

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**Физический
институт
*имени
П.Н.Лебедева***

Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

17

**А.Н. ЛОГУНОВ
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ
СИММЕТРИЙНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ
КОНФИГУРАЦИЙ ПОЛЯ ПУЧКОВ
ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ВАКУУМЕ**

МОСКВА 2005

Физические основания симметрийного исследования
конфигураций поля пучков лазерного излучения в
вакууме

А.Н.Логунов

АННОТАЦИЯ

В статье впервые построена последовательная и глубокая физическая теория волнового поля лазерного излучения в пустых резонаторах классического типа и за их пределами. Она использована для определения конфигураций поля лазерного излучения, которые затем исследуются методами математической теории глобального анализа физических объектов. Изложена сущность этой теории и ее приложений. Её элементы использованы для симметрийного изучения конфигураций поля лазерного излучения. Проведена классификация пяти систем с различными геометриями классических резонаторов по сложности симметрийной структуры поля в резонаторах и за их пределами. Обнаружена конформная симметрия поля лазерного излучения в дальней зоне.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1. Введение.	3
2. Физическое представление о структуре поля лазерного излучения в пустых, открытых, классических резонаторах и за из пределами.	4
3. Продольная структура поля лазерного излучения.	9
3.1. Общие положения.	9
3.2. Основные физические модели.	9
3.3. Резонатор с плоскими прямоугольными зеркалами и цилиндрический резонатор.	19
3.4. Устойчивый конфокальный резонатор.	20
3.5. Резонатор с выпуклыми зеркалами.	21
3.6. Телескопический резонатор.	22
4. Симметрия геометрий фронтов продольных волн.	23
4.1. Метод симметрийного описания.	23
4.2. Симметрийная классификация и выводы по симметрийному анализу геометрий фронтов продольных волн.	29
5. Физическое представление о структуре поперечных колебаний поля лазерного излучения в рассматриваемых резонаторах и за их пределами.	31
5.1. Общие положения.	31
5.2. Резонатор с плоскими прямоугольными зеркалами.	48
5.3. Цилиндрический резонатор.	52
5.4. Устойчивый конфокальный резонатор.	58
5.5. Резонатор с выпуклыми зеркалами.	62
5.6. Телескопический резонатор.	66
5.7. Замечания.	66
6. Симметрийный анализ структуры поперечных колебаний поля в рассматриваемых системах.	67
6.1. Общие положения. Допущения.	67
6.2. Метод симметрийного описания структуры поперечных колебаний поля.	68
6.3. Обсуждение симметрийных свойств поперечных колебаний поля в рассматриваемых системах.	73
6.4. Классификация рассмотренных систем по симметрийным признакам поперечных колебаний поля в них.	74
7. Замечания по симметрийному изучению поля в рассмотренных системах. Основной результат исследования.	74
8. Заключение.	75
Литература.	77

Физические основания симметрийного исследования конфигураций поля пучков лазерного излучения в вакууме.

1. Введение

Общеизвестна важная роль симметрийных теоретико-групповых методов изучения физических объектов. Они позволяют изобразить физический объект в компактной, геометрически наглядной форме, удобной для его смыслового восприятия и изучения. До последнего момента времени теоретико-групповые методы интенсивно использовались в квантовой механике при изучении волновой структуры ядра, атомов, молекул, кристаллов и др.. С другой стороны, нам не известно ни одного примера теоретико-группового симметрийного исследования волновой структуры поля лазерного излучения. Это странно, поскольку волновая структура лазерного излучения описывается в рамках представлений об уравнении Шредингера, т.е. имеет математическую аналогию с квантово-механическими объектами. В данном сочинении мы попытаемся, хотя бы частично, устранить указанный недостаток.

Основным объектом нашего симметрийного теоретико-группового исследования будет являться волновая структура поля лазерного излучения в пустых классических лазерных резонаторах, а также за их пределами в ближней и дальней волновых зонах (при распространении излучения в вакууме).

В процессе решения этой проблемы мы обнаружили, что существующих в учебной и монографической литературе по лазерной физике представлений о структуре лазерного излучения явно недостаточно. По этой причине мы предварительно изложим более глубокое, по сравнению с существующим, физическое представление о структуре лазерного излучения и лишь затем решим теоретико-групповую симметрийную проблему.

Следует отметить основополагающую роль результатов исследований, данных в этом сочинении. Они составляют основу для дальнейшего изучения симметрийных свойств лазерного излучения, распространяющегося в оптически нелинейной среде (например, в воздухе) с учетом самых

разнообразных механизмов нелинейного взаимодействия этого излучения со средой. (Например, ВКР, ВРМБ, самофокусировка и пр.).

2. Физическое представление о структуре поля лазерного излучения в пустых, открытых, классических резонаторах и за их пределами

Структуру поля лазерного излучения в пустых лазерных резонаторах будем описывать методом нормальных координат, подробно изложенным в [1]. В соответствии с этим методом лазерное излучение моделируется скалярным волновым полем в системе ортогональных криволинейных координат (x^1, x^2, x^3). Координатная система (x^1, x^2, x^3) вводится так, чтобы поверхности продольных волновых фронтов лазерного излучения (распространяющиеся вдоль оптической оси z в декартовой координатной системе (x, y, z)) совпадали с поверхностями $x^1(x, y, z) = \text{Const}$. На поверхностях зеркал резонатора требуется, чтобы они совпадали с этими поверхностями. Считается, что зеркала тонкие и полупрозрачные.

В соответствии с методом нормальных координат, волновое поле лазерного излучения определяется волновой функцией Ψ :

$$\Psi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3,$$

где: $\psi_1(x^1, x^2, x^3)$ - волновая функция продольного волнового движения (вдоль продольной координаты x^1); $\psi_2(x^1, x^2, x^3), \psi_3(x^1, x^2, x^3)$ – волновые функции поперечных волновых движений (вдоль поперечных координат x^2, x^3 , соответственно). Внутри резонатора $\psi_i(x^1, x^2, x^3)$ имеют структуру стоячих волн вдоль координат x^1 .

В конечном счете проблема сводится к определению волновых функций внутри и за пределами резонатора. Её решение существенно зависит от свойств координатной системы ($x^1(x, y, z), x^2(x, y, z), x^3(x, y, z)$).

Поле продольной волны ψ_1 будем описывать уравнением Гельмгольца, именуемым также стационарным уравнением Шредингера:

$$\Delta \psi_1 + (E - U) \psi_1 = 0,$$

где: Δ - лапласиан в ортогональных криволинейных координатах (x^1, x^2, x^3); U – потенциал; $E = k_o^2$ – собственное значение энергии продольного колебания; k_o – волновое число лазерного излучения.

Поперечные волновые функции внутри резонатора удовлетворяют стационарному уравнению Шредингера, именуемому также уравнением Гельмгольца:

$$\Delta \Psi_j(n) + (E_n - U) \Psi_j(n) = 0$$

где: $\Delta \Psi_{j(n)} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} g^{ee} \Psi_{j(n)}, e), e$; $j = 2, 3$; g^{ee} - компоненты метрического тензора; $g = g_{11} g_{22} g_{33}$; E_n - собственное значение энергии колебания $\Psi_{j(n)}$ (уровень п. энергии); $\hat{\psi}_j$ - потенциал, в котором рассматривается волновое движение $\Psi_{j(n)}$.

Это уравнение выводится из нестационарного уравнения Шредингера

$$\frac{2ik_0}{c} \hat{\psi}_{j,t} + \Delta \hat{\psi}_j - U \hat{\psi}_j = 0$$

(где t - время) заменой

$$\hat{\psi}_j = e^{-i\Omega_n t} \Psi_{j(n)},$$

где Ω_n - собственная временная частота колебания $\hat{\psi}_j$.

Очевидно,

$$\Omega_n = \frac{2k_0 \Omega_n}{c}$$

Нестационарное уравнение Шредингера относительно $\hat{\psi}_j$ будет использоваться для описания эволюции поперечных волновых функций $\hat{\psi}_j$ вдоль оптической оси z за пределами резонатора ($z \approx ct$).

Предметом изучения будет являться структура поля лазерного излучения в пяти пустых классических резонаторах и за их пределами в ближней и дальней зонах. Перечислим эти резонаторы с указанием соответствующих им координатных систем [2].

- 1). Резонатор с плоскими, параллельными, прямоугольными зеркалами (декартова координатная система).
- 2). Цилиндрический резонатор с плоскими зеркалами, имеющими образующими окружности (цилиндрическая координатная система).
- 3). Устойчивый конфокальный резонатор (координатная система сплюснутого эллипсоида).
- 4). Резонатор с выпуклыми зеркалами (координатная система вытянутого эллипсоида).
- 5). Телескопический резонатор (координатная система софокусных параболоидов вращения).

Геометрия этих типов резонаторов показана на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что геометрия всех пяти рассматриваемых систем и, следовательно, геометрия волновых фронтов излучения в них обладает осевой симметрией. Следовательно, можно сделать вывод, что физическая структура поля лазерного излучения в этих системах тоже должна иметь осевую симметрию. Это замечание существенно ограничивает класс возможных конфигураций поля излучения в рассматриваемых системах.

6

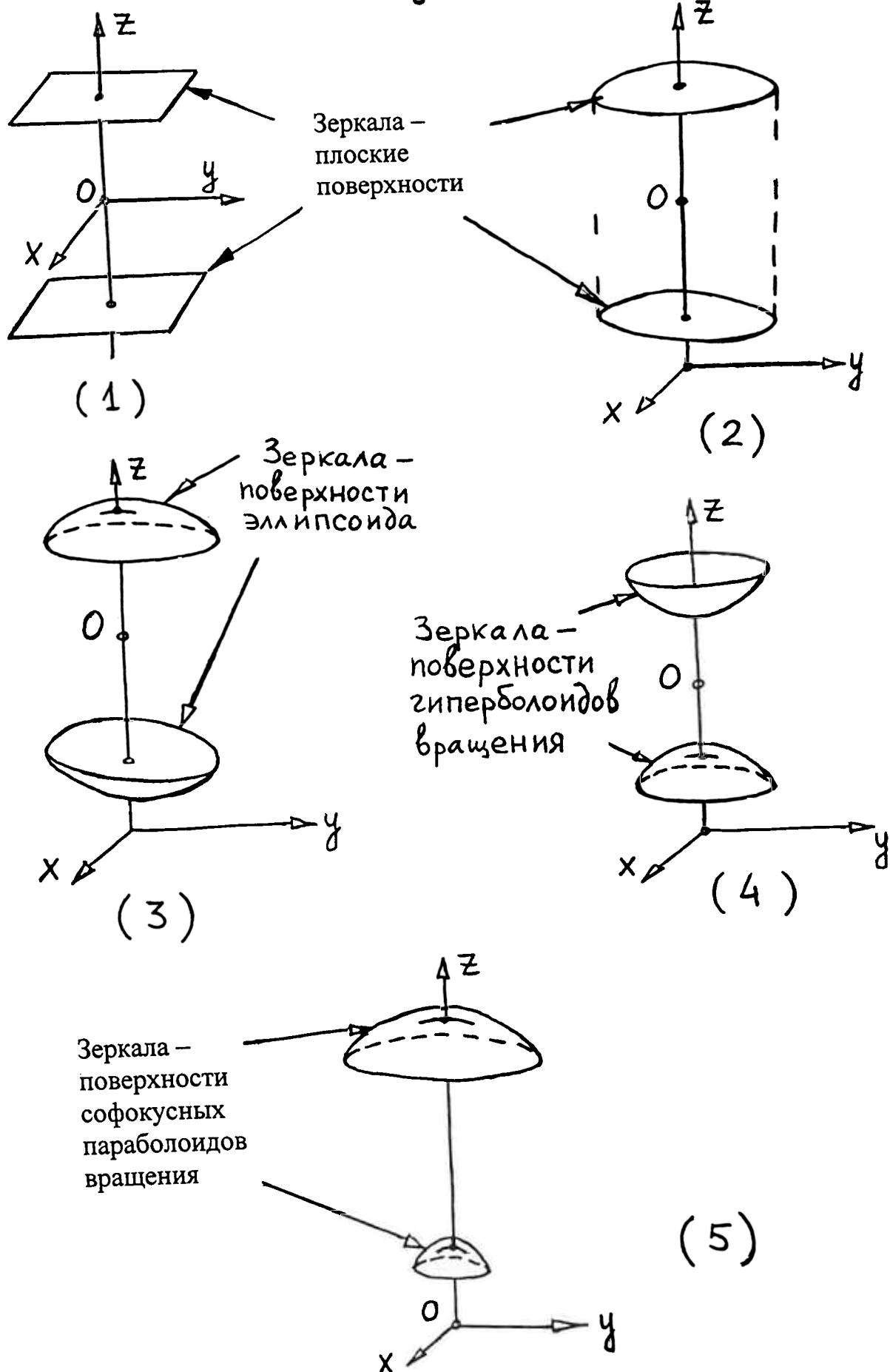


Рис. 1

Из рис. 1 также видно, что внутри рассматриваемых пяти резонаторов имеется четыре типа плоских симметрий геометрии продольных волновых фронтов относительно секущей плоскости, проходящей через ось симметрии z : прямолинейная (1,2), эллиптическая (3), гиперболическая (4) и параболическая (5). Эти типы симметрий, как мы увидим позднее, существенно определяют физические свойства как продольной, так и поперечной волновой структур поля излучения в рассматриваемых пяти системах.

Теперь обратим внимание на одну важную особенность. Из рис. 1 видно, что все рассматриваемые нами резонаторы являются открытыми, т.е. имеют свободную боковую границу между краями противолежащих зеркал. Это свойство сильно усложняет анализ структуры поля в выбранных нами системах. Возникает проблема определения координатной системы в окрестности свободных боковых границ резонаторов. Решение этой проблемы является ключевым этапом в проводимых нами исследованиях. Заметим, что она должна иметь единый метод решения для всех пяти рассматриваемых систем. Использование метода продолжения геометрий заданных внутри резонаторов координатных систем (поверхностей $x^1 = \text{Const}$) за пределы боковых границ зеркал резонаторов в данной ситуации не оправдано. Он приводит к ошибочной, с физической точки зрения, ситуации, например, в случае системы (3), показанной на рис. 1. (Фронт продольной волны при $z = 0$ должен иметь бесконечную протяженность в поперечном направлении). Метод обрыва координатной системы, заданной внутри резонатора, на его боковых границах (см. [3]) тоже не оправдан с физической точки зрения. Волновое поле, также как и соответствующая ему координатная система, должно быть непрерывным в пространстве.

С нашей точки зрения физическое решение этой проблемы должно основываться на последовательном учете дифракционного эффекта, определяющего геометрию волновых фронтов излучения во всей области определения волнового поля. Физическая сущность этого эффекта заключается в следующем.

Геометрия волновых фронтов электромагнитного излучения, распространяющегося в вакууме, имеющего волновое число k_0 и описываемого волновой функцией ψ , определяется посредством введения в пустое пространство некоторой фиктивной среды, имеющей диэлектрическую проницаемость $\epsilon_g = 1 + \epsilon'_g$ с

$$\epsilon'_g = \frac{\Delta \rho}{k_0^2 \rho}$$

где ρ – амплитуда волны ψ , ($\psi = \rho e^{i\phi}$, ρ – действительная положительная функция от координат, ϕ – фаза – действительная функция от координат).

Следовательно, при распространении волны ψ с нетривиальной координатной зависимостью ρ в пространстве должно наблюдаться искажение первоначально заданной геометрии её волнового фронта.

Это свойство легко вывести из анализа уравнения Гельмгольца (или стационарного уравнения Шредингера) относительно ψ в терминах амплитуды ρ и фазы ϕ волны. Очевидно, геометрия волнового фронта волны ψ в этом случае определяется свойствами самого волнового поля, точнее зависимостью $\epsilon_g'(\rho(x), \Delta\rho(x))$. По этой причине метрические коэффициенты g_{ee} , входящие в состав оператора Δ , оказываются зависящими от свойств поля и, следовательно, записанные нами выше уравнения Гельмгольца (или стационарные уравнения Шредингера) становятся нелинейными. Эта особенность сильно усложняет математическое решение проблемы, однако альтернативы её более легкой физической формулировки мы не видим. В рамках указанных представлений первичным в данном методе является описание волнового поля в рамках нелинейных волновых уравнений.

Данный метод приводит к следующим важным выводам.

1). Линейная формулировка проблемы внутри резонатора (в рамках функций g_{ee} только от координат, без учета дифракционного эффекта) должна быть согласована с её нелинейной формулировкой. Это означает, например, что координатная зависимость амплитуды продольной волны должна быть выбрана так, чтобы геометрия ее волнового фронта, по мере распространения этой волны в резонаторе, совпадала с координатными поверхностями $x^1 = \text{Const}$, заданными в линейном приближении. Это требование гарантирует необходимое условие совпадения поверхностей $x^1 = \text{Const}$ с поверхностями зеркал на продольных границах резонатора.

2). За пределами резонатора должно наблюдаться нарушение пространственной симметрии координатной системы и, следовательно, симметрии волнового поля, характерной для области внутри резонатора. Тем не менее, в соответствии со сделанным нами ранее замечанием, осевая симметрия и в этом случае должна сохраниться.

3). Требование непрерывности координатной системы и волнового поля в окрестности и за пределами свободных боковых границ резонатора приводит к тому, что резонансная полость для поперечных колебаний поля оказывается не ограниченной сбоку, а простирается в бесконечность.

4). Учет дифракционного эффекта продольной волны физически корректно определяет координатную систему за пределами продольных границ резонатора в ближней зоне. В частности, результатом его действия является отсутствие фокусировки пучка лазерного излучения в точку (в случае резонаторов (4,5) на рис. 1). Он также физически корректно определяет переход геометрии продольных волновых фронтов из ближней зоны в дальнюю зону. (В дальней зоне для систем с любыми резонаторами геометрия продольных волновых фронтов имеет сферическую симметрию).

5). Координатная система, построенная с учетом дифракционного эффекта продольной волны представляет интерес не только сама по себе (для изучения симметрийных свойств продольной волны). Она также кладется в основу при изучении геометрии, физических свойств и симметрии поперечной волновой структуры в рассматриваемых нами пяти системах.

6). Зеркальная симметрия относительно плоскости, перпендикулярной оси z и проходящей через точку $z = 0$ (см. рис. 1), в системе (5) с телескопическим резонатором, в свете данных выше представлений, оказывается нарушенной. Для остальных систем она сохраняется.

Таково начальное представление о структуре поля лазерного излучения в пяти выбранных системах и методе её описания. Далее оно будет значительно уточнено и применено для симметрийного анализа структуры волнового поля в этих пяти системах.

3. Продольная структура поля лазерного излучения

3.1. Общие положения

Решение проблемы определения структуры поля лазерного излучения начинается с построения соответствующей этому полю координатной системы. В рамках изложенных выше представлений это сложная задача. Геометрия координатной системы, ассоциирующаяся с геометрией волновых фронтов излучения, оказывается связанной с координатной зависимостью его амплитуды. Задача существенно нелинейна и, следовательно, в математическом отношении трудно разрешима. Тем не менее, на качественном физическом уровне её удается решить. Ниже мы приведем результаты такого её решения.

Сначала мы определим геометрию фронтов продольных волн лазерного излучения в пяти выбранных системах (см. рис.1). Основной интерес при этом будет представлять эволюция геометрии волновых фронтов вдоль оптической оси z . Результаты качественного решения этой задачи будут использоваться далее при изучении симметрийных свойств геометрии волновых фронтов в пяти выбранных системах и их симметрийной классификации. Предварительным этапом этих исследований является уточнение данных выше физических представлений, лежащих в основе понимания физической природы изменения геометрии фронта продольной волны в процессе её распространения.

3.2. Основные физические модели

Выше было дано начальное представление о природе дифракционного искажения геометрии фронтов продольных волн в процессе их распространения. Это представление нуждается в уточнениях по отношению к поставленной нами конкретной задаче об определении структуры поля излучения в пяти выбранных системах (см. рис. 1). При формулировке этих уточнений будет использоваться набор физических моделей (упрощенных физических представлений об интересующих нас процессах), который мы изложим ниже.

Из анализа волнового уравнения относительно волновой функции $\psi_1 = \rho e^{i\phi}$ в терминах действительных координатных функций ρ, ϕ , можно

заметить, что интересующие нас волновые процессы глобально описываются посредством двух координатных систем:

а) координатной системой, связанной с геометрией волновых фронтов ϕ ;

б) координатной системой, связанной с движением амплитуды ρ (или плотности энергии ρ^2).

Продольными координатными трубками в последнем случае являются трубы тока плотности энергии ρ^2 .

Эти координатные системы связаны между собой и в общем случае неэквивалентны. Эта незэквивалентность объясняется различием между фазовой скоростью V_ϕ волны и скоростью V_s движения волны плотности энергии ρ^2 .

Тем не менее, в рассматриваемой ситуации удается доказать справедливость приближения $V_s \sim V_\phi$, согласно которому можно считать, что координатная система (б) слабо отличается от координатной системы (а) и их можно приближенно отождествить.

Докажем это утверждение.

Сначала заметим, что движение продольной волны в пустом резонаторе можно рассматривать как её движение в некотором потенциальном поле, описываемом потенциалом

$$U = -k_0^2 \epsilon' ,$$

где ϵ' - переменная в пространстве часть диэлектрической проницаемости некоторой фиктивной среды. Зависимости $\epsilon'(x)$ для рассматриваемых систем показаны на рис. 2.

Доказательство сводится к определению скоростей V_ϕ , V_s и соотношения между ними для движения продольной волны вдоль отдельной координатной линии x^1 при заданных значениях поперечной координаты x^2 . Если зеркала резонатора слабо искривлены, то в качестве x^1 можно выбрать координату z , в качестве x^2 - поперечную координату x , а зависимостью $\epsilon'(x,z)$ от z пренебречь.

Доказательство.

Воспользуемся описанием высокочастотного поля $E(z, t)$ продольной волны уравнением

$$\frac{1+\epsilon'}{c^2} E_{,tt} - E_{,zz} = 0 .$$

Выразим E через амплитуду $\rho(z, t)$ и фазу $\phi(z, t)$:

$$E = \rho e^{i\phi}$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение и выделяя действительную и мнимую части, получим систему уравнений относительно $\rho(z, t)$, $\phi(z, t)$:

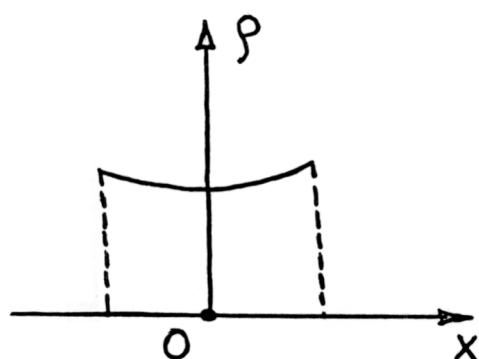
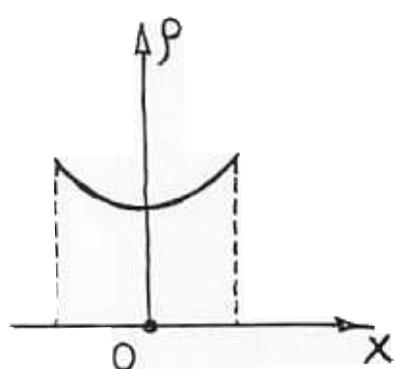
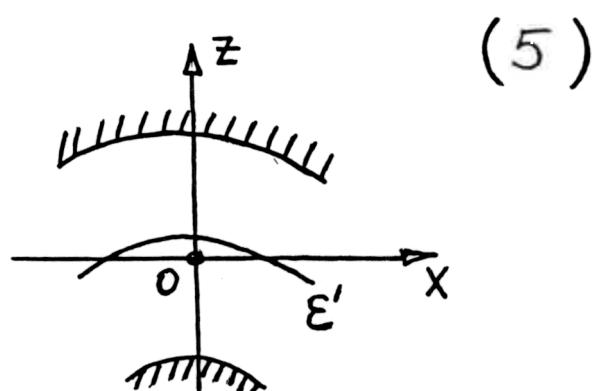
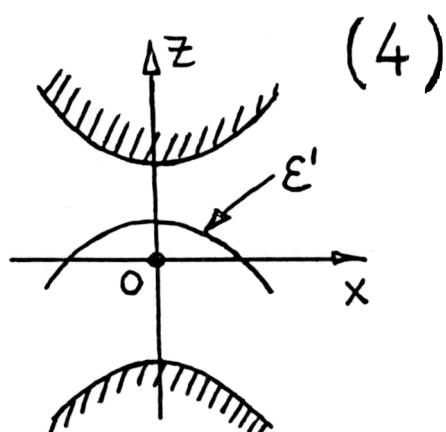
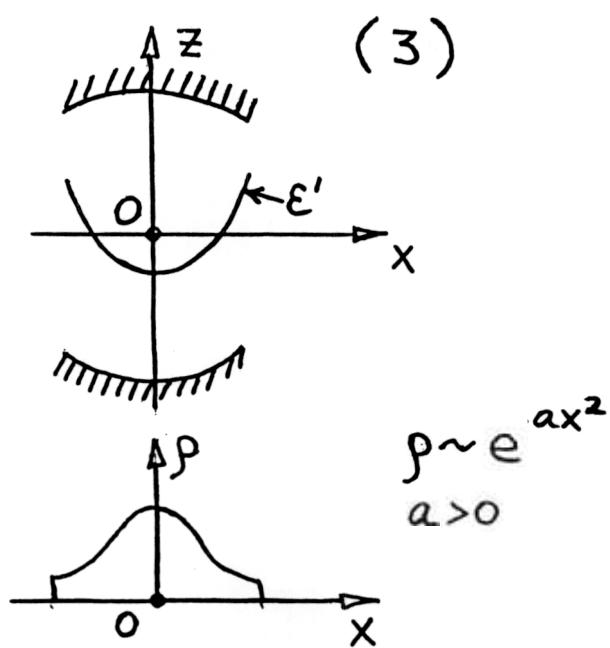
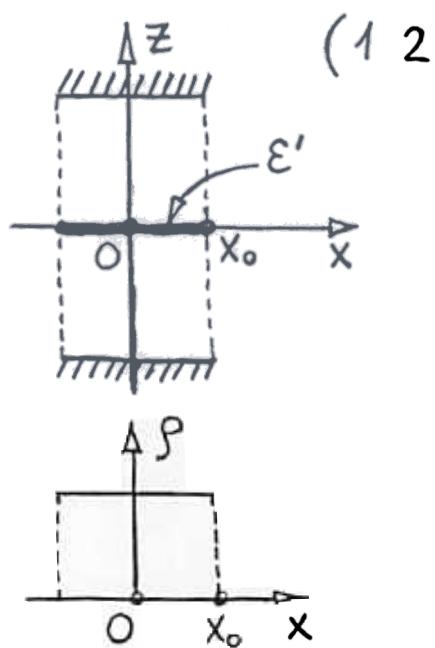


Рис. 2

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_{,z})^2 - \frac{1+\varepsilon'}{c^2} (\varphi_{,t})^2 = \frac{\rho_{,zz}}{\rho} - \frac{(1+\varepsilon')\rho_{,tt}}{c^2\rho}, \\ \frac{1+\varepsilon'}{c^2} (\rho^2 \varphi_{,t})_{,t} = (\rho^2 \varphi_{,z})_{,z} \end{array} \right.$$

Если пренебречь дифракционным эффектом ($\rho_{,zz}, \rho_{,tt} \rightarrow 0$) и положить $\varphi_{,tt}, \varphi_{,zz} \rightarrow 0$, то получим

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_{,z})^2 - \frac{1+\varepsilon'}{c^2} (\varphi_{,t})^2 = 0, \\ \frac{1+\varepsilon'}{c^2} \varphi_{,t} (\rho^2)_{,t} - \varphi_{,z} (\rho^2)_{,z} = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда следует определение \mathcal{V}_φ и \mathcal{V}_z :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1+\varepsilon'}} \\ \mathcal{V}_z = \frac{c^2 k}{(1+\varepsilon') \omega} = \frac{c}{\sqrt{1+\varepsilon'}} \end{array} \right.$$

где: $k = \varphi_{,z}$, $\omega = -\varphi_{,t}$.

Таким образом,

$$\mathcal{V}_\varphi(x) = \mathcal{V}_z(x) = \frac{c}{\sqrt{1+\varepsilon'(x)}}$$

и в известном приближении утверждение доказано.

