

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**Физический**  
**ИНСТИТУТ**  
*имени*  
*П.Н.Лебедева*



**Ф И А Н**

В. РОЗАНОВ, Р. СТЕПАНОВ, А. НУЖНЫЙ, Р. ЯХИН,  
М. АНУЧИН, Н. ПРОНЧЕВА, Н. ЗМИТРЕНКО,  
Ю. ЯНИЛКИН, В. ТИШКИН

ПРЕПРИНТ

**28**

**СКОРОСТЬ РОСТА ЗОНЫ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ  
В ПРЯМОМ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ  
И ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ МНОГОМОДОВОЙ  
РЕЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

МОСКВА 2004

# Скорость роста зоны перемешивания в прямом численном моделировании и вейвлет-анализ развития многомодовой Релей-Тейлоровской неустойчивости

В.Розанов<sup>1</sup>, Р.Степанов<sup>1</sup>, А.Нужный<sup>1</sup>, Р.Яхин<sup>1</sup>, М.Анучин<sup>2</sup>,  
Н.Прончева<sup>4</sup>, Н.Змитренко<sup>4</sup>, Ю. Янилкин<sup>3</sup>, В. Тишкин<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Физический институт им. П.Н.Лебедева, РАН, Москва, Россия*  
*rozanov@sci.lebedev.ru*

<sup>2</sup> *РФНЦ-ВНИИТФ, Снежинск, Россия*  
*m.g.anuchin@vniitf.ru*

<sup>3</sup> *РФНЦ-ВНИИЭФ, Саров, Россия*  
*yan@md08.vniief.ru*

<sup>4</sup> *Институт Математического Моделирования, РАН, Москва, Россия*  
*zmitrenko@imatod.ru*

## Аннотация.

Проведено более 250 численных расчетов (DNS) неустойчивостей Релея-Тейлора (RT) и Рихтмайера-Мешкова (RM). Геометрия задач – 2D и 3D (10% от всех расчетов), начальные условия включают различные начальные амплитуды, модовый состав возмущений, различные числа Атвуда, а также различные статистические реализации однотипных начальных условий на основе случайного выбора фаз возмущений, входящих в задачу. На основе этой базы данных построена аналитическая модель развития зоны перемешивания, учитывающая информацию о начальных условиях возмущений. Второе направление использования базы данных связано с вейвлет-анализом распределений плотности. В этом подходе распределение плотности исследуемого варианта развития неустойчивости для выбранного момента времени представляется точкой в многомерном пространстве вейвлет-коэффициентов, а весь исследуемый вариант соответствует траектории в этом пространстве. Поведение таких траекторий изучают с помощью двумерных карт Кохонена. На основе их поведения можно построить программу, предсказывающую характеристики зоны перемешивания по информации о начальных данных.

Данная работа представляет изложение приглашенного доклада на 9 Международном семинаре по Физике турбулентного перемешивания сжимаемых сред, Кембридж, Англия, 19-23 июля 2004г.

Работа проведена при поддержке МНТЦ Проект-1481.

## Введение.

Для многих задач, связанных с развитием неустойчивостей, важным является прогноз развития перемешивания на основе информации о начальных условиях. В такой постановке эта проблема является актуальной, например, для задач устойчивости сжатия мишеней в ИТС (ICF). В рамках данной работы было проведено около 250 DNS развития и RT и RM неустойчивостей и перемешивания при различных условиях по амплитуде и спектру мод начальных возмущений, числам Атвуда. Для однотипных возмущений проведены расчеты при различном случайном выборе фаз возмущений. Геометрия задач – 2D и 3D (около 10%). Результатами расчетов являются функции  $f(x,z,t)$  для 2D задач и  $f(x,y,z,t)$  для 3D задач – поля плотности, компонент скорости, кинетической энергии, энтропии, размеры зоны перемешивания, масса перемешанного вещества. Расчеты были проведены по численным кодам NUT, MAX и EGAK [2-6], с помощью многочисленных тестовых расчетов было показано, что эти коды дают эквивалентные результаты. Ранее было выяснено, что расчеты по коду NUT удовлетворительно воспроизводят результаты экспериментов С.Зайцева по развитию RM неустойчивостей в ударной трубе [1]. Коды MAX и EGAK также имеют экспериментальные подтверждения. Информация, относящаяся к постановке задач, представлена на рисунках 1a и b, сравнение результатов численных расчетов по кодам NUT и EGAK представлено на рис.1с.

### Problem statement (1)

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T \quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{R}{\mu} T$$

Position of the contact boundary –

$$z(x) = \sum a_i \cos(k_i x + \varphi_i)$$

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{2\pi}{L} i, \quad i = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$$

Acceleration –  $g = 9.81 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$

Density field –  $\rho(x, z)$

Pressure field –  $P(x, z)$

Velocity components fields –  $u(x, z), w(x, z)$

Momentum components fields –  $P_x(x, z), P_y(x, z)$

Vorticity field –  $\Omega(x, z) = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$

Рис. 1a. Постановка задачи

## Problem statement (2)

Instabilities:	RT, RM, limited time of development		
Dimension:	2D and 3D		
Amplitudes:	$a_k^0 = a_0(k)$	}	$1. a_k^0 k = \text{const} \Rightarrow a_k^0 = \frac{\text{const}}{k}$ $2. a_k^0 = \text{const}$
Modes:	$N_{\text{max}} = 6, 8, 10, 12;$		$i = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$
Phases:	random choice on the interval $0 - 2\pi$		
Atwood number:	Ar/Xe $A = 0.532$ ;	He/Xe $A = 0.941$	
Total number of simulations:	250		
Physic values:	the kinetic energy:	$E_k = \int_{Z_{\text{min}}}^{Z_{\text{max}}} \int_{X_{\text{min}}}^{X_{\text{max}}} \rho \frac{u^2 + w^2}{2} dx dz$	
	$\int_{Z_{\text{min}}}^{Z_{\text{max}}} \int_{X_{\text{min}}}^{X_{\text{max}}} \rho w dx dz$	: z-component of a momentum	
the width of the mixing zone:	$L = Z_2 - Z_1$		
	$\int_{Z_{\text{min}}}^{Z_{\text{max}}} \int_{X_{\text{min}}}^{X_{\text{max}}} C \rho dx dz$	: the mass of heavy fluids involved into mixing	
the entropy:	$H = \frac{1}{2} \int_{Z_{\text{min}}}^{Z_{\text{max}}} \int_{X_{\text{min}}}^{X_{\text{max}}} \Omega^2(x, z, t) dx dz$		

Рис. 1b. Постановка задачи

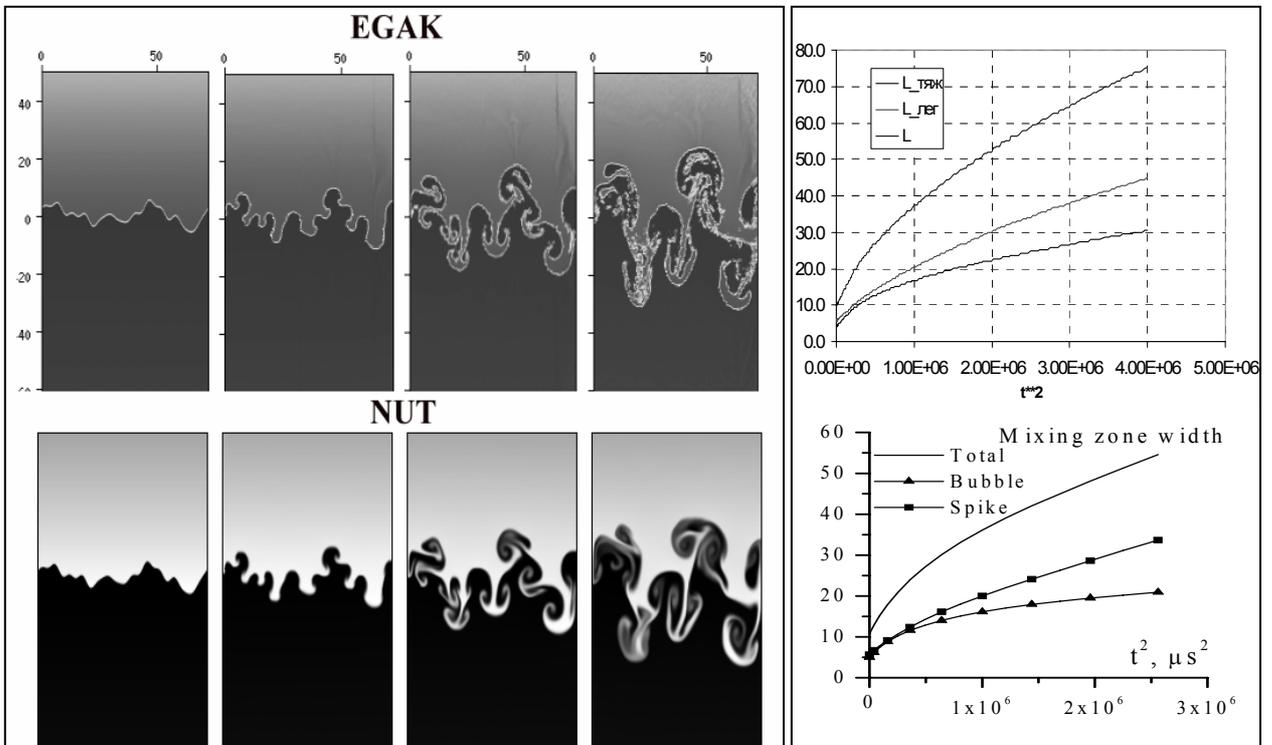


Рис. 1с. Сравнение результатов расчетов по кодам EGAK и NUT

## 1. Результаты численных расчетов.

Численные расчеты дают ответ на вопрос о влиянии начальной амплитуды возмущений и наличия в спектре высоких гармоник. Для номеров гармоник были использованы только простые числа 2,3,5,7,11,13,17... . Расчеты с числом гармоник  $N=6$  в качестве максимальной гармоники содержали моду  $n=13$ , при полном числе мод  $N=12$  высшей гармоникой была мода  $n=37$ . Начальные амплитуды были заданы либо по закону  $a_0 = \text{const}/k$  ( $k=2\pi/\lambda$ ), либо  $a_0 = \text{const}$ . Второй случай соответствовал начальным условиям с завышенным влиянием высоких гармоник. Результаты ряда расчетов, демонстрирующие эти зависимости, представлены на рисунках 2-7:

