РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Физический институт имени П.Н.Лебедева

ФИАН

ПРЕПРИНТ

20

Е.П.ОРЛОВ, И.М.СИЗОВА

О ПОДОБИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КВАНТОВОГО ШУМА ОПТИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ С ДВУГОРБЫМ КОНТУРОМ ЛИНИИ УСИЛЕНИЯ

МОСКВА 2004

АННОТАЦИЯ

Исследованы законы преобразования статистических характеристик квантового шума оптического усилителя с "двугорбым" контуром линии усиления при изменении коэффициента усиления и параметров контура линии.

Показано, что в случае "двугорбого" контура функции, описывающие эти характеристики, при нормировке всех аргументов и параметров с временной размерностью на время корреляции квантового шума, а всех аргументов и параметров с частотной размерностью - на величину, обратную времени корреляции, практически совпадают друг с другом, и чем больше коэффициент усиления, тем лучше совпадение. В пределе эти функции стремятся к универсальным функциям, которые главным образом отличаются от универсальных функций в случае "одногорбого" контура наличием дополнительного аргумента, представляющего собой нормированную указанным образом разность частот между "горбами" и, следовательно, в пространстве аргументов, включающем этот аргумент, статистические характеристики, также как и в случае "одногорбого" контура, обладают свойством подобия.

Получены аналитические выражения для универсальных функций на основе параболической и треугольной моделей "горбов" контура линии и показано, что нарушение локальной симметрии в максимуме "горба" сильно влияет на вид универсальных функций. Показано также, что при уменьшении разности частот между "горбами" до нуля полученные выражения плавно переходят в выражения универсальных функций для "одногорбого" контура.

ABSTRACT

The transformation laws governing the statistical properties of the quantum noise of an optical amplifier with “twohumped” spectral line profile when its gain factor and line profile are varied are considered.

It is shown that in the case of “twohumped” line profile when all the arguments and parameters of temporal length are normalized to the correlation time of quantum noise and all the arguments and parameters of frequency length are normalized to the reciprocal value of the correlation time the functions that describe these statistical properties are virtually coincided together, and the higher is the gain factor the better is the coincidence. In the limiting case these functions converge to universal functions, the main distinguishing feature of which from universal functions in the case of “onehumped” line profile is the presence of additional argument defined as the frequency difference between “humps” normalized in mentioned manner. So, in the space of arguments including this additional argument the statistical characteristics possess a similarity property in the same manner as in the case of “onehumped” profile.

Analytical expressions for universal functions are derived on the basis of parabolic and triangular models of line profile “humps” and it is shown that the violation of local symmetry of “humps” near maxima strongly affects the universal functions. It is also shown that if a frequency difference between “humps” decreases to zero, the obtained expressions gradually transfer to the expressions of universal functions for “onehumped” profile.

СОДЕРЖАНИЕ

		Стр.
I.	Введение	4
II.	Постановка задачи	5
III.	Параболическая модель "двугорбого" контура	10
IV.	Треугольная модель "двугорбого" контура	33
V.	Сопоставление треугольной и параболической моделей "двугорбого" контура и сравнение с реальными контурами	50
VI.	Переход между моделями "одногорбого" и "двугорбого" контуров	70
VII.	Выводы	95
VIII.	Заключение	96
Список литературы		98

I. Введение

В работах [1-3] нами было обнаружено и исследовано свойство подобия статистических характеристик квантового шума оптического усилителя в том случае, когда контур линии усиления симметричен относительно некоторой частоты ω_0 и имеет на этой центральной частоте максимум. Мы показали, что функции, описывающие такие характеристики, при различных коэффициентах усиления и различных контурах линии усиления практически совпадают друг с другом, если их аргументы нормировать на время корреляции квантового шума. Разброс значений нормированных функций для реальных контуров в наиболее значимой области их определения не превышает нескольких процентов, и они могут быть с хорошей точностью аппроксимированы универсальными функциями. Чтобы с помощью этих универсальных функций описать статистические характеристики квантового шума усилителя с конкретно заданными параметрами достаточно измерить или вычислить время корреляции квантового шума, отвечающее этим параметрам. Таким образом, фактически рассматриваемые статистические характеристики зависят только от своих обезразмеренных аргументов и размерного времени корреляции квантового шума.

В настоящей работе мы рассмотрим случай, когда контур линии усиления попрежнему симметричен относительно центральной частоты, но имеет два максимума, расположенные слева и справа от нее. Будем называть такой контур “двугорбым” в отличие от “одногорбого” из предыдущих работ. Причем наше рассмотрение будет включать как крайний случай ситуации, когда максимумы сильно разнесены и между ними имеется провал до нуля (т.е. фактически две равноправные заметно отстоящие линии усиления), так и все промежуточные стадии от сильного до слабого углубления между максимумами вплоть до слияния их друг с другом. Как мы увидим, и в случае “двугорбого” контура статистические характеристики квантового шума обладают свойством подобия в указанном выше смысле и могут быть описаны универсальными функциями, которые плавно переходят в функции, полученные в случае “одногорбых” контуров.

Анализ статистических характеристик квантового шума оптического усилителя с точки зрения их подобия в случае “двугорбых” контуров линии усиления и вывод универсальных зависимостей, описывающих эти характеристики, аналогичны тому, как это делалось для “одногорбых” контуров. Однако, с математической стороны имеется существенное отличие. Если “одногорбый” контур по отношению к статистическим характеристикам квантового шума при заданном коэффициенте усиления вполне определен своей центральной частотой и шириной, то “двугорбая” структура кроме центральной частоты и ширины “горбов”, характеризуется еще и независимым от них расстоянием (разностью частот) между “горбами”. Понятно, что в этом случае, например, во временной части коэффициента корреляции квантового шума кроме осциллирующего с частотой ω_0 множителя появится еще и множитель, осциллирующий с частотой, равной половине разности частот между “горбами”. Поэтому число аргументов универсальных функций, описывающих статистические характеристики, в случае “двугорбых” контуров возрастает. Возрастает и размерность пространства независимых переменных, в котором приходится рассматривать подобие статистических характеристик квантового шума.