Следовательно, в интересующих нас ситуациях аппроксимация координатной системы, связанной с движением плотности энергии продольной волны, координатной системой, связанной с геометрией её фазовых волновых фронтов, оправдана.

Этой аппроксимацией мы воспользуемся при описании продольной волны лазерного излучения.

Приближенно определим поперечную координатную зависимость амплитуды ρ продольной волны внутри резонаторов, показанных на рис. 1. Пренебрежем вкладом продольного дифракционного эффекта. Тогда, в приближении слабо искривленного пространства,

$$\varepsilon'_g \approx \frac{1}{\rho k^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

На рис. 2 приведены зависимости $\rho(x)$ и $\varepsilon'_g(x) = \varepsilon'(x)$ внутри интересующих нас резонаторов.

Зависимости $\rho(x)$ на рис. 2 определены с точностью до сжатия – растяжения нормальной поперечной координаты вдоль z . Важность этих зависимостей объясняется тем, что они определяют характер искривления фронтов продольной волны не только внутри резонаторов, но и за пределами их продольных границ, точнее, не слишком далеко от них, в ближней зоне.

Теперь определим геометрию фронтов продольной волны в окрестности и за пределами свободных боковых границ резонаторов. Для простоты ограничимся решением задачи для цилиндрического резонатора. Решение задачи для других резонаторов похоже на приведенное ниже.

Пусть $\rho(x)$, $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ – непрерывные функции от x во всей области определения x при $z = 0$. Разумно аппроксимировать зависимость $\rho(x)$ при $z = 0$ в виде, показанном на рис. 3а.

Тогда, пренебрегая продольным дифракционным эффектом, получим зависимость $\varepsilon'_g(x)$, показанную на рис. 3б. Далее предположим, что зеркала тонкие и полупрозрачные. В этом случае геометрия фронтов продольной волны вблизи резонатора будет иметь вид, показанный на рис. 3с. Из него видно, что продольные координатные трубы (вдоль x^1) имеют переменное сечение, локальные растяжения – сжатия и изогнуты. Это означает, что продольная волна, распространяясь в них, будет испытывать рассеяние назад. Этим объясняется выбор непрерывной функции $\rho(x)$ в виде, изображенном на рис. 3а.

Совокупность координатных линий x^2 , совпадающих с линиями фронтов продольной волны в плоскости (x, z) , показанная на рис. 3с, легко физически интерпретируется. Подобная картина имеет место и для остальных четырех типов рассматриваемых систем с другими резонаторами.

Выше была введена важная гипотеза о непрерывности $\rho(x)$ при $z = 0$. С нашей точки зрения, эта гипотеза должна быть справедлива во всей области определения (x, z) и, в частности, в очень важной области вблизи боковых краев зеркал резонаторов. Ниже мы попытаемся обосновать её справедливость в этой важной области. Для этого необходимо учесть конечную толщину зеркал и принять во внимание два физических эффекта рассеяния продольной волны назад за пределами свободной боковой границы резонатора. Эти эффекты и будут определять непрерывность $\rho(x, z)$ в рассматриваемой области. Вскроем физическое содержание этих эффектов. Рассмотрим первый из них.

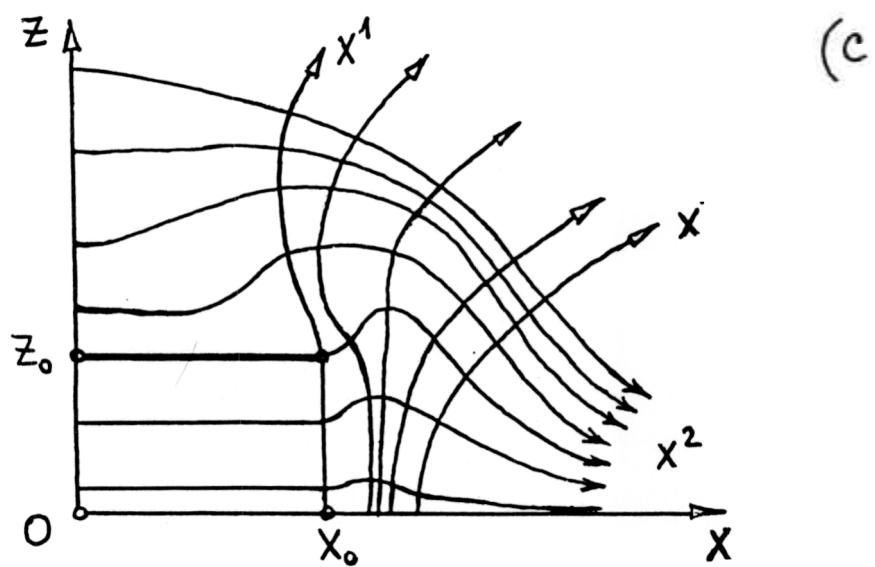
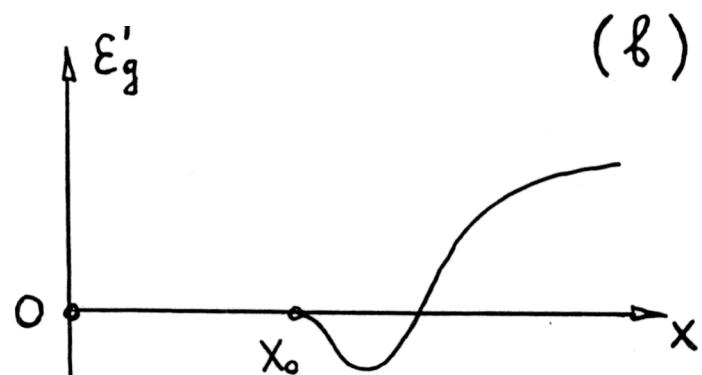
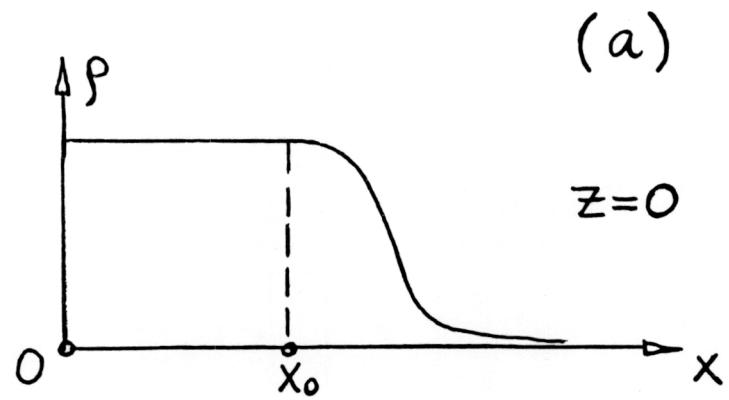


Рис 3

Для определенности допустим, что показатель преломления материала зеркала больше единицы. Разумно ввести предположение о непрерывном изменении фазы волны в окрестности бокового края зеркала. В этом случае геометрия фронтов продольной волны вблизи края зеркала имеет вид, показанный на рис. 4а.

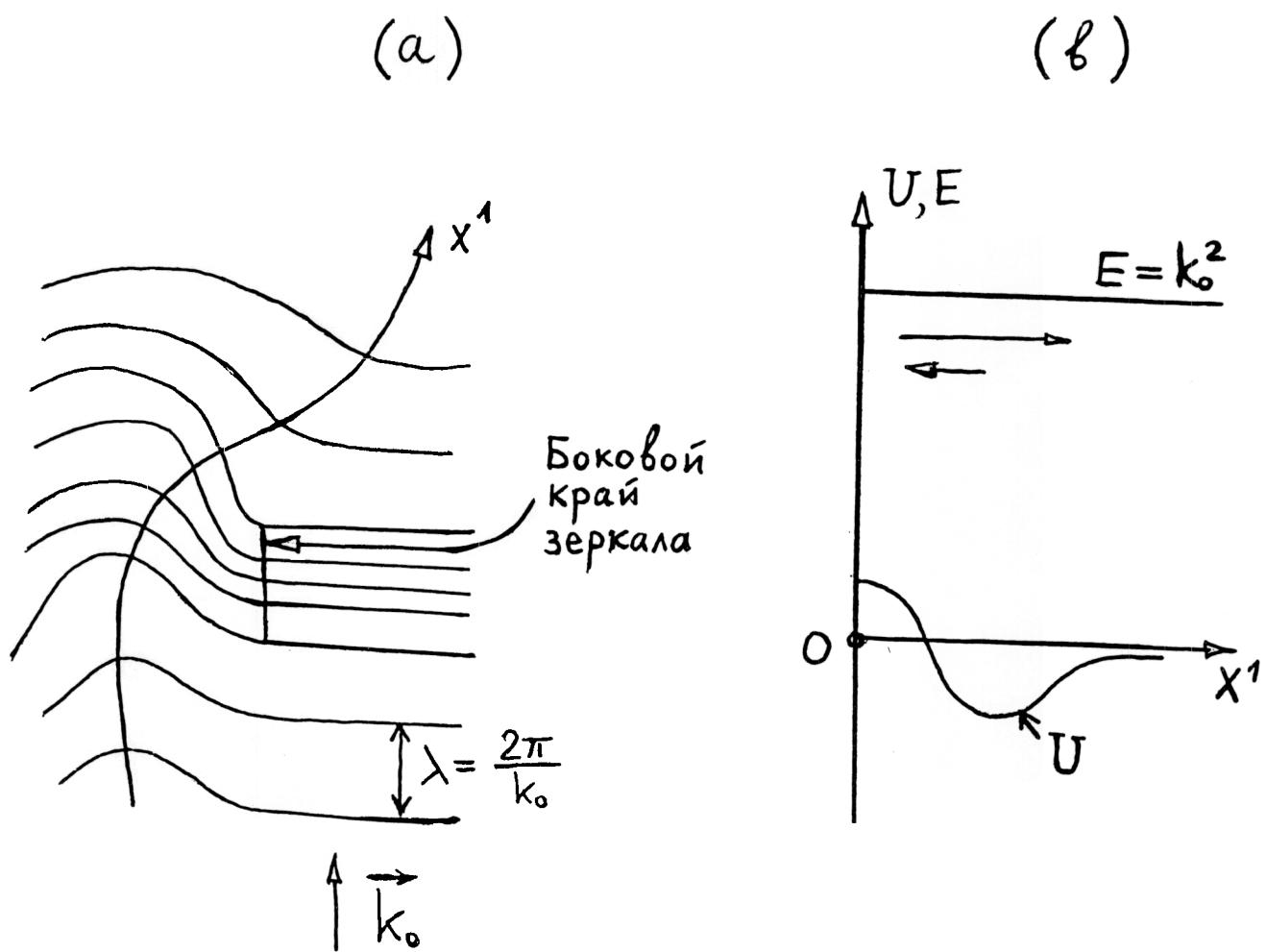


Рис. 4.

Видно, что вдоль линии x^1 густота поверхностей волновых фронтов сначала увеличивается, а затем уменьшается. Это соответствует движению волны в потенциале $U(x^1)$, изображенном на рис. 4б. В данной ситуации продольная волна, распространяющаяся вдоль x^1 , будет испытывать рассеяние назад. В квантовой механике этот эффект носит название надъямного отражения. Наиболее сильно он проявляется вблизи бокового края зеркала.

Вскроем физическую сущность второго эффекта.

Разумно предположить, что продольная координатная зависимость $\rho(z)$ амплитуды продольной волны, падающей на зеркало, непрерывна внутри толстого зеркала и имеет вид, изображенный на рис. 5а.

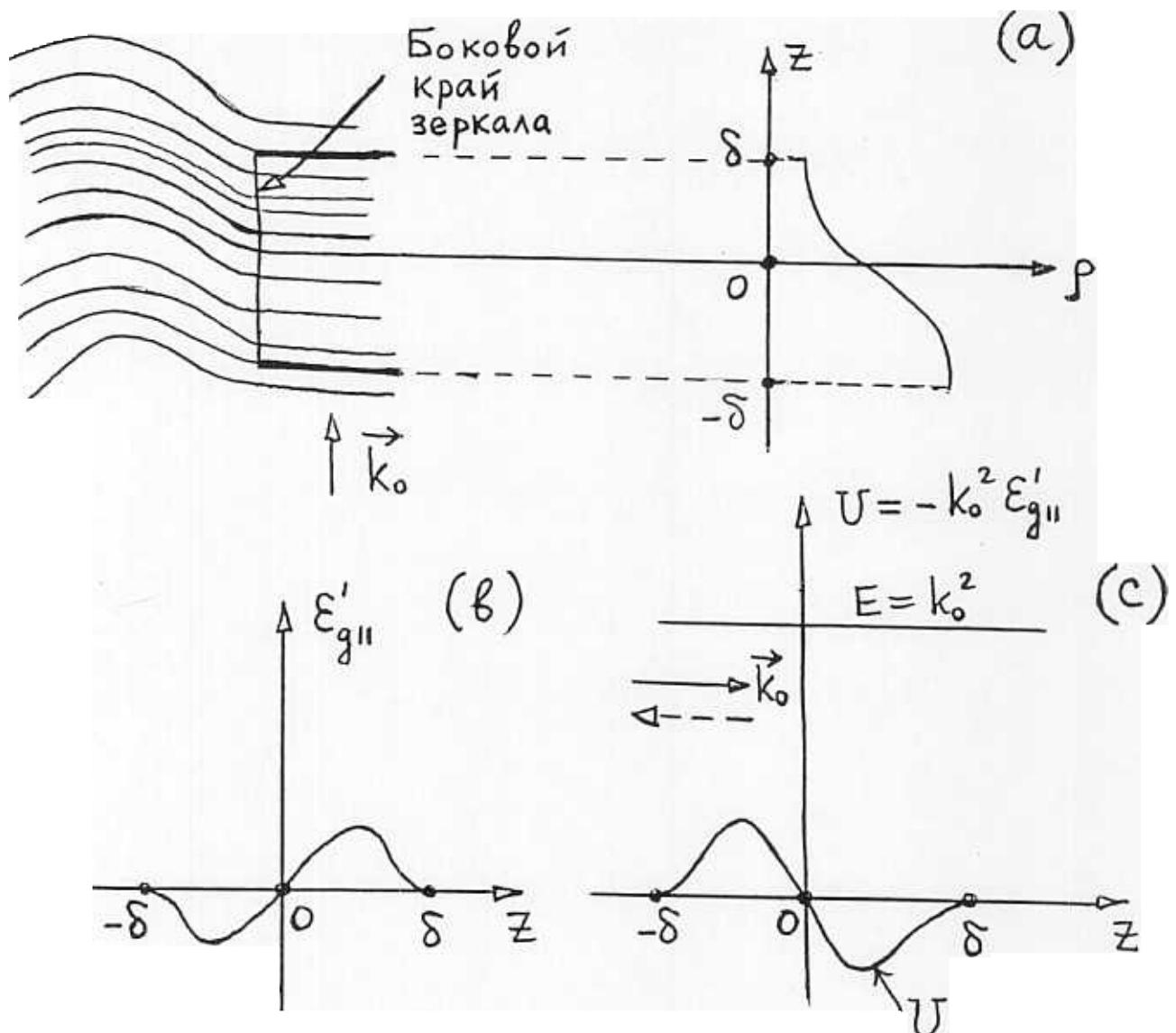


Рис.5

Продольный дифракционный эффект с $\epsilon'_{g\parallel} = \frac{1}{k_o^2 \rho} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}$ (зависимость $\epsilon'_{g\parallel}(z)$) показана на рис. 5б) приводит к неравномерной густоте поверхностей волновых фронтов внутри зеркала вдоль координаты z , что показано на рис. 5а. Далее воспользуемся физически разумным допущением о непрерывном в пространстве изменении фазы волны. В соответствии с этим допущением, вблизи бокового края зеркала (снаружи) густота линий волновых фронтов вдоль z должна быть приблизительно такой же, как и внутри зеркала. Тогда в этой области движение волны должно происходить в потенциале

$$U = -k_o^2 \epsilon'_{g\parallel}.$$

Зависимость $U(z)$ изображена на рис. 5с. В соответствии с квантовомеханическими представлениями, в этой ситуации должно иметь место заметное рассеяние назад продольной волны в области снаружи бокового края зеркала. Этот эффект должен ослабевать при удалении от бокового края зеркала наружу.

Такова физическая сущность второго рассмотренного нами эффекта.

В дополнение к рассмотренным двум эффектам, следует также принять во внимание рассеяние продольной волны назад при её распространении в продольных координатных трубках, имеющих изгибы и переменные поперечные сечения.

Гипотеза непрерывности координатной зависимости ρ исключает хорошо известный пример дифракции плоской волны на боковом крае тонкого непрозрачного плоского экрана (волна падает на плоскость экрана нормально). Эта задача решалась, например, в [4]. На рис. 6 изображено её решение.

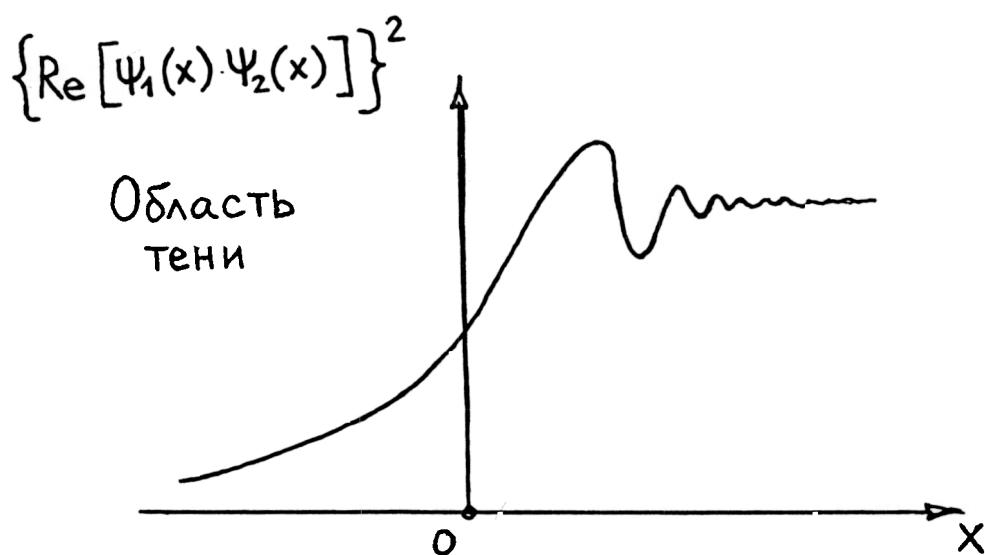


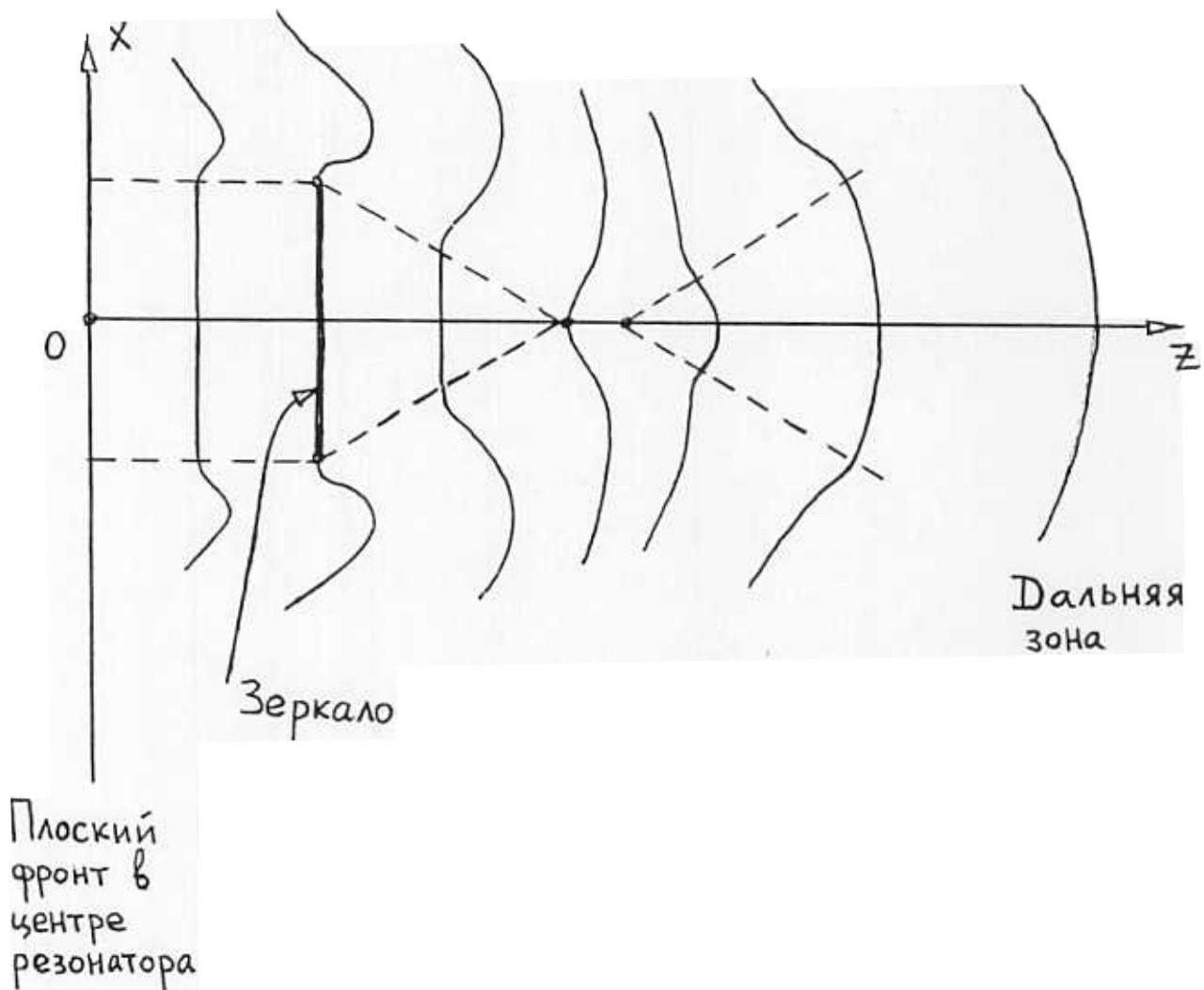
Рис. 6.

В этом примере сильная немонотонность $\{ \operatorname{Re} [\Psi_1(x) \cdot \Psi_2(x)] \}^2$ является следствием решения задачи о распаде разрыва $r(x)$ на границе экрана, а в нашем случае разрыва $r(x)$ не существует. Кроме того, в нашей задаче, в окрестности бокового края зеркала фронт падающей на зеркало продольной волны не плоский. Это следствие непрерывной аппроксимации принятой нами зависимости $r(x)$ при $z = 0$, (см. рис.3а). Добавим также, что в нашем случае волновая функция $\Psi_2(x)$ излучения, падающего на зеркало, нетривиальна.

Далее, для простоты, будем рассматривать геометрию фронтов продольной волны в масштабе Δz вдоль оси z , много превышающем толщину зеркал. В этом масштабе зеркала можно считать тонкими.

Изложенной выше информации достаточно для качественного определения геометрии фронтов продольной волны и её эволюции вдоль оптической оси z для пяти систем, изображенных на рис. 1. Представим решение этой проблемы на плоскости (x, z) .

3.3. Резонатор с плоскими прямоугольными зеркалами и цилиндрический резонатор

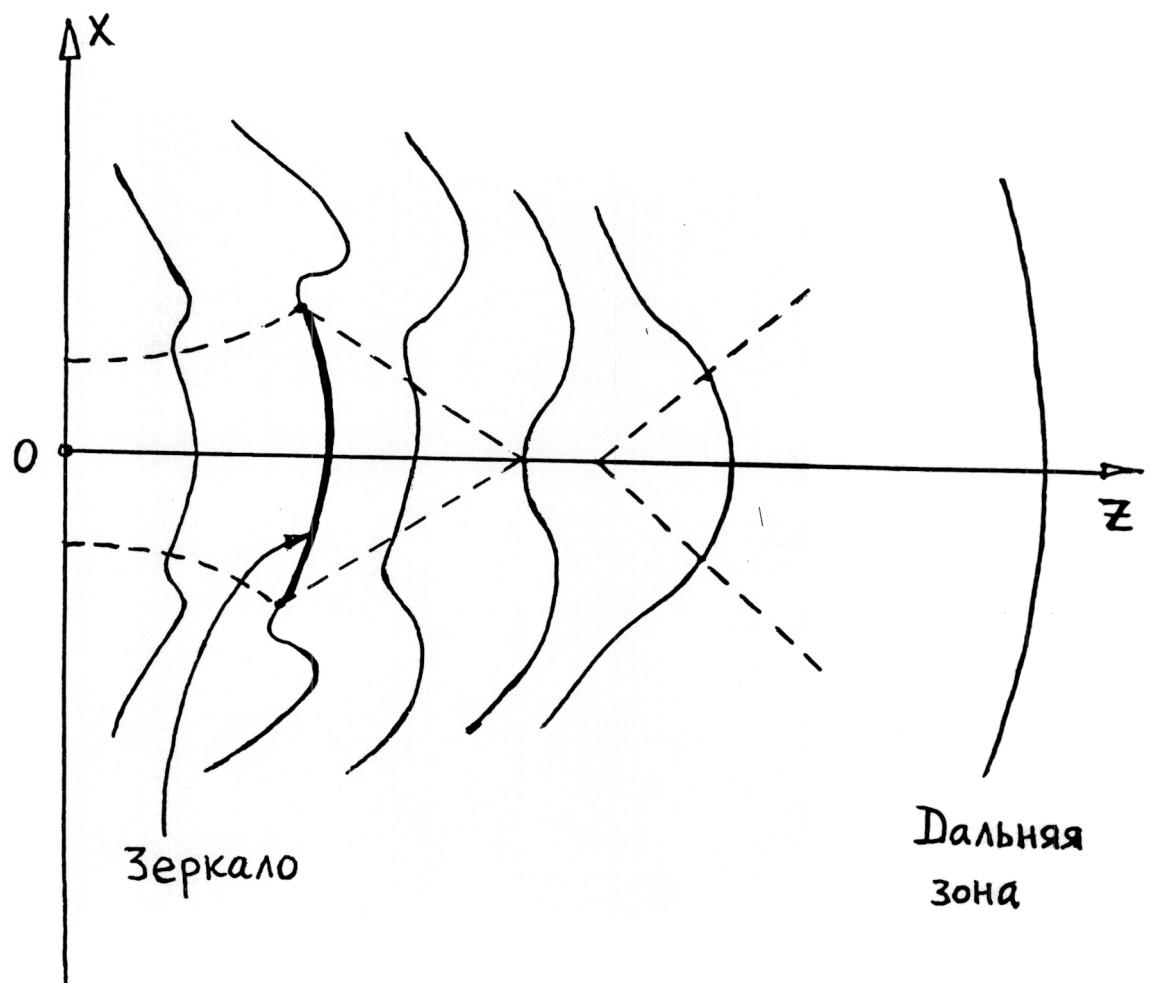


$$M \left(T(x,z) \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline T(x,z) \\ \hline I \\ \hline D \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline E \\ \hline I \\ \hline D \\ \hline \end{array} \rightarrow E \rightarrow R \right)$$

8 операторов симметрий

Рис. 7.