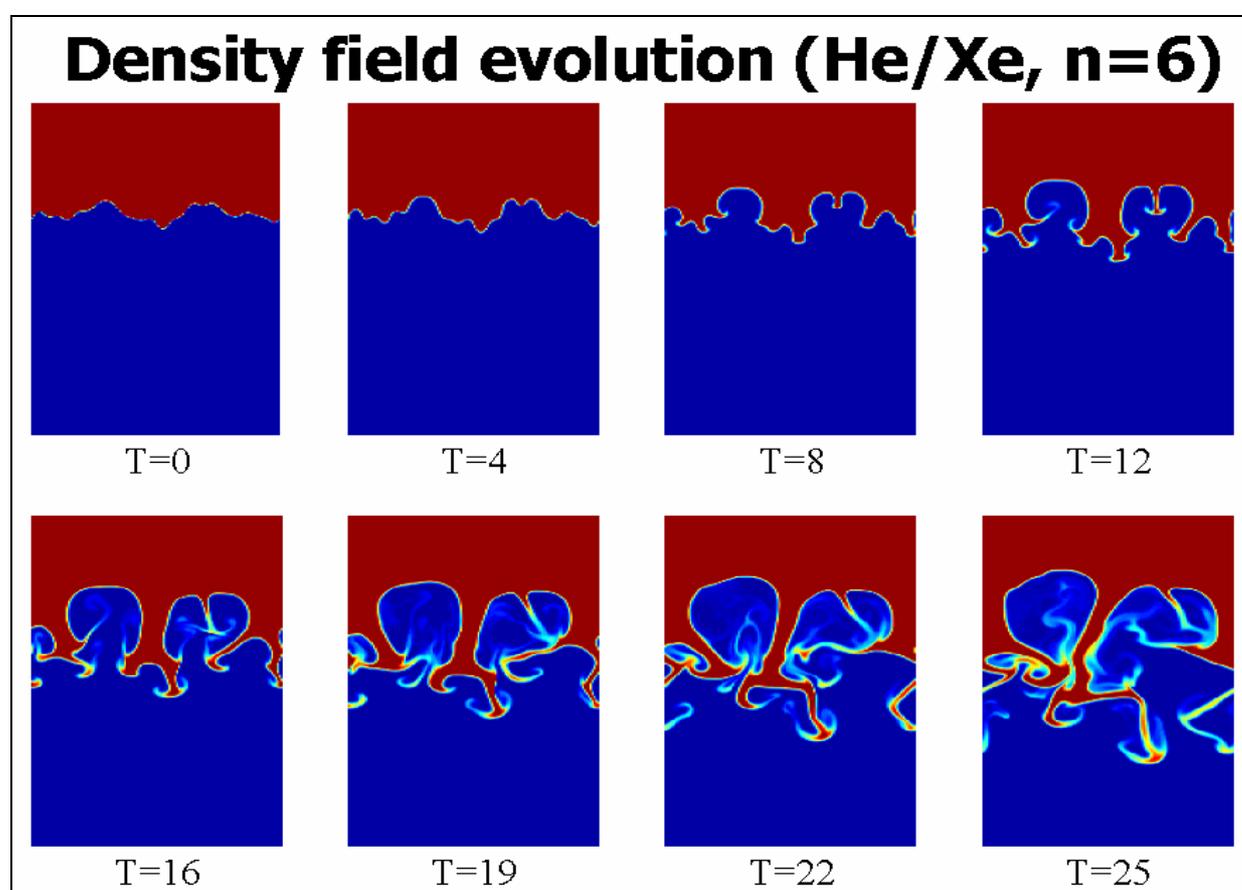
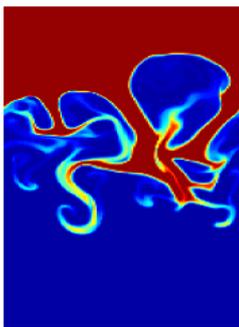
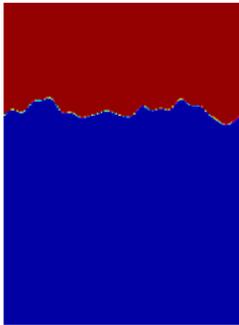


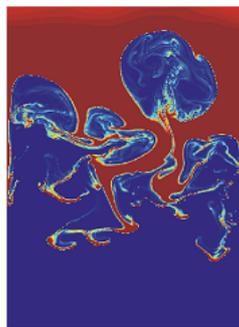
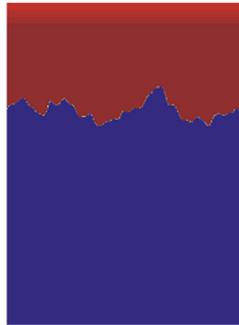
Рис.2. Эволюция поля плотности – результат расчета.

## Simulation examples<sup>(1)</sup> –RT

NUT He/Xe  
 $ak=0.5, n=6$



MAX He/Xe  
 $ak=0.8, n=10$



MAX He/Xe  
 $n=6, a=const, n=10$

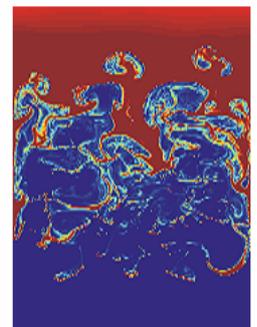
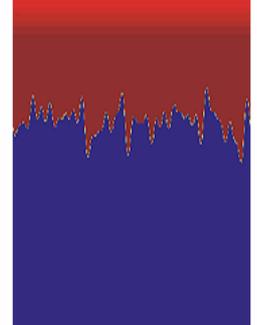
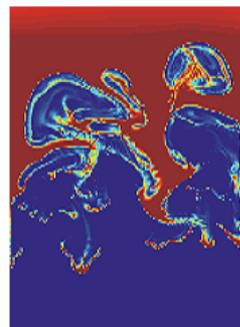
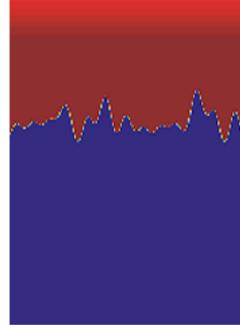
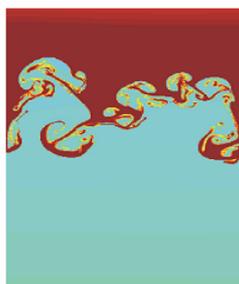
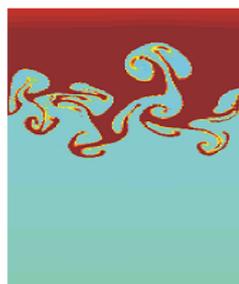


Рис. 3. Пример расчета РТ-неустойчивости, 2D,  $A=0,941$

## Simulation examples<sup>(2)</sup> –RT

MAX Ar/Xe  
 $n=6, ak=0.8, n=10$



MAX Ar/Xe  
 $n=6, a=const, n=10$

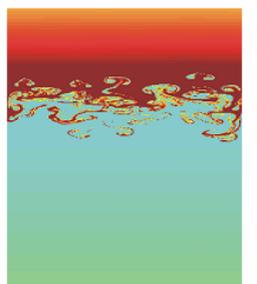
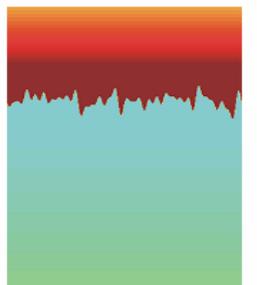
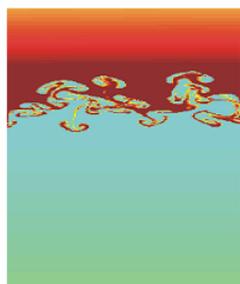
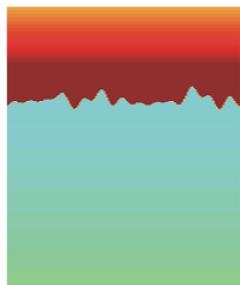


Рис. 4. Пример расчета РТ-неустойчивости, 2D,  $A=0,531$



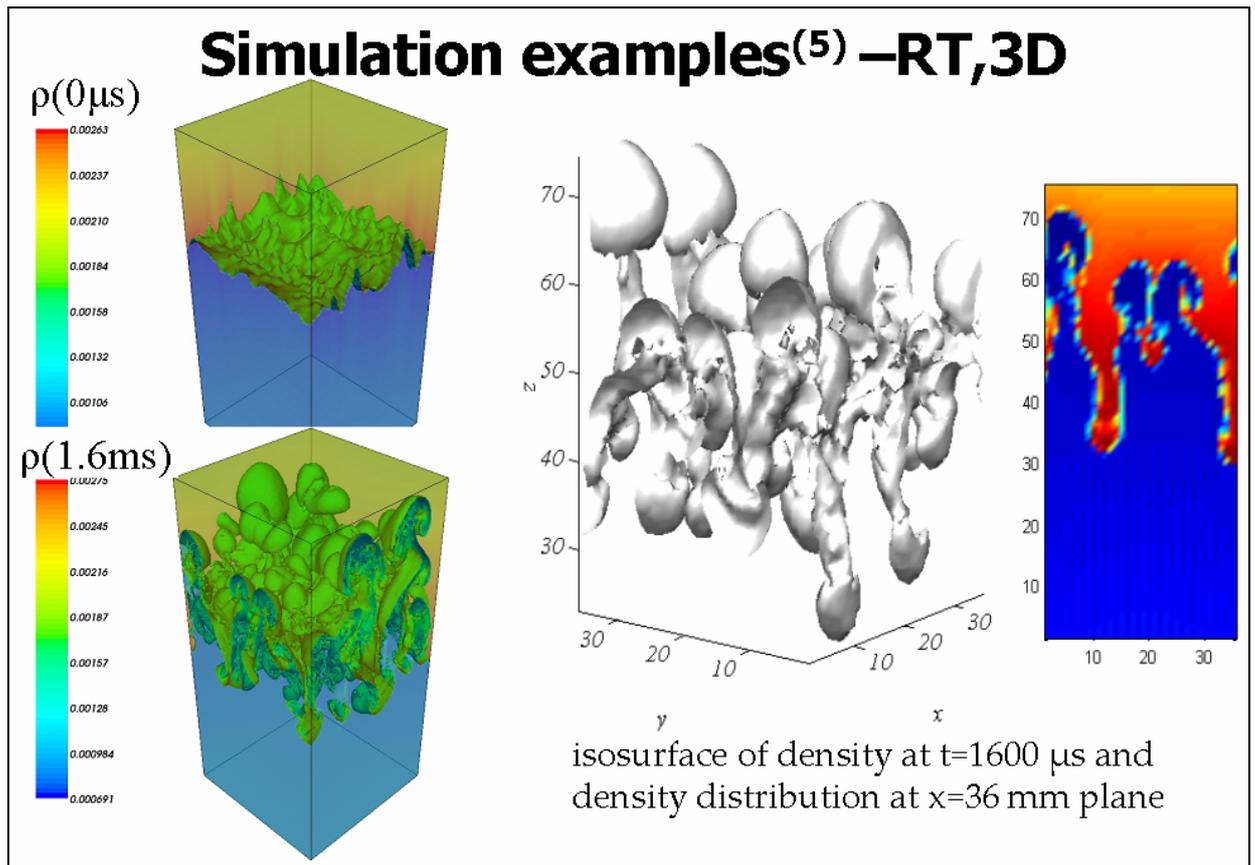


Рис. 7а. Пример расчета РТ-неустойчивости, код МАН, 3D,  $N=6$ ,  $A=0.531$

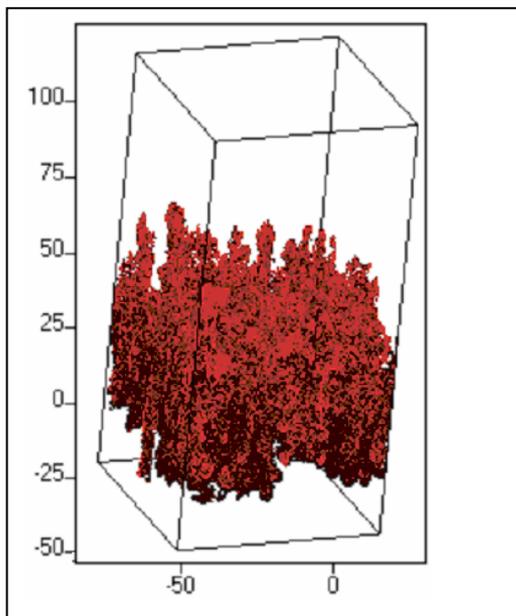


Рис.7б. Пример расчета РТ-неустойчивости, код EGAK, 3D, 1.2 мс,  $N=6$ ,  $A=0.531$

Поведение по времени при развитии РТ неустойчивости ряда величин для геометрий 2D и 3D ( $N=6$ ,  $A=0.531$ ) представлено на рис.8а и 8б.