II. Постановка задачи.

Напомним основные объекты изучения. Статистические характеристики, которые мы рассматриваем, - это, во-первых, временна́я часть коэффициента корреляции квантового шума, $\gamma_0(\tau)$, где τ - время задержки. Во-вторых, – это центральный максимум спектра флуктуаций спонтанного излучения, прошедшего квадратичный детектор, $\Gamma_0(\omega)$, где ω - частота, нормированный так, что $\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_0(\omega)d\omega=\frac{1}{2}$, и который обычно описывает спектр фототока. И, в-третьих, – это временна́я часть корреляционной функции средней за время наблюдения τ_e мощности квантового шума, нормированная на удвоенный квадрат этой средней мощности, $\Phi(\tau,\tau_e)$. По существу, τ_e представляет собой эффективное время усреднения линейного фильтра, стоящего за квадратичным детектором. Таким фильтром служит обычно электронный усилитель.

Функции $\gamma_0(\tau)$, $\Gamma_0(\omega)$, $\Phi(\tau,\tau_e)$ связаны между собой и определяются следующими формулами (см. [1-3]):

$$\gamma_0(\tau)=\frac{\int_0^{\infty}\left(K_0^{f(\Omega)}-1\right)\cos(\tau\Omega)d\Omega}{\int_0^{\infty}\left(K_0^{f(\Omega)}-1\right)d\Omega}, \tag{1}$$

$$\Gamma_0(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\gamma_0^2(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left(K_0^{f(\Omega)}-1\right)\left(K_0^{f(\Omega+|\omega|)}-1\right)d\Omega}{8\left(\int_0^{\infty}\left(K_0^{f(\Omega)}-1\right)d\Omega\right)^2}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\tau,\tau_e)&=\frac{1}{2\tau_e^2}\int_0^{\tau_e}(\tau_e-t)\left(\gamma_0^2(t+\tau)+\gamma_0^2(t-\tau)\right)dt=\\&=2\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(\omega\tau_e/2)}{(\omega\tau_e/2)^2}\Gamma_0(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega\end{aligned}. \tag{3}$$

Здесь $K_0=\exp\left(\sigma(\omega_0)\cdot\Delta\cdot L\right)$ - коэффициент усиления оптического усилителя в максимуме полосы усиления, соответствующем частоте ω_0; Δ - инверсия населенностей уровней рабочего перехода усилителя; $\sigma(\omega)$ - зависящее от частоты ω сечение перехода между рабочими уровнями усилителя; L - длина его активной области;

$$f(\Omega)=g(\Omega)/g(0) \tag{4}$$

- нормированный на максимальное значение форм-фактор спектральной линии; $g(\Omega)$ - функция, описывающая контур линии (считаем $f(\Omega)$ четной функцией Ω); $\Omega = \omega - \omega_0$ - отклонение частоты от центра ω_0 контура линии усиления.

В случае "одногорбых" контуров линии усиления оптического усилителя речь шла о поиске такого преобразования функций $\gamma_0(\tau)$, $\Gamma_0(\omega)$, $\Phi(\tau, \tau_e)$, после которого преобразованные функции являются с большой точностью инвариантными по отношению к изменению коэффициента усиления в максимуме линии усиления и изменению контура линии усиления. Как оказалось, таким преобразованием является нормировка всех временных аргументов функций на время корреляции квантового шума оптического усилителя, а всех частотных аргументов - на величину, обратную времени корреляции. Если сама функция имеет какую-то из указанных размерностей, как, например, $\Gamma_0(\omega)$, то ее также нужно подвергнуть соответствующей нормировке. При этом, как уже отмечалось во введении, все нормированные функции с хорошей точностью описываются универсальными аналитическими выражениями, которые не зависят от конкретных параметров усилителя. Вся индивидуальная информация содержится в параметре нормировки аргументов функций - τ_{corr}^{out}, который, конечно, зависит и от контура линии усиления $f(\omega)$ и от коэффициента усиления в максимуме линии K_0.

Ввиду того, что преобразованные функции для каждого конкретного набора параметров усилителя слегка отличаются от универсальных функций, то множество преобразованных функций сродни известному понятию нечеткого множества [4], где величина отклонения (в любом смысле) каждой конкретной нормированной функции от упомянутых универсальных выражений описывается так называемой функцией принадлежности. Эта функция принадлежности (принимающая, как известно, значения в диапазоне [0,1]), может, например, определяться как доля некоторой области аргумента рассматриваемой статистической функции, где отклонение не превышает заданного значения. В [1-3] мы фактически показали, что функция принадлежности такого типа при нормировке на τ_{corr}^{out} намного больше, чем при всех других нормировках, а, значит, выше степень близости конкретной нормированной статистической функции к универсальной. Формулировка полученных в [1-3] и в настоящей работе результатов на языке нечетких множеств при различных понятиях отклонений и функций принадлежности представляет отдельный интерес. Пока мы такой задачи не решали и в дальнейшем здесь не будет употребляться соответствующая строгая терминология; мы ограничимся, как и в [1-3], визуальной графической иллюстрацией.