3.4. Устойчивый конфокальный резонатор



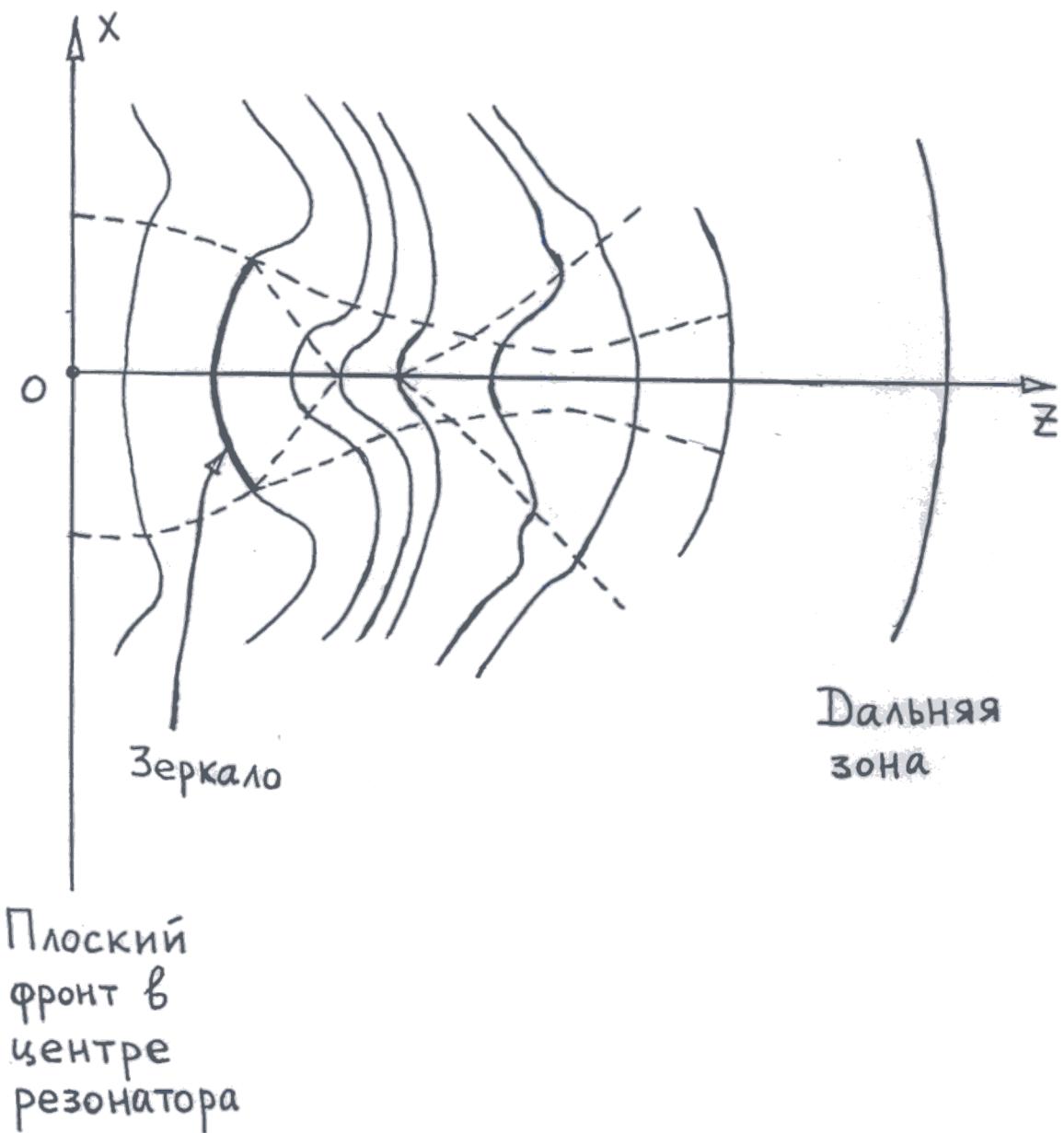
Плоский
фронт в
центре
резонатора

$$M(T(x) \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline E \\ \hline I \\ \hline D \\ \hline \end{array} \rightarrow E \rightarrow R)$$

6 операторов симметрий

Рис. 8.

3.5. Резонатор с выпуклыми зеркалами

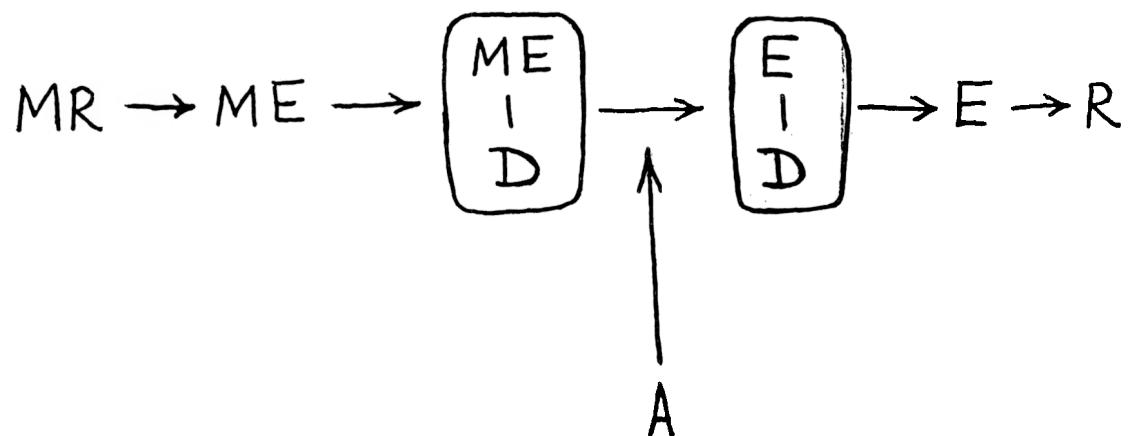
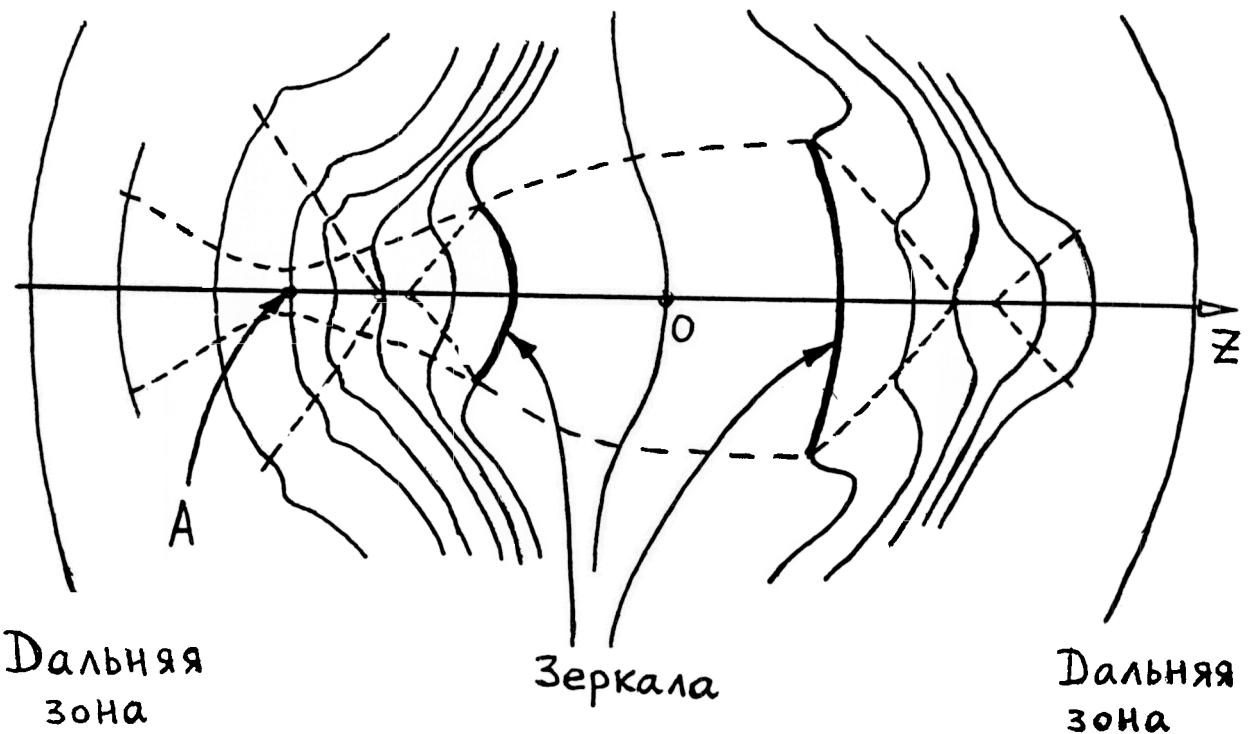


$$M(T(x) \rightarrow \boxed{\begin{matrix} ME \\ I \\ D \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} E \\ I \\ D \end{matrix}} \rightarrow E \rightarrow R)$$

9 операторов симметрий

Рис. 9.

3.6. Телескопический резонатор



11 операторов симметрий

Интересно, что в данном приближении система симметрична относительно точки А, но зеркальная симметрия нарушена сложным действием оператора D справа от неё.

Рис. 10.

4. Симметрия геометрий фронтов продольных волн

4.1. Метод симметрийного описания

Из представленных выше материалов о физике волнового процесса в интересующих нас системах следует вывод о чрезвычайной сложности точного математического анализа глобальной структуры волнового поля в них. Например, волновой процесс должен анализироваться в двух связанных между собой неэквивалентных координатных системах: координатной системе, определенной геометрией фазовых волновых фронтов, и координатной системе, определенной движением плотности энергии ρ^2 . Учет релятивистского эффекта (в случае продольной составляющей волнового поля лазерного излучения) еще более сильно усложняет процесс решения проблемы.

Отметим также, что только одна из составных частей нашей проблемы – определение структуры поля лазерного излучения внутри резонатора – имеет очень сложную математическую формулировку и очень громоздкий процесс точного математического решения.

Разумной альтернативой поиска точного математического глобального решения проблемы является поиск её приближенного глобального решения с помощью упрощенных физических моделей, в частности, тех, которые были введены нами выше.

Важно отметить, что на этом этапе физического восприятия глобальной структуры поля лазерного излучения точные методы математического решения, заключающиеся в интегрировании дифференциальных уравнений, становятся неэффективными. Они заменяются математическими методами теории глобального анализа физических объектов. По отношению к рассматриваемой нами проблеме представляют интерес методы двух разделов этой теории:

- 1) методы симметрийного описания теоретико-полевых объектов,
- 2) методы алгебраической топологии.

Методы первого раздела имеют важное достоинство. Они могут использоваться для полуколичественного описания теоретико-полевых объектов. Этим обусловлен интерес к ним в прикладных физических исследованиях.

Методы второго раздела наиболее эффективны при качественном изучении многомерных теоретико-полевых объектов, например, таких как импульс лазерного излучения.

В данном случае мы ограничимся применением методов только первого из этих разделов.

Наиболее интересными для нас являются симметрийные методы, фигурирующие в следующих разделах математики.

- 1). Теория непрерывных групп преобразований.
- 2). Теория алгебр и групп Ли. Теория многообразий групп Ли.
- 3). Теория псевдогрупп преобразований.

4). Теория представлений непрерывных групп.

4а). Теория конечномерных представлений.

4б). Теория бесконечномерных представлений.

Начинать знакомство с этими разделами следует с теории непрерывных групп преобразований.

Методы этих разделов лежат в основе современных теорий алгебраических инвариантов и динамических систем. Они также составляют математическое содержание современной физической теории классических полей.

Математический аппарат перечисленных теорий, в частности, позволяет строить и изучать гладкие многообразия (например, многообразия волновых фронтов), удовлетворяющие заданным физическим симметрийным условиям и, наоборот, изучать симметрийные свойства заданных гладких многообразий.

Подчеркнем, что движущая сила для исследователя при таком приближенном физическом изучении гладких многообразий, в отличие от ситуации точного решения проблемы, теперь заключается в том, чтобы понять и описать симметрийные свойства изучаемого объекта, а не в том, чтобы физически интерпретировать результаты точного математического решения физической проблемы.

Уясним смысловую сущность симметрийного изучения физических объектов. Она вскрыта в предисловии к лекциям Г. Вейля, опубликованным им в 1952 году [5]: «Эти четыре лекции посвящены понятию симметрии. Сначала, исходя из несколько смутного представления о симметрии – симметрии как гармонии пропорций, – в них рассматривается геометрическое понятие симметрии в различных формах, – таких как зеркальная, переносная, поворотная симметрия, симметрия орнаментов, кристаллов и т.д.; это рассмотрение постепенно приводит к общей идеи, лежащей в основе всех этих частных видов симметрии, – к идеи инвариантности некоторой конфигурации относительно определенной группы преобразований (группы автоморфизмов), анализом которой и завершается изложение».

Симметрийный анализ физических объектов имеет следующие достоинства.

1). Он позволяет на различных уровнях сложности математически изобразить физическое содержание исследуемого объекта.

2). Он позволяет произвести симметрийную классификацию исследуемых физических объектов и, тем самым, просто установить различие их физического содержания.

Ниже мы воспользуемся им на простейшем, самом важном, начальном уровне восприятия физического содержания структуры поля лазерного излучения внутри и за пределами пяти типов классических резонаторов, изображенных на рис. 1.

Симметрийный анализ физических свойств поля лазерного излучения начинается с изучения симметрии геометрий фронтов его продольных волн.

25

Оно важно не только само по себе. Эта симметрия лежит в основе изучения симметрии поперечной волновой структуры поля лазерного излучения.

Сразу следует отметить, что общим симметрийным свойством пяти рассматриваемых систем фронтов продольных волн является совпадение их структуры в дальней зоне (вблизи оптической оси систем вдали от резонатора). Все они в этой области имеют сферический фронт, геометрия которого в плоскости (x, z) при $z \rightarrow \infty$ описывается группой вращений $SO(2, R)$. Основной интерес представляет изучение симметрии геометрий фронтов продольных волн в ближней зоне.

Уровень сложности симметрийного описания системы физических объектов может варьироваться и определяется количеством правильно выбранных операций симметрии, свойственных им.

Симметрийные свойства геометрий фронтов продольных волн будем изучать на низшем уровне сложности в рамках представлений о следующих операциях симметрии:

1). Сдвиг. $\frac{\partial}{\partial z} . 'z = z + a$, a – параметр. Обозначение \textcircled{T} .

2). Растяжение – сжатие. $\frac{\partial}{\partial z} . 'z = bz$, b – параметр.

Обозначение \textcircled{D} .

3). Поворот. $x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}$.

$$\begin{pmatrix} 'z \\ 'x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$$

t – параметр. Инвариант $x^2 + z^2 = r^2 = \text{Const}$. Обозначение $SO(2, R)$ или \textcircled{R} .

Операции симметрии (1,2,3) позволяют изучать симметрийные свойства любых непрерывных функций. В дополнение к ним введем также еще две операции симметрии:

4). Зеркальная симметрия. Это не инфинитезимальная операция. Обозначение \textcircled{M} .

5). Эллиптическая симметрия. Это совокупность двух инфинитезимальных операций симметрий $SO(2, R)$ и $SO(1, 1)$. Обозначение \textcircled{E} .

Уясним понятие эллиптической симметрии. Она определяется эллиптической координатной системой

$$\left\{ \begin{array}{l} x = d \cdot ch \left(\frac{x^1}{d} \right) \cdot \sin \left(\frac{x^2}{d} \right) \\ z = d \cdot sh \left(\frac{x^1}{d} \right) \cdot \cos \left(\frac{x^2}{d} \right), \end{array} \right.$$

где: d – фокальное расстояние; $\frac{x^1}{d}$, $\frac{x^2}{d}$ – параметры, определенные в следующих областях: $0 \leq \frac{x^1}{d} < \infty$, $-\infty < \frac{x^2}{d} < \infty$.

Эта координатная система изображена на рис. 11.

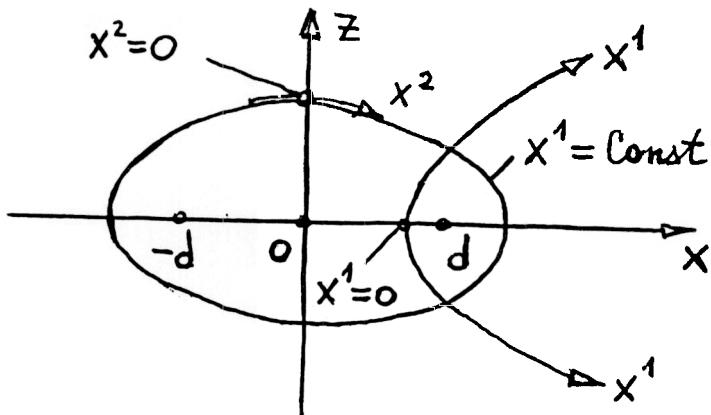


Рис. 11.

Из определения эллиптической координатной системы следует существование в ней двух алгебраических инвариантов:

1). d, x^1 – фиксированы.

$$\frac{(x)^2}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x^1}{d}\right)} + \frac{z^2}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{x^1}{d}\right)} =$$

Это уравнение эллипса.

2). d, x^2 – фиксированы.

$$\frac{(x)^2}{\sin^2\left(\frac{x^2}{d}\right)} - \frac{z^2}{\cos^2\left(\frac{x^2}{d}\right)} = d^2$$

Это уравнение гиперболы.

Легко заметить, что в первом случае имеется преобразование группы вращений $\text{SO}(2, R)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{d \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x^1}{d}\right)} \\ \frac{z}{d \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{x^1}{d}\right)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{\text{SO}(2, R)} \begin{pmatrix} \frac{x}{d \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x^1}{d}\right)} \\ \frac{z}{d \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{x^1}{d}\right)} \end{pmatrix},$$

а во втором случае – преобразование псевдоортогональной специальной группы $\text{SO}(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 'x \\ d \cdot \sin\left(\frac{x^2}{d}\right) \\ 'z \\ d \cdot \cos\left(\frac{x^2}{d}\right) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \operatorname{ch} S & \operatorname{sh} S \\ \operatorname{sh} S & \operatorname{ch} S \end{pmatrix}}_{SO(1,1)} \begin{pmatrix} \frac{x}{d \cdot \sin\left(\frac{x^2}{d}\right)} \\ \frac{z}{d \cdot \cos\left(\frac{x^2}{d}\right)} \end{pmatrix},$$

где S – параметр группы.

Таким образом, симметрийные свойства эллиптической системы координат описываются двумя линейными однопараметрическими группами $SO(2, R)$ и $SO(1, 1)$.

В интересующей нас проблеме будет использоваться только операция симметрии, действующая на эллипсе. Её мы называем эллиптической симметрией и обозначаем (E) .

Действия перечисленных операций симметрий будут рассматриваться в плоскости (x, z) . Инвариантами этих действий будут являться линии фронтов продольных волн в плоскости (x, z) . Они показаны на рис. 7-10.

Ограничимся симметрийным анализом линий фронтов только вблизи оптической оси z рассматриваемых пяти систем. В этом приближении гиперболические и параболические линии фронтов разумно аппроксимировать эллиптическими линиями, что является причиной введения только одной операции (E) .

Кроме того, при симметрийном анализе геометрий фронтов только вблизи оси z возникает проблема с симметрийным описанием линий, имеющих разные знаки кривизны. В этой ситуации фронты с разными знаками кривизны считаются симметрийно неэквивалентными. Переход от линии с одним знаком кривизны к линии с другим знаком осуществляется посредством операции (M) .

При описании фронтов сложной геометрии, показанных на рис. 12,

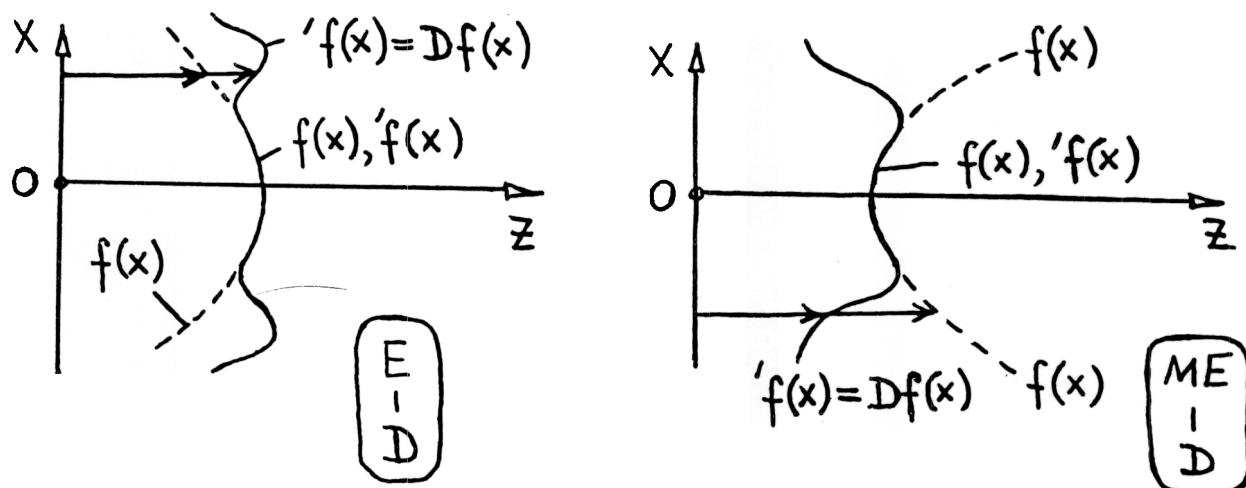


Рис. 12.

мы будем пользоваться понятием операции составной симметрии. Определим эту операцию.

Любую достаточно сложную линию фронта $\mathcal{Z} = f(x)$ в плоскости (x, z) можно представить в виде линии $\mathcal{Z} = f(x)$, инвариантной относительно одной из введенных выше операций симметрии T, R, E, MR, ME и подверженной затем деформации сжатия-растяжения D вдоль z. В интересующей нас ситуации действие оператора D может зависеть от x. Действие оператора D в преобразовании

$$f'(x) = D f(x)$$

можно реализовать двумя различными способами. Проиллюстрируем их на примере преобразований проективной группы

$$\begin{matrix} & Ax + B \\ x' = & \backslash \\ & Cx + K \end{matrix}$$

где A, B, C, K – групповые параметры.

Зафиксируем A, B, C, K. Тогда в качестве D можно выбрать оператор

$$D = \begin{matrix} Ax + B \\ Cx + K \end{matrix}$$

так что

$$f'(x) = \begin{matrix} Ax + B \\ Cx + K \end{matrix} \cdot f(x)$$

В этом заключается суть первого способа реализации операции D.

Можно поступать по-другому и выбрать действие $Df(x)$ в виде

$$\frac{Af(x) + B}{Cf(x) + K}$$

Тогда

$$f'(x) = \frac{A \cdot f(x) + B}{C \cdot f(x) + K}$$

В этом заключается суть второго способа реализации операции D. Видно, что в этом случае эффект сжатия-растяжения $f(x)$ вдоль \mathcal{Z} достигается путем реализации более сложной композиции операций симметрий, смысл которой мы вскроем ниже.

Оба способа реализации операции D отличаются друг от друга. Например, второй способ не дает положительного результата в случае $f(x) =$

= Const.

В обоих способах набор величин A, B, C, K для одной линии фронта $z = f(x)$ может отличаться от их набора для другой, соседней линии фронта.

Смыслоное содержание величин A, B, C, K определяется тремя симметрийными операциями:

- 1) Сдвиг (B, K).
- 2) Сжатие-растяжение (A, C).

3) Инверсия (деление в $\frac{A \cdot + B}{C \cdot + K}$)

Отсюда следует, что действие D на $f(x)$ во втором способе можно интерпретировать как действие композиции указанных трех операций симметрий.

Отметим, что использование проективного преобразования в рассматриваемой нами проблеме – не единственно возможный вариант.

Таково смысловое содержание оператора D, фигурирующего в интересующей нас проблеме.

Теперь становится понятным, как ввести операцию составной симметрии. Она должна содержать одну из операций T, R, E, MR, ME, соответствующую геометрии неискаженной линии фронта $z = f(x)$. Эта линия – алгебраический инвариант одного из операторов T, R, E, MR, ME. Другая компонента операции составной симметрии должна содержать операцию D в смысле, установленном нами выше. Далее будем обозначать операцию составной симметрии посредством $\boxed{\frac{L}{D}}$, где L – обозначение одной из

операций T, R, E, MR, ME. Примеры операций составной симметрии в случае $L = E, ME$ приведены на рис. 12.

Представленной выше информации достаточно для симметрийного анализа геометрий фронтов продольной волны в плоскости (x, z) , изображенных на рис. 7-10, и их эволюции вдоль оптической оси z для всех пяти выбранных нами систем, показанных на рис. 1. Этот анализ заключается в составлении и изучении цепочек из операций симметрий, соответствующих геометрии волнового фронта, элементы которых последовательно изменяются по мере движения и изменения геометрии этого фронта вдоль оси z. Интересующие нас цепочки операций симметрий написаны снизу рисунков 7-10, на которых изображены соответствующие им геометрии фронтов продольных волн в пяти выбранных нами системах.

4.2. Симметрийная классификация и выводы по симметрийному анализу геометрий фронтов продольных волн.

Сложность физического восприятия волновой структуры поля лазерного излучения пяти рассматриваемых объектов определяется

количеством операторов симметрии, присущих им. Чем больше таких операторов, тем сложнее физическая структура объекта. Нами установлена следующая градация этих объектов по сложности их физического восприятия:

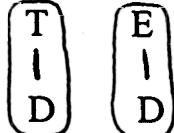
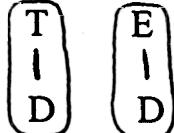
- 1) конфокальный устойчивый резонатор (6 операторов симметрии),
- 2) цилиндрический резонатор и резонатор с плоскими прямоугольными зеркалами (8 операторов симметрии),
- 3) резонатор с выпуклыми зеркалами (9 операторов симметрии),
- 4) телескопический резонатор (11 операторов симметрии).

Следует, однако, отметить, что введенные нами операторы симметрии не равнозначны по сложности. Простейшими операторами являются М и Т, а самыми сложными – операторы составной симметрии типа

(или



)

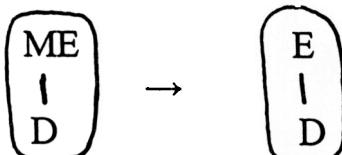


Приведем градацию использованных нами операторов симметрий по сложности их физического восприятия:

- 1) М;
- 2) Т;
- 3) R, MR;
- 4) E, ME;
- 5)  ;
- 6) , 

С учетом фактора сложности операторов симметрии наиболее простыми в физическом восприятии являются системы волновых фронтов с цилиндрическим резонатором и с резонатором из плоских прямоугольных зеркал, а также с конфокальным устойчивым резонатором. Самой сложной по-прежнему, остается система с телескопическим резонатором.

Еще один фактор сложности физического восприятия рассматриваемых систем определяется неравноценностью восприятия переходов между операторами симметрий. Самым сложным с этой точки зрения является переход



в системах с телескопическим резонатором и с резонатором, имеющим выпуклые зеркала.

На этом завершается решение задачи симметрийной классификации геометрий фронтов продольных волн пяти выбранных нами систем.

Проведенный выше симметрийный анализ весьма примитивен. Тем не менее, он дает общее представление о методе симметрийного изучения структуры поля лазерного излучения. С нашей точки зрения, он является очень эффективным и перспективным при изучении физических свойств этого поля.

Дальнейшее уточнение использованного нами метода симметрийного анализа геометрий фронтов продольных волн следует проводить в двух направлениях:

- 1) набор операций симметрий нужно дополнить операциями гиперболической и параболической симметрий;
- 2) нужно уточнить и расширить содержание операции растяжения – сжатия D.

Конечной целью симметрийного анализа рассмотренной выше проблемы является аналитическое построение гладких многообразий фронтов продольных волн для пяти выбранных систем. Тем самым частично разрешается задача их полуколичественного глобального описания. Достижение этой цели интересно с прикладной точки зрения. Мы, однако, ограничимся достигнутым уровнем решения проблемы. Он является достаточным для её качественного физического восприятия.

Проведенный выше симметрийный анализ фронтов продольных волн представляет собой решение только половины задачи глобального анализа структуры поля лазерного излучения. Другая половина задачи заключается в изучении симметрийных свойств поперечных колебаний этого поля. Ниже мы представим решение этой задачи для пяти выбранных нами систем.

5. Физическое представление о структуре поперечных колебаний поля лазерного излучения в рассматриваемых резонаторах и за их пределами.

5.1. Общие положения

Изучение структуры поперечных колебаний поля лазерного излучения начинается с анализа её свойств внутри резонатора. Это задача нерелятивистской квантовой механики. Она сводится к определению собственных значений энергии и соответствующих им собственных функций поперечных колебаний поля внутри резонатора. Координатная система в такой квантовомеханической задаче ассоциируется с геометрией фронтов продольных волн внутри резонатора, которую мы уже рассмотрели ранее.

Основным квантовомеханическим объектом, фигурирующим при решении данной задачи, является резонаторный потенциал U_p , который вводится следующим образом.