## Integral values

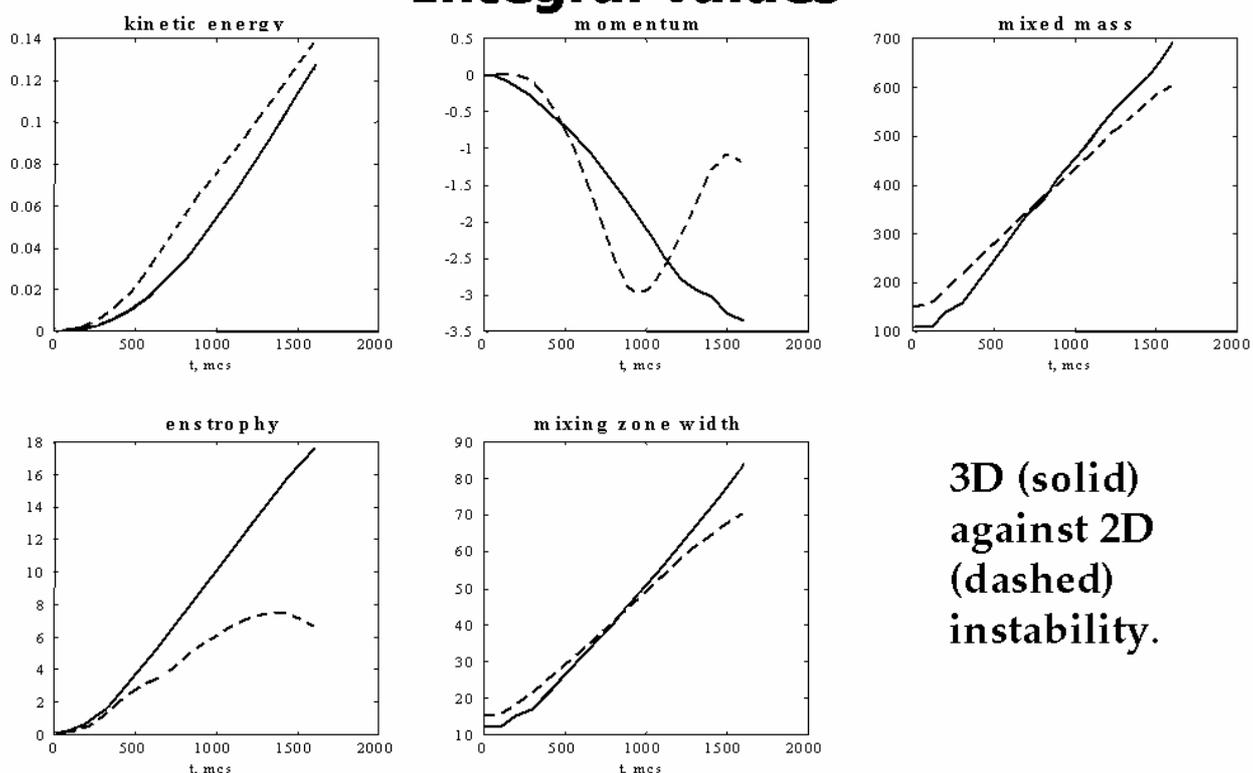


Рис.8а. Ширина зоны перемешивания и другие параметры в расчетах по коду МАН для 2D и 3D начального возмущения ( $N=6$ ,  $A=0.531$ ).

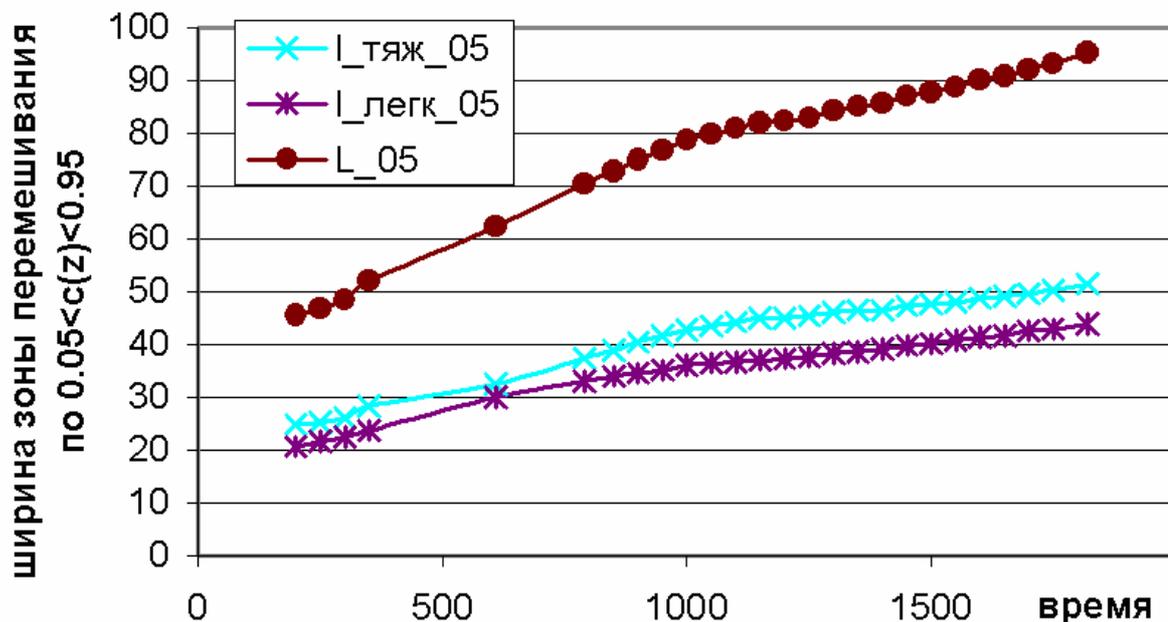


Рис.8б. Ширина зоны перемешивания в расчетах по коду EGAK для 3D начального возмущения ( $N=6$ ,  $A=0.531$ ).

Результаты этой части исследований кратко можно сформулировать следующим образом:

- на основе DNS создана обширная база данных по развитию неустойчивости и перемешивания двух газов при постоянном ускорении для режимов, отличающихся типом неустойчивости (RT и RM), геометрий (2D и 3D), числом Атвуда (0.941 и 0.532), различным числом учитываемых мод  $i$ , соответственно, максимальным номером наиболее короткой моды ( $n=13$  и  $n=37$ ), различными начальными амплитудами и зависимостью амплитуд от номера моды ( $a=\text{const}/k$  и  $a=\text{const}$ );
- на стадии, которая рассматривалась, ширина зоны перемешивания существенно зависит от амплитуды начальных возмущений и изменяется со временем по закону близкому к линейному;
- ширина зоны перемешивания слабо зависит от вклада высоких мод (несколько уменьшается при включении высоких мод);
- ширина зоны перемешивания для 2D и 3D случаев для близких условий оказывается близкой.

## 2. Скорость роста зоны перемешивания.

В случае развития многомодовых возмущений не существует простых аналитических соотношений, определяющих ширину зоны перемешивания в зависимости от начальных условий. На основе результатов DNS такую формулу можно предложить исходя из соображений правильных асимптотик в начале процесса и на более поздней стадии. В начале процесса при наличии высоких мод зона увеличивается со временем по квадратичному закону. Это следует из эволюционной модели развития неустойчивостей [6]. На поздней стадии скорость роста зоны стремится к постоянной предельной величине, которая определяется скоростью всплывания пузыря (шара) легкой жидкости. Размер пузыря определяется низшей гармоникой, получившей к данному моменту времени развитие (модель Layzer'a [7]). Гармоника с номером "i" увеличивает зону перемешивания на величину:

$$Li(t) = L_{oi} + \frac{\lambda_i f}{\alpha_{eff}} \left( \sqrt{1 + \frac{(\alpha_{eff} \gamma_i t)^2}{2\pi f}} - 1 \right)$$

$$\text{Здесь } \gamma_i^2 = \frac{2\pi}{\lambda_i} gA, \quad A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad f = \frac{v^2(A)}{A}, \quad \alpha_{eff} = \frac{\alpha_o \cdot \alpha^*}{\alpha_o + \alpha^*}, \quad k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}, \quad \alpha_o = k_i a_{oi}.$$

Согласно [6]  $\alpha^*$  определяет амплитуду, при которой экспоненциальный рост неустойчивости замедляется, т.к. образуется mushroom structure. Обычно для 2D задач  $\alpha_{2D}^* = 3 \div 5$ , для 3D задач  $\alpha_{3D}^* = 10 \div 20$ . При малых  $t$  и малых значениях  $a_o$  ( $\alpha_o < \alpha^*$ ) мы имеем  $\frac{dL_i}{dt} = a_o k_i g A t = a_o \gamma_i^2 t$ ,  $L_i \sim t^2$ ,  $\ddot{a} = \gamma^2 a$  в

соответствии с линейной стадией развития неустойчивостей при начальной скорости развития равной 0. При больших  $t$ ,  $\frac{dL_i}{dt} = v\sqrt{g\lambda_i}$ . В модели Layzer'a [7] эта скорость определяет предельную скорость всплывания легкого пузыря  $V_{lim} = v\sqrt{g\lambda_i}$ ,  $v(A)$ - коэффициент, зависящий от геометрии задачи и числа Атвуда  $A$ : например,  $v_{3D}(1) = 0.23$ . В формуле для  $\frac{dL_i}{dt} = v\sqrt{g\lambda_i}$  коэффициент  $v$  учитывает и скорость всплывания легкого пузыря и более высокую скорость падения тяжелой струи, обычно для 2D задач этот коэффициент достигает значений  $0.75 \div 1$ , для 3D задач  $v \cong 1-1.3$ . Ширина зоны определяется вкладом всех гармоник, однако их вклад различен и меняется со временем. В случае одной гармоники  $L(t) = 2a(t)$ . В данный момент времени длинноволновые возмущения могут давать вклад  $\approx 2a$ , при этом коротковолновые возмущения будут играть меньшую роль. Ширину зоны можно представить в виде:

$$L(t) = \sum_i L_i(t)w_i(t), \quad (1)$$

где  $w_i(t)$  – весовой коэффициент, определяющий вклад данной гармоники. В начальный момент  $w_i(0)$  определяется случайной фазой данного возмущения:

$$w_i(0) = \cos(k_i x_{max} + \varphi_i) - \cos(k_i x_{min} + \varphi_i) \quad (2)$$

и, в частности, может быть  $w_i(0) \cong 2$ . Из последнего соотношения видно, что ширина зоны определяется по максимально “высокому” положению легкой жидкости и минимально «низкому» положению тяжелой жидкости. В дальнейшем  $w_i(t)$  уменьшается, что соответствует разрушению данной моды неустойчивости за счет развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [7]. Поведение  $w_i(t)$  можно приближенно представить зависимостью:

$$w_i(t) = w_i(0)e^{-t(\gamma_{KH})_i} \sim e^{-\frac{1}{2}k_i a_i \sqrt{1-A^2} t} \sim e^{-\frac{1}{4}k_i a_i^0 (\gamma_{RT} t)^2 \sqrt{1-A^2}}$$

Здесь:

$$(\gamma_{KH})_i = k_i v_i \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}, \quad v_i t = \frac{a_i^0}{2} \left[ e^{(\gamma_{RT})_i t} + e^{-(\gamma_{RT})_i t} \right] = a_i^0 \left[ 1 + \frac{(\gamma_{RT} t)^2}{2} \right]$$

$v_i$  – скорость роста струи тяжелой жидкости в РТ неустойчивости гармоники "i".