Итак, если временные и частотные аргументы функций (1-3) нормировать на время корреляции квантового шума τ_{corr}^{out}, т.е. ввести новые безразмерные "временные" аргументы

$$\xi = \tau / \tau_{corr}^{out} \quad \text{и} \quad \eta = \tau_e / \tau_{corr}^{out}, \tag{5}$$

и безразмерные "частотные" -

$$\mu = \omega \cdot \tau_{corr}^{out} \quad \text{и} \quad \chi = \Omega \cdot \tau_{corr}^{out}, \tag{6}$$

а также отнормировать на $\tau_{corr}^{out}/2\pi$ функцию (2), поскольку она имеет временную размерность в отличие от уже безразмерных (1) и (3) (аргументы ξ и η будем считать положительными, а χ и ω могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, но соответствующие функции - см. ниже (8) и (11) - четные, поэтому анализировать их будем лишь при положительных значениях аргументов), то выражения (1-3) примут вид,

$$\gamma_0(\xi) = \frac{\int_0^\infty F(\chi)\cos(\xi\chi)d\chi}{\int_0^\infty F(\chi)d\chi}, \tag{7}$$

$$\frac{2\pi\Gamma_0(\mu)}{\tau_{corr}^{out}} = \frac{\int_0^\infty F(\chi-\frac{\mu}{2})F(\chi+\frac{\mu}{2})d\chi}{\int_0^\infty F^2(\chi)d\chi} = \int_0^\infty \gamma_0^2(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\xi,\eta) &= \frac{1}{2\eta^2}\int_0^\eta (\eta-x)\left(\gamma_0^2(x+\xi)+\gamma_0^2(x-\xi)\right)dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2(\mu\eta/2)}{(\mu\eta/2)^2}\cdot\frac{2\pi}{\tau_{corr}^{out}}\Gamma_0(\mu)\cdot\cos(\mu\xi)d\mu\end{aligned}. \tag{9}$$

Ниже мы покажем, что преобразованные функции (7-9) и в случае “двугорбых” контуров можно аппроксимировать универсальными функциями, не зависящими от конкретных параметров усилителя.

Время корреляции квантового шума τ_{corr}^{out} вычисляется по формуле

$$\tau_{corr}^{out} = 2\pi\Gamma_0(0) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\int_0^\infty F^2(\Omega)d\Omega}{\left(\int_0^\infty F(\Omega)d\Omega\right)^2}, \tag{10}$$

а функция $F(\Omega)$ и преобразованная функция, зависящая от безразмерного параметра χ, $-F(\chi)$, представляющие собой наблюдаемый форм-фактор линии усиления на выходе квантового усилителя, нормированный на максимальное значение, определяются выражениями

$$F(\Omega) = \frac{K_0^{f(\Omega)}-1}{K_0-1}, \quad F(\chi) = \frac{K_0^{f(\chi)}-1}{K_0-1}. \tag{11}$$

Как видно из (11), наблюдаемый форм-фактор зависит и от K_0 и от форм-фактора спектральной линии (4). От этих же характеристик усилителя зависит и

время корреляции квантового шума (10). В то же время безразмерные статистические характеристики (7-9) от безразмерных аргументов (5-6) зависят только от функции (11). В работах [1-3] нами было показано, что для “одногорбых” контуров широкого диапазона форм (лоренц, гаусс, парабола, треугольник, прямоугольник) и достаточно больших коэффициентов усиления K_0 ($K_0 \geq 10^3$) каждая из функций (7-9) практически совпадают друг с другом и в пределах допустимой экспериментальной ошибки могут быть описаны общей универсальной кривой, не зависящей ни от каких индивидуальных особенностей усилителя (т.е. $f(\Omega)$ и K_0); вся информация об этих особенностях сидит в параметре нормировки τ_{corr}^{out}. Аналитический вид этих универсальных кривых был нами получен в нескольких вариантах, в зависимости от использованной модели контура (треугольник, парабола или прямоугольник), позволяющей довести расчеты до аналитических выражений при больших K_0. В значащей области определения функций (7-9) все эти приближения мало отличаются друг от друга.

Теперь посмотрим, что изменится, если контур (4) (и, соответственно, наблюдаемый форм-фактор (11)), оставаясь по-прежнему симметричными относительно ω_0, будет иметь не один максимум в центре, а два по бокам. Пример такого контура с провалом до нуля в центре приведен на рис.1 кривой с самыми короткими штрихами (приведена половина контура), где он сравнивается с подробно исследованными в [1-3] “одногорбыми” параболическим, треугольным и прямоугольным контурами, полная полуширина которых нормирована на единицу (длина штрихов этих кривых уменьшается в указанной последовательности).