Пусть на продольных координатных линиях $x^1 = \text{var}$, $x^2, x^3 = \text{Const}$ криволинейной ортогональной координатной системы (x^1, x^2, x^3) определена фазовая метрика $g_{\parallel}(x^1, x^2, x^3)$ продольной волны. Величина $\sqrt{g_{\parallel}(x^1, x^2, x^3)}$ имеет смысл коэффициента сжатия-растяжения декартова координатного масштаба (в обычном физическом пространстве с координатами x, y, z) в отношении к единичному неизменному координатному масштабу Δx^1 вдоль координаты x^1 при фиксированных значениях x^2, x^3 . Длина L координатной линии $x^1 = \text{var}$ между зеркалами резонатора в пространстве (x, y, z) определяется так:

$$L(x^2, x^3) = \int_0^{x_o^1} \sqrt{g_{\parallel}} dx^1$$

где O и x_o^1 являются точками её пересечения с поверхностями резонаторных зеркал.

Далее будем полагать, что поверхности резонаторных зеркал слабо изогнуты. Тогда функцию $L(x^2, x^3)$ удобно использовать в качестве меры, определяющей переменное расстояние между поверхностями резонаторных зеркал в различных точках (x^2, x^3) . Можно еще более упростить ситуацию, если ввести некоторые постоянные вдоль каждой из линий $x^1 = \text{var}$ средние по x^1 значения величин $\langle \sqrt{g_{\parallel}(x^2, x^3)} \rangle$. Тогда

$$L(x^2, x^3) = x_o^1 \cdot \langle \sqrt{g_{\parallel}(x^2, x^3)} \rangle.$$

Резонаторный потенциал $U_p(x^2, x^3)$ определим следующим образом

$$U_p(x^2, x^3) = k_o^2 \cdot \left(\frac{1}{\langle \sqrt{g_{\parallel}(x^2, x^3)} \rangle^2} - 1 \right).$$

Так определенный U_p разумно использовать в качестве потенциала в уравнениях Шредингера относительно волновых функций ψ_2 и ψ_3 поперечных колебаний поля.

Определение U_p очевидно обобщается для описания ψ_2 и ψ_3 не только внутри резонатора, но и за пределами его боковых границ.

В случае резонатора с цилиндрической симметрией U_p является функцией только от одной радиальной координаты $x^2 = \zeta$. Пример $U_p(\zeta)$ для устойчивого конфокального резонатора приведен на рис. 13.

На рис. 13а линии $x^1 = \text{var}$, $x^2 = \text{Const}$ лежат на поверхностях фронтов радиальных волн.

Из рис. 13б видно, что собственные значения энергии и соответствующие им собственные функции радиальных колебаний определены потенциальной ямой $U_p(\zeta)$.

Уточнение данной картины определения структуры радиальных колебаний будет дано нами позднее. Сейчас пока важно установить существенную роль потенциала $U_p(z)$ в этом определении.

Другим важным физическим эффектом, уясняющим сущность поставленной проблемы, является дифракционный эффект. Он описывается потенциалом

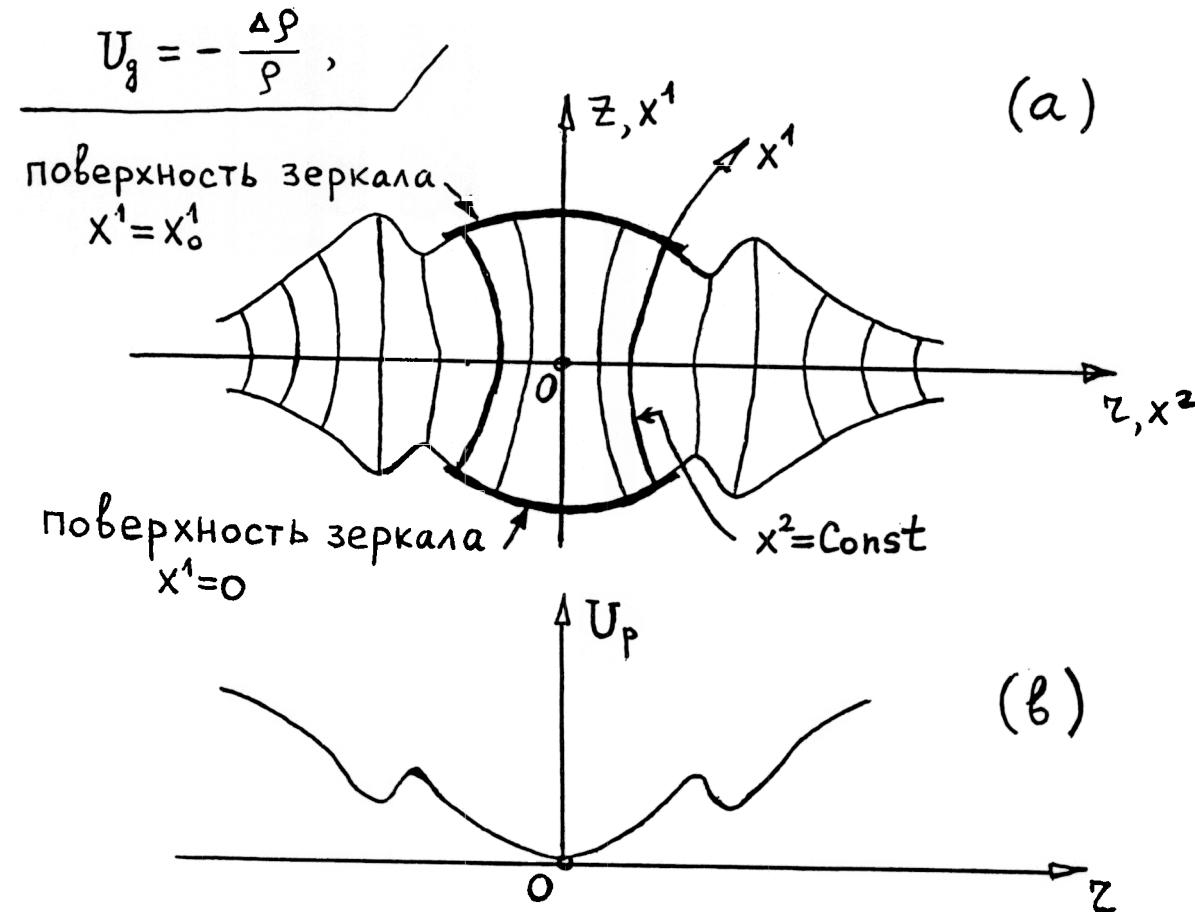


Рис. 13.

где ρ – амплитуда поперечной волны.

Продемонстрируем его действие на примере одномерного квантовомеханического гармонического осциллятора. Рассмотрим его колебания с собственным значением энергии E во внешнем потенциальном поле $U = \beta \cdot (x)^2$, где $\beta = \text{Const} > 0$, x – координата. Уравнение Шредингера относительно волновой функции $\psi(x)$ осциллятора имеет вид:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + (E - U(x)) \Psi = 0.$$

Грубо аппроксимируем амплитудную зависимость $\rho(x)$ волновой функции $\Psi = \rho(x) \cdot \exp(i\varphi(x))$, (φ – фаза) в виде $\rho = \exp[-a(x)^2]$, где $a = \text{Const} > 0$. В этом случае

$$U_g = 2a [1 - 2a(x)^2].$$

Движение $\psi(x)$ будет происходить в потенциале $U(x) + U_g(x)$. Видно, что дифракционный потенциал будет компенсировать действие потенциала внешних сил $U = b \cdot (x)^2$.

При более точной аппроксимации зависимости $p(x) \rightarrow \hat{p}(x)$, которой соответствует $U_g(x) \rightarrow \hat{U}_g(x)$, оказывается, что движение $\psi(x)$ имеет место в потенциале $U(x) + \hat{U}_g(x)$, изображенном на рис. 14.

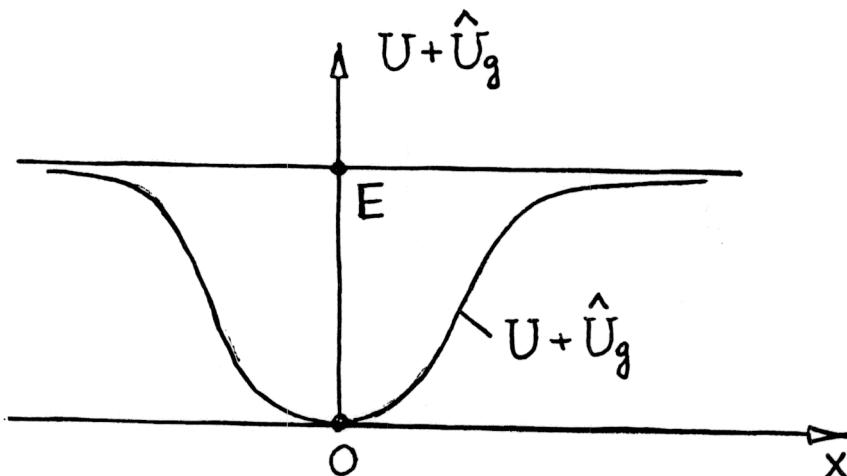


Рис. 14.

Видно, что этот потенциал заметно отличается от $U(x)$. Область его значений, в отличие от потенциала $U(x)$, конечна. Важно отметить, что функция $U(x) + U_g(x)$ не должна превышать значения величины E .

Отсюда следует, что учет дифракционного эффекта может существенно определять структуру исследуемого волнового поля, в чем мы также неоднократно убедимся в дальнейшем.

Далее, при описании движения поперечной волны, нам потребуются определения понятий фазовой скорости V_ϕ волны и скорости V_s волны плотности энергии, а также определение соотношения между ними. Дадим эти определения.

Будем описывать движение поперечной волны уравнением относительно волновой функции $\psi(x, t)$:

$$\frac{2ik_0}{c} \Psi_{,t} + \Psi_{,xx} - U(x) \Psi = 0,$$

где $U(x)$ – некоторая потенциальная функция.

В случае свободного движения при $U = 0$ это уравнение имеет решение

$$\Psi \sim \exp(iKx - i\Omega t) = \exp\left[iK\left(x - \frac{\Omega}{K}t\right)\right],$$

где K, Ω – постоянные величины.

В этом случае понятие фазовой скорости определяется так:

$$V_F = \frac{\Omega}{K}$$

Далее будет дано более общее определение скорости V_F .

Выразим волновую функцию $\psi(x, t)$ через амплитуду $\rho(x, t)$ и фазу $\varphi(x, t)$:

$$\psi = \rho \cdot e^{i\varphi}$$

Подставим это выражение в исходное уравнение и выделим действительную и мнимую части. Получим систему уравнений относительно

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2k_0}{c} \varphi_{,t} + (\varphi_{,x})^2 = \frac{\rho_{,xx}}{\rho} - U(x), \\ \frac{k_0}{c} (\rho^2)_{,t} + (\rho^2 \varphi_{,x})_{,x} = 0. \end{array} \right.$$

Пренебрежем дифракционным эффектом ($\rho_{,xx} \rightarrow 0$) и положим $\varphi_{,xx} \rightarrow 0$. Получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2k_0}{c} \varphi_{,t} + (\varphi_{,x})^2 = -U(x), \\ (\rho^2)_{,t} + \frac{c}{k_0} \varphi_{,x} (\rho^2)_{,x} = 0 \end{array} \right.$$

Из последнего уравнения следует определение V_s в виде

$$V_s = \frac{c}{k_0} K$$

$$K = \varphi_{,x}.$$

Рассмотрим волновой процесс, установившийся во времени. Тогда

$$\Omega = -\varphi_{,t} = \text{Const} > 0$$

и можно ввести понятие полной энергии E волнового движения:

$$E = \frac{2k_0}{c} \Omega = \text{Const} > 0$$

Тогда из первого уравнения последней системы видно, что величина

$$K^2(x) = E - U(x)$$

будет иметь смысл кинетической энергии волнового движения. Как видим, она зависит от x . В этом случае данное выше определение \mathcal{V}_φ при $K = \text{Const}$ допускает локальную по x интерпретацию

$$\mathcal{V}_\varphi(x) = \frac{\Omega}{K(x)} = \frac{c}{2k_0} \cdot \frac{E}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Это и есть искомое определение \mathcal{V}_φ .

Из полученного определения \mathcal{V}_φ и данного выше определения \mathcal{V}_e следует, что

$$\mathcal{V}_\varphi(x) \cdot \mathcal{V}_e(x) = \frac{\Omega}{K(x)} \cdot \frac{c}{k_0} K(x) = \frac{c}{k_0} \Omega = \text{Const} = \hat{c}^2$$

Видно, что при $U(x) \rightarrow E$ имеет место

$$\mathcal{V}_\varphi(x) \rightarrow \infty,$$

$$\mathcal{V}_e(x) \rightarrow 0$$

Таковы требуемые определения понятий \mathcal{V}_φ , \mathcal{V}_e и соотношения между ними.

Типичная проблема, которая возникает при изучении структуры поля в резонаторах с цилиндрической осевой симметрией, заключается в следующем. Требуется описать поперечное радиальное колебание поля в круговой области, показанной на рис. 15.

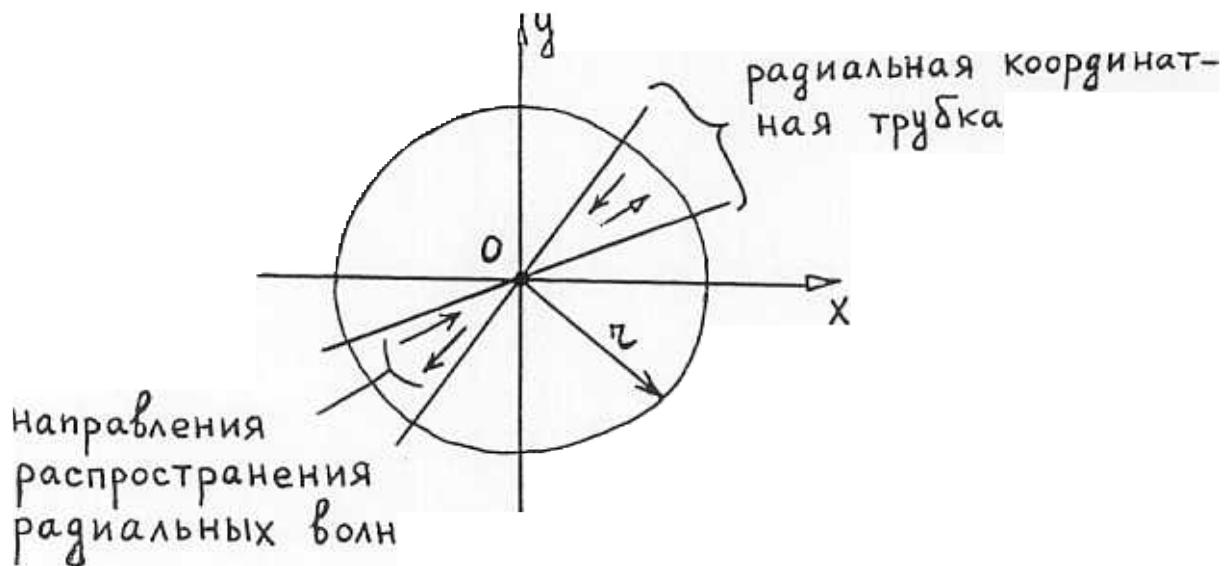


Рис. 15.

Рассмотрим движение волн, составляющих радиальное колебание, вдоль координатной трубки, показанной на рис. 15. Видно, что сечение этой координатной трубки сначала сжимается до нуля, а затем растягивается. Трудность заключается в описании волнового движения в окрестности нулевого сечения трубы. Она устраняется следующим образом.

Заметим, что плотность энергии радиальной волны ρ^2 , где ρ – ее амплитуда, в нулевом сечении трубы не может иметь отличную от нуля скорость распространения V_ϑ . С другой стороны, в нерелятивистском приближении, связь между фазовой скоростью V_φ волны и V_ϑ , как было показано нами выше, имеет вид

$$V_\varphi \cdot V_\vartheta = \hat{C}^2$$

Отсюда следует, что при $V_\vartheta \rightarrow 0$ должно быть $V_\varphi \rightarrow \infty$.

Следовательно, волна энергии, в случае приближения к нулевому сечению трубы, должна замедляться, а фазовая волна должна ускоряться.

Это требование выполняется, если предположить, что радиальные волны распространяются в некотором потенциальном поле, имеющем потенциал U_r , который назовем геометрическим.

Радиальная зависимость $U_r(r)$ для цилиндрического резонатора в окрестности $r=0$ изображена на рис. 16.

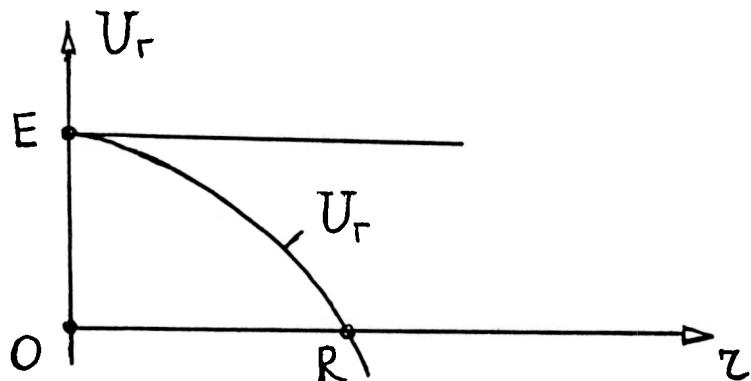


Рис. 6.

Условие $V_\vartheta(r=0)=0, V_\varphi(r=0)=\infty$ будет выполнено, если $U_r(r=0)=E$, где E – собственное значение энергии рассматриваемого радиального колебания.

Ясно, что координатная система, связанная с фазами радиальных волн, в случае $U_r \neq 0$ будет искажена.

Уясним физическую природу этого искажения.

Рассмотрим процесс движения радиальной волны, описываемой волновой функцией ψ , в ортогональной координатной системе (x^1, x^2) , изображенной на рис. 17.

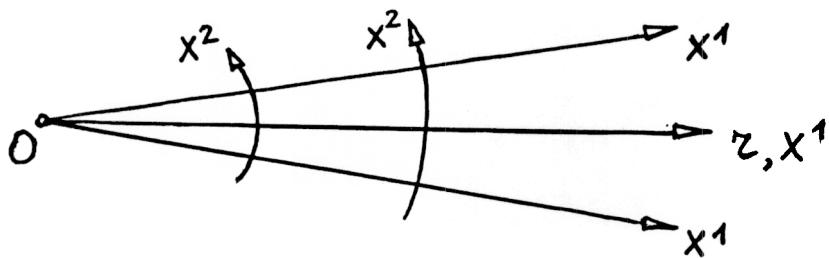


Рис. 17.

Процесс движения ψ будем описывать уравнением Гельмгольца

$$\Delta \Psi + \lambda_0^2 \Psi = 0,$$

$$\Delta \Psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} \cdot g^{ee} \Psi_{,e} \right)_{,e} ; \quad e = 1, 2 ;$$

g^{ee} - компоненты метрического тензора; $g = g_{11} \cdot g_{22}$.
Совершим замену

$\Psi = \rho \cdot \exp(i\varphi)$, где ρ, φ - амплитуда и фаза радиальной волны (действительные функции координат). Полагая, что ψ не зависит от x^2 , совершая указанную замену в уравнении Гельмгольца и выделяя действительные и мнимые части в нем, получим систему уравнений относительно ρ, φ :

$$\begin{cases} g^{11}(\varphi_{,1})^2 = \frac{1}{\rho g_{11}} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{g_{22}}{g_{11}} \right)_{,1} \rho_{,1} + \rho_{,11} \right] + \lambda_0^2 \\ \left(\ln \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right)_{,1} \rho \varphi_{,1} + 2 \rho_{,1} \varphi_{,1} + \rho \cdot \varphi_{,11} = 0. \end{cases}$$

Далее будем использовать только первое из этих уравнений, в котором положим $\lambda_0^2 = E - U_r(x^1)$.

Обозначим

$$\lambda^2 = g^{11}(\varphi_{,1})^2 = (\varphi_{,r})^2 ,$$

$$U_g = - \frac{1}{\rho g_{11}} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{g_{22}}{g_{11}} \right)_{,1} \rho_{,1} + \rho_{,11} \right] ,$$

где U_g имеет смысл дифракционного потенциала. Тогда из первого уравнения следует

$$\lambda^2 = E - U_r - U_g = E - \hat{U}$$

По определению, волновое число λ радиальной волны записывается так:

$$\lambda(r) = \frac{2\pi}{\Lambda(r)},$$

где Λ - длина радиальной волны.

Определим метрический коэффициент g_{11}

$$\sqrt{g_{11}} = \frac{\Lambda(r)}{\Lambda_0}$$

где Λ_0 - длина радиальной волны при $\hat{U} = 0$. Поскольку $\Lambda_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{E}}$, то

$$E - \hat{U}(r) = \frac{E}{g_{11}(r)}$$

или $g_{11}(E - \hat{U}) = E$, что эквивалентно $g_{11}\lambda^2 = E$

Далее, определяя

$$g_{22} = \frac{r^2}{R} \quad \text{и}$$

$$U_r = \lambda^2(r) \cdot [g_{22}(r) - 1] = \lambda^2 \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right)$$

последнее уравнение, с учетом $\lambda^2 = E \cdot g^{11}$, приводится к виду

$$g_{11} = \frac{R^2}{r^2} - \frac{1}{pE} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{g_{22}}{g_{11}} \right)_{,1} \cdot p_{,1} + p_{,11} \right].$$

Это уравнение относительно g_{11} .

Если пренебречь вкладом дифракционного эффекта, полагая $p = \text{Const}$, то

$$g_{11} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{g_{22}}$$

Следовательно, геометрический потенциал U_r без учета дифракции определяется так:

$$U_r = E \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Поскольку

$$\sqrt{g_{11}} = \frac{dr}{dx^1} = \frac{R}{r},$$

то

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = \frac{z^2}{2R}, \\ z = \sqrt{2Rx^1}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{11} = \frac{R}{2x^1} \\ g_{22} = \frac{2x^1}{R} \end{array} \right.$$

Итак, получен важный результат, касающийся физической природы искажения координатной системы, определяемой зависимостью $g_{11}(z)$. Величина g_{11} определяет густоту координатных линий $x^2 = \text{Const}$ вдоль z . Из физических представлений, изложенных выше, следует, что эта густота минимальна вблизи $z = 0$ (равна нулю при $z = 0$) и повышается с увеличением z .

Это эквивалентно тому, что фазовая скорость радиальных волн максимальна (равна бесконечности) при $z = 0$ и уменьшается с ростом z .

Более подробный анализ рассматриваемой проблемы затрудняется необходимостью учета рассеяния радиальных волн назад на потенциале U_Γ , т.е. учетом связи между встречными радиальными волнами, которые составляют радиальное колебание (моду). Это замечание существенно при определении координатной зависимости $\rho(z)$ или $\rho(x^1)$.

Отметим, что введенная нами концепция геометрического потенциала находится в качественном соответствии с физической интерпретацией функции Бесселя $J_0(z)$, являющейся собственной функцией радиального колебания поля в цилиндрическом резонаторе (при отсутствии азимутального колебания). Это иллюстрируется на рис. 18.

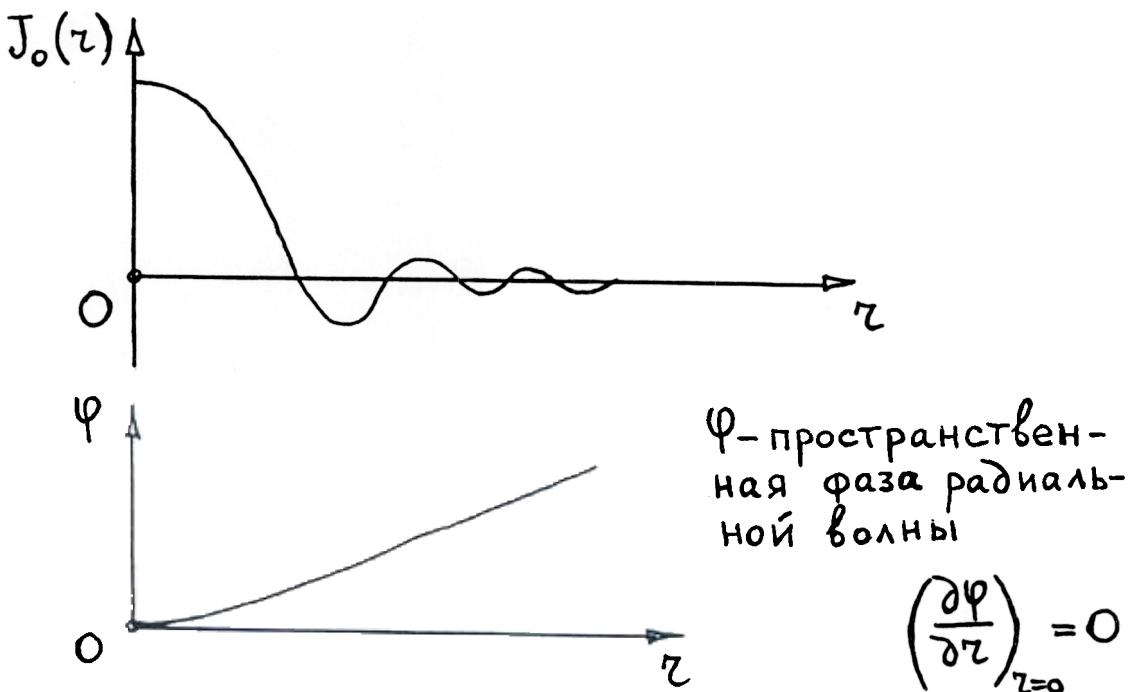


Рис. 18.

Интересно сравнить данную нами выше интерпретацию действия геометрического потенциала с интерпретацией этого действия в

классической волновой механике (без учета сжатий – растяжений масштаба радиальной координаты). Эта последняя интерпретация имеет место при классическом изучении колебаний тонкой мембранны с закрепленной круглой границей [6]. Задача рассматривается в полярной системе координат (τ, φ), связанной с декартовой системой координат (x, y) следующим образом:

$$x = \tau \cdot \cos \varphi, \quad y = \tau \cdot \sin \varphi.$$

В системе координат (τ, φ) уравнение Гельмгольца относительно волновой функции $\Psi = \Psi_2(\tau) \cdot \Psi_3(\varphi)$ сводится к следующим уравнениям относительно $\Psi_2(\tau)$, $\Psi_3(\varphi)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Psi_2}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\Psi_2}{d\tau} + \left(\lambda^2 - \frac{T^2}{\tau^2} \right) \Psi_2 = 0, \\ \frac{d^2 \Psi_3}{d\varphi^2} + T^2 \Psi_3 = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где: λ^2 – собственное значение энергии поперечного колебания в целом; T^2 – собственное значение энергии азимутального колебания (постоянная разделения). Величина $(T/\tau)^2$ в первом уравнении имеет смысл центробежного потенциала. $U_{ц.б.}$.

Действие введенного нами выше геометрического потенциала (без учета дифракции) здесь интерпретируется слагаемым $\frac{1}{\tau} \frac{d\Psi_2}{d\tau}$. Оно учитывает влияние изменения поперечного сечения $\mathfrak{S}(\tau)$ координатной трубы, в которой распространяется радиальная волна, на свойства этой волны. Ситуация при $T = 0$ вполне аналогична той, которая описывается хорошо известным уравнением рупора. Связь очевидна, поскольку коэффициент $1/\tau$ в этом случае определяется как $\frac{1}{\mathfrak{S}} \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau}$ с $\mathfrak{S} \sim \tau$.

Выше мы рассмотрели механизмы проявления эффекта геометрического потенциала в процессе движения радиальной волны в двух случаях:

а) масштаб радиальной координаты определяется фазой радиальной волны,

б) масштаб радиальной координаты постоянный.

Естественно возникает вопрос о третьей возможной ситуации (с), когда масштаб радиальной координаты определяется движением волны плотности энергии. Этот случай (с), в известном смысле, противоположен случаю (а). Густота радиальных координатных линий вблизи центра $\tau = 0$, в отличие от случая (а), теперь должна быть максимальной. Такой случай уже был рассмотрен нами в [1]. Изложим основные результаты проведенного там исследования.