Величины  $\gamma_{KH}$  и  $\gamma_{RT}$  зависят от волнового вектора  $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{2\pi}{L} n_i$  и, тем самым, зависят от номера гармоники “ $i$ ”, который в этих формулах не везде отмечен. Видно, что вклад в ширину зоны гармоники с номером  $n_i$  убывает тем быстрее, чем больше ее номер  $n_i$ . Если спектр начальных возмущений  $k_i a_i^0 = \text{const}$ , то  $w_i(t) \sim e^{-c_1 n_i}$ . Если же начальные возмущения соответствуют закону  $a_i^0 = \text{const}$ , то  $w_i(t) \sim e^{-c_2 n_i^2}$ . Опираясь на эти представления, мы провели расчеты ширины зоны перемешивания по формуле (1), при этом веса  $w_i(t)$  определялись в соответствии с приведенной выше моделью. В другом варианте веса  $w_i(t)$  подбирались, исходя из лучшего совпадения  $L(t)$  с результатами DNS.

При этом выяснилось, что на поздних стадиях вклад высоких гармоник не равен нулю, и его желательно учесть. На стадии перемешивания высокочастотные моды дают вклад в ширину зоны перемешивания, для 2D геометрии масштаб вклада  $a_{mix} \cong (3 \div 5) \lambda / 2\pi$ , для 3D геометрии  $a_{mix} \cong (10 \div 20) \lambda / 2\pi$  [6]. Оба варианта выбора  $w_i(t)$  дают достаточно близкие результаты, что подтверждает целесообразность использования и определенную «законность» приведенных выше соображений. Некоторые результаты сопоставления данных DNS по ширине зоны и расчета  $L(t)$  и поведения коэффициентов  $w_i$  приведены на рис.9 и 10. Представляется очевидным, что с помощью соотношения типа (1) можно весьма точно воспроизвести результаты DNS. Более важный вывод состоит в том, что основной вклад в ширину зоны перемешивания дают длинноволновые возмущения, получившие развитие к данному моменту. Поскольку для этих возмущений величина  $(\gamma_{RT})_i t$  достигает меньших значений, их эволюцию проще рассчитать с помощью DNS или оценить, используя аналитические модели, например, [7].

Для теории оказалось важным ограничение со временем уменьшения множителя  $e^{-\gamma_{KH} t} = e^{-\frac{\gamma_i^2 t^2}{l_i^2}}$ , где  $l_i$  – подгоночный параметр. Это ограничение выражает тот факт, что возмущение после разрушения (достижения «критического возраста») продолжает вносить вклад в ширину зоны. На рис. 9 изображены две теоретические кривые  $L(t)$  по сравнению с расчетной для случая неустойчивости Релея-Тейлора, пара газов Ar-Xe, 6 гармоник с постоянным начальным возрастом  $\alpha_0 = 0.5$ . Кривая «1» соответствует случаю убывания весов без ограничений, кривая «2» - выходу экспоненциального сомножителя на константу, равную  $0.9/i^2$ , где  $i$  – номер гармоники. Поведение весов при этом иллюстрируют рис. 10а (для первой и второй гармоник) и рис. 10б (для пятой и шестой гармоник). Здесь маркерами помечены линии, соответствующие убыванию весов без ограничений.

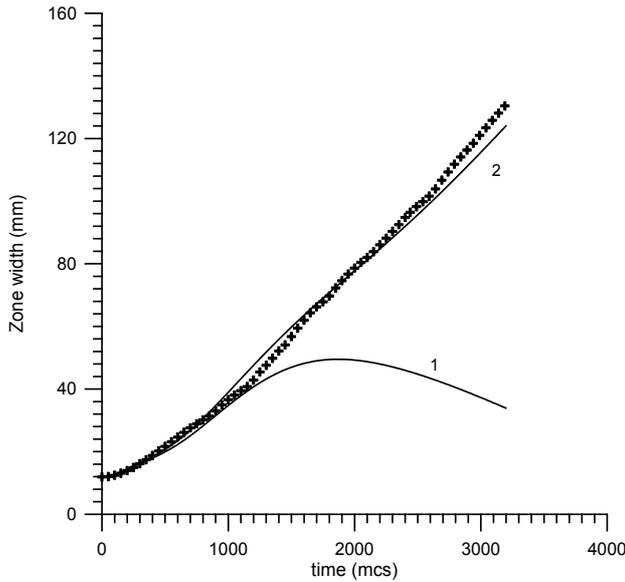


Рис. 9. Зависимости  $L(t)$  для двух вариантов коэффициентов  $w_i(t)$  рис. 10. “+” соответствуют результатам DNS

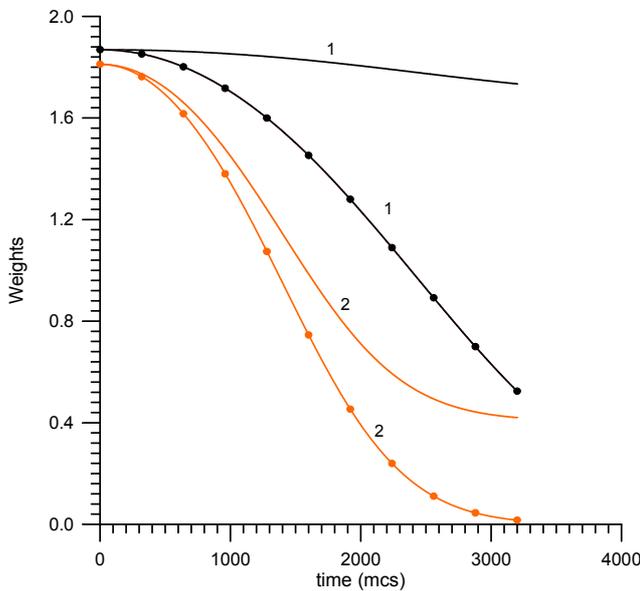


Рис. 10а. Поведение коэффициентов  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$  для кривых 1 и 2 рисунка 9.

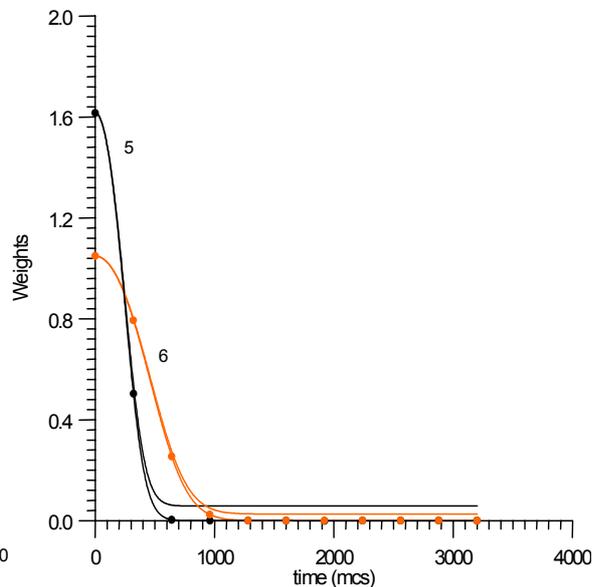


Рис. 10б. Поведение коэффициентов  $w_5(t)$  и  $w_6(t)$  для кривых 1 и 2 рисунка 9

### 3. Вейвлет-анализ

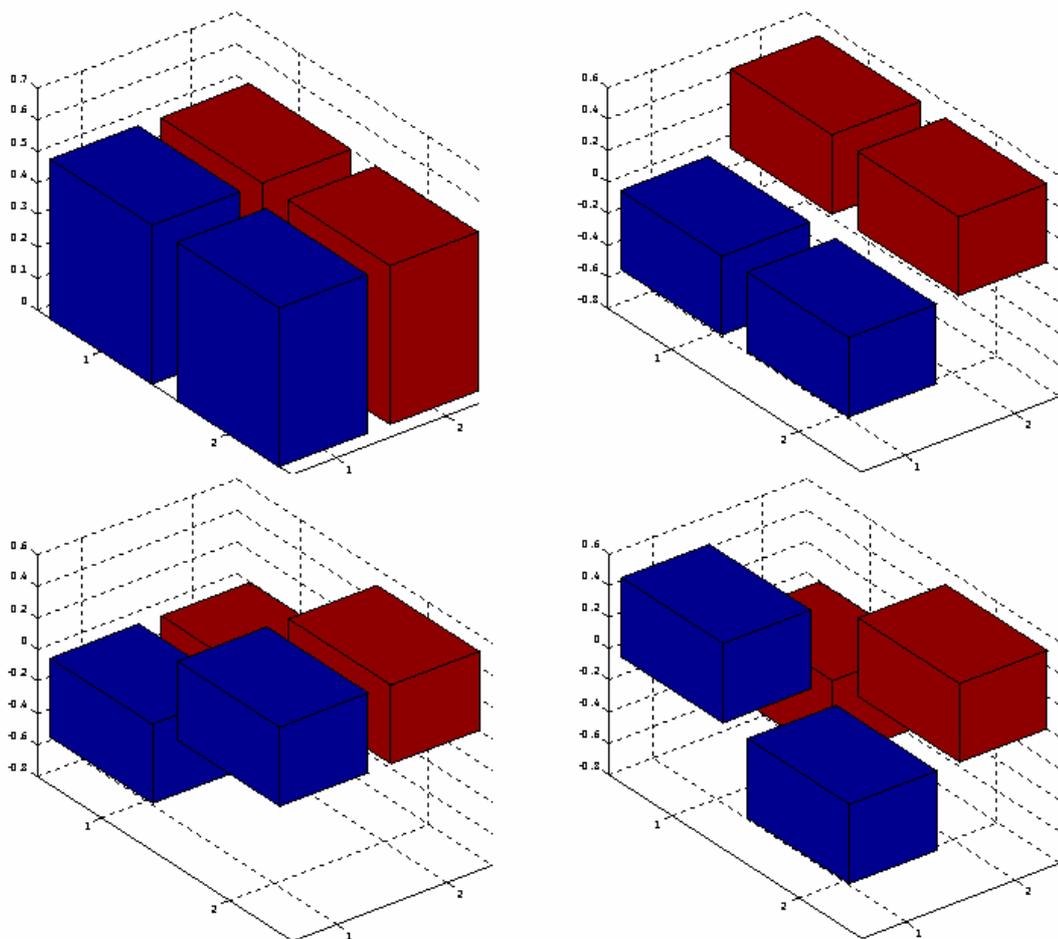
В разделе 2 представлены результаты DNS развития процессов неустойчивости (RT и RM) на стадии образования слоя перемешивания. Разнообразие расчетов, связанное с различием задач (геометрия, тип неустойчивости, число Атвуда, спектр возмущений, начальные условия, различные статистические реализации, различные коды), увеличивается еще за счет того, что каждый расчет содержит последовательность результатов для  $10^4$ - $10^5$  моментов времени. Если для каждого расчета выбрать только 40

моментов времени, то возникает база данных из  $250 \times 40 \sim 10^4$  образов, содержащих информацию об изучаемых процессах.

