

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
имени
П.Н.Лебедева



Ф И А Н

ПРЕПРИНТ

С.П.ЦЫБЕНКО

24

**ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ
ПЛАЗМЕ С ЛОНДОНОВСКИМ ТОКОМ**

МОСКВА 2004

Tsybenko S.P.

**PLANE WAVES IN HOMOGENEOUS PLASMAS
WITH THE LONDON CURRENT**

Abstract

The plasma model with the London current is investigated. This has been now demonstrated that there are the solutions corresponding to the plane waves of plasma captured by current. The pulsed and periodical solutions have been obtained. Of these solutions, the structures with the inverse current seem to be the most valuable in view of the inverse current effect in pinching plasmas. The solutions obtained include rotary discontinuities.

Аннотация

Рассматривается модель плазмы с лондоновским током. Показано, что в ней существуют решения, соответствующие плоским волнам плазмы, захваченной током. Получены как импульсные, так и периодические решения. Среди этих решений структуры с обратным током представляют наибольшее значение в виду эффекта обратного тока в пинчевой плазме. Найденные решения включают в себя вращательные разрывы.

1. В настоящее время гамильтоновские системы в теории плазмы привлекают большое внимание [1,2]. В свою очередь, мы также развиваем гамильтоновскую одножидкостную модель плазмы с лондоновским током [3]. Оказывается, что в этой модели компоненты векторного потенциала и переменные Клебша являются каноническими переменными [4]. Кроме того, в ней были найдены ударные волны разрежения [5] и исследована неустойчивость тангенциального разрыва [6]. Мы разрабатываем эту модель, имея в виду приложение её прежде всего для пинчевой плазмы, включая эффект обратного тока [7,8].

Здесь исследуются нелинейные волны плазмы и тока с дисперсией, которые соответствуют захвату плазмы лондоновским током в плоском случае. Эти решения – импульсные и периодические волны с длиной дисперсии c/ω_p , где c – скорость света в вакууме, а ω_p – электронная плазменная частота. При построении решений мы ограничимся случаем малых возмущений однородной плазмы лондоновским током. При этом скорость данных волн перпендикулярна плотности лондоновского тока и постоянна по величине. Заметим также, что все найденные решения содержат в своей структуре вращательные разрывы, где магнитное поле скачком меняет направление на противоположное.

2. Напомним, что модель плазмы с лондоновским током выводится из двухжидкостной модели плазмы, содержащей два уравнения непрерывности и два уравнения Эйлера для электронов и ионов и соответствующих уравнений Максвелла [9]. Для двухжидкостной модели плазмы плотность тока может быть записана в форме

$$\vec{j} = Zen_i \left(\nabla \Phi_i + \frac{\alpha_i}{\rho_i} \nabla \mu_i \right) - en_e \left(\nabla \Phi_e + \frac{\alpha_e}{\rho_e} \nabla \mu_e \right) - \frac{e^2 n_e}{m_e c} \vec{A}. \quad (1)$$

Здесь использовано представление Клебша для каждой скорости жидкости

$$\vec{v}_{i,e} = \nabla \Phi_{i,e} + \alpha_{i,e} \nabla \mu_{i,e} / \rho_{i,e}.$$

Кроме того, n_e, n_i, Ze и \vec{A} - концентрации электронов и ионов, заряд иона и векторный потенциал, соответственно.

Последний член в (1) определяет плотность лондоновского тока \vec{j}_L , а оставшиеся слагаемые в (1) определяют плотность МГД тока \vec{j}_{MHD} для квазинейтральной плазмы.

При условии, что плотность лондоновского тока много меньше плотности МГД тока, можно сделать редукцию двухжидкостной модели плазмы к одножидкостной модели плазмы с лондоновским током [10]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) s = 0, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\rho, s) - \frac{Ze^2}{2m_e m_i c^2} \nabla \vec{A}^2, \quad (2c)$$

$$[\nabla, \vec{B}] = -\frac{4\pi Ze^2}{m_e m_i c^2} \rho \vec{A}. \quad (2d)$$

Система (2) описывает небаротропные квазинейтральные течения плазмы с плотностью ρ и удельной энтропией s под действием электромагнитной пондермоторной силы и давления плазмы P . В уравнении (2c) пондермоторная сила есть сумма силы Ампера и электромагнитного члена, возникающего из-за адвекции электронов в магнитном поле.

В уравнении (2d) учитывается дисперсия магнитного поля. Соответствующая длина дисперсии c/ω_p присутствует в явном виде в хорошо известном решении для скин-эффекта магнитного поля.