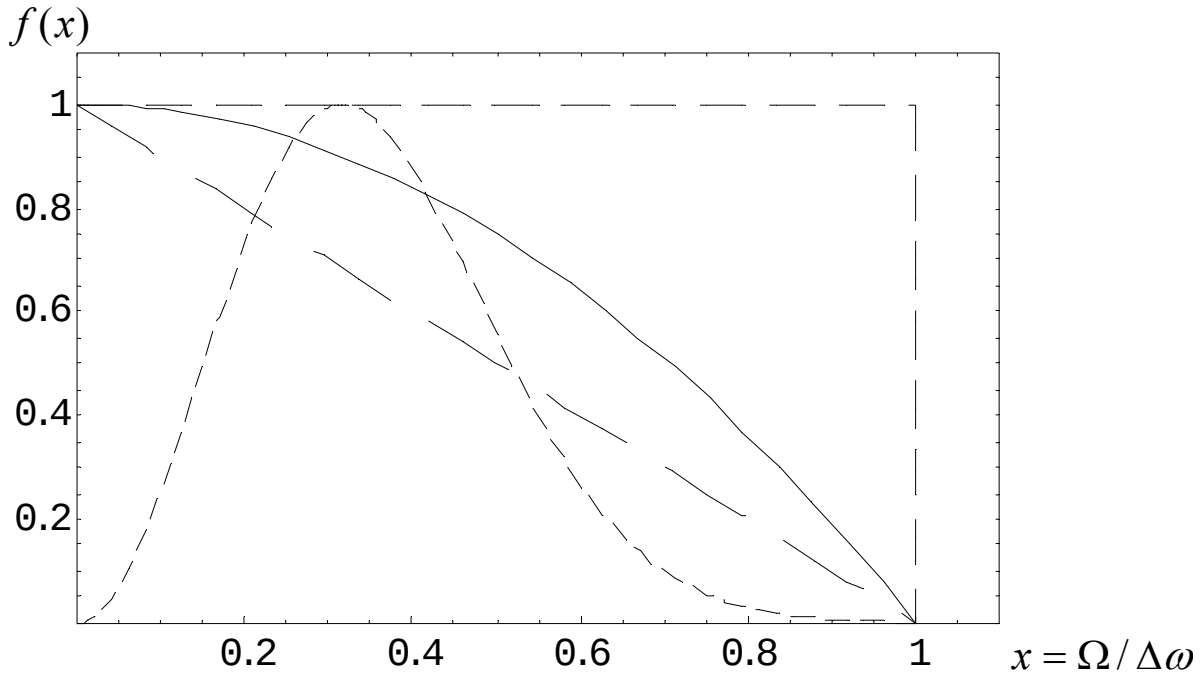


Рис.1

Нетрудно понять, что функция $F(\chi)$ для такого “двугорбого” контура - тоже “двугорбая” - с ростом K_0 стремится к виду, когда “горб” приобретает универсальную форму, но при этом сдвигается вправо по оси абсцисс - см. рис.2, где $F(\chi)$ рассчитаны для $K_0 = 10,\ 10^2, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{15}, 10^{25}, 10^{40}$ (длина штрихов увеличивается с ростом K_0). А на рис.3 для первых 5-ти из этих K_0 представлены функции $\gamma_0(\xi)$ (длина штрихов тоже увеличивается с ростом K_0).