Для анализа этой информации были применены нейрокомпьютерные методы, не использующие каких-либо априорных сведений об изучаемых процессах [8, 9].

Была разработана и реализована следующая схема:

1. В каждом расчете развития неустойчивости и перемешивания с определенными начальными условиями для 26 моментов времени ( $T_0, T_1 \dots T_{25}$ ) выбиралось распределение плотности тяжелой и легкой жидкостей в пространстве  $x, z$  -  $\rho(x, z, T_i)$  - поле плотности;
2. Поле плотности подвергалось вейвлет преобразованию, т.е. находились коэффициенты вейвлет-разложения по стандартной процедуре:



## Wavelet-decomposition of density field

$$\rho = \sum c_i \psi_i \quad c_i = \int \rho \psi_i dx dz$$

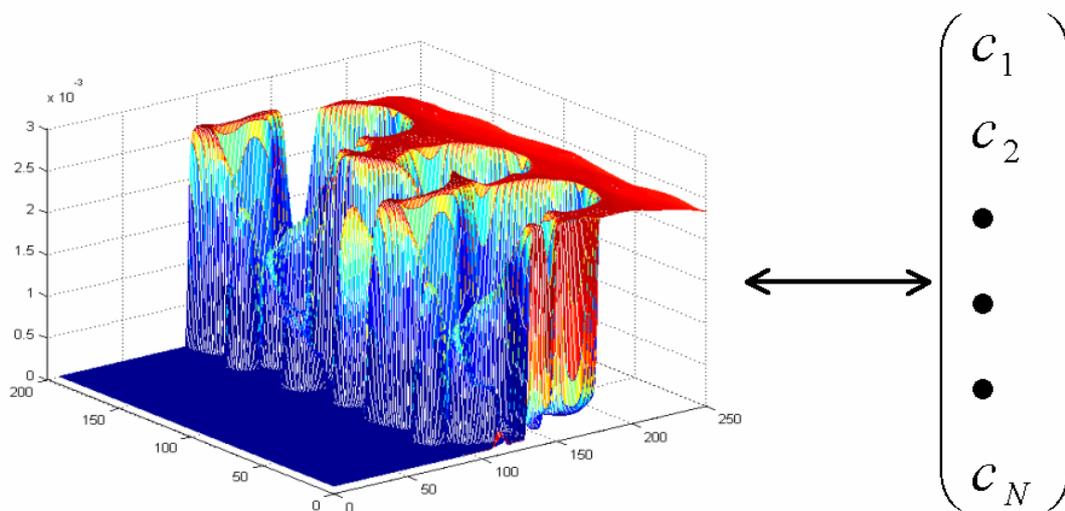


Рис. 11. Вейвлет D1 и декомпозиция поля плотности

$$\rho(x, z, T_i) = \sum C_{mm'n'}^{T_i} \psi_{mm'n'}$$

$$C_{mm'n'} = \iint \rho(x, z, T_i) \psi_{mm'n'}(x, z) dx dz, \quad \psi_{mm'n'} = \psi(x_{nm}, z_{n'm'}) \quad \text{вейвлет функция,}$$

в которой координаты подвергаются масштабному и сдвиговому преобразованиям:

$$x_{nm} = \frac{x - b_{nm}}{a_m}, \quad z_{n'm'} = \frac{z - b_{n'm'}}{a_{m'}}.$$

В результате данное поле плотности задается набором (множеством) коэффициентов  $C_{mm'n'}^{T_i}$ .

3. Поскольку имеется много вейвлет представлений, в рамках описанной выше схемы испытывались различные варианты. Была разработана процедура расчета энтропии представления [10], характеризующей «разбегание» расчетов из начального состояния («больше энтропия» – «менее информативное представление»). Оказалось, что наилучшее представление дают вейвлеты Daubechi1 (D1). Вейвлеты D1 используют наиболее «локальное» описание объекта. Возможно, что это не случайно, т.к. потенциальность течения приводит к «затуханию» по закону  $\sim e^{-k \cdot \Delta r}$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  информации, поступающей «издалека» – с расстояния  $\Delta r$ .
4. В пространстве коэффициентов  $C_{mm'n'}^{T_i}$  данный момент времени какого-либо расчета изображается точкой, а весь расчет соответствует траектории в этом пространстве. Размерность пространства высока, она определяется размером наименьшей ячейки сетки расчета, в нашем случае число ячеек составляло 130x250. Далее использовались процедуры понижения размерности пространства [11], среди которых наиболее содержательным является метод главных компонент. Основная информация сохранялась при снижении размерности до 200 компонент и даже до 40 и 17. «Информация сохранялась» – означает в нашей задаче, что по вейвлет коэффициентам можно восстановить исходную картину плотности без существенных потерь информации. Возможно, что в других задачах (например, определение спектра турбулентности) отбрасывание высокочастотных компонент и уменьшение размерности пространства окажутся неэффективными.
5. Удобным является представление процессов (результатов расчетов процессов неустойчивости) на двумерной карте Кохонена [13], координаты которой оказываются близкими к первой и второй главным компонентам (ПГК и ВГК).

6. Используя тот факт, что траектории, выходящие вначале из одной области (кластера) на карте Кохонена, остаются близкими на поздних стадиях, удастся построить программный блок, предсказывающий параметры зоны перемешивания на основе информации о начальных данных.

На рисунках 11-17 представлены некоторые результаты, иллюстрирующие этот раздел. На рис. 11 показана структура вейвлета D1 и схема разложения поля плотности по вейвлет функциям. На рис.12 приведены примеры восстановления поля плотности при использовании различного числа компонент. На рисунках 13-15 представлены результаты, относящиеся к использованию карт Кохонена в представлении D1. На рис.13 карта расположена так, что сверху вниз увеличивается первая главная компонента (ПГК), а справа налево – вторая (ВГК). Общая тенденция расчетов такова: с ростом времени и ширины зоны перемешивания практически монотонно увеличивается значение ПГК; началу процесса соответствует определенное значение ВГК, в дальнейшем (с увеличением времени) это значение ВГК приближенно сохраняется. На рис. 14 представлены конечные состояния расчетов, траектории которых идут в левой, средней и правой частях карты Кохонена, т.е. при различных значениях ВГК. В представленных парах, выбранных компьютером,

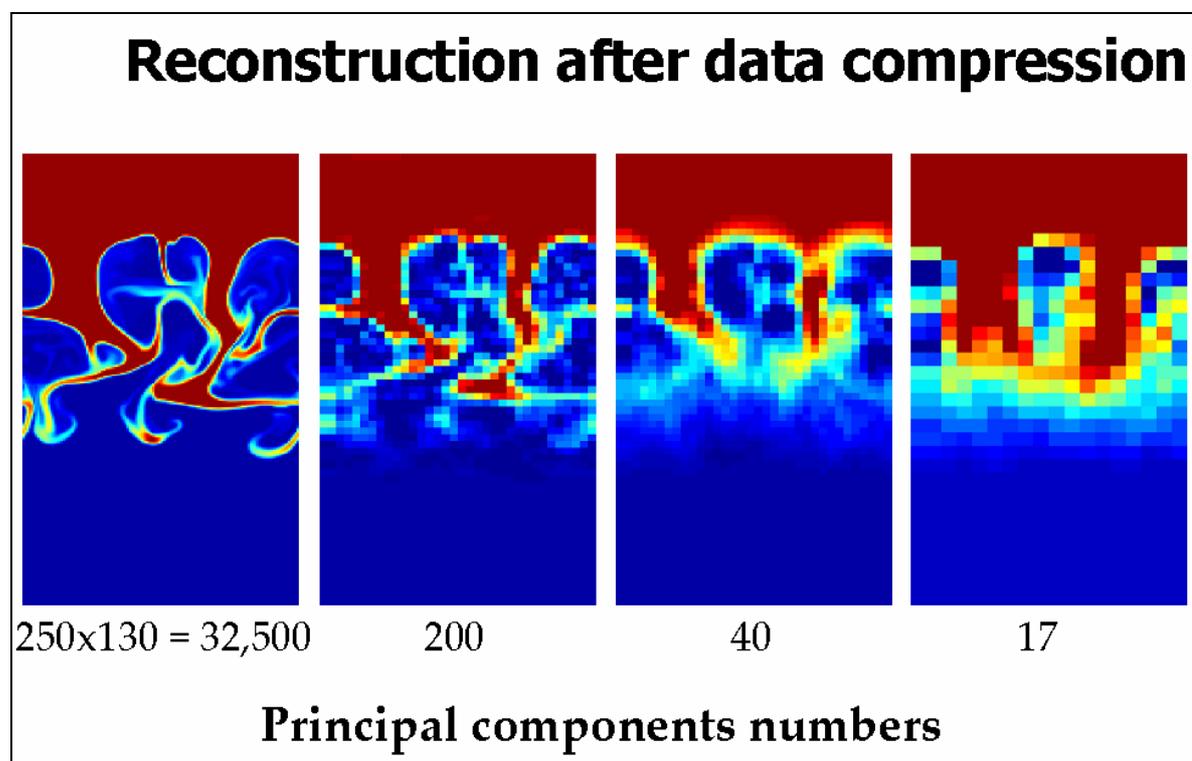


Рис. 12. Реконструкция картины распределения плотности при различном числе сохраненных главных компонент

