибки не зависит от ν и слабо убывает по P: $k(P) = 0.557 - 0.01\cdot(P/100)$.

3.6. Скейлинг для leptokurtic шума. Показатель k, как и для гауссова шума, не зависит ни от ν, ни от P: $k(0) = 0.538$, что несколько меньше, чем $k(0)$ гауссова шума.

3.7. Скейлинг для асимметричного шума. Зависимость $k(P, \nu)$ в пределах ошибки не зависит от P и слабо убывает по ν: $k(P, \nu) = 0.593 - 34.4\cdot\nu$. Зафиксируем обнаруженный характер зависимости и среднее $k(0) = 0.590$.

Сведем эффекты скейлинга для шумов различных типов в общую табл. 4.

Таблица 4

Характер зависимости коэффициента наклона $k(P, \nu)$ от вероятности P и параметра ν для различных типов шумов

Тип шума	характер $k(\nu)$	характер $k(P)$	$k(0)$
гауссов	не зависит	не зависит	0.545
экспоненциальный	слабый рост	слабый рост	0.482
Парето	не определен	не определен	0.355
гамма	практ. не зависит	практ. не зависит	0.523
platykurtic	не зависит	слабо убывает	0.557
leptokurtic	не зависит	не зависит	0.538
асимметричный	слабо убывает	не зависит	0.590

В третьей части настоящей работы мы планируем сопоставить обнаруженные показатели скейлинга с характерными значениями фрактального индекса вариации.

4. Зависимости удельной ширины «коридора» моментов истины

Определение понятия «удельной ширины коридора моментов истины» было введено в предыдущей части работы. Более конкретно, исследовались показатели:

$$Z_1 = \frac{2\left(D_4(30) - D_4(10)\right)}{D_4(30) + D_4(10)},\ Z_2 = \frac{2\left(D_4(70) - D_4(30)\right)}{D_4(70) + D_4(30)},\ Z_3 = \frac{2\left(D_4(70) - D_4(10)\right)}{D_4(70) + D_4(10)}$$

в зависимости от τ для гауссова, экспоненциального и Парето-шумов.

Построим кривые $Z(\tau)$ для всех типов шумов, перечисленных в текущей публикации, при этом ограничимся $\nu = 10^{-4}$(см. рис. 16).

