РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Физический институт имени П.Н.Лебедева

ФИАН

ПРЕПРИНТ

8

В.В.ПУСТОВАЛОВ, В.П.СИЛИН,
А.Н.СТАРОДУБ, В.Т.ТИХОНЧУК

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВОЙ ПЛАЗМЕ

МОСКВА 2004

О нелинейном взаимодействии электромагнитных волн в параметрически неустойчивой в плазме*

В.В.Пустовалов, В.П.Силин, А.Н.Стародуб, В.Т.Тихончук

Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму в течение последнего времени привлекает внимание многих исследователей. Интерес к проблеме такого взаимодействия вызван тем обстоятельством, что под влиянием сильного электромагнитного поля (волны накачки) появляется возможность параметрического резонанса [1], т.е. нарастания в плазме внутренних полей флуктуаций. Успехи, достигнутые при изучении параметрического воздействия излучения на плазму, обстоятельно изложены в монографии [2].

Если дисперсионные свойства плазмы в поле волны накачки изучены достаточно полно, то теория нелинейной стадии развития параметрических неустойчивостей еще далека от своего завершения. Более того, успехи [3], достигнутые в построении такой теории, базируются на уравнении, в котором не учитывается влияние волны накачки на многоиндексные тензоры диэлектрической проницаемости плазмы. Поэтому в рамках представлений работ [3] следует говорить лишь о качественном описании турбулентного состояния, в которое переходит плазма в результате развития параметрических неустойчивостей. Действительно, поскольку энергия шумов в параметрически турбулентной плазме оказывается сравнимой с энергией волны накачки, то влияние волны накачки на ядро нелинейного уравнения (15), как будет ясно из дальнейшего, существенно.

Отражение и переизлучение плазмой мощных световых потоков является другой причиной, по которой необходимо найти обобщение уравнения (1.8) работы [4] для спектральной функции электрического поля $(E_j E_i)_{\omega,\vec{k}}$. Говоря об отражении

---

* Основные результаты данной работы были представлены на 2-й Международной конференции по теории плазмы, 28 октября – 1 ноября 1974 г., Киев, в виде доклада В.В.Пустовалова, В.П.Силина, А.Н.Стародуба, В.Т.Тихончука «Нелинейная параметрическая генерация мощного излучения в плазме» и доложены в составе раппортерского доклада

и переизлучении в рамках теории однородной плазмы, будем иметь в виду процесс нелинейного слияния плазменных волн в поперечную волну, которая может уходить из объема, занятого плазмой.

Развиваемая в п.1 теория нелинейного взаимодействия волн в параметрически неустойчивой плазме базируется на уравнениях нелинейной электродинамики, статистическое усреднение которых позволяет получить нелинейное уравнение для эволюции флуктуаций электромагнитного поля. В п.2 статьи рассмотрены некоторые следствия построенной теории, касающиеся вопроса генерации гармоник волны накачки параметрически турбулентной плазмой.

1. Уравнение для спектральной функции электрического поля

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{div}\vec{D}' = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{1}$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\,(1/c)\,(\partial\vec{B}/\partial t), \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = -\,(1/c)\,(\partial\vec{D}'/\partial t),$$

записанные применительно к средам с пространственной и временной дисперсией [5], совместно с нелинейным материальным уравнением

$$D_i'\ (x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}_1 \ldots\ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}_n \hat{\varepsilon}_{ij1\ldots.jn}(x - x_{1,},\ldots., x_n) E_{j1}(x_1) E_{j2}(x_2) \ldots E_{jn}(x_n) \tag{2}$$

представляют собою замкнутую систему, исходя из которой можно рассмотреть проблему нелинейного взаимодействия волн в плазме. Нелинейность материального уравнения (2) обусловлена процессами релаксации и переноса, которые делают индуцированный ток зависящим в данный момент времени и в данной точке пространства от предшествующих моментов времени и других точек пространства. Записав материальное уравнение (2) в виде разложения по степеням электрического поля $E_i(x)$, мы ограничились кругом таких задач, в которых амплитуды $E_i(x)$ относительно невелики. Считая, что среда пространственно однородна и стационарна, зависимость от $\vec{r}_n$ и t_n в уравнении (2) опустим.

В.В.Пустовалова «Турбулентность параметрически неустойчивой плазмы» (Программа конференции, стр. 26).

Наконец, в целях упрощения записи будем использовать четырехмерных обозначения $x = (\vec{r}, t)$, k = $(\vec{k}, \omega)$, причем скалярное произведение 4-векторов определяется как $kx = \vec{k}\vec{r} - \omega t$.