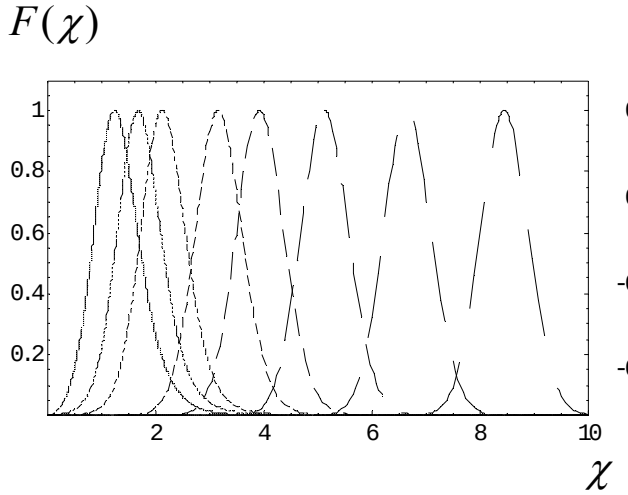


Рис.2

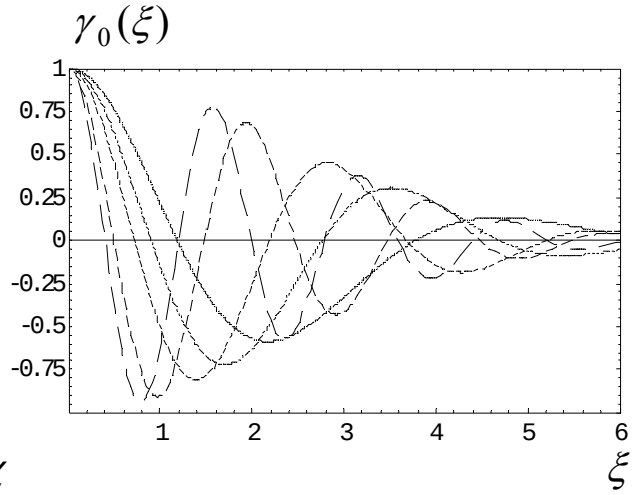


Рис.3

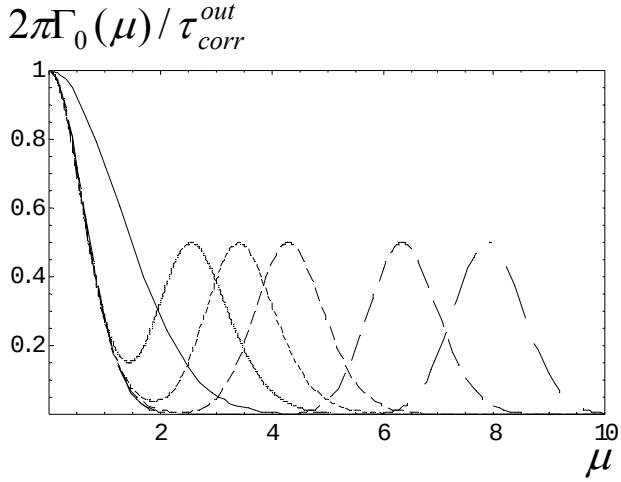


Рис.4

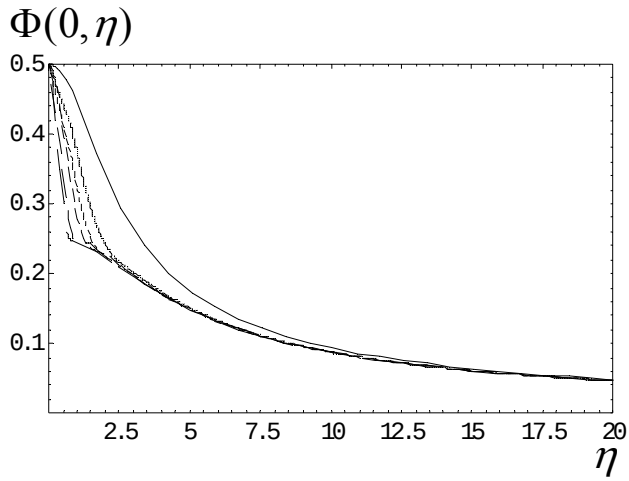


Рис.5

На следующих двух рисунках такими же кривыми представлены функции $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi(0,\eta)$ (см. (8-9)) тоже для первых 5-ти значений K_0 из списка - от 10 до 10^9. Для сравнения на этих рисунках сплошными кривыми представлены функции “одногорбого” параболического контура. Из рис.4 видно, что у

$2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ формируется три максимума - центральный, общий для всех K_0, по ширине в 2 раза у́же, чем максимум для “одногорбого” контура, и два одинаковых боковых - таких же как центральный по ширине, но в 2 раза ниже и сдвигающихся вправо с ростом K_0, что следует из качественного анализа формулы (8). Из рис.5 видно, что у $\Phi(0,\eta)$ “двугорбых” контуров одинаковые с “одногорбым” “хвосты”, но в начале координат их поведение зависит от K_0.

Итак, видно, что для “двугорбых” контуров нормированные на τ_{corr}^{out} статистические характеристики не описываются приближенно прежними универсальными кривыми - сохраняется их зависимость и от K_0 и, возможно, от $f(x)$. Для получения этой зависимости обратимся опять к модельным формам контуров $f(x)$. Рассмотрим две модели, позволяющие довести бо́льшую часть расчетов до аналитических выражений, приобретающих универсальный вид при $K_0 >> 1$. Это - треугольная модель, в которой каждый “горб” описывается двумя прямыми линиями, образующими треугольник с вершиной в центре “горба”, и параболическая модель, когда “горб” описывается двумя параболами с общей вершиной. В обеих моделях в центре контура есть один или два разрыва первой производной $f(x)$, а в вершинах “горбов” - разрыв первой производной для треугольной модели (модули производных могут отличаться справа и слева) и возможен разрыв второй производной (первая равна нулю) для параболической модели. Т.е. в общем случае не ограничимся симметричными “горбами”.

Начнем с параболической модели.

III. Параболическая модель “двугорбого” контура.

Эта модель аппроксимирует каждую из двух симметричных половин контура с помощью двух отрезков парабол с общей вершиной в максимуме контура

$$f_p(x) = \begin{cases} \left[1-\left(\dfrac{x-x_0}{1-x_1}\right)^2\right]\cdot\dfrac{1+\operatorname{sign}\left[1-\left(\dfrac{x-x_0}{1-x_1}\right)^2\right]}{2}, & 0 \le x \le x_0 \\ 1-\left(\dfrac{x-x_0}{1-x_0}\right)^2, & x_0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad (12)$$

Индекс “p” здесь и далее означает, что функции рассчитаны для параболической модели (12). Как и на рис.1, $x = \Omega/\Delta\omega$. Для удобства нормировка $\Delta\omega$ выбрана так, чтобы внешняя парабола обращалась в ноль в точке $x = 1$ (т.е. $f_p(1) = 0$)

$$\Delta\omega = \Omega_{\max} + \sqrt{\frac{-2}{f''_{\Omega+}(\Omega_{\max})}}, \quad \Omega = \omega - \omega_0. \tag{13}$$

В выражении для $\Delta\omega$ фигурирует правая производная контура в вершине. Координата вершины - $x = x_0$ ($f_p(x_0) = 1$), где

$$x_0 = \frac{\Omega_{\max}}{\Delta\omega}.$$

Очевидно, что $0 < x_0 < 1$. Левая парабола может отличаться от правой, т.е. $x_1 \neq x_0$ ($x_1 < 1$ и, вообще говоря, может быть и отрицательным числом). Это отличие будем характеризовать параметром асимметрии контура ε

$$\varepsilon = \frac{1 - x_0}{1 - x_1}. \tag{14}$$

В зависимости от соотношения x_0 и ε в центре контура ($x = 0$) имеет место один из трех случаев - значение $f_p(0)$ больше нуля, равно нулю или $f_p(x)$ обращается в нуль на некотором интервале вблизи нуля аргумента: при $x_1 < 1 - x_0$ ($x_0 < \frac{1}{1+\varepsilon}$ или $\varepsilon < \frac{1 - x_0}{x_0}$) $f_p(0) > 0$, а при $1 - x_0 \le x_1 < 1$ ($x_0 \ge \frac{1}{1+\varepsilon}$ или $\varepsilon \ge \frac{1 - x_0}{x_0}$) $f_p(x \in [0; x_0 + x_1 - 1]) = 0$. Примеры контуров для $x_0 = 0{,}5$ и $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1;\ 2$, включающие в себя все описанные случаи, приведены на рис.6 (для $\varepsilon = 1$ сплошные линии; для остальных - штриховые, длина штрихов увеличивается с ростом ε).