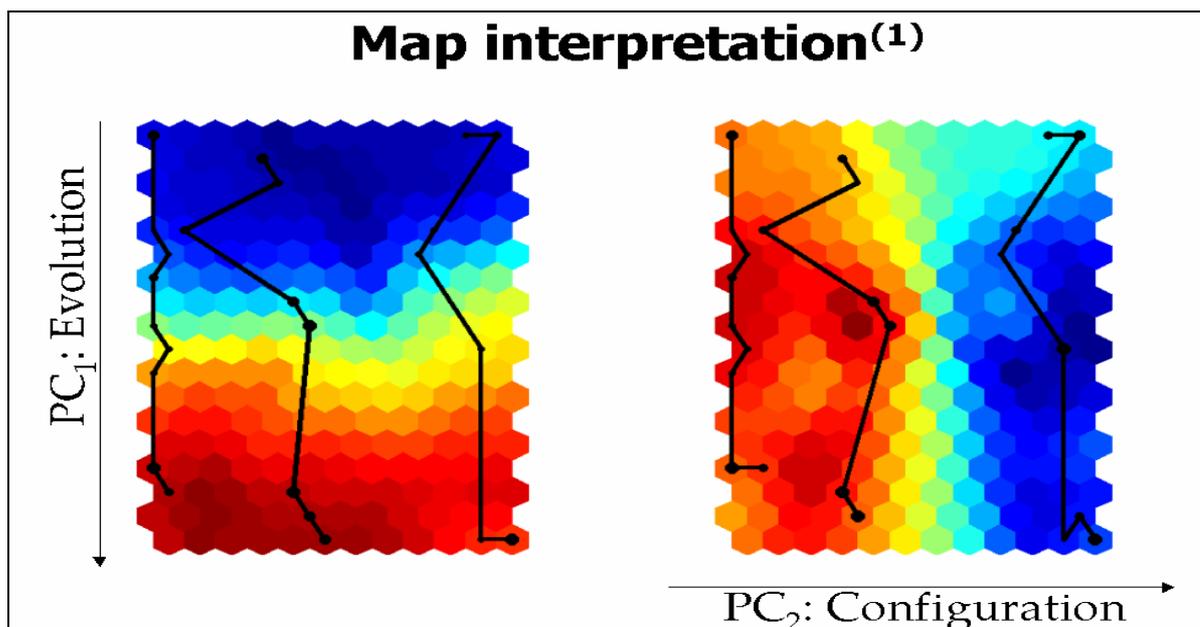


Рис. 13. Интерпретация карты Кохонена

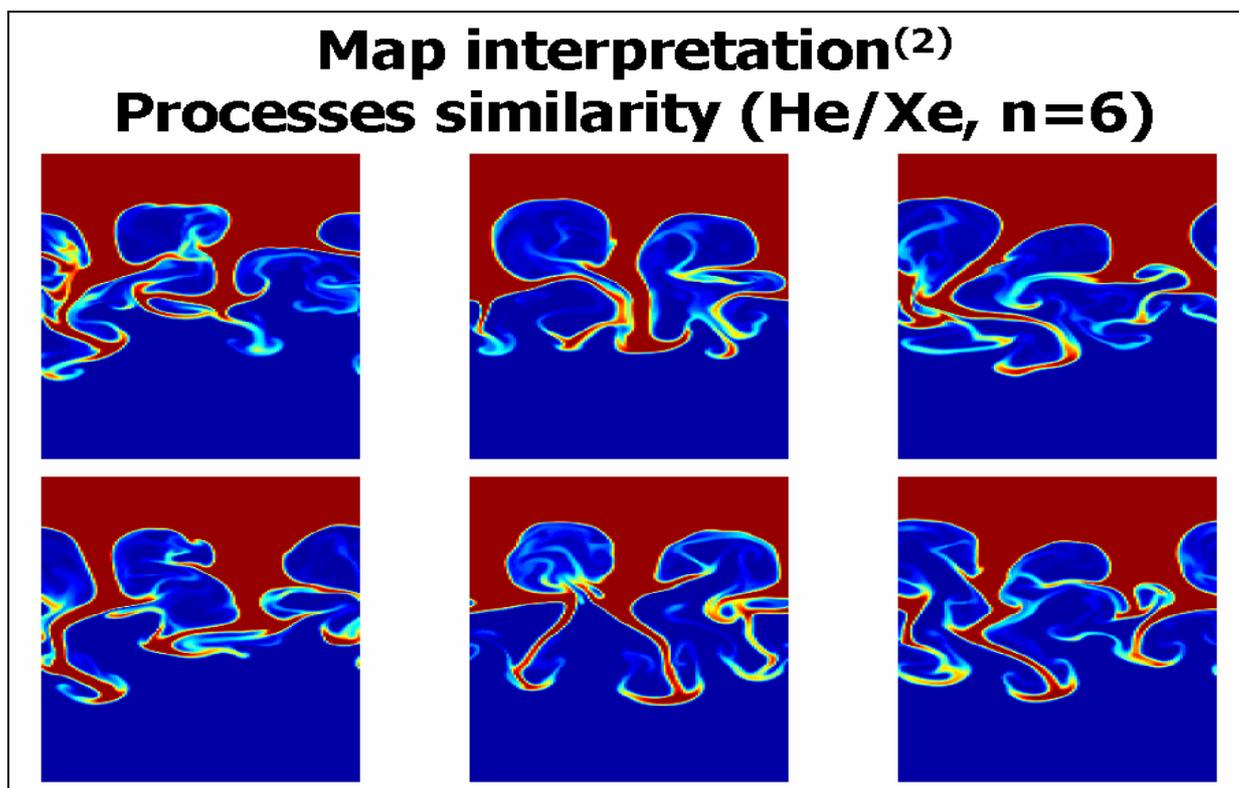


Рис.14. Карта Кохонена – сходство процессов

можно обнаружить сходство структур. Для определенности отметим, что эти расчеты выполнены по коду NUT. Они представляют развитие 6-модовых возмущений пары газов Xe/He при значении  $a_{0k}=0.5$  и различных случайных выборках начальных фаз возмущений. Рисунок 15 демонстрирует карту Кохонена в представлении D1, построенную по расчетам пяти видов:

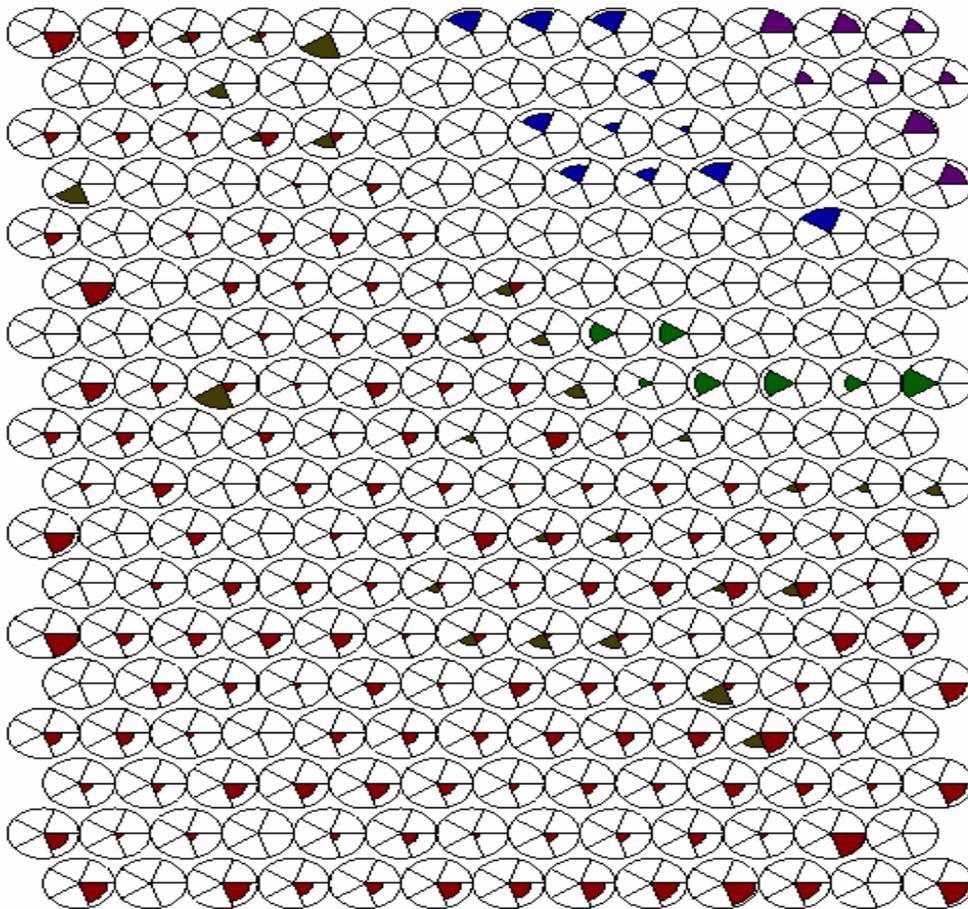


Рис. 15. Карта Кохонена в представлении D1 содержит расчеты 5 разных видов (см. текст). Каждый кластер разделен на 5 секторов, начиная с правого нижнего (на 5 часов) и далее по часовой стрелке. Заполнение сектора в каждом кластере отражает число расчетов соответствующего вида, попавших в кластер.

1. Программа NUT, начальные возмущения для различных мод уменьшаются по закону  $a_{o\kappa} = 0.5$ , расчеты выполнены для пары газов He/Xe,  $A = 0.941$ .
2. Программа MAX, начальные возмущения уменьшаются по закону  $a_{o\kappa} = 0.8$ , He/Xe,  $A = 0.941$ .
3. Программа MAX, начальные возмущения подчиняются закону  $a_o = \text{const}$ , He/Xe,  $A = 0.941$ .
4. Программа MAX, закон  $a_{o\kappa} = 0.8$ , газы Ar/Xe,  $A = 0.532$ .
5. Программа MAX,  $a_o = \text{const}$ , Ar/Xe,  $A = 0.532$ .

Как видно из выбора расчетов, имеются возможности сравнить различные математические коды на базе однотипных расчетов, увидеть влияние числа Атвуда и оценить роль повышенного вклада высокочастотных гармоник в задачах с  $a_o = \text{const}$ .

Каждое место на карте (кластер) содержит информацию о каждом типе расчетов в виде круговой гистограммы, сектора в которых нумеруются по часовой стрелке в последовательности 1,2,3,4,5, начиная с сектора на 5 часов. Заполнение сектора гистограммы пропорционально числу расчетов данного типа, попавших в данный кластер. Сравнение расчетов #1 и #2 (коды NUT и MAX) показывает, что они расположены в одной области карты, что можно трактовать как подтверждение идентичности результатов, полученных по различным кодам. Разумеется, еще на стадии тестовых расчетов мы убедились в том, что использованные коды дают идентичные результаты. Сравнение расчетов #1,2 и #3 ( $a_{o\kappa}=\text{const}$  и  $a_o=\text{const}$ ) показывает, что расчеты #3 занимают обособленную часть карты, и в пространстве вейвлет-представлений протекают изолированно от других типов расчетов. Это свойство можно использовать для распознавания процессов с большим вкладом высоких гармоник. Расчеты #4 и #5 ( $A=0.532$ ,  $a_{o\kappa}=\text{const}$  и  $a_o=\text{const}$ ) занимают свою часть карты, отличную от области  $A=0.941$ , и при этом случаи  $a_{o\kappa}=\text{const}$  и  $a_o=\text{const}$  также изолированы друг от друга. Расчеты с различными  $A$  (0.941 и 0.532) разделены пустой областью карты (не содержащей никаких расчетов). Было бы интересно выяснить заполняется ли эта область расчетами (процессами) с  $0.532 < A < 0.941$ , соответствующим парам газов с другим (нежели Ag/Xe или He/Xe) отношением плотности.