Имея в виду те конкретнее задачи, которые предполагается рассмотреть, ограничимся в материальном уравнении (2) членами порядка E^5 по электрическому полю. Тогда уравнения Максвелла (1) могут быть переписаны в виде следующего нелинейного уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{c^2\vec{k}^2}{\omega^2}(\delta_{ij1} - \frac{k_i k_{j1}}{k^2})E_{j1}(k) = \varepsilon_{ij1}(k)E_{j1}(k) + \int dk_1 \varepsilon_{ij1j2} E_{j1}(k-k_1)E(k_1) + \\
&+ \int dk_1 dk_2 \varepsilon_{ij1j2j3}(k,k_1,k_2)E_{j1}(k-k_1)E_{j2}(k_1-k_2)E_{j3}(k_2) + \\
&+ \int dk_1 dk_2 dk_3 \varepsilon_{ij1j2j3j4}(k,k_1,k_2,k_3)E_{j1}(k-k_1)E_{j2}(k_1-k_2)E_{j3}(k_2-k_3)E_{j4}(k_3) + \\
&+ \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \varepsilon_{ij1j2j3j4j5}(k,k_1,k_2,k_3)E_{j1}(k-k_1)E_{j2}(k_1-k_2)\cdot \\
&\cdot E_{j3}(k_2-k_3)E_{j4}(k_3-k_4)E_{j5}(k_4).
\end{aligned} \tag{4}$$

При получении этого уравнения нами был использован переход к Фурье-представлению

$$\vec{E}(x) = \int dk\ \vec{E}(k) \exp(ikx),$$

$$\varepsilon_{ij1....jn}(k,....k_{n-1}) = \int dx....dx_n \hat{\varepsilon}_{ij1...jn}(x,...,x_{n-1}) \exp\{i(kx + ... + k_{n-1}x_{n-1})\}.$$

Здесь $\int dx..... \equiv \int_0^\infty dt \int d\vec{r}....$

Свойства первых четырех тензоров $\varepsilon_{ij1j2...jn}$ $(k, ...k_{n-1})$ изучены в работе [6].

Входящее в уравнение (4) электрическое поле $E_i(x)$ есть сумма электрических полей накачки

$$\vec{E}_0(x) = \vec{E}_0 \sin(\omega_0 t - \vec{k}_0\vec{r})$$

и возмущения $\delta E_i(x)$, возникающего в плазме вследствие воздействия волны накачки. Поэтому уравнение (4) может быть переписано в виде

$$\frac{c^2\vec{k}^2}{\omega^2}(\delta_{ij1} - \frac{k_i k_{j1}}{k^2})\delta E_{j1}(k) = \varepsilon_{ij1}(k)\delta E_{j1}(k) + K_i^{(+)}(k) + K_i^{(-)}(k) + \hat{L}_i(\delta E), \tag{5}$$

где

$$K_i^{(\pm)} = \tfrac{1}{2} E_{0j2} S_{ij1j2}(k_1 \pm k_0)\delta E_{j1}(k \mp k_0) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} E_{0j3} \int dk_1 \varepsilon_{ij3j2j1}(k, k \mp k_0, k_1)\delta E_{j1}(k_1)\delta E_{j2}(k \mp k_0 - k_1) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} E_{0j3} \int dk_1 V_{ij1j2j3}(k, k_1, \pm k_0)\delta E_{j1}(k - k_1)\delta E_{j2}(k \mp k_0) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} E_{0j4} \int dk_1 dk_2 \varepsilon_{ij4j2j3j1}(k, k \mp k_0, k_1, k_2)\delta E_{j3}(k_1 - k_2)\delta E_{j1}(k_2)\delta E_{j2}(k \mp k_0 - k_1) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} E_{0j4} \int dk_1 dk_2 \varepsilon_{ij1j4j3j2}(k, k_1, k_1 \mp k_0, k_2)\delta E_{j1}(k - k_1)\delta E_{j2}(k_2)\delta E_{j3}(k_1 \mp k_0 - k_2) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} E_{0j4} \int dk_1 dk_2 Q_{ij1j2j3j4}(k, k_1, k_2, \pm k_0)\delta E_{j1}(k - k_1)\delta E_{j2}(k_1 - k_2)\delta E_{j3}(k_1 \mp k_0),$$

$$\hat{L}(\delta E) = \int dk_1 \varepsilon_{ij1j2}(k, k_1)\delta E_{j1}(k - k_1)\delta E_{j2}(k_1) +$$
$$+ \int dk_1 dk_2 \varepsilon_{ij1j2j3}(k, k_1, k_2)\delta E_{j1}(k - k_1)\delta E_{j2}(k_1 - k_2)\delta E_{j3}(k_2).$$

Тензоры $S_{ij1j2}(k, k_0)$, $V_{ij1j2j3}(k, k_1, k_0)$, $Q_{ij1j2j3j4}(k, k_1, k_2, k_0)$ получаются из соответствующих нелинейных тензоров диэлектрической проницаемости путем следующей процедуры симметризации:

$$S_{ij1j2}(k, k_0) = \varepsilon_{ij1j2}(k, k_0) + \varepsilon_{ij1j2}(k, k - k_0), \tag{6}$$
$$V_{ij1j2j3}(k, k_1, k_0) = \varepsilon_{ij1j2j3}(k, k_1, k_0) + \varepsilon_{ij1j2j3}(k, k_1, k_1 - k_0),$$
$$Q_{ij1j2j3j4}(k, k_1, k_2, k_0) = \varepsilon_{ij1j2j3j4}(k, k_1, k_2, k_0) + \varepsilon_{ij1j2j3j4}(k, k_1, k_2, k_2 - k_0).$$