Из уравнения (2d) мы можем записать калибровочное условие в виде

$$\nabla \cdot (\rho \vec{A}) = 0,$$

откуда, в частности, следует кулоновская калибровка $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ при условии, что $\vec{A} \nabla \rho = 0$.

В системе (2) токовая скорость пропорциональна векторному потенциалу \vec{A} . Поэтому неустойчивость Бунемана, которая является потенциальной неустойчивостью и препятствует росту тока в МГД системах, не может возбуждаться лондоновским током. Таким образом, токовая

скорость в данной модели может достигать больших величин, даже в сравнении с ионно-звуковой скоростью.

3. Рассмотрим изэнтропические движения системы (2) в виде плоских волн ($s = s_0 - \text{const.}$). При этом будем считать, что скорость плазмы

$\vec{v} = (v_x, 0, 0)$, магнитное поле $\vec{B} = (0, B_y, 0)$ и векторный потенциал

$A = (0, 0, A_z)$. Тогда для бегущей волны имеем $\rho = \rho(x - Dt)$,

$v_x = v_x(x - Dt)$, $A_z = A_z(x - Dt)$, где D - постоянная скорость волны.

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\rho / \rho_0 \rightarrow \rho, \quad (x - Dt)\omega_{pe}^0 / c \rightarrow \tau, \quad v_x / v_{S0} \rightarrow v, \quad D / v_{S0} \rightarrow D,$$

$$Ze^2 A_z^2 / 2m_e m_i c^2 v_{S0}^2 \rightarrow a^2, \quad \text{где } \rho_0 - \text{невозмущенная плотность: } v(\rho_0) = 0,$$

$a(\rho_0) = 0$. Кроме того, мы ввели обозначение скорость звука в

невозмущенной плазме $v_{S0} = \sqrt{5T_0(Z+1)/3m_i}$.

В итоге система (2) редуцируется к уравнению

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + 2\left(D^2 \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} - 3(\rho^{2/3} - 1)\right) \times$$

$$\times \frac{D^2(\rho^{-1} - 1) + \frac{3}{5}(\rho^{5/3} - 1) - B^2}{(D^2 \rho^{-3} - \rho^{-1/3})^2} = 0, \quad (3)$$

где B – постоянная интегрирования, обозначающая безразмерное значение магнитного поля при $\rho \rightarrow 1$.

В дальнейшем для удобства ограничимся случаем малых возмущений плотности плазмы ρ относительно невозмущенной плазмы: $|\rho - 1| \ll 1$.

4. Рассмотрим решение (3), удовлетворяющее условию: $B_y = 0$

при $\rho \rightarrow 1$, т.е. постоянная B в этом случае равна нулю. Тогда решение (3) имеет вид распределений, показанных на рис.1 и рис.2.