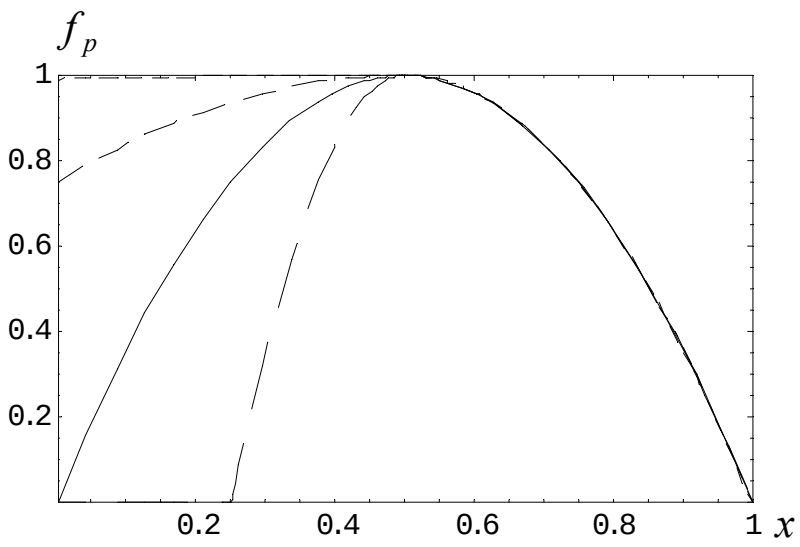


Рис.6

Подстановка контура (12) в функции (7-9,11) приводит к следующим результатам. Функции $F^p(\chi)$ и $\gamma_0^p(\xi)$ рассчитываются аналитически и полученные выражении при условии $K_0 >> 1$ принимают вид

$$F^p(\chi) \cong \exp\left[-\frac{8}{\pi}\left(\chi - \frac{\mu_0}{2}\right)^2\left(\frac{1+\beta}{2}\right)^2\right], \text{ где } \beta = \begin{cases} \varepsilon, & 0 \le \chi < \dfrac{\mu_0}{2} \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & \chi > \dfrac{\mu_0}{2} \end{cases}; \quad (15)$$

$$\gamma_0^p(\xi) \cong \cos\left(\xi\frac{\mu_0}{2}\right)\cdot C_1(\xi) - \sin\left(\xi\frac{\mu_0}{2}\right)\cdot C_2(\xi), \quad (16)$$

где функции $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ равны

$$C_1 = \frac{\varepsilon\exp\left(-\left(\alpha^p\xi\right)^2\right) + \exp\left(-\left(\dfrac{\alpha^p\xi}{\varepsilon}\right)^2\right)}{1+\varepsilon}, \quad (17)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon\exp\left(-\left(\alpha^p\xi\right)^2\right)\mathrm{Im}\left(\mathrm{erf}(i\alpha^p\xi)\right) - \exp\left(-\left(\dfrac{\alpha^p\xi}{\varepsilon}\right)^2\right)\mathrm{Im}\left(\mathrm{erf}(i\dfrac{\alpha^p\xi}{\varepsilon})\right)}{1+\varepsilon}, \quad (18)$$

$$\alpha^p = \frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{2\sqrt{2}(1+\varepsilon)}. \quad (19)$$

Отметим, что поскольку функция (12) отлична от нуля лишь при $|x| \le 1$, то и функция (15), согласно (11), должна отличаться от нуля лишь при $|\chi| \le \Delta\omega\tau_{corr}^{out}$. Хотя формально область определения (15) бесконечна, но за пределами указанного интервала при $K_0 >> 1$ значение функции мало́. Смысл возрастающего с ростом K_0 параметра $\mu_0 = \dfrac{\sqrt{2\pi}\varepsilon x_0\sqrt{\ln K_0}}{(1+\varepsilon)(1-x_0)}$ в (15-16) мы обсудим ниже.

Функция $\gamma_0^p(\xi)$ (16), как и положено, равна единице в нуле аргумента. Оба $C_i(\xi)$ в (16) с ростом ξ стремятся к нулю, но $C_1(0) = 1$, $C_2(0) = 0$ и при любом ε $|C_2(\xi)| < C_1(\xi)$ - см. рис.7, где C_1 и C_2 приведены для контуров с рис.6. теми же типами кривых. Учитывая также, что при $\xi = 0$ $\cos\left(\xi\dfrac{\mu_0}{2}\right) = 1$, а

$\sin\left(\xi\dfrac{\mu_0}{2}\right)=0$, можно заключить, что вклад второго слагаемого в (16) мал по сравнению с первым. Это пригодится нам в дальнейшем..