Входящие в уравнение (5) гармоники возмущения электрического поля $\delta E_j(k \pm k_0)$ должны быть исключены с помощью их связи с возмущением $\delta E_j(k)$ (такая связь есть непосредственное следствие уравнения (5)):

$$\delta E_b(k \pm k_0) = -\tfrac{1}{2} E_{0j4} S_{aj1j4}(k \pm k_0, \pm k_0) A_{ba}(k \pm k_0)\delta E_{j1}(k) -$$
$$- \tfrac{1}{2} E_{0j4} \int dk_1 G_{bj1j2j4}(k \pm k_0, k_1, \pm k_0)\delta E_{j1}(k - k_1)\delta E_{j2}(k_1) - \tag{7}$$
$$- \tfrac{1}{2} E_{0j4} \int dk_1 \int dk_2 G_{bj1j2j3j4}(k \pm k_0, k_1, k_2, \pm k_0)\delta E_{j1}(k - k_1)\delta E_{j2}(k_1 - k_2)\delta E_{j3}(k_2),$$

где

$$G_{bj1j2j4}(k \pm k_0, k_1, \pm k_0) = A_{ba}(k \pm k_0)[\varepsilon_{aj4j1j2}(k \pm k_0, k, k_1) +$$
$$+ V_{aj1j2j4}(k \pm k_0, k_1 \pm k_0, \pm k_0)] -$$
$$- A_{ba}(k \pm k_0)\varepsilon_{acj2}(k \pm k_0, k_1) A_{cs}(k - k_1 \pm k_0) S_{sj1j4}(k - k_1 \pm k_0, \pm k_0),$$

$$G_{bj1j2j3j4}(k \pm k_0, k_1, k_2, \pm k_0) = A_{ba}(k \pm k_0)[\varepsilon_{aj4j1j2j3}(k \pm k_0, k, k_1, k_2) +$$
$$+ \varepsilon_{aj1j4j2j3}(k \pm k_0, k_1 \pm k_0, k_1, k_2) + Q_{aj1j2j3j4}(k \pm k_0, k_1 \pm k_0, k_2 \pm k_0, \pm k_0)] +$$
$$+ A_{ba}(k \pm k_0)\varepsilon_{acj2}(k \pm k_0, k_1 - k_2)A_{cs}(k - k_1 \pm k_0 + k_2)\varepsilon_{snj3}(k - k_1 + k_2 \pm k_0, k_2) \times$$
$$\times A_{nm}(k - k_1 \pm k_0)S_{mj1j4}(k - k_1 \pm k_0, \pm k_0) -$$
$$- A_{ba}(k \pm k_0)\varepsilon_{acj2}(k \pm k_0, k_1 - k_2)A_{cs}(k - k_1 + k_2 \pm k_0) \times$$
$$\times [\varepsilon_{sj4j1j3}(k - k_1 \pm k_0 k_k, k - k_1 + k_2, k_2) + V_{sj1j3j4}(k - k_1 + k_2 \pm k_0, k_2 \pm k_0, \pm k_0)] -$$
$$- A_{ba}(k \pm k_0)\varepsilon_{acj2j3}(k \pm k_0, k_1, k_2)S_{sj1j4}(k \pm k_0 - k_1, \pm k_0)A_{cs}(k - k_1 \pm k_0),$$

$$A_{ab}(k) = \{\varepsilon_{ab}(k) - \frac{c^2 \vec{k}^2}{\omega^2}(\delta_{ab} - \frac{k_a k_b}{k^2})\}^{-1}.$$

Исключая гармоники с помощью связи (7), уравнения поля с учетом влияния волны накачки на среду можно записать в виде

$$\widetilde{M}_{ij1}(k)\delta E_{j1}(k) = -\int dk_1 \widetilde{\varepsilon}_{ij1j2}(k, k_1)\delta E_{j1}(k - k_1)\delta E_{j2}(k_1) -$$
$$- \int dk_1 dk_2 \hat{\varepsilon}_{ij1j2j3}(k, k_1, k_2)\delta E_{j1}(k - k_1)\delta E_{j2}(k_1 - k_2)\delta E_{j3}(k_2). \quad (8)$$

Максвелловский тензор $\widetilde{M}_{ij}(k)$ выражается через диэлектрическую проницаемость плазмы в поле волны накачки $\widetilde{\varepsilon}_{ij}(k)$, которая имеет вид

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij}(k) = \varepsilon_{ij}(k) - \tfrac{1}{4} E_{0j4} E_{0j5} \{S_{ibj5}(k, k_0)A_{ba}(k - k_0)S_{aj1j4}(k - k_0, -k_0) +$$
$$+ S_{ibj5}(k, -k_0)A_{ba}(k + k_0)S_{aj1j4}(k + k_0, k_0)\}, \quad (9)$$

обычным образом, т.е.

$$\widetilde{M}_{ij}(k) = \widetilde{\varepsilon}_{ij}(k) - \frac{c^2 \vec{k}^2}{\omega^2}(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}). \quad (10)$$

Трехиндексный и четырехиндексный тензоры диэлектрической проницаемости в поле волны накачки, входящие в уравнение (8), могут быть записаны как

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij1j2}(k, k_1) = \varepsilon_{ij1j2}(k, k_1) + H^{(+)}_{ij1j2}(k, k_1) + H^{(-)}_{ij1j2}(k, k_1), \quad (11)$$