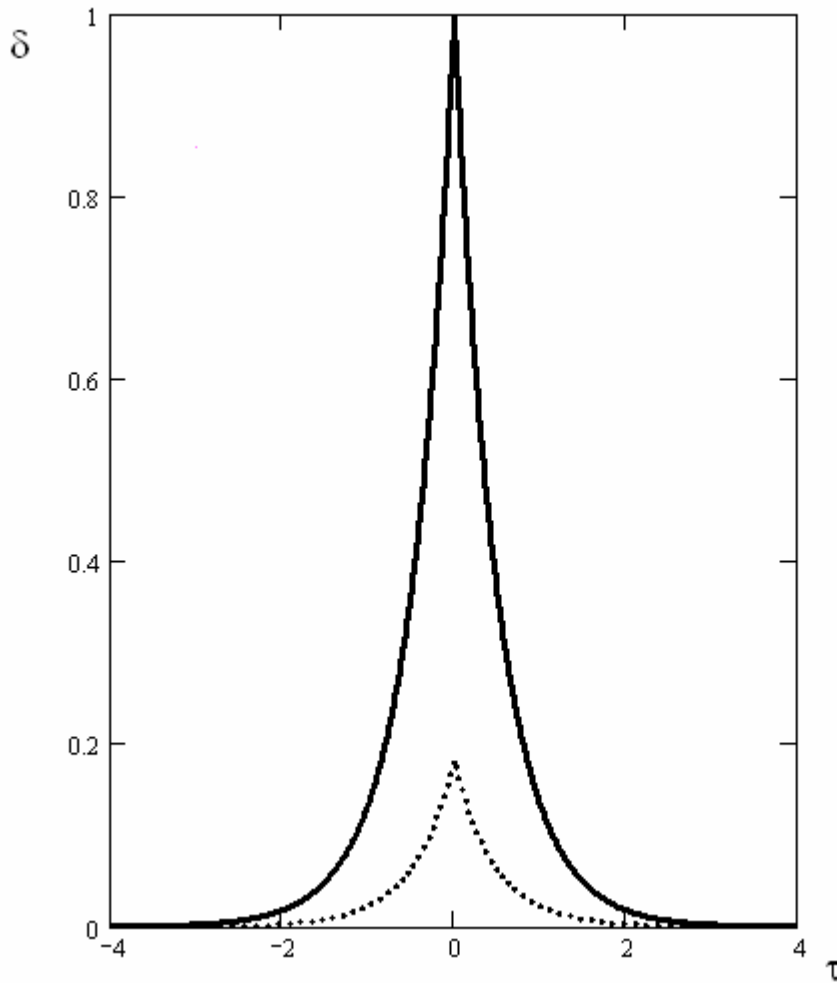


Рис.1. Распределения плотности плазмы для двух значений параметра $\beta = 16a_{\max}^2 / 3(D^2 - 1)$. Сплошной линией показано распределение с $\beta = 1$, а другое распределение – для $\beta = 1/3$. Плотность задана величиной $\delta = 8(\rho - 1) / 3(D^2 - 1)$.

Необходимо подчеркнуть, что максимум плотности в данном решении соответствует максимуму плотности тока (или максимуму a_{\max}^2).

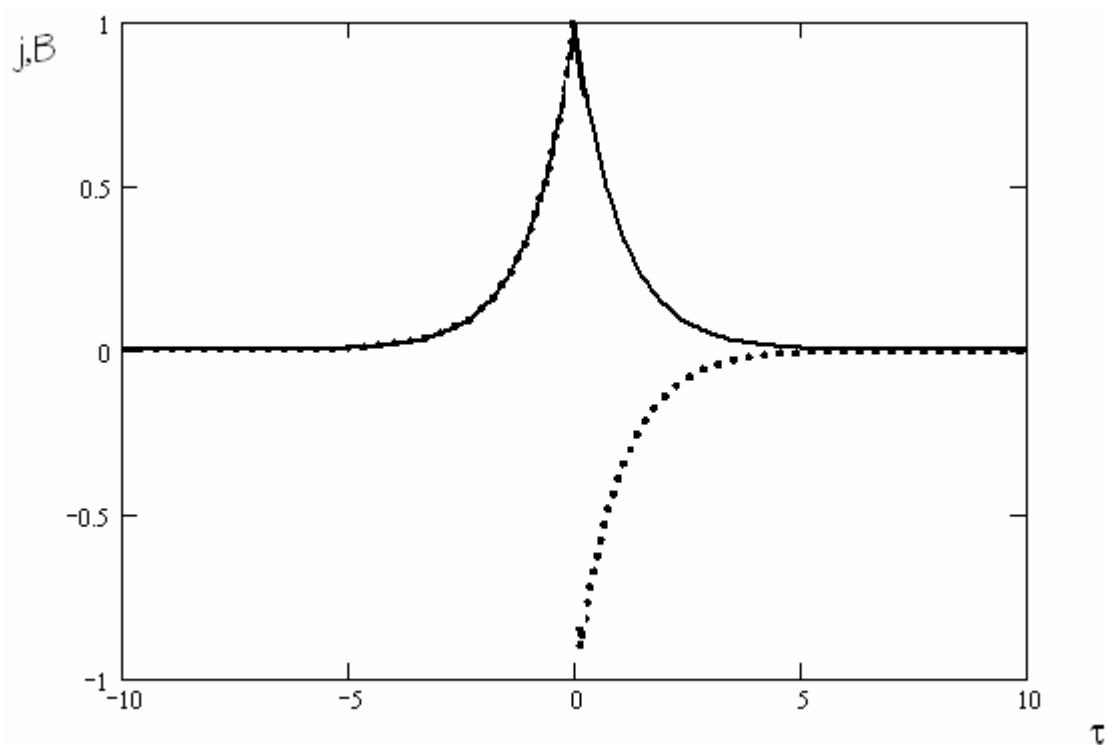


Рис.2. Распределение плотности тока j , нормированное на максимальное значение, показано сплошной линией. В распределении магнитного поля B , также нормированного на максимальное значение, присутствует разрыв.

Излом кривой в центре распределений плотности плазмы и тока приводит к разрыву в распределении магнитного поля: магнитное поле, оставаясь неизменной по величине, скачком в точке $\tau = 0$ меняет свое направление на противоположное. Такой разрыв мы назовем, по аналогии с теорией МГД разрывов [11], вращательным. Однако в отличие от МГД теории, где скорость распространения вращательных разрывов равна альфвеновской

скорости, скорость разрывов, показанных на рис.2, равна скорости нелинейной токовоплазменной волны D и ограничена условием

$$D^2 > v_{S0}^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}v_{S0}v_A, \quad (4)$$

где $v_A = B_{y0} / \sqrt{4\pi\rho_0}$ - альфвеновская скорость плазмы с плотностью ρ_0 и величиной магнитного поля B_{y0} в месте разрыва.