Рассмотрим уравнение Гельмгольца относительно волновой функции ψ :

$$\Delta \psi + \lambda^2 \psi = 0$$

(где $\lambda^2 = \text{Const}$ – собственное значение энергии поперечного колебания поля в целом) в ортогональной системе криволинейных координат (x^2, x^3) , связанной с декартовыми координатами (x, y) так:

$$\begin{cases} x = d \cdot e^{\frac{x^2}{d}} \cdot \cos\left(\frac{x^3}{d}\right), \\ y = d \cdot e^{\frac{x^2}{d}} \cdot \sin\left(\frac{x^3}{d}\right) \end{cases}$$

где: d – радиус рассматриваемой круговой области, $-\infty < x^2 \leq 0$, $x^2 = -\infty$ соответствует $\zeta = 0$, а $x^2 = 0$ соответствует $\zeta = d$; $-\infty < x^3 < +\infty$. В таких координатах метрические коэффициенты g_{22}, g_{33} определены так:

$$g_{22} = g_{33} = e^{\frac{2x^2}{d}},$$

а радиальная координата ζ связана с x^2 следующим образом:

$$\zeta = d \cdot e^{\frac{x^2}{d}}$$

Уравнение Гельмгольца в координатах (x^2, x^3) имеет вид

$$\Psi_{,,} + \Psi_{,33} + g_{22}(x^2) \cdot \lambda^2 \Psi = 0$$

Разделяя переменные $\Psi(x^2, x^3) = \psi_2(x^2) \cdot \psi_3(x^3)$, получим систему уравнений относительно ψ_2, ψ_3 :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_2}{d(x^2)^2} + \left(\lambda^2 e^{\frac{2x^2}{d}} - \hat{T}^2 \right) \psi_2 = 0, \\ \frac{d^2 \psi_3}{d(x^3)^2} + \hat{T}^2 \psi_3 = 0 \end{cases}$$

где \hat{T}^2 – собственное значение энергии азимутального колебания ψ_3 (постоянная разделения).

Первое из этих уравнений представляется в виде

$$\frac{d^2 \psi_2}{d(x^2)^2} + \left[\left(\lambda^2 - \hat{T}^2 \right) - \tilde{U}(x^2) \right] \psi_2 = 0 \quad (2)$$

где $\tilde{U} = \lambda^2 \left(1 - e^{\frac{2x^2}{d}} \right) = \lambda^2 \left(1 - \frac{\zeta^2}{d^2} \right)$ имеет смысл геометрического потенциала, а $K^2 = \lambda^2 - \hat{T}^2$ – собственного значения энергии радиального колебания.

Зависимость $\tilde{U}(\tau)$ и собственные значения энергии λ^2 и K^2 колебаний в замкнутой круговой области с границей при $\tau = d$ (за пределами которой предполагается, что $\psi_2 = \psi_3 = 0$) показаны на рис. 19.

Как видим, в рассматриваемом случае смысловое содержание геометрического потенциала $\tilde{U}(\tau)$ совпадает с данным нами выше.

Уравнение (2) легко преобразовать к уравнению (1), записанному для радиальной координаты с неизменным масштабом. Для этого следует произвести замену $x^2 = d \cdot \ln(\tau/d)$. В результате получим уравнение

$$\frac{d^2 \Psi_2}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\Psi_2}{d\tau} + \left(\lambda^2 - \frac{\hat{T}^2 d^2}{\tau^2} \right) \Psi_2 = 0,$$

которое совпадает с уравнением (1), поскольку $\hat{T}d = T$.

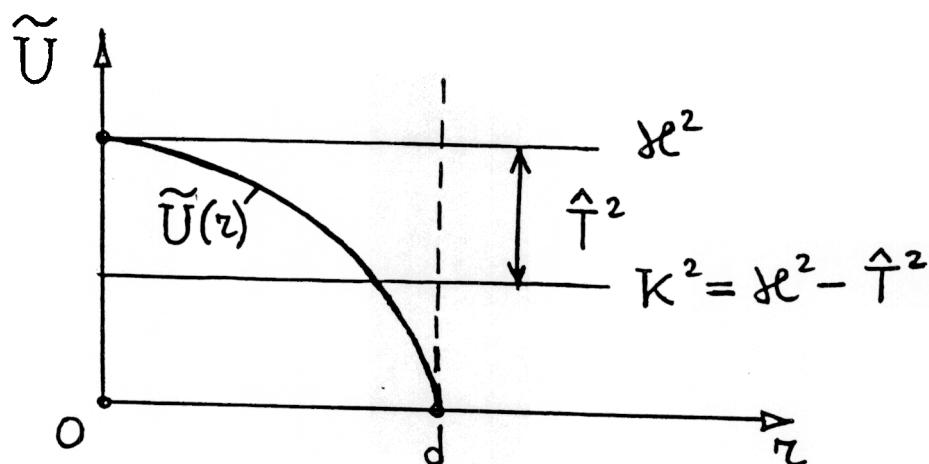


Рис. 19.

В связи с этим интересно заметить, что в уравнении (2) учтены действия как геометрического потенциала, так и центробежного потенциала $U_{ц.б.}$, которым соответствуют слагаемые $\frac{1}{\tau} \frac{d\Psi_2}{d\tau}$ и $(-\hat{T}^2 \Psi_2 / \tau^2)$ в уравнении (1). Однако структура уравнения (2) значительно проще и нагляднее структуры уравнения (1). Ниже будем анализировать радиальную структуру поля лазерного излучения в соответствии с рассмотренными выше случаями (а), (б) и (с).

Подведем предварительные итоги.

Движение радиальной составляющей поперечной структуры волнового поля в резонаторе с цилиндрической осевой симметрией происходит в четырех потенциальных полях, имеющих различную физическую природу. Они характеризуются следующими введенными выше потенциалами:

- 1) резонаторным потенциалом U_p ,
- 2) дифракционным потенциалом U_d ,
- 3) геометрическим потенциалом U_g ,
- 4) центробежным потенциалом $U_{ц.б.}$.

На оси резонатора любое радиальное колебание волнового поля с собственным значением энергии K^2 должно удовлетворять условию

$$K^2 - U_p - U_g - U_r - U_{\text{ц.б.}} = 0.$$

Оно гарантирует равенство нулю скорости составных волн энергии радиального колебания на оптической оси резонатора.

Это условие можно использовать для определения радиальной зависимости $\rho(\tau)$ амплитуды радиальной волны собственного колебания в окрестности $\tau = 0$. Например, по заданному собственному значению K^2 и функциям $U_p, U_r, U_{\text{ц.б.}}$ от τ в окрестности $\tau = 0$, из условия

$$U_g = - \frac{\Delta\rho}{\rho} = K^2 - U_p - U_r - U_{\text{ц.б.}}$$

интегрированием можно получить требуемую информацию о $\rho(\tau)$ в этой окрестности.

Отсюда, в частности, следует интересный результат. В случае возбужденного азимутального колебания, т.е. при существовании $U_{\text{ц.б.}} = (\tau/\zeta)^2$ с $T \neq 0$ и при конечных значениях $K, U_p, U_r, \Delta\rho$, легко заметить, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho = 0 \quad \text{и} \quad \Delta\rho > 0.$$

Этот результат имеет общий характер. В его справедливости легко убедиться, например, анализируя собственные функции радиальных колебаний поля, которые хорошо известны в цилиндрическом резонаторе.

Координатная зависимость фаз $\Psi_{\pm}(\tau)$ встречных волн собственного радиального колебания поля в резонаторе с цилиндрической симметрией определяется из решения уравнения

$$\left(\frac{d\Psi_{\pm}}{d\tau} \right)^2 = K^2 - U_p(\tau) - U_g(\tau) - U_r(\tau) - U_{\text{ц.б.}}(\tau)$$

Это уравнение легко физически интерпретируется и пригодно для качественного анализа фазовой структуры собственных функций $\Psi_2(\tau)$ поля в рассматриваемых нами резонаторах с цилиндрической осевой симметрией.

Зависимости $\Psi_{\pm}(\tau)$ должны также удовлетворять условиям

$$2 \int_0^\infty \Psi_{\pm n}(\tau) d\tau = \pi n, \quad (n=1,2,\dots),$$

где индекс n в $\Psi_{\pm n}$ означает номер собственного колебания.

Другой важный эффект, который мы примем во внимание, заключается в связи между встречными волнами Ψ_{2+} собственного радиального колебания $\Psi_2 = \Psi_{2+} + \Psi_{2-}$ при их рассеянии на потенциале

$$\hat{V}(\tau) = U_p(\tau) + U_r(\tau) + U_{\text{ц.б.}}(\tau)$$

Этот эффект описывается системой дифференциальных уравнений относительно связанных между собой волн ψ_{2+} и ψ_{2-} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Psi_{2+} + K^2 \Psi_{2+} = \frac{1}{2} \hat{V}(r) (\Psi_{2+} + \Psi_{2-}), \\ \Delta \Psi_{2-} + K^2 \Psi_{2-} = \frac{1}{2} \hat{V}(r) (\Psi_{2+} - \Psi_{2-}). \end{array} \right.$$

Сумма этих уравнений – это обычное уравнение Шредингера

$$\Delta \Psi_2 + (K^2 - \hat{V}(r)) \Psi_2 = 0,$$

которое не противоречит изложенным нами выше представлениям.

Таковы основные физические понятия, объекты и процессы, которые мы будем использовать при описании радиальной структуры поля лазерного излучения внутри резонаторов.

Описание азимутальной структуры поля не вызывает затруднений и мы его проводить не будем.

Теперь изложим основу физического понимания поперечной структуры поля лазерного излучения за пределами резонатора (за его продольными границами).

В рассматриваемых системах мы также будем использовать терминологию введенных выше четырех потенциалов U_p , U_g , U_r , $U_{ц.б.}$. (В системе с резонатором из плоских прямоугольных зеркал $U_r = U_{ц.б.} = 0$). Отличие будет заключаться только в локальной форме понимания смысла потенциала U_p . Теперь мы определим его в виде

$$V = k_o^2 (g^4 - 1)$$

где g^4 – компонента метрического тензора, ассоциирующаяся с продольной нормальной координатой x^1 .

Как уже отмечалось выше, анализ поперечной структуры поля лазерного излучения будем проводить в координатной системе, геометрия которой ассоциируется с геометрией фазовых фронтов продольной волны.

Движение поперечной структуры волнового поля за пределами резонатора определяется нарушением баланса между четырьмя потенциалами V , U_r , U_g , $U_{ц.б.}$ (в случае системы с плоскими прямоугольными зеркалами $U_r = U_{ц.б.} = 0$), который имел место внутри резонатора. Основным фактором при этом является изменение вдоль оси z поперечной координатной зависимости потенциала V (предполагается, что зеркала тонкие). Из анализа рисунков 7-10 видно, что законы изменения этой зависимости в ближней зоне имеют весьма сложную форму. Однако в дальней зоне все они приобретают простейший вид $V=0$ (там $g^4 = 1$).

Поскольку в ближней зоне зависимость потенциала U_p от поперечной координаты имела вид ямы и, следовательно, существовала связь между встречными волнами поперечного колебания (например, радиального, но не

азимутального), то, при переходе в дальнюю зону, эта связь может нарушаться. Она нарушается полностью в случае системы с резонатором из плоских прямоугольных зеркал. В этом последнем случае поперечные волны Ψ_{2+} , Ψ_{2-} , Ψ_{3+} , Ψ_3 распространяются в дальней зоне независимо друг от друга и имеют вид пространственных "поперечных" импульсов (см. ниже).

В системах с цилиндрической осевой симметрией связь между встречными радиальными волнами в дальней зоне будет существовать, если принять во внимание действие геометрического потенциала U_r . При этом необходимо различать два случая $U_{ц.б.} = 0$ и $U_{ц.б.} \neq 0$. В случае $U_{ц.б.} \neq 0$ эта связь незначительна. Мы подробно исследуем эти случаи позднее.

Изложенных выше физических представлений достаточно для анализа поперечной волновой структуры поля лазерного излучения в пяти выбранных нами системах, показанных на рис. 1, и её симметрийного изучения. Далее последовательно рассмотрим её в каждой из этих систем.

Предварительно сделаем одно важное замечание и введем два значительно упрощающих анализ допущения.

Подробный анализ проблемы движения вдоль x^1 поперечных волновых функций поля лазерного излучения, проводимый в рамках представлений об эволюции потенциала $V(x^2, x^3)$ вдоль x^1 , как легко заметить из рис. 7-10, должен привести к открытию нескольких интересных физических эффектов, определяющих важные закономерности движения вдоль x^1 поперечных волновых функций. Это обстоятельство должно являться побуждающим мотивом в дальнейших физических исследованиях рассматриваемой проблемы.

Мы, однако, на достигнутом уровне понимания её сущности, ограничимся ниже её приближенным, упрощенным, качественным анализом, который будет содержать в себе лишь отдельные характерные свойства исследуемого объекта, не претендую при этом на полноту выражения посредством этих свойств физической картины решения проблемы в целом.

Первое упрощающее анализ допущение заключается в субъективном выборе в качестве предмета изучения из большого набора возможных поперечных собственных колебаний поля только одного или двух представителей.

Второе упрощающее анализ допущение заключается в специфике способа изучения выбранных колебаний. Сначала, на качественном уровне, мы изобразим собственную функцию ψ_2 выбранного колебания в резонаторе. Затем на качественном уровне попытаемся определить волновую функцию $\hat{\psi}_2$ этого колебания в дальней зоне. При этом мы будем использовать очень грубое допущение, полагая, что предельный переход $\psi_2 \rightarrow \hat{\psi}_2$ осуществляется путем исчезновения потенциальной функции V за пределами продольных границ резонатора.

В этой ситуации при движении вдоль x^1 происходит распад поперечного колебания ψ_2 , обусловленный дифракционным потенциалом U_d , учет которого в конечном счете и приводит к некоторой установившейся при $x^1 \rightarrow \pm \infty$ поперечной волновой структуре, определенной с точностью до

поперечного растяжения. Такая волновая структура ассоциируется с волновым полем поперечного колебания $\hat{\psi}_2$ в дальней зоне.

Необходимо отметить, что такой метод определения $\hat{\psi}_2$ по ψ_2 находится в качественном согласии с экспериментальными наблюдениями поперечной структуры поля излучения в дальней зоне в случае лазера с плоскими прямоугольными зеркалами.

Таким образом, изучению подлежат свойства волновых функций ψ_2 и $\hat{\psi}_2$ в двух областях пространства – внутри резонатора и в дальней зоне.

Такова сущность двух упрощающих допущений, которые будут использоваться в последующем анализе.

5.2. Резонатор с плоскими прямоугольными зеркалами

Рассмотрим поперечные колебания ψ_2, ψ_3 в резонаторе с плоскими прямоугольными зеркалами, геометрия которого показана на рис. 20а.

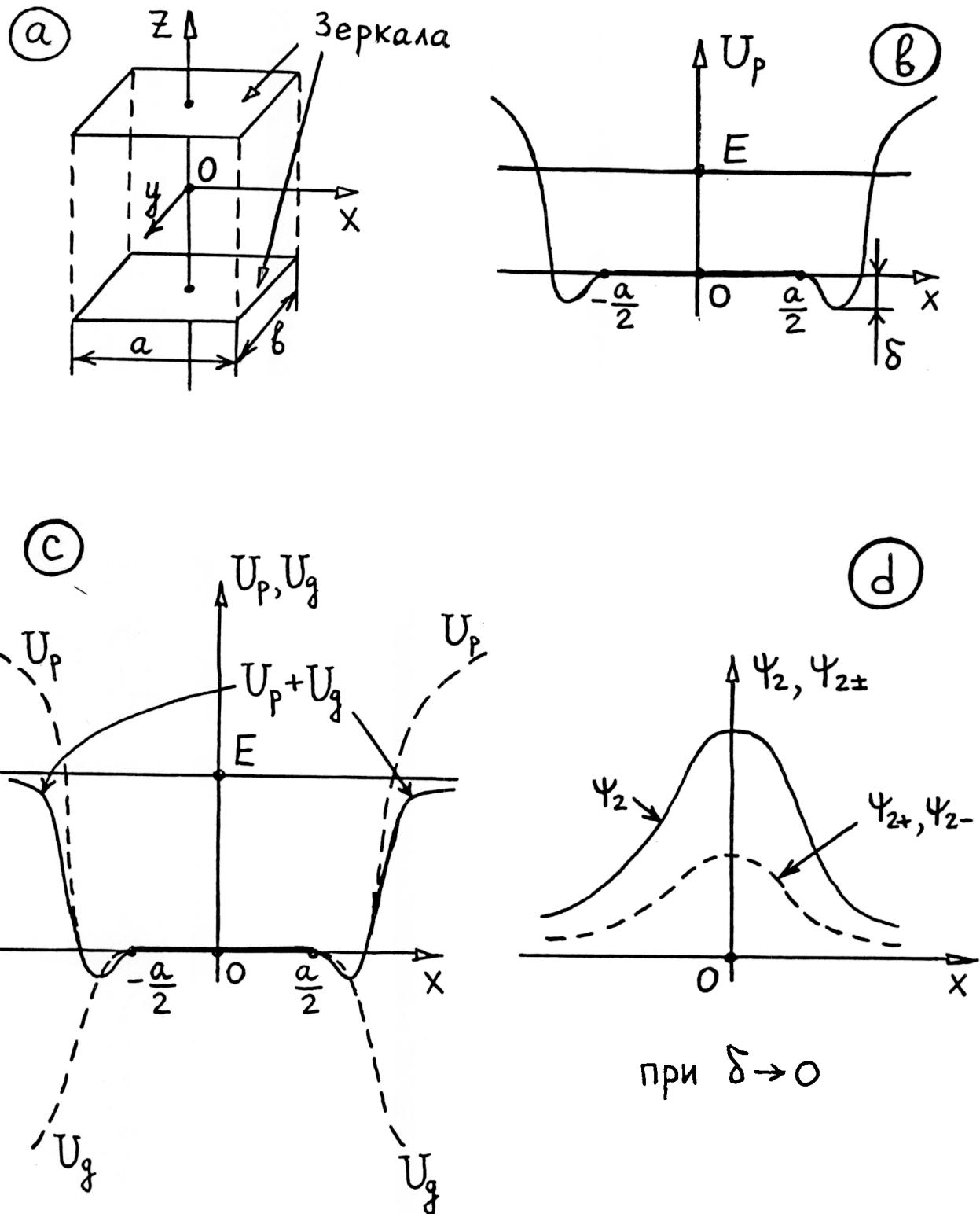


Рис.20.

Колебание ψ_2 имеет место вдоль координаты x , а колебание ψ_3 – вдоль y . В целом поперечное колебание имеет волновую функцию $\psi_2(x)\psi_3(y)$. В силу симметрии рассматриваемой системы разумно сначала рассмотреть структуру только одной из двух волновых функций. Выберем для определенности $\psi_2(x)$. Резонаторный потенциал U_p колебания вдоль x , в соответствии с рис. 7, изображен на рис. 20б. Ограничимся выбором низшего (основного) собственного колебания ψ_2 в этом потенциале. Пусть E – собственное значение энергии этого колебания. Движение встречных волн $\psi_{2\pm}$ колебания ψ_2 таких, что $\psi_2 = \psi_{2+} + \psi_{2-}$ будет происходить в потенциале $U_p + U_g$, причем зависимости $U_p(x)$ и $U_g(x)$ изображены на рис. 20с, а зависимости $\psi_2(x)$, $\psi_{2\pm}(x)$ – на рис. 20д.

Аналогичная картина имеет место и для основного колебания вдоль y .

Теперь определим структуру такого поперечного колебания поля в дальней зоне.

За пределами продольных границ резонатора, в силу сделанного выше допущения, $V = 0$ и движение $\psi_2(x)$ по x^1 будет определяться только дифракцией U_g . Такое движение обладает двумя свойствами.

а). Поскольку $V = 0$, то связи между ψ_{2+} и ψ_{2-} (рассеяния встречных волн ψ_{2+} и ψ_{2-} на потенциале U_p) не будет и они будут распространяться независимо. Имеется распад ψ_2 на сумму двух независимых волн ψ_{2+} и ψ_{2-} с волновыми числами $k_x \approx \pm \pi/\alpha$.

б). Сначала монотонные в области $0 \leq x < \infty$ функции $\psi_{2\pm}(x)$, в силу проявления дифракционного потенциала U_g , теперь для каждой из независимых волн $\psi_{2\pm}$ в отдельности, становятся немонотонными. Их крылья становятся быстроосциллирующими функциями от x . В силу проявления U_g , волны $\psi_{2\pm}(x)$ в процессе движения вдоль x^1 растягиваются в поперечном направлении x .

Эти свойства изображены на рис. 21.

Из этого рисунка видно, что в дальней зоне должна наблюдаться структура двух пространственных поперечных импульсов $\hat{\psi}_{2\pm}(x)$ с сильно немонотонной структурой. Характерные ширины импульсов пропорциональны $1/a$, так же, как и их угловое расстояние $\Theta = \frac{\Delta x}{R} \sim \frac{1}{a}$, где Δx – поперечное расстояние между импульсами, R – расстояние от резонатора.

Похожая картина должна наблюдаться и в отношении распада основного колебания ψ_3 . При этом координата x заменяется на y , a – на b , Δx – на Δy , $\psi_{2\pm}$ – на $\hat{\psi}_{3\pm}$, $\hat{\psi}_{2\pm}$ – на $\hat{\psi}_{3\pm}$.

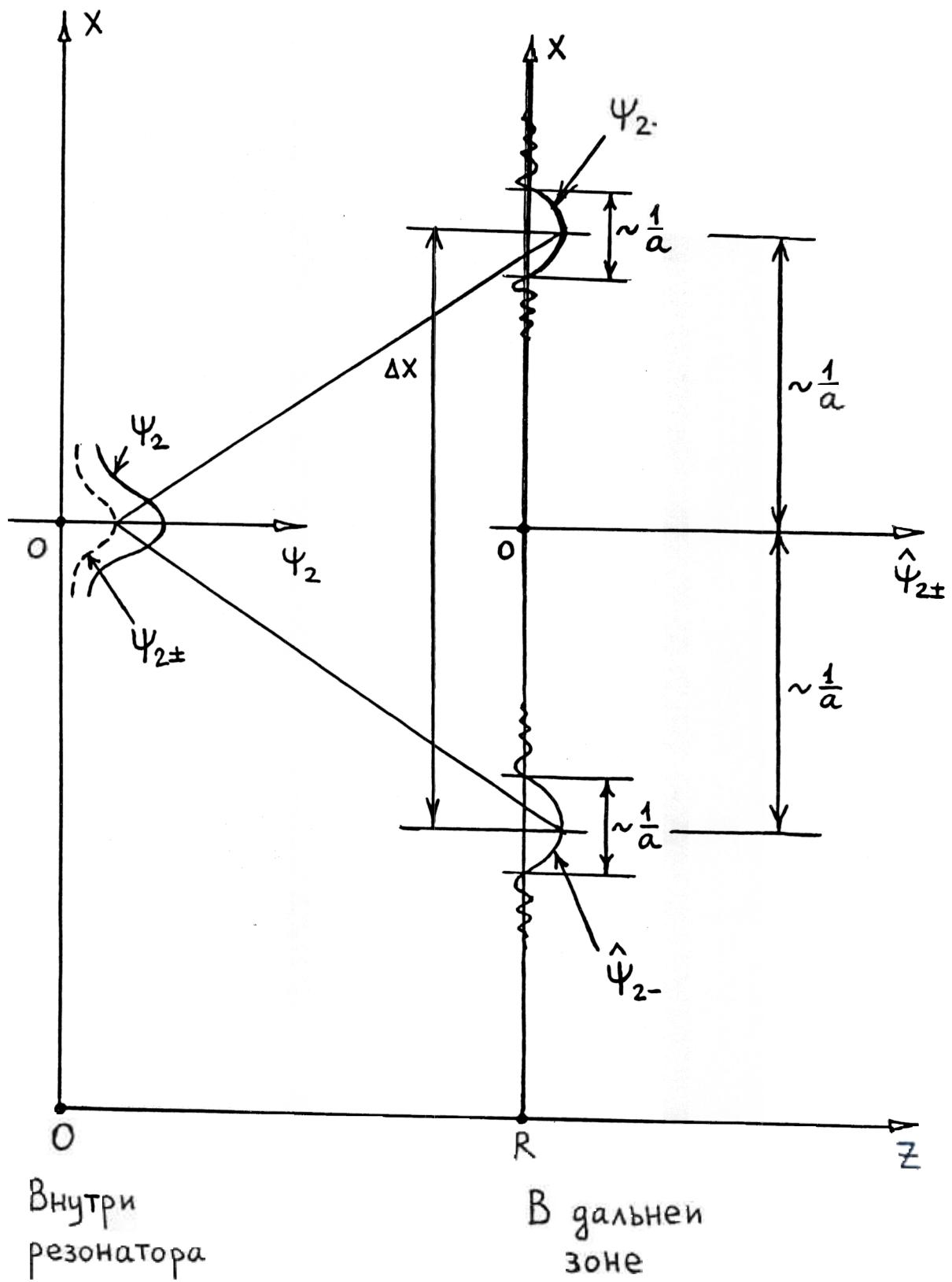


Рис 21

На рис. 22 в плоскости (x, y) изображены линии уровня значений величины плотности энергии $\hat{J}(x, y) = |\hat{\Psi}_2(x) \cdot \hat{\Psi}_3(y)|^2$ поперечного колебания поля лазерного излучения в дальней зоне для случая, когда $a \ll b$ и в резонаторе возбуждены только основные (нижние по энергии) поперечные колебания поля $\psi_2(x)$ и $\psi_3(y)$.

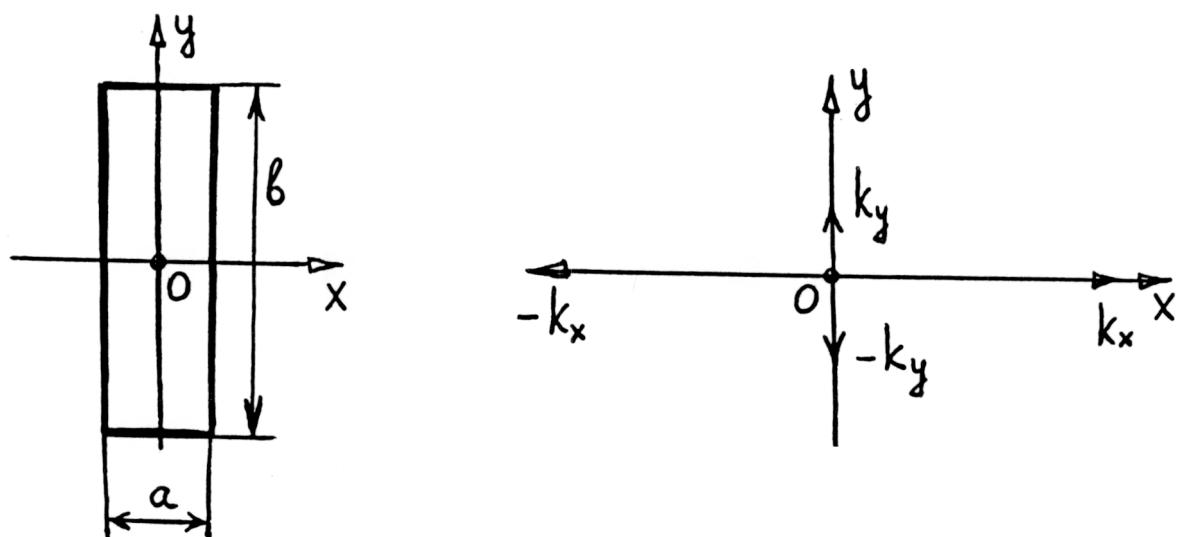
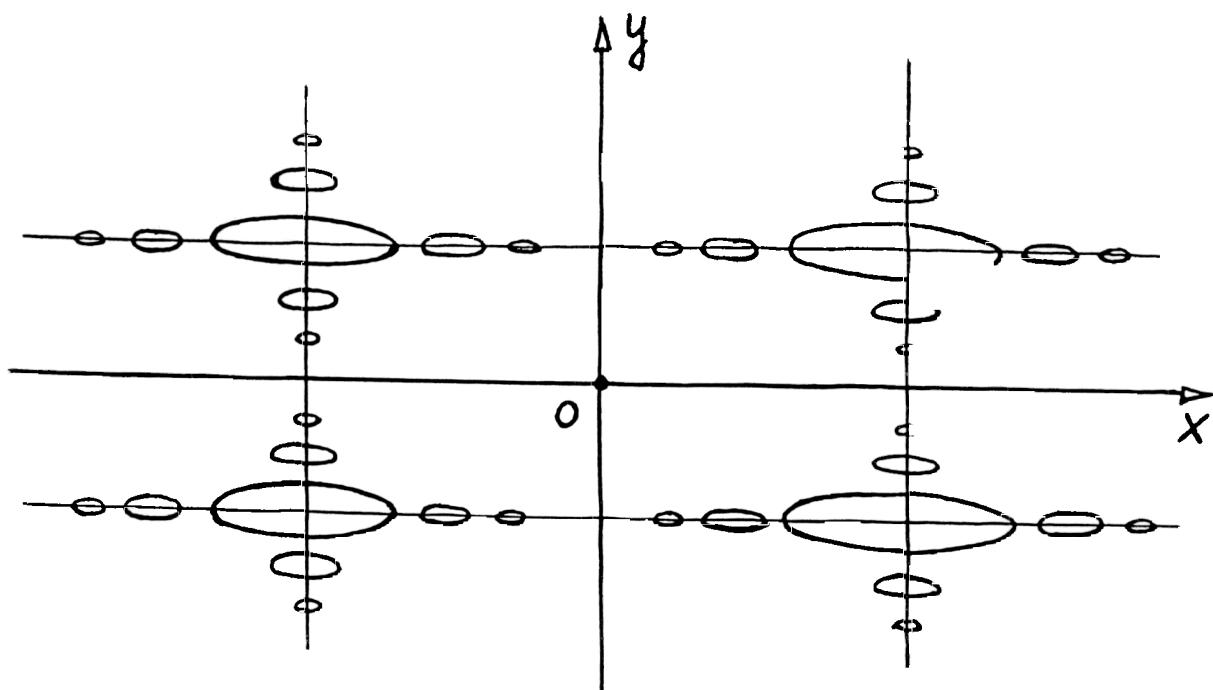


Рис. 22

Из этого рисунка видно, что в целом структура плотности энергии $|\hat{\Psi}_2 \cdot \hat{\Psi}_3|^2$ поля в дальней зоне представляет собой систему из четырех пространственных импульсов с осциллирующими крыльями и расположенных симметрично относительно осей ox и oy в плоскости (x, y) . Можно заметить, что, как показано на рис. 22, она строится из начальных представлений о нормальных пространственных импульсах с поперечными волновыми векторами $\pm k_x$ и $\pm k_y$, соответствующими двум выбранным поперечным собственным колебаниям ψ_2 и ψ_3 поля в резонаторе.