где

$$H^{(\pm)}_{ij1j2}(k, k_1) = -\tfrac{1}{2} E_{0j4} E_{0j5} \{S_{ibj5}(k, \pm k_0)G_{bj1j2j4}(k \mp k_0, k_1, \mp k_0) +$$
$$+ \varepsilon_{ij3bj5}(k, k \mp k_0, k_1)A_{ba}(k - k_1 \mp k_0)S_{aj1j4}(k - k_1 \mp k_0, \mp k_0) +$$
$$+ V_{ij3bj5}(k, k_1, \pm k_0)A_{ba}(k_1 \mp k_0)S_{ajij4}(k_1 \mp k_0, \mp k_0)\},$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij1j2j3}(k, k_1, k_2) = \varepsilon_{ij1j2j3}(k, k_1, k_2) + F^{(+)}_{ij1j2j3}(k, k_1, k_2) + F^{(-)}_{ij1j2j3}(k, k_1, k_2), \quad (12)$$

где

$$
\begin{aligned}
F^{(\pm)}_{ij1j2j3} &= -\tfrac{1}{4} E_{0j4} E_{0j5} \{ S_{isj5}(k, \pm k_0) G_{sj1j2j3j4}(k \mp k_0, k_1, k_2 \mp k_0) + \\
&+ \varepsilon_{ij5sj2}(k, k \mp k_0, k_1 - k_2) G_{sj1j3j4}(k - k_1 + k_2 \mp k_0, k_2, \mp k_0) + \\
&+ V_{ij1sj5}(k, k_1, \pm k_0) G_{sj2j3j4}(k_1 \mp k_0, k_2, \mp k_0) + \\
&+ \varepsilon_{ij4sj2j3}(k, k \mp k_0, k_1, k_2) A_{sc}(k - k_1 \mp k_0) S_{cj1j5}(k - k_1 \mp k_0, \mp k_0) + \\
&+ \varepsilon_{ij1j4sj3}(k, k_1, k_1 \mp k_0, k_2) A_{sc}(k_1 - k_2 \mp k_0) S_{cj2j5}(k_1 - k_2 \mp k_0, \mp k_0) + \\
&+ Q_{ij1j2sj4}(k, k_1, k_2, \pm k_0) A_{sc}(k_2 \mp k_0) S_{cj3j5}(k_2 \mp k_0, \mp k_0) \}.
\end{aligned}
$$

В таких условиях, когда нелинейность слабо меняет спектры собственных колебаний электромагнитного поля в плазме (эти спектры суть решения уравнения $\det \| \widetilde{M}_{ij}(k) \| = 0$), с помощью обычной процедуры усреднения по времени можно получить уравнение, определяющее изменение во времени амплитуды слабозатухающих, почти монохроматических колебаний:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial[\omega \widetilde{M}^{H}_{ij}(k)]}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \{ \delta E^{*}_{i}(k) \delta E_{j}(k) \} - \frac{\partial[\omega \widetilde{M}^{H}_{ij}(k)]}{\partial \vec{k}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \{ \delta E^{*}_{i}(k) \delta E_{j}(k) \} = \\
&= i\omega \varepsilon^{(a)}_{ij} \delta E^{*}_{i}(k) \delta E_{j}(k) - i\omega \int dk_1 \{ \widetilde{\varepsilon}_{ij1j2}(k, k_1) \delta E_{j1}(k - k_1) \delta E_{j2}(k_1) \delta E^{*}_{i}(k) - \\
&- \widetilde{\varepsilon}^{*}_{ij1j2}(k, k_1) \delta E^{*}_{j1}(k - k_1) \delta E^{*}_{j2}(k_1) \delta E_{i}(k) \} + \\
&+ i\omega \int dk_1 dk_2 \{ \widetilde{\varepsilon}_{ij1j2j3}(k, k_1, k_2) \delta E_{j1}(k - k_1) \delta E_{j2}(k_1 - k_2) \delta E_{j3} \delta E^{*}_{i}(k) - \\
&- \widetilde{\varepsilon}^{*}_{ij1j2j3}(k, k_1, k_2) \delta E^{*}_{j1}(k - k_1) \delta E^{*}_{j2}(k_1 - k_2) \delta E^{*}_{j3}(k_2) \delta E_{i}(k) \}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Здесь $\widetilde{M}^{H}_{ij}(k)$ - эрмитова часть максвелловского тензора (10), а $\widetilde{\varepsilon}^{(a)}_{ij}(k)$ - антиэрмитова часть диэлектрической проницаемости плазмы в поле волны накачки.

Уравнение (13), представляющее собою уравнение закона сохранения энергии, может быть положено в основу нелинейной электродинамики, в рамках которой будет изучаться взаимодействие электромагнитных волн в плазме с учетом влияния волны накачки на такое взаимодействие.

Произведем усреднение уравнения (13) по статистическому ансамблю. Учтем, что при таком усреднении парного произведения компонент электрического поля в случае стационарных и пространственно однородных сред в теории флуктуаций записывается следующее соотношение:

$$
\langle \delta E_{j}(k) \delta E^{*}_{i}(k) \rangle = \delta(k - k_1)(E_j E_i)_k \ , \tag{14}
$$

которое является определением спектральной функции электрического поля $(E_jE_i)_k$. Соотношение (14) справедливо, если в среде среднее значение электрического поля равно нулю, что будет считаться выполненным.