Решение, показанное на рис.1 и рис.2, демонстрирует новое явление в плазме с лондоновским током: эффект захвата плазмы лондоновским током. Заметим, что такого эффекта нет в теории сверхпроводников II рода, где лондоновский ток играет существенную роль, поскольку ионы кристаллической решетки не могут участвовать в коллективном движении типа простой волны.

5 Рассмотрим решение (3), удовлетворяющее условию при $\rho \rightarrow 1$ $B_y \rightarrow B / \sqrt{2} \neq 0$. Оказывается, что в этом случае ограниченное решение соответствует периодическим распределениям плотности плазмы и лондоновского тока, которые также распространяются с постоянной скоростью по невозмущенной однородной плазме (рис. 3-5). Впрочем, здесь вместо безразмерного параметра плотности ρ удобно пользоваться параметром

$$a^2 = \frac{D^2}{2} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} - \frac{3}{2} (\rho^{3/2} - 1).$$

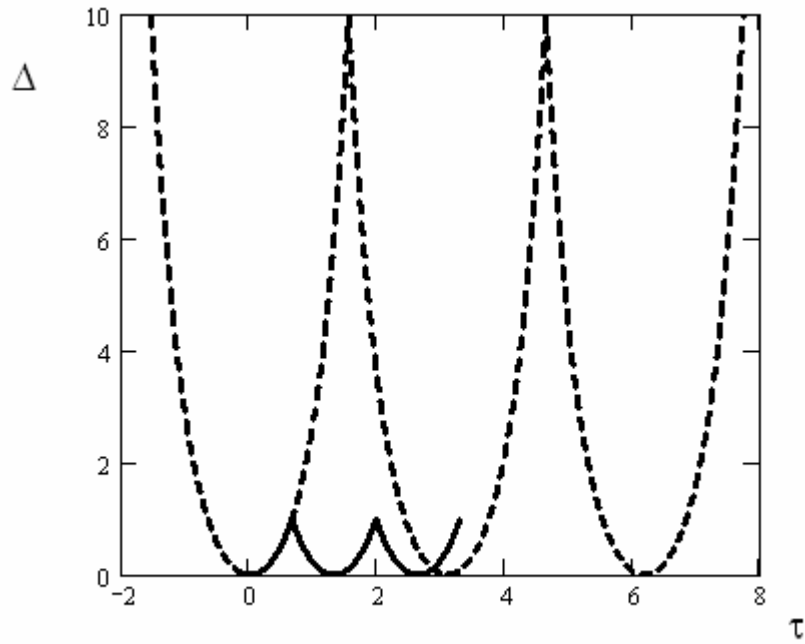


Рис.3. Распределение $\Delta(\tau) = 2a^2 / B^2$: три периода, когда $2a_{\max}^2 / B^2 = 10$, два с половиной периода для случая $2a_{\max}^2 / B^2 = 1$ (сплошная линия).

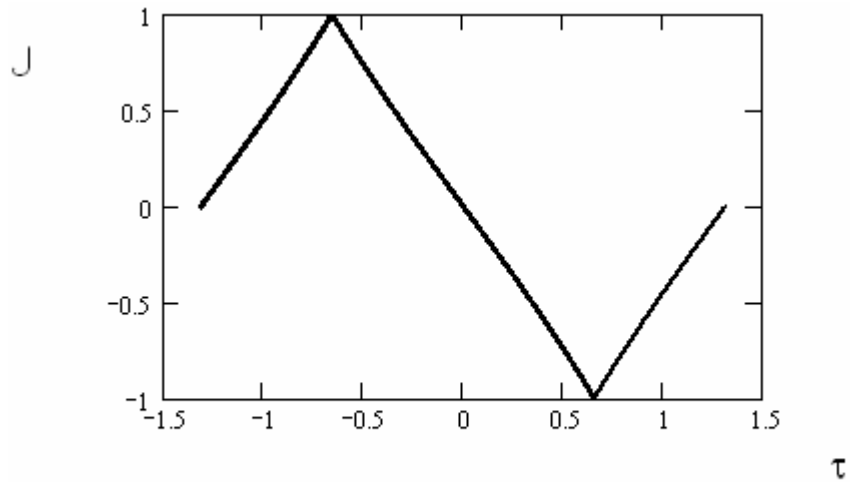


Рис.4. Распределение плотности тока $J = j(\tau) / j_{\max}$ на одном периоде, когда $2a_{\max}^2 / B^2 = 1$.