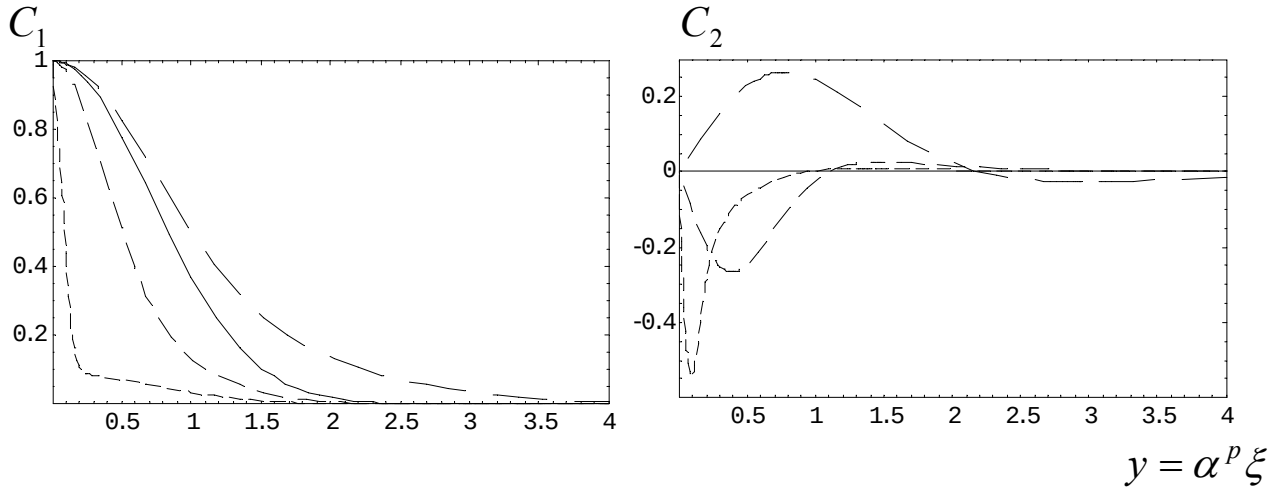


Рис.7

Функцию $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ можно рассчитать точно аналитически, беря интеграл от точного $F^p(\chi)$ согласно первому равенству в (8), или приближенно, беря интеграл от $\gamma_0^p(\xi)$ (16) согласно второму равенству в (8). В первом случае результат представляет из себя совокупность слагаемых, описывающих структуру двух пиков, просматриваемых на рис.4. Пользоваться, однако, полученным выражением неудобно из-за многочисленности слагаемых и невозможности выделить их совокупную существенную часть при $K_0>>1$. Расчет же интеграла от $\gamma_0^p(\xi)$ (16) удается провести аналитически лишь пренебрегая вторым слагаемым в (16) (т.е. полагая $C_2=0$). При $\varepsilon=1$, когда $C_2=0$ выполняется точно, такой расчет дает хорошее приближение для функции $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$

$$\frac{2\pi\Gamma_0^p(\mu)}{\tau_{corr}^{out}}\cong\exp\left(-\frac{4\mu^2}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\left[\exp\left(-\frac{4(\mu-\mu_0)^2}{\pi}\right)+\exp\left(-\frac{4(\mu+\mu_0)^2}{\pi}\right)\right].\quad(20)$$

Из первого равенства в (8) следует, что функция $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ отлична от нуля лишь при $|\mu|<2\Delta\omega\tau_{corr}^{out}$, следовательно, и функцию (20) следует рассматривать лишь на этом интервале. Хотя формально она определена на всей оси, но при $K_0>>1$ в точке $\mu=2\Delta\omega\tau_{corr}^{out}$ и далее значение (20) очень мало́ -

$$\frac{2\pi\Gamma_0^p(2\Delta\omega\tau_{corr}^{out})}{\tau_{corr}^{out}} \cong \left(\frac{1}{K_0}\right)^{2\left(\frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1-x_0)}\right)^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{K_0}\right)^{2\left(\frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)}\right)^2} + \left(\frac{1}{K_0}\right)^{2\left(\frac{2\varepsilon(1+x_0)}{(1+\varepsilon)(1-x_0)}\right)^2}\right].$$

Отметим, что (20) не обращается в единицу при $\mu = 0$, как это следует из (8),

$$\frac{2\pi\Gamma_0^p(0)}{\tau_{corr}^{out}} = 1 + \exp\left(-\frac{4\mu_0^2}{\pi}\right).$$

Однако при $\mu_0 >> 1$ второе слагаемое пренебрежимо мало по сравнению с первым. По этой же причине в (20) следует пренебречь третьим слагаемым - оно описывает боковой максимум функции в отрицательной области аргумента, симметричный максимуму в положительной области. При $\mu \geq 0$ третье слагаемое экспоненциально мало по сравнению с первыми двумя, описывающими центральный максимум и боковой в области положительного значения аргумента.

$$\frac{2\pi\Gamma_0^p(\mu)}{\tau_{corr}^{out}} \cong \exp\left(-\frac{4\mu^2}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{4(\mu-\mu_0)^2}{\pi}\right). \qquad (20a)$$

Выражение (20а) правильно описывает свойства функции $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$, отмеченные на рис.4, - боковой максимум имеет ту же форму, что и центральный, ровно в два раза меньше его и, как видно из сравнения (20а) с выражением (20) из работы [3], оба максимума в два раза у́же функции $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ для параболического “одногорбого” контура. Хорошее совпадение точной функции $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и функции (20а) наступает раньше (при меньших K_0), чем выполняется условие $\mu_0 >> 1$, обеспечивающее четкое разделение максимумов $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$. Но тогда, правда, становится заметным малое отличие (20а) от единице в нуле аргумента. Отличие это обусловлено тем, что, согласно (8), значение $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ в нуле равно интегралу от $\gamma_0^2(\xi)$ и более чувствительно к неточностям аппроксимации $\gamma_0^p(\xi)$, чем сама функция $\gamma_0^p(\xi)$.

Если же $\varepsilon \neq 1$, то учет $C_2 \neq 0$ не позволяет рассчитать $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ аналитически с помощью (8), а предположение $C_2 = 0$ приводит к не очень хорошей аппроксимации $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$, и тем хуже, чем больше отличие ε от единицы. Нам не удалось получить удачного приближения интеграла (8) путем приближенного учета второго слагаемого в (16). В то же время численное интегрирование (16) дает хорошее приближение $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ даже при небольших μ_0, хотя и в этом случае заметно отличие функции от единицы в нуле аргумента.