Если корреляция между амплитудами различных волн отсутствует, то среднее произведение трех амплитуд равно нулю. Однако с учетом нелинейных поправок с помощью уравнения (8) тройной коррелятор можно свести к коррелятору четырех амплитуд электрического поля. Поэтому из уравнения (13) после описанного усреднения получается следующее:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\widetilde{M}^{H}_{ij}(k)]\frac{\partial}{\partial t}(E_j E_i)_k - \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\vec{k}}[\omega\widetilde{M}^{H}_{ij}(k)]\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(E_j E_i)_k = \\
&= 2i\widetilde{\varepsilon}^{(a)}_{ij}(k)(E_j E_i)_k + \\
&+ \operatorname{Im}\int dk_1\{\widetilde{A}^{*}_{ia}(k)\widetilde{S}_{ijs}(k,k_1)\widetilde{S}^{*}_{abc}(E_s E_c)_{k1}(E_j E_b)_{k-k1} + \\
&+ 2\widetilde{A}_{jb}(k-k_1)\widetilde{S}_{ijs}(k,k_1)\widetilde{S}_{bca}(k-k_1,k)(E_s E_c)_{k1}(E_a E_i)_k - \\
&- 2\widetilde{V}_{isac}(k,k_1)(E_s E_c)_{k1}(E_a E_i)_k\},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где

$$\widetilde{S}_{ij1j2}(k,k_1) = \widetilde{\varepsilon}_{ij1j2}(k,k_1) + \widetilde{\varepsilon}_{ij2j1}(k,k-k_1),$$

$$\widetilde{V}_{isac}(k,k_1) = \widetilde{\varepsilon}_{isac}(k,k_1+k,k_1) + \widetilde{\varepsilon}_{isca}(k,k_1+k,k_1),$$

а $\widetilde{A}_{ab}(k)$ – тензор, обратный максвелловскому тензору (10), т.е.

$$\widetilde{A}_{ba}(k)\widetilde{M}_{ac}(k) = \delta_{bc}.$$

Уравнение (15) и есть искомое обобщение результата (1.8) работы [4]. Видно, что накачка двояким образом проявляет себя. Во-первых, она причина неустойчивости, что отражено членом $2i\widetilde{\varepsilon}^{(a)}_{ij}(k)(E_j E_i)_k$, а, во-вторых, она существенно влияет на свойства среды, что видно из перенормировки нелинейных тензоров диэлектрической проницаемости.

Правая часть уравнения (15) показывает, что энергия, отвечающая электромагнитной волне определенного типа, может меняться вследствие линейных эффектов (первое слагаемое) либо за счет нелинейных эффектов (последние три слагаемых).

Видно, что все нелинейные процессы можно разбить на две группы.

К первой группе, которая описывается первым нелинейным слагаемым, относятся процессы слияния (или распада) волн. В таких процессах участвуют три слабозатухающие плазменные волны, причем их спектры $\omega(\vec{k})$, $\omega_1(\vec{k})$, $\omega_2(\vec{k})$ и волновые векторы $\vec{k}$, $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ удовлетворяют распадным условиям

$$\omega(\vec{k}) = \omega_1(\vec{k}_1) + \omega_2(\vec{k}_2),$$
$$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \qquad (16)$$

Вторую группу нелинейных процессов, описываемую двумя последними слагаемыми в уравнении (15), составляют процессы индуцированного рассеяния плазменных волн на частицах плазмы. В этих процессах также участвуют три волны, однако одна из них является сильнозатухающей, т.е. интенсивно поглощается частицами плазмы.

2. Генерация гармоник частоты волны накачки параметрически турбулентной плазмой

В рамках теории однородной плазмы задача о генерации гармоник частоты накачки параметрически турбулентной плазмой может быть рассмотрена, исходя из представления о слиянии плазменных волн в поперечную волну. Будучи поперечной, такая волны уходит из объема, занятого плазмой, и воспринимается как отраженная волна.

Если $W_\alpha(\vec{k})$ и $W_\beta(\vec{k})$ – спектральные плотности энергии сливающихся волн, то уравнение, описывающее генерацию волны $W_{tr}(\vec{k})$ вследствие такого слияния имеет следующий вид:

$$\frac{\partial W_{tr}(\vec{k})}{\partial t} - \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \frac{\partial W_{tr}(\vec{k})}{\partial \vec{r}} = 2\gamma(\vec{k}) W_{tr}(\vec{k}) +$$
$$+ \operatorname{Im} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^{tr}(k - k_0) - \dfrac{c^2(\vec{k} - \vec{k}_0)^2}{(\omega - \omega_0)^2}} \int d\vec{k}' Q^{\alpha\beta}(\vec{k}, \vec{k}') W_\alpha(\vec{k}') W_\beta(\vec{k} - \vec{k}'). \qquad (17)$$

Это уравнение получено интегрированием уравнения (15) по частоте и заменой спектральной энергии $(E_j E_i)_k$ на спектральную плотность энергии $W(\vec{k})$, которая определяется как [6]

$$W(\vec{k}) = (2\pi)^3 \int_0^\infty d\omega \frac{(E_j E_i)_k}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega \tilde{M}_{ij}^H(k) \right].$$

По индексам α и β подразумевается суммирование по всем спектрам, которые дают вклад в генерацию частоты $\omega(\vec{k})$.