Таково частное представление о структуре поперечных колебаний поля лазерного излучения в системе с резонатором, состоящим из плоских прямоугольных зеркал.

5.3.Цилиндрический резонатор.

Рассмотрим поперечные колебания поля в цилиндрическом резонаторе с плоскими зеркалами, имеющими круглые границы радиуса R . Сначала проанализируем случай, когда в этом резонаторе возбуждено основное радиальное колебание, а азимутальное колебание не возбуждено. На рис. 23а показаны зависимость резонаторного потенциала U_p от радиуса τ и собственное значение K^2 энергии основного радиального колебания.

На рис. 23б изображены зависимости от радиуса τ волновой функции ψ_2 и ее амплитуды ρ_2 для основного радиального колебания поля в резонаторе. Баланс потенциалов $U_p(\tau)$, $U_g(\tau)$, $U_r(\tau)$ внутри резонатора, соответствующий зависимостям $\psi_2(\tau)$, $\rho_2(\tau)$, показанным на рис. 23б, изображен на рис. 23с.

Теперь определим волновую функцию $\hat{\psi}_2$ этого колебания в дальней зоне, положив $V = 0$ за пределами продольных границ резонатора. Из рис. 23с видно, что движение волновой функции $\psi_2(\tau)$ вдоль x^1 будет определяться эволюцией двух потенциалов U_g и U_r . За пределами продольных границ резонатора ($U_p = 0$) оба эти потенциала будут приводить к осциллирующей зависимости крыльев волновой функции от τ .

Потенциал $U_r(\tau)$ определяет связь между составными встречными волнами радиального колебания. Он является причиной отсутствия распада колебания за пределами продольных границ резонатора на две независимые компоненты, как это было в случае системы с резонатором из плоских прямоугольных зеркал.

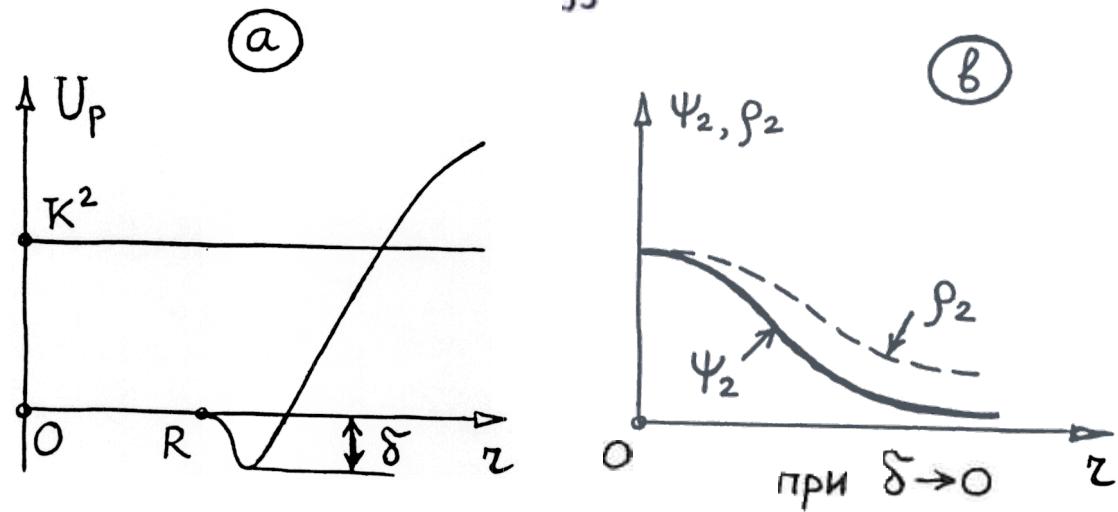


Рис 23

В целом, легко заметить, что угловая зависимость радиального колебания $\hat{\psi}_2(\theta)$ в дальней зоне должна иметь вид, показанный на рис. 24а. ($\theta = \zeta / L$, где L – расстояние от резонатора до точки на оси ζ , где расположена поперечная плоскость наблюдения).

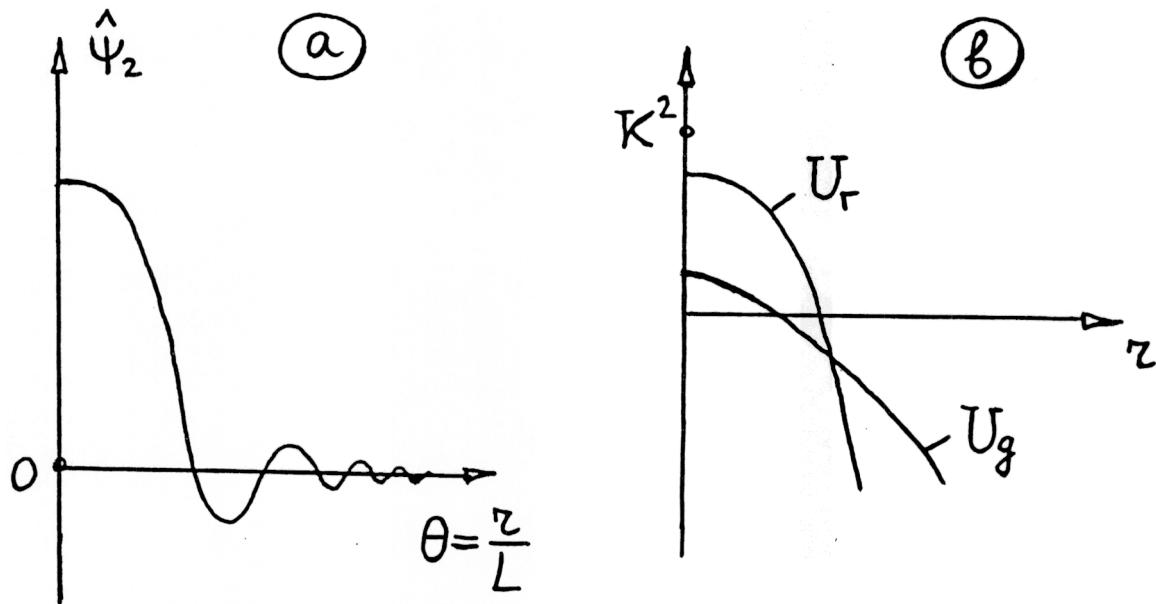


Рис. 24

Типичная зависимость от ζ потенциалов $U_g(\zeta)$ и $U_r(\zeta)$ в дальней зоне показана на рис. 24б. Центральная область колебания $\hat{\psi}_2$ по мере его распространения в дальней зоне будет растягиваться в поперечном направлении (вдоль ζ).

Таково представление о поперечной структуре поля в случае возбужденного в резонаторе единственного основного радиального колебания.

Теперь рассмотрим случай возбужденного основного радиального и первого азимутального колебаний внутри цилиндрического резонатора.

Проанализируем только структуру радиального колебания ψ_2 (и $\hat{\psi}_2$).

Функции $\psi_2(\zeta)$ и $\rho_2(\zeta)$ внутри резонатора изображены на рис. 25а, а радиальные зависимости потенциалов U_p , U_g , U_r , $U_{ц.б.}$ – на рис. 25б.

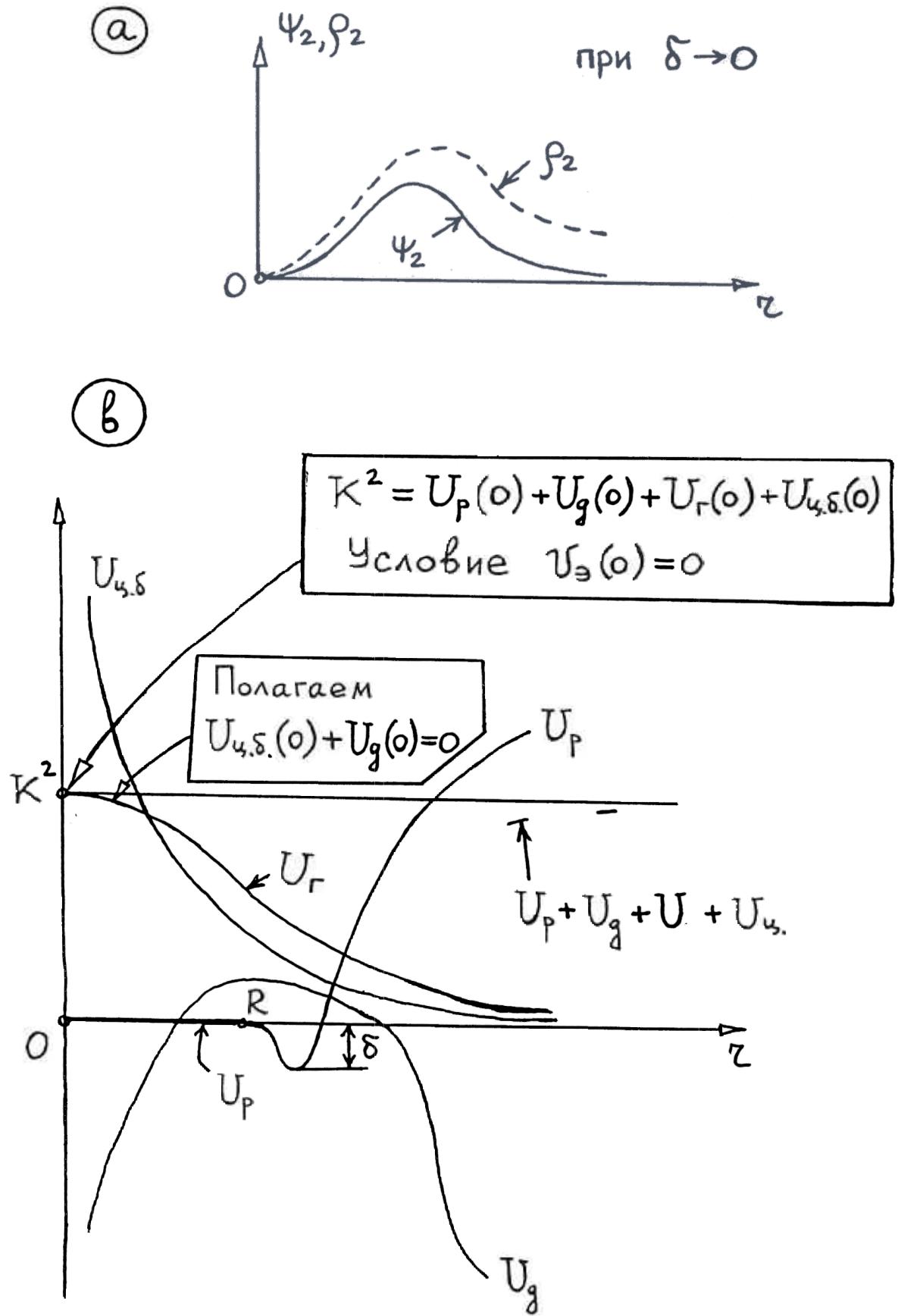


Рис 25

Теперь определим $\hat{\psi}_2$ в дальней зоне.

Поскольку, по допущению, за пределами продольных границ резонатора $V = 0$, то движение $\psi_2(\tau)$ будет происходить в потенциальном поле $U_g(\tau)$, $U_r(\tau)$, $U_{\text{ц.б.}}(\tau)$. Вблизи продольных границ резонатора это поле показано на рис. 26.

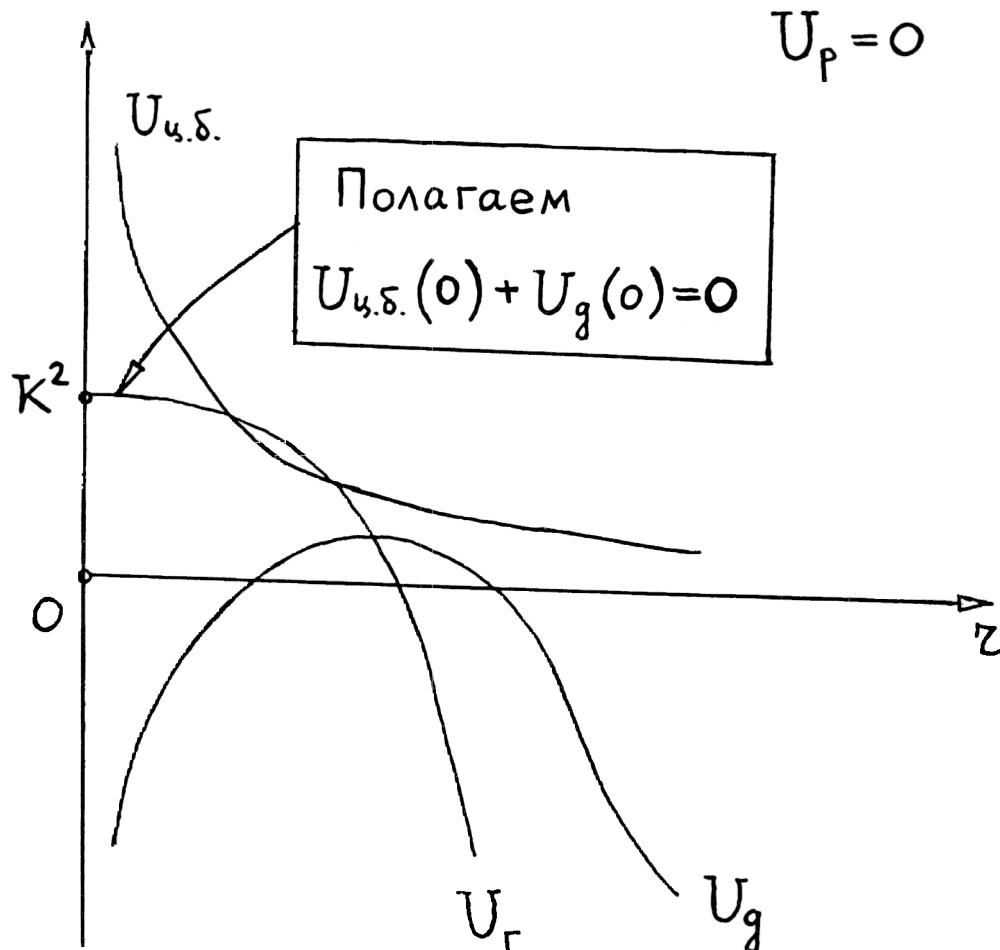


Рис. 26.

Отметим, что в резонаторе потенциальное поле $U_p(\tau)$ "удерживало" колебание ψ_2 от распада в радиальном направлении. С исчезновением U_p это свойство оказывается утраченным. Однако остается свойство связи между встречными радиальными волнами за счет рассеяния на потенциале $U_r(\tau) + U_{\text{ц.б.}}(\tau)$. С учетом этого фактора движение их амплитуд $\beta_{2\pm}(\tau)$ вдоль x^1 показано на рис. 27.

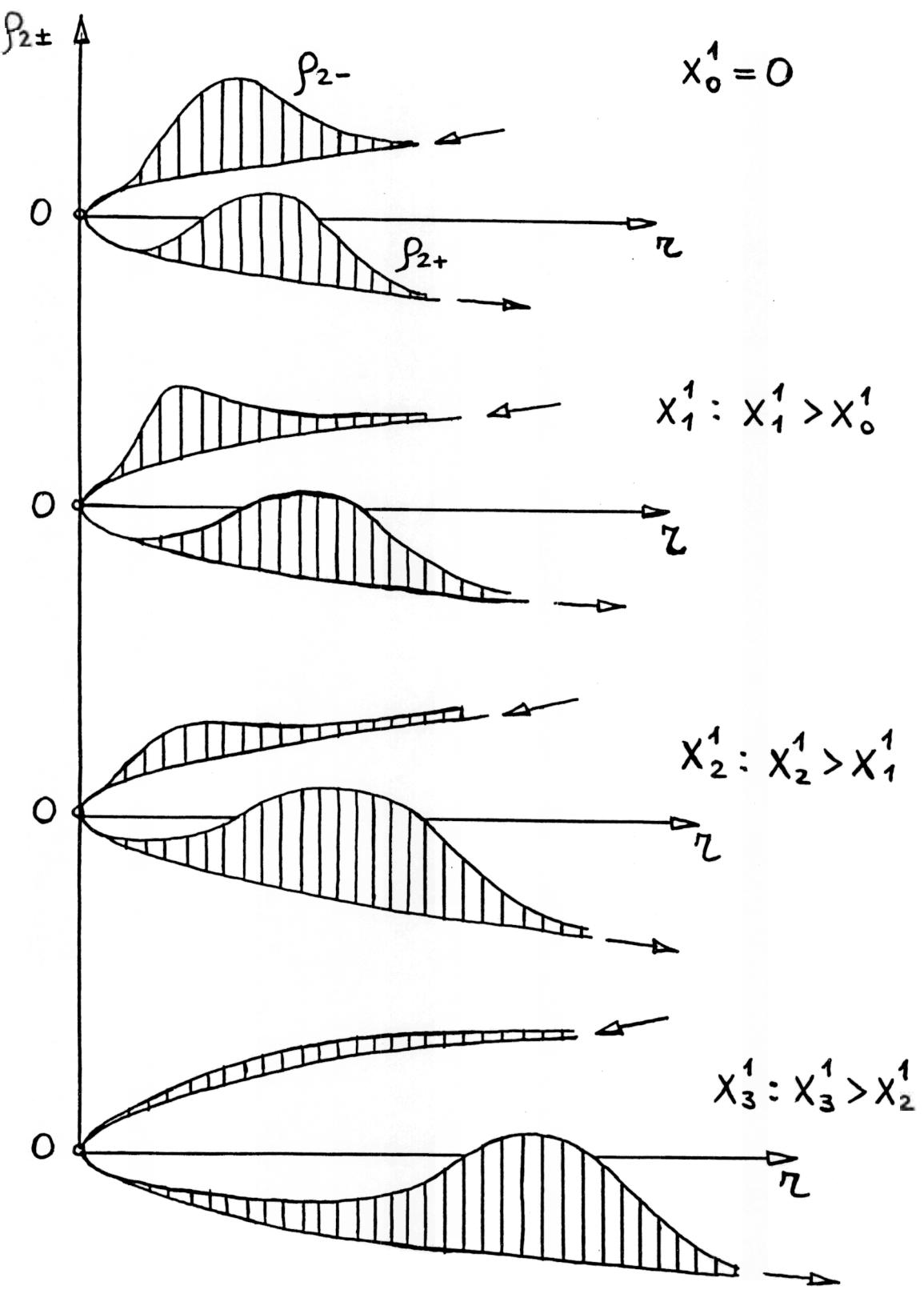


Рис 27

Из этого рисунка видно, что эффект указанной связи между встречными радиальными волнами приводит к перекачке энергии из волны с ρ_{2-} в волну с ρ_{2+} , т.е. к распределенному в пространстве отражению волны Ψ_{2-} от приосевой области в волну Ψ_{2+} .

В силу отмеченных свойств, зависимость $\hat{\Psi}_2(\theta)$ будет иметь вид, показанный на рис. 28.

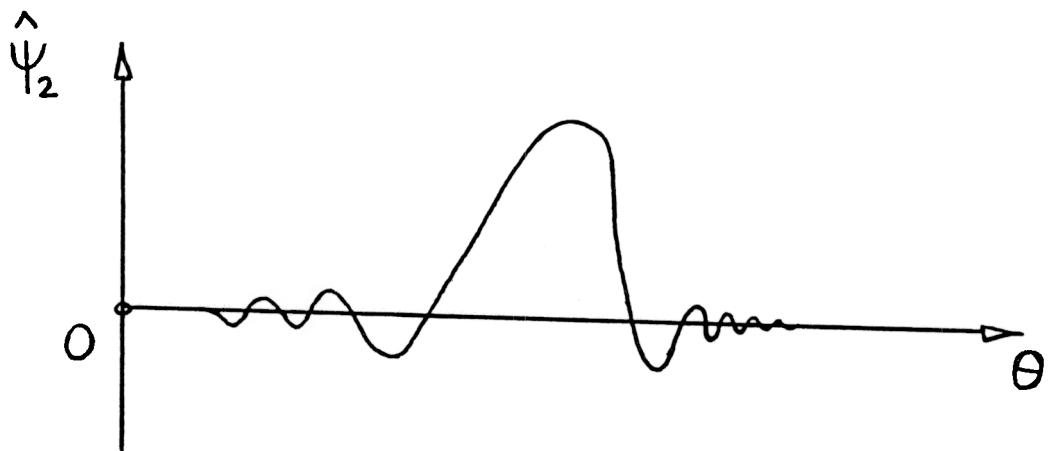


Рис. 28.

По существу, $\hat{\Psi}_2 = \hat{\Psi}_{2+} + \hat{\Psi}_{2-} \approx \hat{\Psi}_{2+}$, поскольку $\hat{\Psi}_{2-} \rightarrow 0$.

Таково частное представление о структуре поперечных колебаний поля лазерного излучения в системе с цилиндрическим резонатором.

5.4. Устойчивый конфокальный резонатор

Следующий объект исследования – поперечные колебания поля в устойчивом конфокальном резонаторе и за его пределами. Радиальная зависимость резонаторного потенциала $U_p(r)$, в соответствии с геометрией, изображенной на рис. 8, показана на рис. 29а.

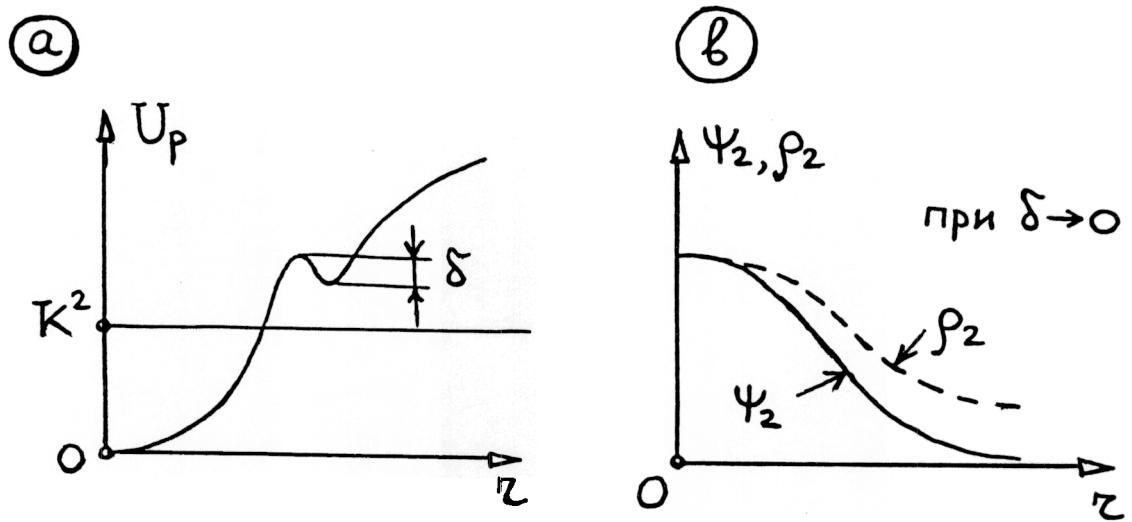


Рис. 29.

Сначала проанализируем случай возбужденного только одного, основного радиального колебания $\Psi_2(z)$, имеющего собственное значение энергии K^2 , показанное на рис. 29а. Радиальные зависимости волновой функции $\Psi_2(z)$ и ее амплитуды $\rho_2(z)$ изображены на рис. 29б. Зависимости потенциалов U_p , U_g , U_r от радиуса z показаны на рис. 30.

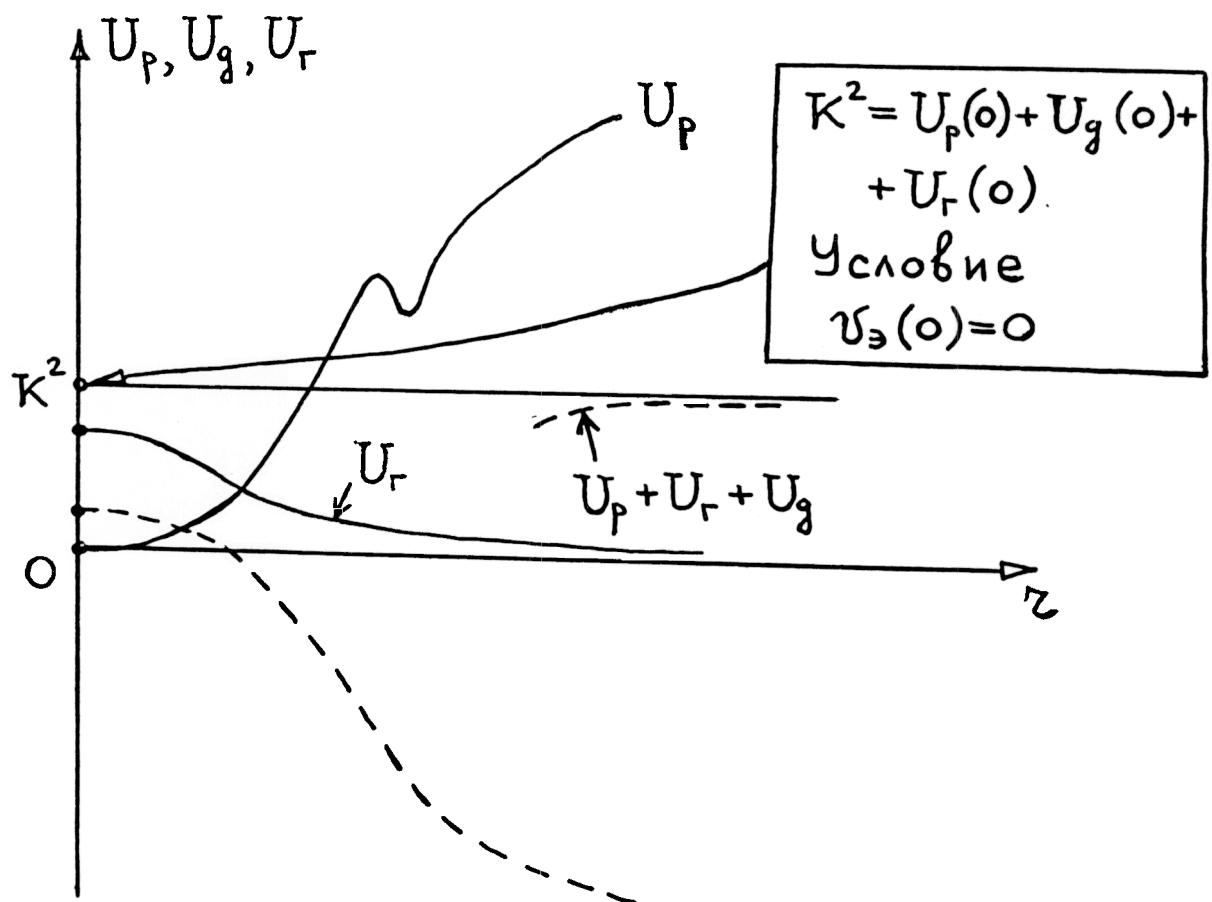


Рис. 30.