Исключительно интересным представляется вопрос о физической интерпретации главных компонент. Из-за высокой размерности вейвлет пространства наглядная интерпретация главных компонент оказывается сложной. Однако удается построить функции, которые дают возможность такой интерпретации. Эти функции при их свертке с распределением плотности для данного момента времени  $T_j$ .  $\rho(x,z,T_j) = \rho_j(x,z)$  дают значение главной компоненты (первой, второй и т.д.), их можно назвать функцией фильтра  $F_i$ . С помощью этих функций значение "i" главной компоненты с номером "i" с момента времени "j"  $(PC)_i^j$  получается по формуле:

$$(PC)_i^j = \rho_j F_i - \bar{c}_k U_{ki} = \int \rho_j(x,z) F_i(x,z) dx dz - \sum_k C_k U_{ki},$$

где  $C_k$  - коэффициенты вейвлет разложения,  $C_k = \rho \psi_k$ . Для выбранного вейвлет представления  $\psi_k$  наборов коэффициентов  $C_k$  столько, сколько анализируется отдельных картин распределения плотности с учетом различных типов расчетов и моментов времени (пусть число таких картин равно  $D$ ). Эти коэффициенты будем различать индексом  $\alpha$  -  $C_k^\alpha$ ,  $1 < \alpha < D$ . По индексу  $\alpha$  можно определить среднее значение коэффициента  $\bar{c}_k$  и дисперсию коэффициентов  $\sigma_{ij}$ :

$$\bar{c}_k = \frac{1}{D-1} \sum_{\alpha=1}^D C_k^\alpha$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{D-1} \sum_{\alpha=1}^D (C_i^\alpha - \bar{c}_i)(C_j^\alpha - \bar{c}_j)$$

## Interpretation of principal components<sup>(2)</sup>

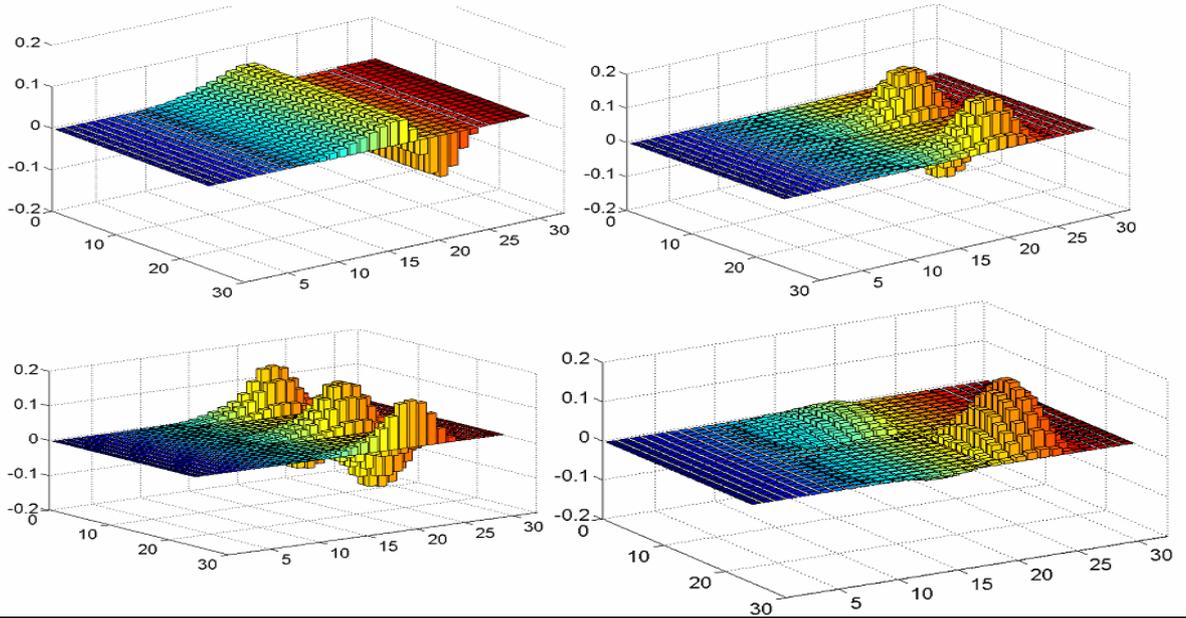


Рис. 16. Фильтр  $F_i(x,z)$  для первых четырех главных компонент - Daubechy 1

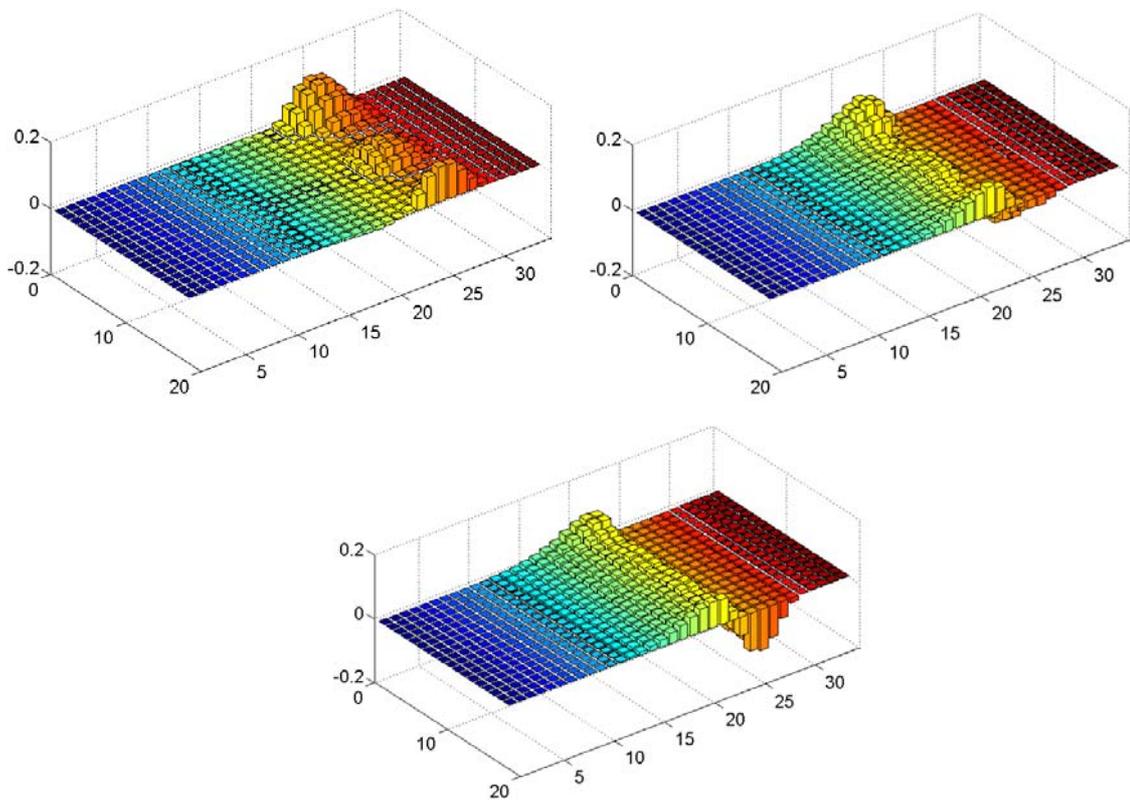


Рис. 17. Фильтр  $F_i(x,z)$  для главных компонент 1 и 2 - Daubechy 2 (D2) и их линейная комбинация  $F_2 - F_1$

Матрица  $U_{ki}$  является матрицей поворота, которая диагонализует матрицу дисперсии  $\sigma_{ij}$ , с помощью  $U_{ij}$  можно построить функцию фильтра  $F_i$  :

$$\sum_j \sigma_{ij} U_{jk} = \lambda U_{ik} \quad ; \quad F_i = \sum_k \psi_k U_{ik}$$

На рис. 16 и 17 приведены фильтры  $F_i(x,z)$  для первых четырех главных компонент в представлении D1 и двух компонент для D2 (Daubechuy 1,2). Из этих рисунков следует, что за описание движения газов сверху вниз (в направлении ускорения  $g$ ) в основном ответственен фильтр  $F_1$  для D1 представления и линейная комбинация фильтров  $F_1$  и  $F_2$  для D2 представления (а именно,  $F_2 - F_1$ , эта комбинация оказывается весьма похожей на функцию  $F_1$  для D1). Остальные фильтры (анализировались фильтры до  $i \leq 17$  и  $i \leq 40$ ) в основном ответственны за описание перетекания жидкости в направлении "x", причем, чем больше "i", тем меньше масштаб, в котором происходит перетекание. Отмеченное выше примерное сохранение второй главной компоненты (ВГК) соответствует отсутствию заметного перетекания жидкости в направлении "x". На рис.18 приведены графики зависимости первой главной компоненты от времени  $(PC)_1^j$  вместе с шириной зоны и массой в зоне перемешивания. Рисунок 18 для зависимости от времени  $(PC)_1^j$  демонстрирует близость понятий «ширина зоны», «внедренная масса», «первая главная компонента».

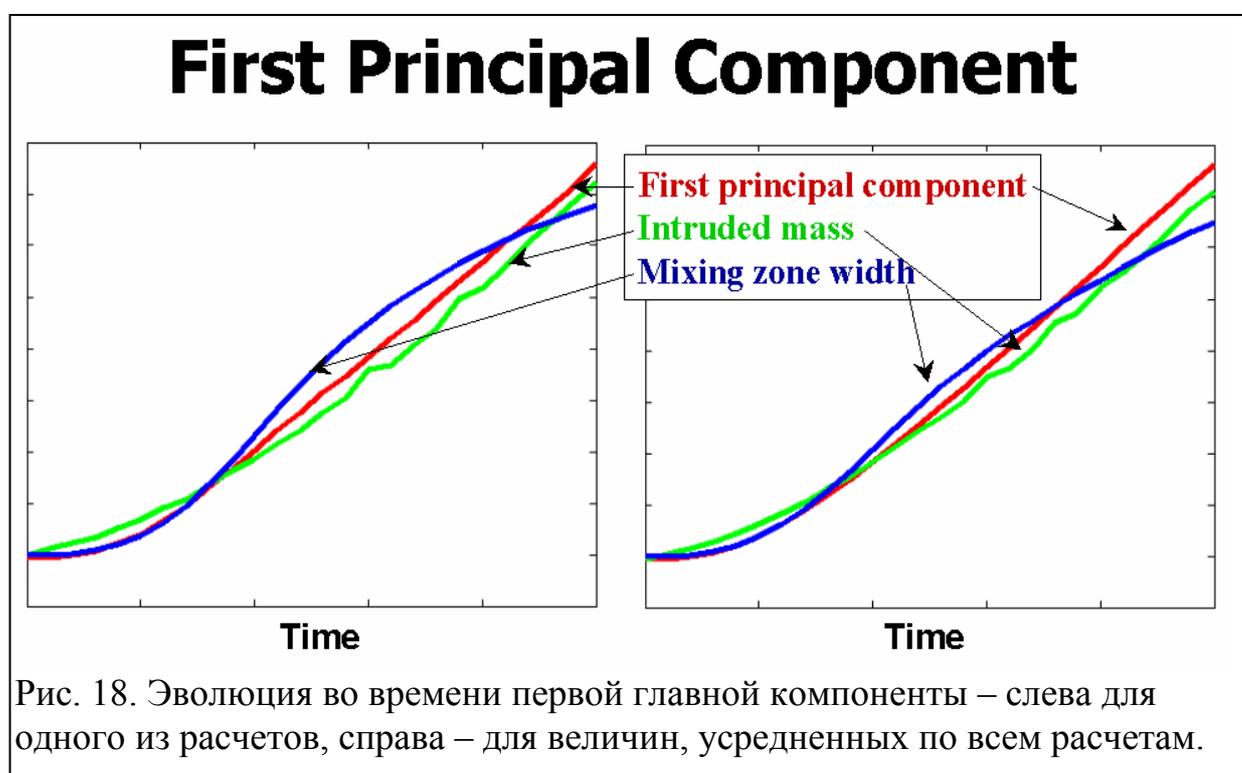


Рис. 18. Эволюция во времени первой главной компоненты – слева для одного из расчетов, справа – для величин, усредненных по всем расчетам.