Рассмотрим следствия полученного уравнения (17) на примере генерации второй гармоники частоты накачки. Ограничимся стационарным и пространственно-однородным случаем, т.е. будем считать, что $\partial W_{tr}(\vec{k})/\partial t = 0$, $\partial W_{tr}(\vec{k})/\partial \vec{r} = 0$.

Тогда уравнение (17), переписанное в виде

$$2\gamma(\vec{k})W_{tr}(\vec{k}) = \operatorname{Im}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}^{tr}(k-k_0) - \dfrac{c^2(\vec{k}-\vec{k}_0)^2}{(\omega-\omega_0)^2}}\int d\vec{k}' Q^{\alpha\beta}(\vec{k},\vec{k}')W_\alpha(\vec{k}')W_\beta(\vec{k}-\vec{k}'), \qquad (17a)$$

имеет простой физический смысл: стационарный уровень спектральной плотности второй гармоники устанавливается вследствие конкуренции затухания этой гармоники на частицах плазмы с декрементом $\gamma(\vec{k})$ и генерации ее при слиянии волн α и β. Предынтегральный множитель описывает форму спектральной линии гармоники $I(k) = \int do_{\vec{k}} W_{tr}(\vec{k})$, где $do_{\vec{k}}$ - телесный угол в направлении вектора $\vec{k}$.

Вторая гармоника в окрестности критической плотности, т.е. при $\omega_0 \cong \omega_{Le}(x_c)$, где ω_{Le} - ленгмюровская частота электронов, может генерироваться только в результате слияния двух продольных волн либо продольной волны с поперечной, тогда как слияние двух поперечных волн во вторую гармонику в этой окрестности запрещено законами сохранения (16). Ядро $Q^{ll}_{2\omega 0}(\vec{k},\vec{k}')$, описывающее генерацию второй гармоники при слиянии двух ленгмюровских волн, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
Q^{ll}_{2\omega_0}(\vec{k},\vec{k}') &= |\alpha_1|^2\left[1-(\vec{\kappa}\vec{\kappa}')^2\right] + |\alpha_2|^2\left[1-(\vec{\kappa}\vec{\kappa}'')^2\right] + |\alpha_3|^2\left[1-(\vec{\kappa}\vec{e})^2\right] + \\
&+ 2\operatorname{Re}(\alpha_1\alpha_2^*)\left[(\vec{\kappa}'\vec{\kappa}'') - (\vec{\kappa}\vec{\kappa}')(\vec{\kappa}\vec{\kappa}'')\right] + 2\operatorname{Re}(\alpha_1\alpha_3^*)\left[(\vec{\kappa}'\vec{e}) - (\vec{\kappa}\vec{\kappa}')(\vec{\kappa}\vec{e})\right] + \\
&+ 2\operatorname{Re}(\alpha_2\alpha_3^*)\left[(\vec{\kappa}''\vec{e}) - (\vec{\kappa}\vec{e})(\vec{\kappa}\vec{\kappa}'')\right],
\end{aligned} \qquad (18)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{e}{m}k''\frac{\omega_{Le}^2}{\omega\omega'\omega''^2} - \frac{1}{4}\frac{e}{m}k''(k''r_E)^2\frac{\omega_{Le}^4\omega_0^2}{\omega\omega'\omega''^2}\frac{(\vec{\kappa}''\vec{e})^2}{(\omega''-\omega_0)^4\varepsilon^l(\omega''-\omega_0,\vec{k}'')},$$

$$\alpha_2 = \frac{e}{m}k'\frac{\omega_{Le}^2}{\omega\omega'^2\omega''} - \frac{1}{4}\frac{e}{m}k'(k'r_E)^2\frac{\omega_{Le}^4\omega_0^2}{\omega\omega'^2\omega''}\frac{(\vec{\kappa}'\vec{e})^2}{(\omega'-\omega_0)^4\varepsilon^l(\omega'-\omega_0,\vec{k})},$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{4}\frac{e}{m}kr_E^2\frac{\omega_{Le}^4\omega_0^3}{\omega\omega'\omega''(\omega-\omega_0)}\left\{\frac{k''^2(\vec{\kappa}''\vec{e})(\vec{\kappa}\vec{\kappa}')}{(\omega''-\omega_0)^2\varepsilon^l(\omega''-\omega_0,\vec{k}'')} + \frac{k'^2(\vec{\kappa}'\vec{e})(\vec{\kappa}\vec{\kappa}'')}{(\omega'-\omega_0)^2\varepsilon^l(\omega'-\omega_0,\vec{k}')}\right\},$$

$r_E = (eE_0/m\omega_0^2)$, $\vec{\kappa} = \vec{k}/k$, $\vec{\kappa}' = \vec{k}'/k'$, $\vec{\kappa}'' = \vec{k}''/k''$, $\varepsilon^l(\omega,\vec{k})$ - продольная диэлектрическая проницаемость плазмы в отсутствии волны накачки. Поскольку величина волнового вектора накачки $\vec{k}_0$ несущественна в параметрических неустойчивостях, приводящих к возбуждению ленгмюровских волн (апериодическая неустойчивость $t_{\omega 0} \to l_a + a$, распад волны накачки на ленгмюровскую и ионно-звуковую волны $t_{\omega 0} \to l_s + s$), то всюду было принято $\vec{k}_0$ =0. Ядро $Q^{ll}_{2\omega 0}(\vec{k},\vec{k}')$ записано для линейно поляризованной волны накачки $\vec{E}_0 = \vec{e}\, E_0$.