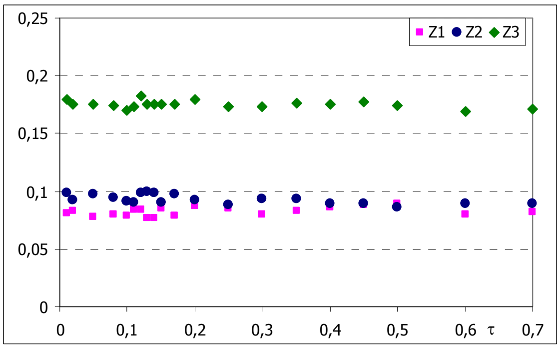


Рис.16a. $Z(\tau)$ для гауссова шума

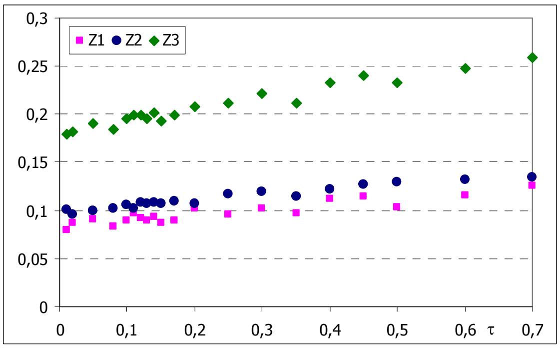


Рис.16b. $Z(\tau)$ для экспоненциального шума

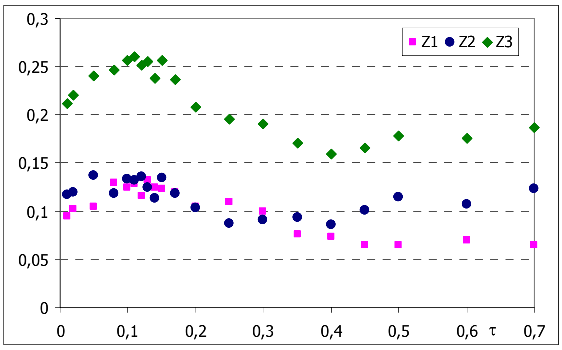


Рис.16c. $Z(\tau)$ для Парето-шума

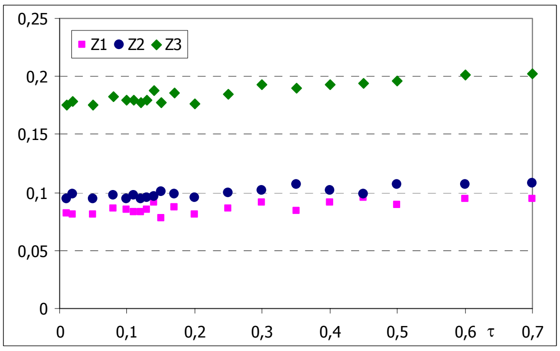


Рис.16d. $Z(\tau)$ для гамма-шума

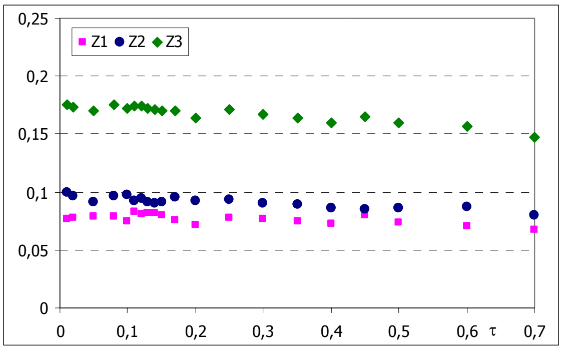


Рис.16e. $Z(\tau)$ для *platykurtic* шума

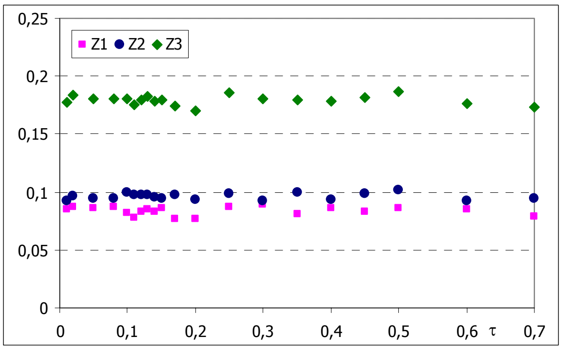


Рис.16f. $Z(\tau)$ для *leptokurtic* шума

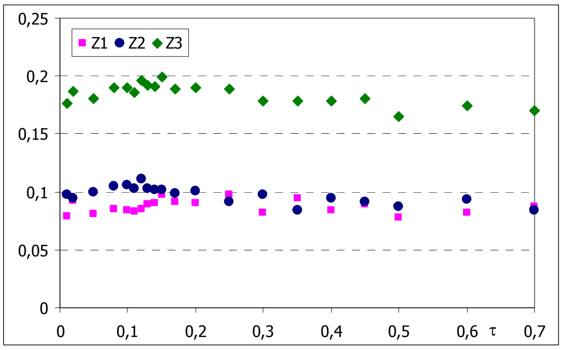


Рис.16g. $Z(\tau)$ для асимметричного шума

В табл.5 представлены основные результаты анализа показателя Z_3 (τ) для типов шумов, исследованных в настоящей работе.

Таблица 5

Характер зависимости Z_3 (τ) для различных типов шумов

Тип шума	Аппроксимация Z_3
гауссов	константа 0.175
экспоненциальный	линейная $0.112\tau+0.182$
Парето	немонотонная зависимость
гамма	линейная $0.04\tau+0.176$
platykurtic	линейная $-0.035\tau+0.176$
leptokurtic	константа 0.180
асимметричный	немонотонная зависимость

Обратим внимание на то, что для *platykurtic* шума величины Z_3 убывают с ростом τ, а поведение Z_3 для гамма-шума, как и можно было предполагать, похоже на соответствующие зависимости для экспоненциального шума.

Заключение.

Обнаруженные различия между Парето-шумом, с одной стороны, и всеми другими использовавшимися распределениями, с другой, можно объяснить характером кривых $P(D_4)$ при P, близких к 0. Так как при этом наибольшее значение имеют редкие большие флуктуации, то доминирующую роль начинает играть поведение распределения шума при больших x. Естественно, для Парето-шума темп убывания «хвостов» распределения принципиально медленнее, чем для экспоненциального шума (убывающего пропорционально экспоненте x) и тем более шумов, смоделированных на базе гауссова распределения, которые убывают пропорционально экспоненте x^2.

Таким образом, в рамках простейшей модели продемонстрирован тот факт, что статистика D_4, использованная для анализа сгенерированных квазихаотических временных рядов, обладает рядом скейлинговых свойств, характер которых существенно зависит от типа шума.

Работа выполнена при поддержке грантов РГНФ №04-03-00069а и НШ-2071.2003.4.

Список литературы.

Lohninger H. RandGen © www.lohninger.com (*freeware*)

Marsaglia G., Tsang W.W. A simple method for generating gamma variables // ACM Trans. on Mathematical. Software, 2000, v.26, No. 3, p. 363-372.

Чернавский Д.С., Никитин А.П., Чернавская О.Д., Кривошеев О.И. Генерация и анализ квазихаотических временных рядов. Часть 1. Модель перемешивающего слоя. / Препринт ФИАН, 2005 (в печати).