При анализе колебания в дальней зоне положим $V = 0$. Тогда движение волнового поля вдоль x^1 будет определяться только движением потенциалов $U_g(\zeta)$ и $U_r(\zeta)$ вдоль x^1 . Типичные зависимости этих потенциалов от ζ в плоскости наблюдения, пересекающей ось z в некоторой точке x^1 в дальней зоне, показаны на рис. 31а.

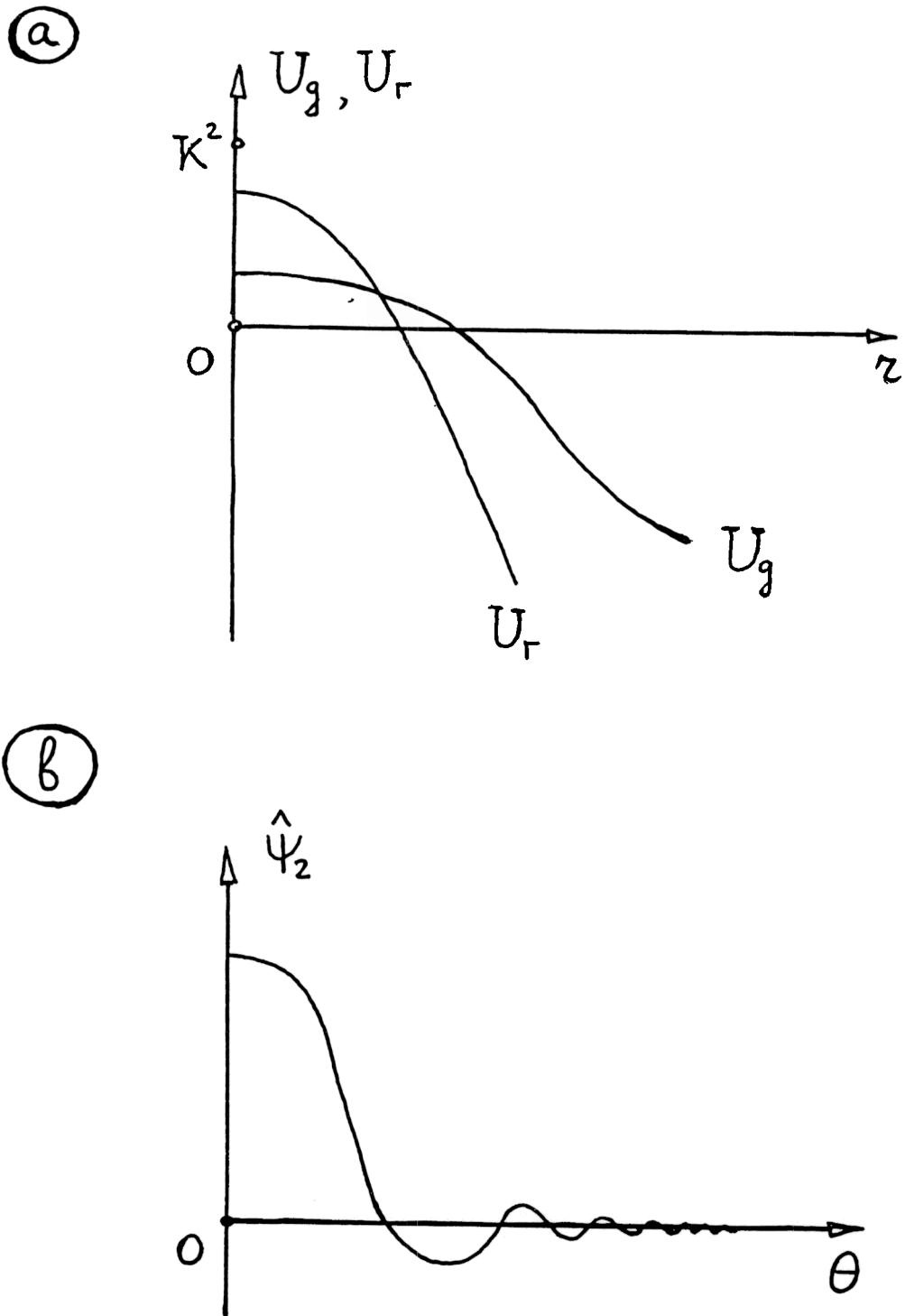


Рис. 31.

Следовательно, в дальней зоне будет иметь место зависимость $\hat{\Psi}_2(\theta)$, изображенная на рис. 31б.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда в резонаторе присутствует низшее по энергии поперечное колебание, состоящее из радиального и азимутального колебаний. Волновая функция $\Psi_2(z)$ и ее амплитуда $\rho_2(z)$ для радиального колебания в этом случае имеют вид, изображенный на рис. 32а.

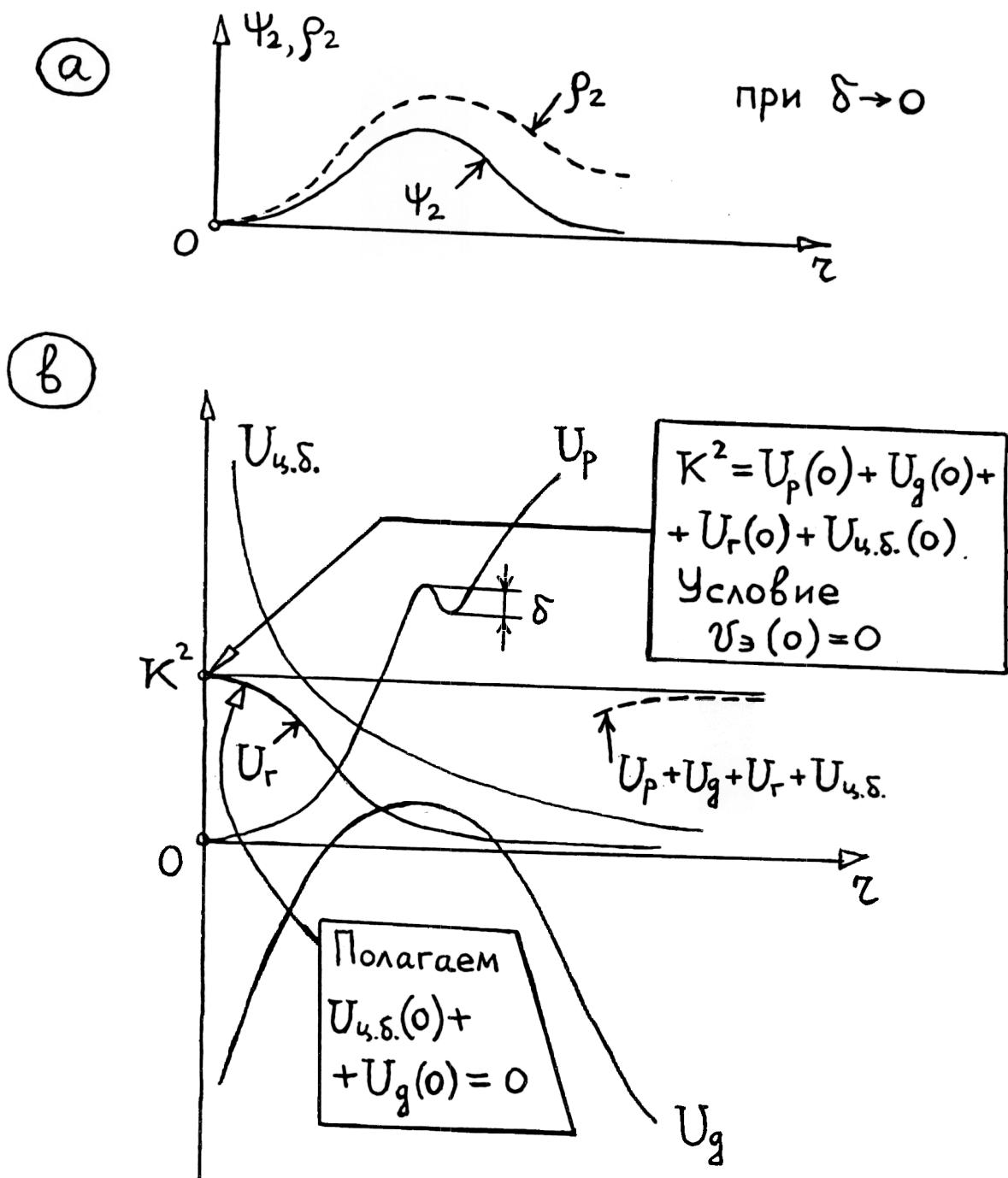


Рис. 32.

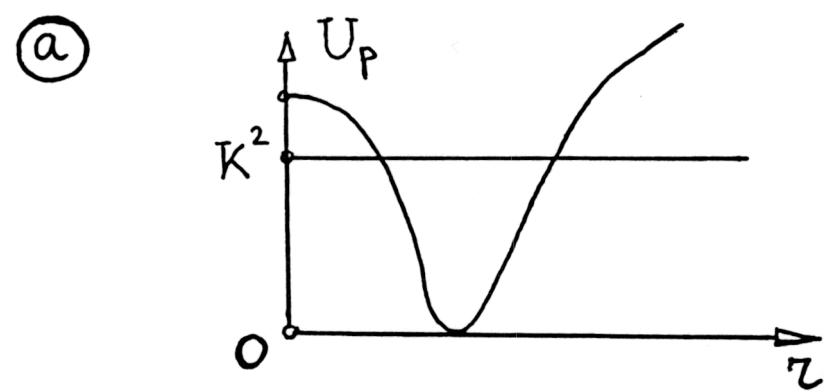
Они определены в потенциальном поле $U_p(\zeta)$, $U_g(\zeta)$, $U_r(\zeta)$, $U_{ц.б.}(\zeta)$, показанном на рис. 32б.

Рассматривая колебание $\hat{\Psi}_2(\theta)$ в дальней зоне ($V = 0$), замечаем аналогию с ситуацией, которую мы уже рассматривали при изучении соответствующего колебания в системе с цилиндрическим резонатором. На качественном уровне зависимость $\hat{\Psi}_2(\theta)$ должна быть такой же, какой она была в случае цилиндрического резонатора (см. рис. 28).

Таково частичное представление о структуре поперечных колебаний волнового поля в системе с устойчивым конфокальным резонатором.

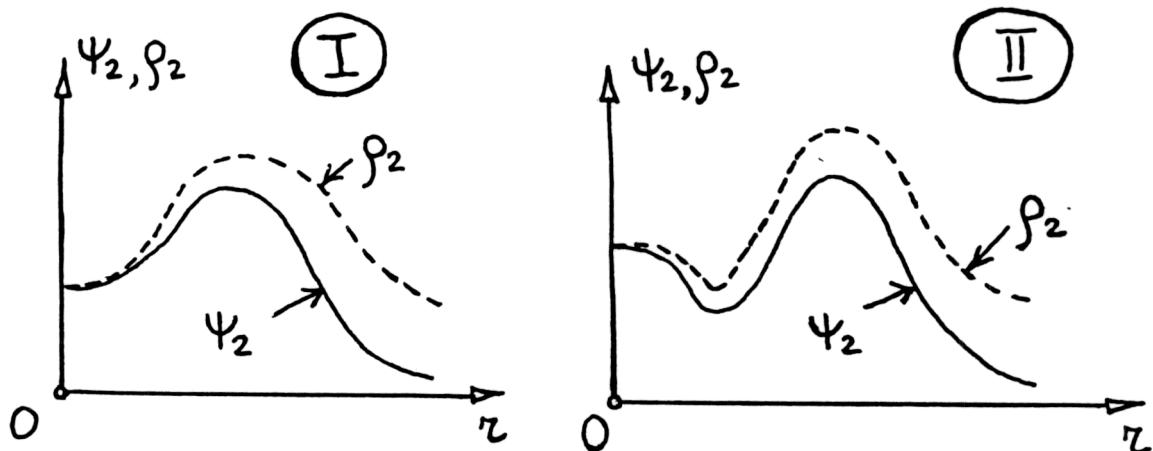
5.5. Резонатор с выпуклыми зеркалами

Следующий очень интересный объект исследования – структура поперечных колебаний волнового поля в системе с резонатором, имеющим выпуклые зеркала. В соответствии с рис. 9, зависимость резонаторного потенциала U_p от радиуса ζ изображена на рис. 33а.



(б)

Возможны два случая I и II



Ниже рассмотрим только случай I.

Рис. 33

Сначала проанализируем ситуацию возбужденного в резонаторе единственного радиального колебания, имеющего собственное значение энергии K^2 (см. рис. 33а) и соответствующие ему радиальные зависимости волновой функции ψ_2 и её амплитуды ρ_2 , изображенные на рис. 33б. Баланс потенциалов U_p , U_g , U_r в этой ситуации изображен на рис. 34.

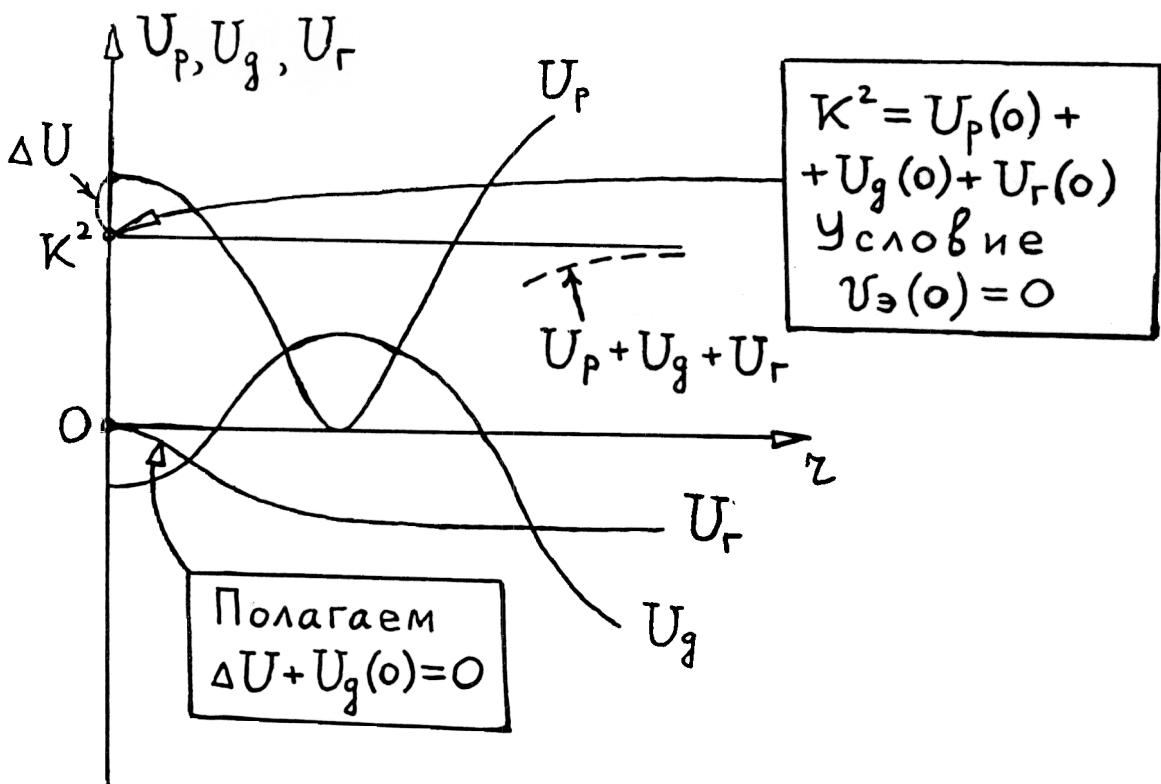


Рис. 34.

Определим волновую функцию $\hat{\psi}_2$ в дальней зоне. Для этого сначала рассмотрим движение ψ_2 на начальном этапе перехода, сразу после того, как положили $V = 0$. Видим, что на этом этапе колебание ψ_2 движется в двух потенциалах $U_g(z)$ и $U_r(z)$, изображенных на рис. 35.

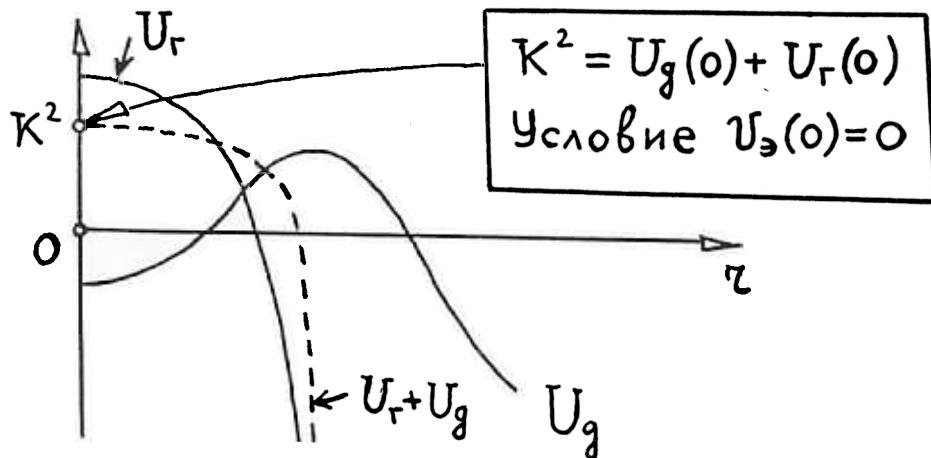


Рис. 35.

Из этого рисунка видно, что дифракционный потенциал U_g в центральной части колебания (при малых ζ) уравновешивается геометрическим потенциалом U_r . Поскольку там $(U_r + U_g)$ близко к K^2 , то движением в центральной области колебания можно пренебречь. Распад колебания при переходе из ближней зоны в дальнюю начинается с искажения его крыльев. Они начинают растягиваться и осциллировать по ζ . При переходе в дальнюю зону граница распада колебания постепенно перемещается к его центральной области. В области распада колебания необходимо принять во внимание связь между встречными волнами ψ_{2+} и ψ_{2-} колебания, точнее, перекачку энергии из ψ_{2-} в ψ_{2+} при рассеянии ψ_{2-} на потенциале U_r .

Таким образом, в дальней зоне должна наблюдаться волновая функция $\hat{\psi}_2(\theta)$, изображенная на рис. 36.

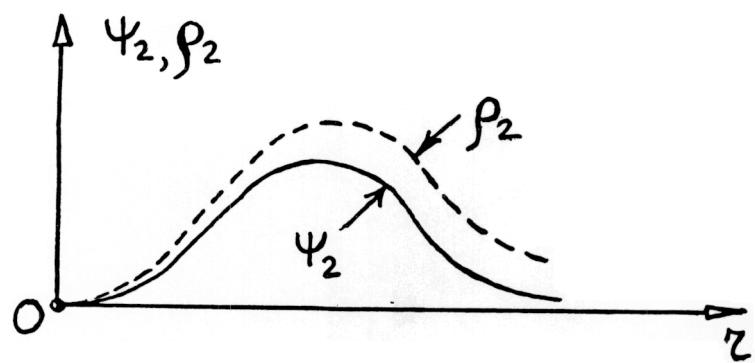


Рис. 36.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда в резонаторе возбуждено низшее по энергии поперечное колебание поля, состоящее из двух компонент – радиального и азимутального колебаний. В этой ситуации зависимости от ζ волновой функции ψ_2 радиального колебания и ее амплитуды ρ_2 изображены на рис. 37а.

Баланс потенциалов $U_p(\zeta)$, $U_g(\zeta)$, $U_r(\zeta)$, $U_{\text{а.з.}}(\zeta)$ приведен на рис. 37б.

(a)



(б)

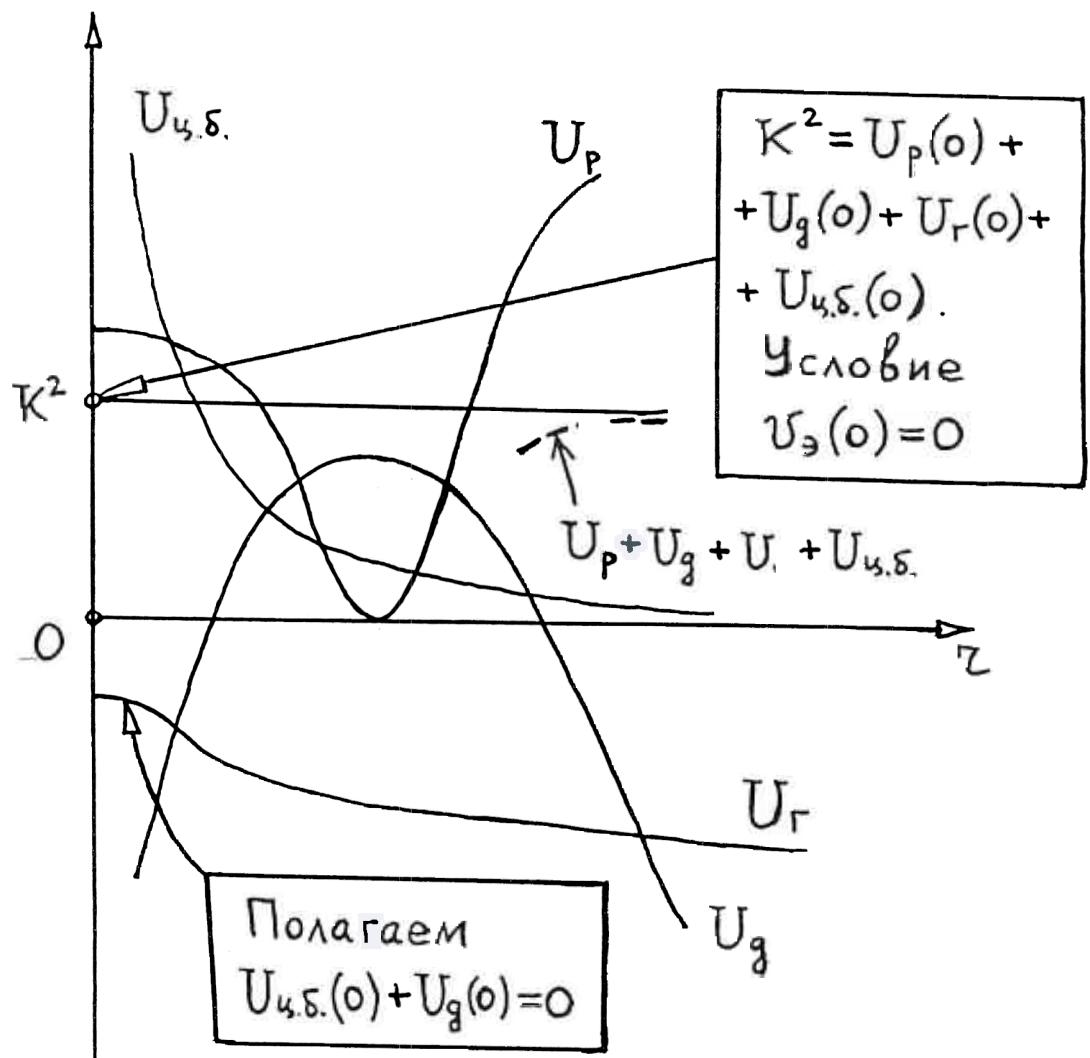


Рис. 37

Теперь определим волновую функцию $\hat{\Psi}_2(\theta)$ в дальней зоне. Для этого сначала заметим, что на начальном этапе перехода из ближней зоны в дальнюю ($U_p = V = 0$) колебание $\Psi_2(r)$ движется в поле потенциалов U_g , U_r , $U_{\text{ц.б.}}$, радиальные зависимости которых приведены на рис. 38.

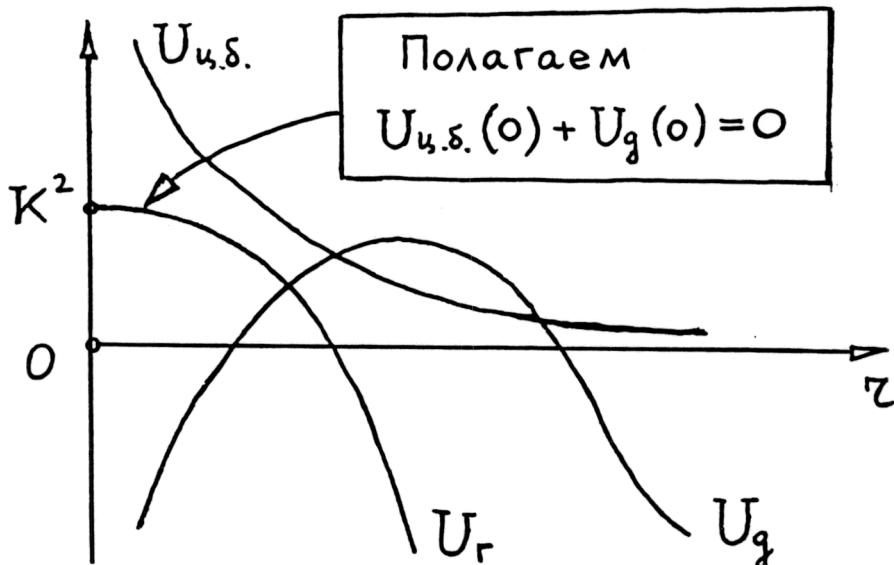


Рис. 38.

Изображенная на рис. 38 картина очень похожа на картину, которую мы уже рассматривали, когда анализировали колебания поля в системе с цилиндрическим резонатором (см. рис. 26). На качественном уровне восприятия обе эти картины аналогичны. Поэтому в данном случае зависимость $\hat{\Psi}_2(\theta)$ должна иметь вид, показанный на рис. 28.

Таково частное представление о структуре поперечных колебаний поля лазерного излучения в системе, содержащей резонатор из выпуклых зеркал.

5.6. Телескопический резонатор

Свойства поперечных колебаний поля в системе с телескопическим резонатором в используемом нами приближении эквивалентны свойствам таких колебаний поля в уже рассмотренной нами системе с резонатором, состоящим из выпуклых зеркал. В этом легко убедиться, заметив, что резонаторные потенциалы $U_p(r)$ для обоих типов этих резонаторов одинаковы (сравните рис. 9 и рис. 10).

5.7. Замечания

Выше нами был продемонстрирован метод физического анализа структуры поперечных колебаний поля лазерного излучения в выбранных пяти системах с резонаторами, имеющими различную геометрию. Он выгодно отличается от существующих сейчас методов численного анализа

подобных систем, начало применения которым было положено Фоксом и Ли [7] в 1961 году. Достоинством нашего метода является простота и физическая наглядность. Тем не менее, в научной лазернофизической литературе наш метод до настоящего времени не использовался. В отличие от существующих аналитических методов исследования структуры поперечных колебаний лазерного излучения, начало которым было положено Л.А.Вайнштейном [3] в 1966 году, как легко заметить, наш метод выделяется большей физической наглядностью и глубиной, а также простотой. Его имеет смысл использовать при полуколичественном физическом изучении структуры поля лазерного излучения.

Возможности нашего метода, продемонстрированные выше, дают плодотворную почву для применения в анализе интересующей нас проблемы методов из математической теории глобального анализа физических объектов. Основанием для этого является простота изображения (в математическом смысле) объектов исследования, т.е. волновых функций поперечных колебаний лазерного излучения. Действительно, из проведенного нами выше анализа видно, что все фигурирующие в нем волновые функции имеют исключительно простой вид. Это свойство открывает широкие возможности для их симметрийного изучения и, в конечном счете, для классификации по симметрийным признакам совокупностей систем, различающихся геометрией резонаторов.

Дальнейшим предметом нашего исследования является симметрийное изучение свойств рассмотренных выше волновых функций поперечных колебаний поля лазерного излучения, а также классификация по полученным при этом симметрийным признакам пяти выбранных нами систем с геометриями резонаторов, изображенными на рис.1.