Из вида ядра $Q^{ll}_{2\omega 0}(\vec{k},\vec{k}')$ следует, что слияние ленгмюровских волн, волновые векторы которых коллинеарны и равны по модулю, не дает вклада в генерацию второй гармоники. Проще всего проследить это утверждение, пренебрегая влиянием волны накачки на ядро $Q^{ll}_{2\omega 0}(\vec{k},\vec{k}')$, которое при таком пренебрежении имеет вид (при $k' = k'' \equiv k_m$)

$$Q^{ll}_{2\omega 0}(\vec{k},\vec{k}') = \frac{e^2}{m^2}\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2\omega'^2\omega''^2}k_m^2\left[\vec{\kappa},\vec{\kappa}'+\vec{\kappa}''\right]^2. \tag{19}$$

Действительно, если $\vec{\kappa}' \parallel \vec{\kappa}''$, то $Q^{ll}_{2\omega 0}(\vec{k},\vec{k}')$ = 0.

Вторым конкурирующим механизмом генерации второй гармоники $t_{2\omega 0}$ является слияние ленгмюровской волны с поперечной. В качестве поперечной волны может быть либо стоксова компонента при вынужденном рассеянии Мандельштама-Бриллюэна, либо отраженная от критической точки волна накачки. Ядро, описывающее такое слияние, можно записать в виде

$$Q^{lt}_{2\omega 0}(\vec{k},\vec{k}') = \{|\gamma_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\gamma_1\gamma_2^*) + |\gamma_2|^2\}\left[1-(\vec{\kappa}\vec{e})^2\right], \tag{20}$$

$$\gamma_1 = i\frac{1}{4}\frac{e}{m}\frac{\omega_{Le}^4\omega_0^2}{\omega\omega'\omega''(\omega-\omega_0)}r_E^2\left\{\frac{(\vec{k}''-\vec{k}_0)^2(\vec{k}-\vec{k}_0,\vec{\kappa}')}{(\omega''-\omega_0)^4\varepsilon^l(k''-k_0)} + \frac{(\vec{k}'-\vec{k}_0)^2(\vec{\kappa}'\vec{e})(\vec{k}\vec{e})}{(\omega'-\omega_0)^4\varepsilon^l(k'-k_0)}\right\},$$

$$\gamma_2 = -i\frac{e}{m}\frac{\omega_{Le}^2}{\omega\omega''\omega'^2}k' + i\frac{1}{4}\frac{e}{m}\frac{\omega_{Le}^4\omega_0^2}{\omega\omega''\omega'^2}k' r_E^2\,\frac{(\vec{k}'-\vec{k}_0)^2(\vec{e}\vec{\kappa}')^2}{(\omega'-\omega_0)^4\varepsilon^l(k'-k_0)}.$$

При получении этого ядра также считалось, что волна накачки является линейно поляризованной волной.

В качестве конкретных примеров рассмотрим два процесса образования второй гармоники при слиянии отраженной волны накачки с ленгмюровской волной, которая может быть волна l_s либо l_a. Оказывается удобным описывать спектральную линию гармоники $I_{n\omega 0/2}$ двумя параметрами: полушириной $\Gamma_{n\omega 0/2}$ и сдвигом максимума этой линии $\Delta\omega_{n\omega 0/2} = (n\omega_0)/2 - \omega_{n\omega 0/2}$. Интенсивность гармоники будем описывать коэффициентом преобразования волны накачки в гармонику, который определим как

$$K_{n\omega 0/2} = \frac{1}{E_0^2/8\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} W_{tr}^{n\omega 0/2}(\vec{k}). \tag{21}$$

Значения этих характеристик приведены в таблице 1. В этой же таблице указаны значения $\Delta\omega_{3\omega 0/2}$, $\Gamma_{3\omega 0/2}$ и $W_{3\omega 0/2}$, описывающие генерацию гармоники $(3/2)\omega_0$. Такая гармоника генерируется в области четверти критической плотности, т.е. при $\omega_0 \cong 2\omega_{Le}(x_q)$, за счет слияния отраженной волны накачки с высокочастотной электронной волной (плазмоном), которая возбуждается вследствие двухплазмонного распада. Ядро такого слияния имеет вид

$$Q_{3\omega 0/2}^{lt}(\vec{k}, \vec{k}') = [1 - (\vec{\kappa}\vec{e})^2]\{|\beta_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\beta_1 \beta_2^*) + |\beta_2|^2\}, \tag{22}$$

$$\beta_1 = -i\frac{e}{m}\frac{\omega_{Le}^2}{\omega\omega''\omega'^2} k',$$

$$\beta_2 = -i\frac{1}{4}\frac{e}{m} r_E^2 \frac{\omega_{Le}^4 \omega_0^2 (\vec{k} - \vec{k}_0, \vec{\kappa})(\vec{k}'' - \vec{k}_0)^2}{\omega\omega'\omega''(\omega - \omega_0)^3 (\omega'' - \omega_0)^2 \varepsilon^l (k - k_0)}.$$