Дальнейшие исследования интерпретации главных компонент представляются интересными и перспективными.

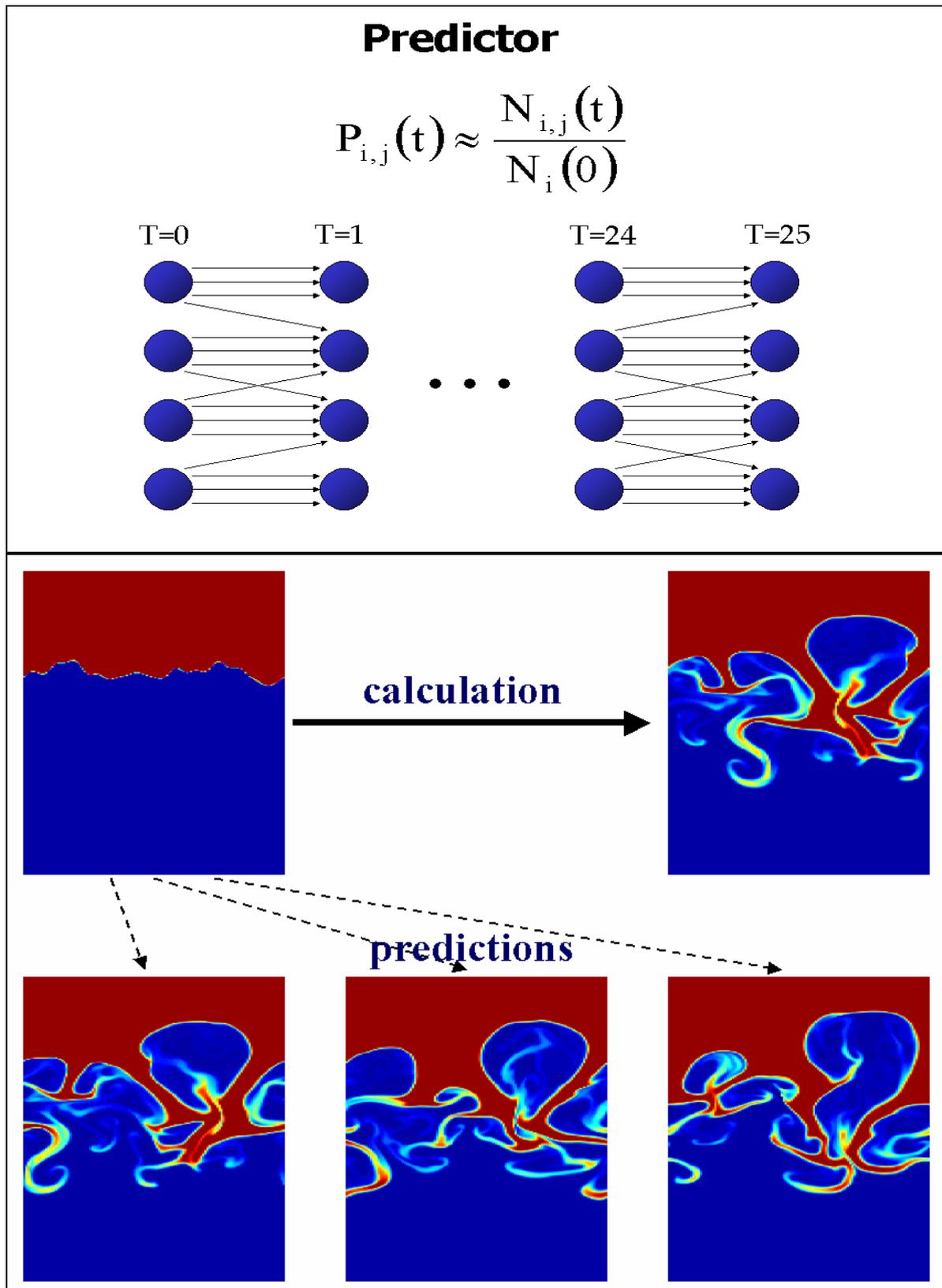


Рис.19. Предсказание развития неустойчивости. Вверху – стрелки указывают на вероятный путь развития расчета. Внизу – на основе информации о начальных условиях предложены 3 варианта конечного состояния, близкие к результату DNS.

Способность карты Кохонена различать «далекие» и «близкие» (сходные и несходные) расчеты делает возможным предсказание конечных результатов по начальным данным. Этот вопрос рассматривался более подробно в отдельной работе [9].

Если начальные данные расчета таковы, что расчет начинается в определенном месте карты Кохонена (в кластере), то далее в результате эволюции он с некоторой вероятностью окажется в следующих кластерах и в конце может быть найден в нескольких кластерах вокруг определенной области карты Кохонена. Рисунок 19 иллюстрирует результаты предсказания картины турбулентного перемешивания на этой основе.

#### 4. Заключение

Проведены многочисленные двумерные и трехмерные расчеты развития неустойчивостей RT и RM и турбулентного перемешивания при различных начальных условиях по составу мод начальных возмущений; амплитудам; газам, которые участвуют в перемешивании; различным статистическим реализациям однотипных расчетов. Результаты DNS, их обработка, полученные зависимости позволяют ответить на важный, например, для проблемы ЛТС вопрос о зависимости характеристик перемешивания при сжатии термоядерных мишеней от начальных условий. Отметим обнаруженную в этих расчетах слабую зависимость ширины зоны перемешивания от вклада высоких мод (большой вклад высоких мод несколько уменьшает ширину зоны перемешивания). Ширины зоны для 2D и 3D задач для близких начальных условий оказываются близкими. Построена аналитическая формула для ширины зоны перемешивания  $L(t)$ , удовлетворительно описываются результаты для широкого круга начальных условий.

Проведен вейвлет-анализ результатов DNS. Показано, что вейвлет-представление является устойчивым и хорошо отличает различные по физическим характеристикам расчеты. Лучшими свойствами обладает вейвлет низшей размерности D1 (Haar или Daubechies 1). Используемая техника двумерных карт Кохонена позволяет установить сходство близких по физическим параметрам процессов.

Интересной и перспективной проблемой представляется интерпретация главных компонент вейвлет-пространства после его сжатия и снижения размерности от  $\sim 3 \cdot 10^4$  до уровня нескольких десятков и сотен. Полученные фильтры – в некотором смысле собственные функции задачи – содержат информацию о движении газов, которую интересно было представить в виде полей физических величин. В представлении D1 первая главная

компонента сопоставима с такими физическими величинами как время, ширина зоны перемешивания, внедренная масса.

На основе развитых представлений предложен и реализован пример нейронной сети, которая после обучения на определенной выборке расчетов, по данным о начальных возмущения способна предсказать конечное состояние перемешанных газов.

Работа проведена при поддержке МНТЦ в рамках проекта # 1481. Авторы благодарны David Youngs (AWE, UK) и Stuart Dalziel (Batchelor Laboratory, University of Cambridge, UK) за полезные обсуждения данной работы и замечания, И. Доскочу за помощь в подготовке статьи и ее электронной версии.

### Список литературы

1. A.N.Aleshin, E.V.Lazareva, E.I.Chebotaeva, S.V.Sergeev, S.G.Zaytsev. "Investigation of Richtmyer-Meshkov instability induced by the incident and the reflected shock waves". Proc. of the Sixth International on the Physics of Compressible Turbulent Mixing, Marseille, 1997, pp.1-6.
2. В.Ф. Тишкин, В.В. Никишин, И.В. Попов, А.П. Фаворский. "Разностные схемы трехмерной газовой динамики для решения задачи о неустойчивости Рихтмайера-Мешкова". Математическое моделирование 7(5), 15, 1995.
3. Н.Н. Анучина, В.И. Волков, Н.С. Еськов. "Численный метод расчета контактных границ с большими деформациями". Международная конференция "Забабахинские научные чтения". Снежинск, 1998.
4. Н.Н. Анучина, В.И. Волков, В.А. Гордейчук, Н.С. Еськов, О.С. Илютина, О.М. Козырев. "Метод и комплекс программ МАХ-3 численного моделирования трехмерных задач газовой динамики". Тезисы докладов XII Всероссийской конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики". Новороссийск, 1998.
5. N.N. Anuchina, V.I. Volkov, N.S. Es'kov. " A method for numerical simulation of contact surface with high distortions ". In: Proceedings of the 7<sup>th</sup> IWPCTM (St. Petersburg, Russia, July 1999).
6. Ю.В. Янилкин "Численное моделирование двумерных течений с учетом некоторых мелкомасштабных процессов". Физическая мезомеханика, т.2, №5, с.27-48, 1999.
7. Н.В. Змитренко, Н.Г. Прончева, В.Б. Розанов "Эволюционная модель турбулентного слоя перемешивания ". Препринт ФИАН № 65, 1997.
8. D. Layzer "Astrophysical Journal On the stability of superpose fluids in an gravitational field ", v. 122, №1, p.1-12, 1995.

9. А.С. Нужный, В.Б. Розанов, Р.В. Степанов, А.С. Шумский “Исследование неустойчивости Релея-Тейлора в задачах инерциального синтеза методами нелинейной статистики ”. Препринт ФИАН № 32, 2002.
10. A.S. Nuzhny, V.B. Rozanov, R.V. Stepanov, S.A. Shumsky “Study of Raleigh-Taylor instability in inertial laser fusion problem and comparison of different calculation methods by wavelet coding of the initial physical fields and their neuronet processing ”. Preprint of P.N. Lebedev Physical Institute of Russia № 12, 2004.
11. I. Daubechies “ Ten lecture on Wavelets ”. CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 61. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
12. А.А. Ежов, С.А. Шумский “Нейрокомпьютинг и его приложение в экономике и бизнесе ”. Москва, МИФИ, 1998.
13. T. Kohonen “Self-Organized formation of topologically correct feature maps”. Biol. Cybernetics 43, 56-69.