Точки на графике плотности плазмы или тока, где есть изломы, соответствуют вращательным разрывам, в которых магнитное поле скачком меняет свое направление. Заметим, что распределение плотности тока на рис.4 близко к ломаной линии, состоящей из отрезков прямых, что является следствием ограничения $\rho - 1 \ll 1$.

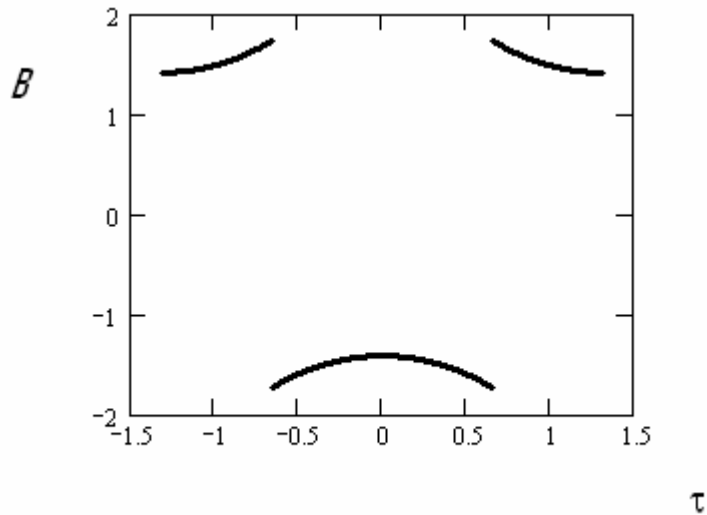


Рис.5. Распределение магнитного поля $B = \sqrt{2}B_y / B$ на одном периоде, когда

$$2a_{\max}^2 / B^2 = 1.$$

На рис.5 показаны два вращательных разрыва, приходящихся на один период

$(-1,316 < \tau < 1,316)$ нелинейной периодической волны

$(\tau_{\text{разрыва}} = \pm 0,658)$.

Наличие периодического решения в системе (2) является главной неожиданностью. Кроме того, плотность тока в этом решении (рис.4) знакопеременна.

6. В модели плазмы с лондоновским током обнаружены нелинейные решения, демонстрирующие эффект захвата плазмы лондоновским током: плазма сгребается в область с максимальной по абсолютной величине плотностью тока, причем структура плазмы и магнитного поля (тока) распространяется по невозмущенной плазме со сверхзвуковой скоростью. Периодические решения содержат как прямой, так и обратный токи.

Автор выражает благодарность С.А. Старцеву за благотворное обсуждение проблемы.

Работа выполнена в рамках проекта НШ-59.2003.2 Научная школа «Исследование импульсной высокотемпературной плазмы» и по программе фундаментальных исследований ОФН РАН «Проблемы устойчивости плазмы и достижение предельных параметров в магнитных ловушках», а также под поддержкой Гос. контракта №40.006.11.1129 Минпромнауки «Разработка методов генерации и удержания высокотемпературной плазмы в экспериментальных термоядерных установках» («Высокотемпературная плазма»).

Литература

1. Larsson J., J. Plasma Phys. (2003), **69**, 211.
2. Schamel H., Physics reports (2004), **392**, 279.
3. Tsybenko S.P., Nonlinear skin-effect of quasi-static magnetic field in a plasma model of Davydov-Zakharov class, Preprint FIAN, 1994, № 27.
4. Krokhin O.N., Nikulin V.Ya., Tsybenko S.P., Czechoslovak Journal of Physics (2002), 52/Suppl.A, A1-A5.
5. Nikulin V.Ya., Tsybenko S.P., Physica Scripta (1997), **55**, 90.
6. Tsybenko S.P., J. Plasma Phys. (1999), **62**, 117.
7. Jones I.R., Silawatshananai C., Plasma Phys.(1980), **22**, 501.
8. Bernard A., Bruzzone H., Choi P., Chuaqui H., Gribkov V., Herrera J., Hirano K., Krejci A., Lee S., Luo C., Mezzetti F., Sadowski M., Schmidt H., Ware K., Wong C.S., Zoita V., J.Moscow Phys. Soc.(1998), **8**, 93.
9. Мейерович Б.Э., ЖЭТФ (1980), **79**, 1282.
10. Цыбенко С.П., Гамильтоновская гидродинамика, Препринт ФИАН, 1998, №26.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Электродинамика сплошных сред. Москва: Наука, 1992, 662 с.