6. Симметрийный анализ структуры поперечных колебаний поля в рассматриваемых системах

6 Общие положения. Допущения.

Конечной целью симметрийного глобального изучения структуры поперечных колебаний поля лазерного излучения в пяти выбранных нами системах является аналитическое построение многообразий волновых функций $\Psi_{2mn}(x^1, x^2, x^3)$ и $\Psi_{3n}(x^1, x^2, x^3)$ (m, n – номера собственных колебаний) поперечных колебаний волнового поля, как внутри резонатора, соответствующего каждой из этих систем, так и за его пределами. Обычно физический интерес представляют непрерывные зависимости $\Psi_{2mn}(x^2, x^3)$, $\Psi_{3n}(x^2, x^3)$ этих многообразий от продольной координаты x^1 .

Многообразия волновых функций $\Psi_{2mn}(x^1, x^2, x^3)$, $\Psi_{3n}(x^1, x^2, x^3)$ можно строить с помощью математического аппарата алгебр и групп Ли, групп Ли преобразований, а также теории представлений непрерывных групп. Однако симметрийные свойства $\Psi_{2mn}(x^2, x^3)$, $\Psi_{3n}(x^2, x^3)$

при различных фиксированных x^1 с физической точки зрения удобно изучать посредством математического аппарата теории представлений непрерывных групп. В дальнейшем мы, однако, воспользуемся примитивным методом симметрийного анализа.

В общем случае возникает проблема, типичная для глобального симметрийного анализа физических объектов. Она заключается в том, чтобы определить минимальный набор симметрий, физически согласованных со структурой объекта и удобных для заданного уровня полноты изображения его свойств, хотя бы в некоторых интервалах значений x^1 . При этом свойство несовпадения симметрийных особенностей объекта в различных интервалах x^1 можно использовать для его симметрийной характеристизации в целом. Отмеченное свойство удобно также использовать при сравнительном симметрийном анализе системы из пяти объектов, геометрии которых изображены на рис. 1.

Именно этот путь симметрийного глобального анализа $\Psi_{2mn}(x^1, x^2, x^3)$, $\Psi_{3n}(x^1, x^2, x^3)$ мы выбираем в качестве основного для дальнейшего исследования.

Введем упрощающие анализ допущения.

1). Структура азимутальных колебаний поля, описываемых волновыми функциями $\psi_{3n}(x^1, x^2, x^3)$, в рассматриваемых системах с цилиндрической симметрией тривиальна и её мы рассматривать не будем. Ограничимся анализом низших, основных колебаний поля, описываемых волновыми функциями $\psi_2(x^1, x^2)$.

2). В силу симметрийных геометрических свойств системы с резонатором из плоских прямоугольных зеркал имеет смысл рассмотреть только одно основное поперечное колебание поля, описанное волновой функцией $\psi_2(x^1, x^2)$.

3). Ограничимся анализом волновых функций $\psi_2(x^1, x^2)$ только в двух областях определения координаты x^1 : внутри резонатора и в дальней зоне. При этом, для простоты записи, ниже будем обозначать поперечную координату посредством x .

Таким образом, сначала проблема сводится к симметрийному изучению пар волновых функций $\psi_2(x)$ (внутри резонатора и в дальней зоне) для каждой из пяти выбранных нами систем.

В случае систем с цилиндрической симметрией при анализе $\psi_2(x)$ учтем также две ситуации: невозбужденного азимутального колебания ($T = 0$) и возбужденного низшего азимутального колебания ($T \neq 0$).

6.2. Метод симметрийного описания структуры поперечных колебаний поля.

Первоначальной целью симметрийного изучения волновых функций $\psi_2(x)$ рассматриваемых систем, как уже отмечалось выше, является определение набора симметрий, с помощью которого можно достаточно

полно на качественном уровне описать все интересующие нас симметрийные особенности известной совокупности функций $\psi_2(x)$ единым образом.

Эта цель, в конечном счете, реализуется определением единого аналитического способа изображения функций $\psi_2(x)$, содержащего все интересные для нас симметрийные свойства всей их совокупности.

Исключая из этого способа изображения отдельные элементы симметрий или заменяя их новыми из того же набора, можно получить изображение любой интересующей нас конкретной функции $\psi_2(x)$.

Набор интересующих нас функций $\psi_2(x)$ был определен нами ранее. Их графическое изображение дано на рис. 39.

Из этого рисунка видно, что для описания волновых функций $\psi_2(x)$ можно использовать следующий набор симметрий:

- 1) сдвиг,
- 2) сжатие-растяжение,
- 3) вращение,
- 4) инверсию

и их комбинации.

Теперь определим единый аналитический способ изображения всех функций $\psi_2(x)$, показанных на рис. 39.

	Рис.1	T	Дальняя зона +
1	1	-	
2	1	-	+
3	2 3	0	
4	2 3	0	+

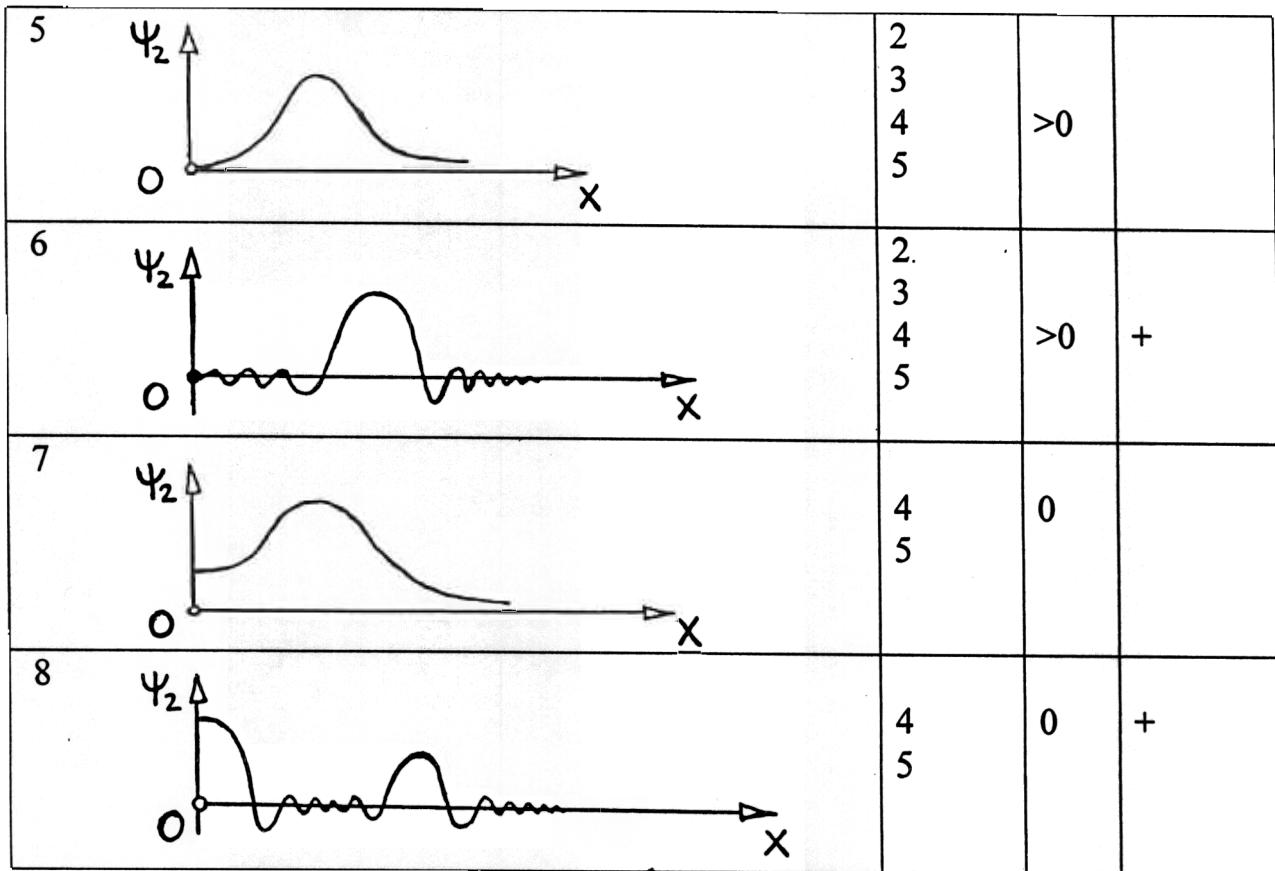


Рис. 39.

Из множества допустимых способов мы выбрали следующий. Он основан на отображении элементарной волновой функции $\overset{\circ}{\psi}_2(x)$, показанной на рис. 40, посредством её сжатия-растяжения, в интересующие нас волновые функции $\psi_2(x)$.

Сжатие-растяжение функции $\overset{\circ}{\psi}_2(x)$ при её отображении в $\psi_2(x)$ описывается посредством функций $\sqrt{g_{11}(x)}$ и $\sqrt{g_{22}(x)}$, причем g_{11} и g_{22} имеют смысл компонент метрического тензора. Величина $\sqrt{g_{22}(x)}$ имеет смысл коэффициента сжатия-растяжения огибающей волновой функции, а $\sqrt{g_{11}(x)}$ — коэффициента сжатия-растяжения её фазы.

Если $\psi_2(x)$ — волновая функция поля внутри резонатора, то $g_{11} = \infty$ и $\psi_2(x)$ описывается только посредством зависимости $\sqrt{g_{22}(x)}$.

Такой способ описания $\psi_2(x)$ приводит к очень интересному симметрийному свойству волновых функций рассматриваемых систем в дальней зоне. Из рис. 39 видно, что в этом случае имеется конформная симметрия [8]: $g_{11}(x) = g_{22}(x)$. Это важное свойство значительно облегчает дальнейший анализ, поскольку исключает анализ зависимостей $\sqrt{g_{11}(x)}$.

В рамках такого способа описания анализ зависимостей $\psi_2(x)$ сводится к анализу зависимостей $\sqrt{g_{22}(x)}$. Легко заметить, что для таких зависимостей набор перечисленных выше симметрий остается в силе.

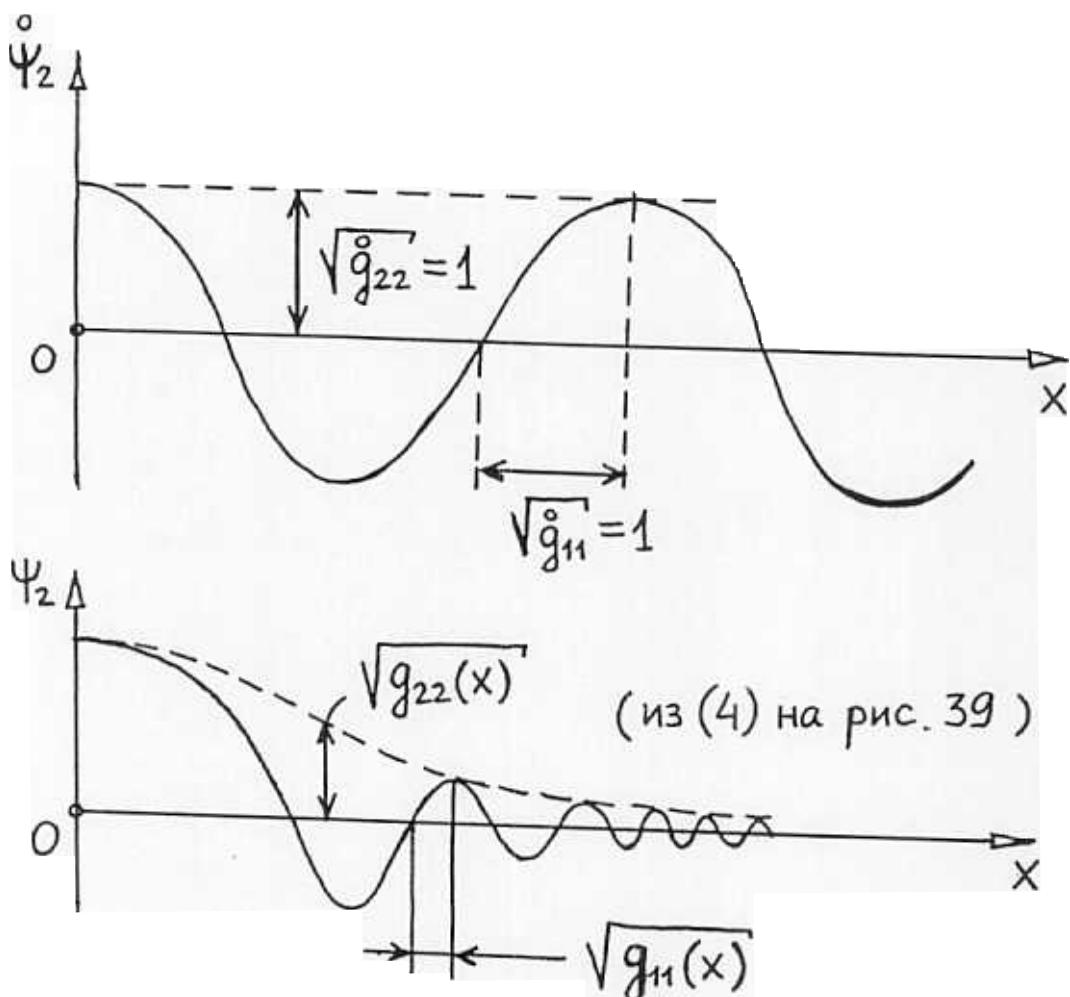


Рис. 40.

Самый общий закон изменения $\sqrt{g_{22}(x)}$ для рассматриваемых систем, как это видно из рис. 39, имеет вид:

$$\sqrt{g_{22}(x)} = \frac{1}{A + |x|} \left[B + \cos \left(\frac{a|x|}{b+c|x|} + \varphi \right) \right],$$

где A, B, a, b, c, φ - постоянные для данной функции $\psi_2(x)$ величины ($A, B, a, b, c > 0$).

Отметим, что при подходящем выборе значений этих постоянных величин можно описать все интересующие нас волновые функции $\psi_2(x)$. (При описании $\psi_2(x)$ для случая (2), показанного на рис.39, следует также учесть операцию сдвига волновой функции вдоль x на величину $\pm \hat{x}$).

В рамках данных представлений индивидуальные симметрийные признаки каждой волновой функции $\psi_2(x)$ определяются набором постоянных величин $A, B, \varphi, \frac{a}{c}, \hat{x}$. Для каждой из функций $\psi_2(x)$, показанных на рис. 39, эти наборы определены в таблице.

Таблица

№ рис 39	1	2	3	4	5	6	7	8
B	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1	1	1	> 1	> 1
A	$B + 1$	$B + 1$	$B + 1$	$B + 1$	> 0	> 0	> 0	$B + 1$
ϕ	0	0	0	0	$-\pi$	$-\pi$	$-\pi$	0
a/c	π	π	π	π	2π	2π	2π	3π
Сдвиг по x	—	$\pm \hat{x}$	—	—	—	—	—	—
$\sqrt{g_{11}}$	∞	$\sqrt{g_{22}}$	∞	$\sqrt{g_{22}}$	∞	$\sqrt{g_{22}}$	∞	$\sqrt{g_{22}}$
T	—	—	0	0	> 0	> 0	0	0

Записанное выше выражение, определяющее функцию $\sqrt{g_{22}(x)}$, можно рассматривать как инвариант, на котором действует однопараметрическая группа преобразований. Если в качестве этой группы выбрать группу сдвигов

$$t' = t + t'$$

(где t – параметр группы сдвигов), то зависимость $\sqrt{g_{22}(x)}$ можно описать в терминах одномерного представления группы сдвигов. Действительно, действие этой группы в 1-пространстве x определяется так:

$$x' = x + t$$

Для описания соответствующего движения в 1-пространстве $\sqrt{g_{22}}$ определим оператор T_t следующим образом:

$$\sqrt{g_{22}(x+t)} = T_t \sqrt{g_{22}(x)} = \hat{T}_{0 \rightarrow x+t} (\hat{T}^{-1})_{x \rightarrow 0} \sqrt{g_{22}(x)}$$

Если, например, выбрать зависимость $\sqrt{g_{22}(x)}$ в форме, соответствующей $\psi_2(x)$ с №8 на рис. 39:

$$\sqrt{g_{22}(x)} = \frac{1}{B+1+x} \left[B + \cos \left(\frac{ax}{b+cx} \right) \right]$$

$c > 1$, $\frac{a}{c} = 3\pi$, $0 \leq x < \infty$, то оператор T_t определяется так:

$$T_t \sqrt{g_{22}(x)} = \sqrt{g_{22}(x)} \cdot \frac{B+1+x}{B+1+x+t} \cdot \frac{B + \cos \left[\frac{\alpha(x+t)}{b+c(x+t)} \right]}{B + \cos \left(\frac{\alpha x}{b+cx} \right)}.$$

Этот оператор удовлетворяет условиям

$$T_{t=0} \sqrt{g_{22}(x)} = \sqrt{g_{22}(x)},$$

$$T'_t T_t \sqrt{g_{22}(x)} = T_{t+t} \sqrt{g_{22}(x)}$$

Следовательно, он является оператором представления группы сдвигов, действующем в 1-пространстве $\sqrt{g_{22}}$.

Совместное действие группы сдвигов в 1-пространстве $x: x' = x + t$ и оператора T_t в 1-пространстве $\sqrt{g_{22}}$ позволяет по заданным начальным точкам $x = x_0$ и $\sqrt{g_{22}} = \sqrt{(g_{22})_0}$ восстановить глобальную форму функции $\sqrt{g_{22}(x)}$. Эта функция будет эквивалентна заданному нами ранее инварианту, если начальные точки x_0 и $\sqrt{(g_{22})_0}$ лежат в области его определения, т.е. $\sqrt{(g_{22}(x_0))_0} \in \sqrt{g_{22}(x)}$.

Таково содержание выбранного нами метода симметрийного описания структуры поперечных колебаний поля в рассматриваемых системах.

6.3. Обсуждение симметрийных свойств поперечных колебаний поля в рассматриваемых системах.

Одним из основных достижений симметрийного анализа поперечных колебаний поля в дальней зоне является открытие конформной симметрии для всех рассмотренных нами систем в установленном выше смысле.

Анализ других симметрийных свойств выбранных поперечных колебаний сводится к изучению информации, представленной в таблице. Из нее, в частности, видно, что при сделанных допущениях:

- 1) колебания № 1 и № 3 эквивалентны;
- 2) колебания № 2 и № 4 отличаются только сдвигами по x на $\pm x$;
- 3) колебания № 5 и № 7 отличаются только значениями $B = 1$ и $B > 1$;
- 4) колебания с №№ 1-7 имеют простейший вид вращательной симметрии, а колебание № 8 – самый сложный из всех.

Имеется следующая градация колебаний по степени простоты в симметрийном отношении:

№№ с 1 и 3, 5, 7, 4, 2, 6, 8.

Таковы основные результаты симметрийного анализа поперечных колебаний поля в выбранных нами системах.

6.4. Классификация рассмотренных систем по симметрийным признакам поперечных колебаний поля в них.

Заключительным этапом симметрийного анализа поперечных колебаний поля лазерного излучения в изображенных на рис. 1 пяти системах является классификация этих систем по сложности симметрийной структуры поперечных колебаний поля в них. Информация для такой классификации содержится в таблице и на рис. 39. Анализируя эту информацию, легко установить следующую градацию систем по сложности симметрийного описания поперечных колебаний поля в них:

- 1) системы с цилиндрическим и устойчивым конфокальным резонаторами (самые простые);
- 2) система с резонатором, имеющим плоские прямоугольные зеркала;
- 3) системы с резонатором, имеющим выпуклые зеркала, и с телескопическим резонатором.

Таков итог проведенного выше симметрийного анализа поперечных колебаний поля в пяти выбранных нами системах.

7. Замечания по симметрийному изучению поля в рассмотренных системах. Основной результат исследования.

Выше нами было проведено симметрийное изучение продольной структуры лазерного излучения. Его объектом являлись геометрии фронтов продольных волн. Затем мы провели симметрийное изучение поперечной структуры лазерного излучения. Его объектом являлись волновые функции поперечных колебаний поля лазерного излучения. Поскольку объекты изучения в этих двух случаях имели различную физическую природу и строение, то при их симметрийном исследовании мы использовали различные элементы и методы математической теории глобального анализа физических объектов.

Основной вопрос, который возникает при сравнении результатов исследований в этих двух случаях, заключается в следующем: “Существует ли корреляция между этими двумя случаями в классификации рассмотренных пяти систем по сложности симметрийной структуры поля в них?”.

Оказывается, что такая корреляция частично существует. В обоих случаях самая простая структура поля наблюдается в системе с устойчивым конфокальным резонатором, а самая сложная – в системах с телескопическим резонатором и с резонатором, имеющим выпуклые зеркала (см. п.4.2. и п.6.4.).

В целом, объединяя результаты исследований этих двух случаев, получаем следующую градацию пяти рассмотренных систем по сложности симметрийной структуры поля в них:

- 1) система с устойчивым конфокальным резонатором (самая простая симметричная структура поля),

- 2) система с цилиндрическим резонатором,
- 3) система с резонатором из плоских прямоугольных зеркал,
- 4) система с резонатором из выпуклых зеркал,
- 5) система с телескопическим резонатором (самая сложная симметрийная структура поля).

Эта градация представляет собой основной результат проведенного нами симметрийного исследования структуры поля лазерного излучения в вакууме.

8. Заключение

Представленные в *статье* материалы наших исследований имеют две основные цели.

1). Построить достаточно надежный фундамент понимания физической сущности лазерного излучения. Мы стремились к тому, чтобы изложенные в *статье* физические представления о природе лазерного излучения были, по возможности, полными, последовательными и систематичными. Следует заметить, что аналогов таких представлений, в целом, в научной лазерно-физической литературе не существует. (Современный уровень развития теории поля лазерного излучения представлен в публикациях [3, 7, 9-20]. Его вряд ли можно считать удовлетворительным с физической точки зрения).

Изложенные нами выше физические представления можно использовать двумя способами – для дальнейшего уточнения и дополнения, а также как основу для изучения физически более сложных систем, например, для изучения структуры поля лазерного излучения в резонаторах с активной средой, для изучения структуры поля при распространении пучков лазерного излучения в оптически нелинейных средах (например, в воздухе) за пределами резонатора. Известный интерес эти представления имеют также при изучении структуры поля импульса лазерного излучения, распространяющегося, как в вакууме, так и в оптически нелинейной среде.

2). Другой целью наших исследований является положить начало систематическому симметрийному направлению изучения волновой структуры поля лазерного излучения. Прежние попытки использования симметрийных методов в физике лазерного излучения ограничивались образами, характерными для приближения геометрической оптики (см. [21-26]). Их вряд ли можно считать серьезными.

Следует отметить, что методы симметрийного анализа структуры поля лазерного излучения, использованные нами в данной работе, весьма неуклюжи. Тем не менее, даже на этих примитивных примерах мы продемонстрировали способ применения и возможности симметрийного направления изучения в лазерной физике. Мы убедились в его перспективности.

Следующим этапом симметрийного изучения структуры поля лазерного излучения является использование более сложных математических методов теории глобального анализа физических объектов, в состав которых

входят методы теорий групп Ли, групп Ли преобразований, а также методы теории представлений непрерывных групп. Среди этих методов интересны только те, которые позволяют изучать симметрию структур гладких многообразий в целом, т.е. глобальные методы. (Локальные методы теории групп Ли, связанные с изучением симметрий дифференциальных уравнений, в рассматриваемых нами физических проблемах применять не следует). Именно такие методы, как мы убедились, представляют интерес в физических приложениях.

Уже на начальном этапе симметрийного изучения структуры поля лазерного излучения глобальными методами нами была открыта конформная симметрия поперечных колебаний поля в дальней зоне. Это является существенным вкладом в понимание закономерностей и физической сущности лазерного излучения.

Необходимо также сделать важное замечание. Конечной целью симметрийного изучения структуры поля лазерного излучения в совокупности систем с резонаторами, имеющими разную геометрию, является классификация этих систем по сложности симметрийной структуры поля в них. Эта трудная проблема в первом приближении была решена нами и результат её решения представлен выше. По существу, её решение определяет степень сложности физического восприятия структуры поля лазерного излучения в каждой рассматриваемой системе относительно остальных из заданной совокупности.

Мы полагаем, что возможности симметрийных методов анализа свойств лазерного излучения на этом не исчерпываются.

Мы надеемся, что данная публикация даст мощный импульс в направлении симметрийного исследования волновой структуры лазерного излучения, понимаемой в рамках изложенных выше физических представлений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A.S.Biryukov, E.M.Kudryavtsev, A.N.Logunov, V.A.Scheglov.
“Classical field theory methods in Laser Physics. 1. Radiation field in empty resonators and resonators with inhomogeneous active medium”. J.Russian Laser Research, 17, № 3, 205-234 (1996).
2. G.A.Korn, T.M.Korn. “Mathematical Handbook”. Mc Graw-Hill Book Company, N.Y., San Francisco, Toronto, London, Sydney (1968).
3. Л.А.Вайнштейн. «Открытые резонаторы и открытые волноводы». «Советское радио», М. (1966).
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. «Теория поля». М., «Наука» (1967).
- 5 . H.Weyl. “Symmetry”. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1952).
- 6 . R.Courant, D.Hilbert. “Methoden der Mathematischen Physik,” 1, Berlin, Verlag von Julius Springer (1931).
- 7 . A.G.Fox, T.Li. “Resonant Modes in a Maser Interferometer.” Bell Syst. Tech.J. 40, № 2, 453-488 (1961).
- 8 . Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. «Современная геометрия», М., «Наука», стр. 132 (1979).
- 9 . «Лазеры. Оптические когерентные квантовые генераторы и усилители». Сборник статей. ИЛ., М. (1963).
10. А.М.Ратнер. «Спектральные, пространственные и временные характеристики лазера». «Наукова думка», Киев (1968).
11. A.Maitland, M.H.Dunn. “Laser Physics”. North-Holland Publishing Company. Amsterdam, London (1969).
12. O.Svelto. “Principles of Lasers”. Plenum Press, N.Y., London (1972).
13. Б.П.Кирсанов, А.М.Леонтович. «Расчет методом ВКБ резонаторов ОКГ с активной средой». Труды ФИАН, 98, «Наука», М. (1977).
14. Ю.А.Ананьев. «Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения». «Наука», М. (1979).
15. S.Solimeno, B.Croisignani, P.Di Porto. “Guiding, Diffraction, and Confinement of Optical Radiation”. Academic Press, Inc. Harcourt Brace Jovanovich,

Publishers, Orlando, San Diego, N.Y., Austin, London, Montreal, Sydney, Tokyo, Toronto(1986).

16. Н.В.Карлов. «Лекции по квантовой электронике». «Наука», М. (1988).
17. O.Svelto. "Principles of Lasers". Third Edition, Plenum Press, N.Y. – London (1989).
18. Ю.А.Ананьев. «Оптические резонаторы и лазерные пучки». «Наука», М. (1990).
19. А.В.Боровский, А.Л.Галкин. «Лазерная физика». «ИздАТ», М. (1996).
20. В.П.Быков, О.О.Силичев. «Лазерные резонаторы». Физматлит, М. (2003).
21. M.N.Saad, K.B.Wolf. "The group-theoretical treatment of aberrating systems. I. Aligned lens systems in third aberration order". Comunicaciones tecnicas. Serie Naranja: Investigaciones № 363, Mexico (1984-1985).
22. K.B.Wolf. "The group-theoretical treatment of aberrating systems. II. Axis-symmetric inhomogeneous systems and fiber optics in third aberration order". Comunicaciones tecnicas. Serie Naranja: Investigaciones, № 366, Mexico (1984-1985).
23. В.К.Потехин, Л.А.Шелепин. «Теоретико-групповой подход в классической статистической оптике». Труды ФИАН, 173, М., «Наука», 173-199 (1986).
24. В.П.Карасев. «Осцилляторная и другие группы в оптике». Труды ФИАН, 191, М., «Наука», 120-132 (1989).
25. К.Б.Вольф, В.И.Манько. «Симплектическая и евклидова группы преобразований в оптике». Труды ФИАН, 208, М., «Наука» 207-225 (1992).
26. В.В.Пустовалов, А.К.Шварев. «Групповой и ренормгрупповой анализ уравнений нелинейной геометрической оптики. 1. Симметрия Ли». Препринт ФИАН № 15, М. (1994).