Видно, что полуширина спектральных линий гармоник определена частотой столкновений электронов с ионами. Сдвиг максимума интенсивности спектральной линии второй гармоники в зависимости от процесса слияния может быть как положительным, так и отрицательным. Если гармоника генерится при слиянии $t_{\omega 0} + l_a \to t_{2\omega 0}$, то ее сдвиг положителен и определяется частотой столкновений, тогда как при слиянии $t_{\omega 0} + l_s \to t_{2\omega 0}$ максимум интенсивности смещен в красную сторону на частоту ионно-звуковой волны.

Таблица 1

ω		$\Delta\omega$	Γ	K
$(3/2)\omega_0$	$t+l \to t'$	$\frac{3}{4}\frac{V_{Te}^2}{c^2}\omega$	$\frac{3}{16}\nu_{ei}$	$\frac{3^4}{2^{12}\pi^2}R(p-1)\left(1+\frac{T_i}{T_e}\right)$
$2\omega_0$	$t+l_s \to t'$	$-\sqrt{3}\frac{V_{Te}}{c}\omega_{Li}$	$\frac{1}{6}\nu_{ei}$	$\frac{1}{32\pi_2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}R\frac{c}{V_s}\frac{\gamma_s}{\nu_{ei}}(k_0 r_{De})^{-1}p^2(p^2-1)^{3/2}$
$2\omega_0$	$t+l_a \to t'$	$\frac{1}{2}p^2\nu_{ei}$	$\frac{1}{16}\nu_{ei}$	$\frac{2^7}{3^8\pi}\sqrt{\frac{2}{3}}R\frac{k_0 c\omega_0}{\nu_{ei}}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2\left(1+\frac{T_i}{T_e}\right)p^{-9}(p^2-1)^{1/2}$

Здесь V_{Te} - тепловая скорость электронов, ν_{ei} - частота электрон-ионных столкновений, γ_s - декремент затухания ионнозвуковой волны, r_{De} - дебаевский радиус электрона, $T_{e(i)}$ - температура электронов (ионов).

При вычислении коэффициентов преобразования волны накачки в гармоники для спектральной плотности энергии продольных волн были использованы выражения, найденные в работах [3, 7].

Величина R является коэффициентом отражения волны накачки в критической точке, а спектральная плотность энергии отраженной волны накачки была выбрана в виде

$$W_{\omega 2}(\vec{k}) = \tfrac{1}{2}RE_0^2 k_0^{-2}\delta(k-k_0)\delta(\cos\vartheta).$$

Здесь k_0 – волновое число волны накачки, ϑ - угол между векторами $\vec{k}$ и $\vec{k}_0$.

Приведенные в таблице 1 характеристики могут быть использованы для интерпретации экспериментов по генерации гармоник в условиях, в которых надпороговость p, т.е. отношение поля волны накачки E_0 к порогу развития параметрической неустойчивости $E_{0пор}$, близка к единице, т.е. $p-1\le 1$.

Заключение

В данной работе в рамках статистической электродинамики сформулировано нелинейное уравнение (15) для спектральной функции электромагнитного поля флуктуаций в плазме, подвергающейся воздействию мощной волны накачки. Оказывается, что волна накачки, будучи причиной параметрических неустойчивостей, существенным образом влияет на среду, что отражено в перенормировке ядра $Q(\vec{k},\vec{k}')$ нелинейного уравнения, описывающего взаимодействие волн в среде.

В качестве конкретного приложения уравнения (15) рассмотрена генерация гармоник волны накачки параметрически турбулентной плазмой. Полученные характеристики: сдвиг максимума интенсивности спектральной линии, ее ширина, коэффициент преобразования накачки в гармонику – могут быть использованы дл определения параметров плазмы (например, ее температуры).

Литература

1. В.П.Силин. Параметрический резонанс в плазме. ЖЭТФ, 1965, **48**, 1679.
2. В.П.Силин. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., «Наука», 1973.
3. В.В.Пустовалов, В.П.Силин, В.Т.Тихончук. Нелинейное преобразование излучения в плазменные волны, ЖЭТФ, 1973, **65**, 1880; Нестационарная турбулентность параметрически неустойчивой плазмы, ЖЭТФ, 1974, **66**, 930.
4. Л.М.Горбунов, В.В.Пустовалов, В.П.Силин. О нелинейном взаимодействии электромагнитных волн в плазме. ЖЭТФ, 1964, **47**, 1437.
5. В.П.Силин, А.А.Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
6. В.В.Пустовалов, В.П.Силин. Труды Физического института им. П.Н.Лебедева АН СССР. Теория плазмы, т.61, М., «Наука», 1972.
7. В.В.Пустовалов, В.П.Силин. О нестационарной турбулентности плазмы при параметрическом резонансе. ЖТФ (в печати).[†]

[†] В.В.Пустовалов, В.П.Силин. О нестационарной турбулентности плазмы при параметрическом резонансе. ЖТФ, 1975, **45**, 2472.