Функцию $\Phi^p(\xi,\eta)$ можно рассчитать из (9) двумя путями - либо как интеграл от $\gamma_0^2(\xi)$ по первому равенству в (9), либо как интеграл от $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ по второму равенству. Поскольку при произвольном ε нет аналитического выражения для $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$, применим только первый путь. Но и тогда аналитическое выражение интеграла удается получить лишь пренебрегая вторым слагаемым в (16). Расчеты показали, однако, что вносимая при этом при $\varepsilon \neq 1$ погрешность заметно меньше, чем в случае расчета $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$, и приближение для $\Phi^p(\xi,\eta)$ получается хорошее. К тому же здесь получается верное поведение $\Phi^p(\xi,\eta)$ при $\eta = 0$, т.к. из (9) вытекает, что $\Phi(\xi,0) = \left(\gamma_0(\xi)\right)^2/2$, а предположение $C_2 = 0$ вносит меньшую погрешность в $\gamma_0^p(\xi)$ в (16) , чем в интеграл от него в (8). Подстановка (16) в (9) дает

$$\Phi^p(\xi,\eta) \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi}\eta^2}\left\{\begin{array}{l}\widetilde{\Phi}\left(\frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(\eta+\xi),V_0\right)+\widetilde{\Phi}\left(\frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(\eta-\xi),V_0\right)- \\ -2\widetilde{\Phi}\left(\frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\xi,V_0\right)\end{array}\right\}, \quad (21)$$

и в наиболее важном частном случае $\xi = 0$, описывающем половину относительной временной дисперсии усредненной по τ_e мощности,

$$\Phi^p(0,\eta) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}\eta^2}\left\{\widetilde{\Phi}\left(\frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\eta,V_0\right)-\widetilde{\Phi}(0,V_0)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\eta^2}\left\{\begin{array}{l}\Xi\left(\frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\eta,V_0\right)+\Xi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2(1+\varepsilon)}\eta,V_0\varepsilon\right)+\frac{4\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\Xi\left(\frac{\sqrt{\pi(1+\varepsilon^2)}}{2\sqrt{2}(1+\varepsilon)}\eta,V_0\sqrt{\frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}}\right)- \\ -\Xi(0,V_0)-\Xi(0,V_0\varepsilon)-\frac{4\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\Xi\left(0,V_0\sqrt{\frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}}\right)\end{array}\right\}$$

(22)

где введено обозначение $V_0 = \mu_0\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi}\varepsilon} = \sqrt{2\ln K_0}\,\frac{x_0}{1-x_0}$, а вспомогательные функции $\widetilde{\Phi}(u,v)$ и $\Xi(y,z)$ определяются как

$$\widetilde{\Phi}(u,v)=\Xi(u,v)+\Xi\left(\frac{u}{\varepsilon},v\varepsilon\right)+\frac{4\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\Xi\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}}},v\sqrt{\frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}}\right),$$

$$\Xi(y,z)=y\,\mathrm{erf}\,y+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-y^2)\cos^2 zy+\exp(-z^2)\left[y\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{erf}\left(y-iz\right)\right)+z\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{erf}\left(y-iz\right)\right)\right] \qquad (23)$$

Если обратиться к первому равенству в (9), то легко показать, что имеет место общее равенство

$$\Phi(\xi,\eta)=\frac{1}{2\eta^2}\left\{(\eta+\xi)^2\Phi(0,\eta+\xi)+(\eta-\xi)^2\Phi(0,\eta-\xi)-2\xi^2\Phi(0,\xi)\right\}. \qquad (24)$$

Это значит, что если мы имеем приближенное аналитическое выражение для функции $\Phi(0,\eta)$, то с помощью (24) легко получить и выражение для $\Phi(\xi,\eta)$. Формулы (21-22) соответствуют соотношению (24).

Отметим, что полученные для функций (7-9,11) выражения (15-16,20-22) кроме аргументов зависят только от параметров μ_0 и ε.

При $\varepsilon=1$ все формулы заметно упрощаются и приближения становятся намного точнее.

Выражение (12) для формы контура при этом принимает вид

$$f_p(x)=\left[1-\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^2\right]\cdot\frac{1+\mathrm{sign}\left[1-\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^2\right]}{2}.$$

Выражение (15) для $F^p(\chi)$ переходит в

$$F^p(\chi)\cong\exp\left[-\frac{8}{\pi}\left(\chi-\frac{\mu_0}{2}\right)^2\right], \qquad (25)$$

которое, как легко видеть из сравнения с аналогичной функцией для “одногорбого” параболического контура в работе [3], отличается от последней сжатием в 2 раза и сдвигом на $\mu_0/2$ по оси абсцисс.

Выражение (16) для $\gamma_0^p(\xi)$ переходит в

$$\gamma_0^p(\xi)\cong\exp\left(-\frac{\pi}{32}\xi^2\right)\cos\left(\xi\frac{\mu_0}{2}\right), \qquad (26)$$

поскольку $C_2(\xi)$ из (18) обращается в нуль. Сравнивая (26) с $\gamma_0(\xi)$ для “одногорбого” параболического контура (см. (19) в работе [3]), мы видим, что в (26) поя-

вился дополнительный множитель $\cos\left(\xi\frac{\mu_0}{2}\right)$, а функция $C_1(\xi)$ из (18) перешла в функцию, отличающуюся от (19) в [3] растяжением в 2 раза по оси абсцисс.

Выражение для $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ при $\varepsilon = 1$ приведено выше - см.(20а). Как отмечалось, оно отличается от аналогичного выражения для “одногорбого” параболического контура сжатием в 2 раза по оси абсцисс основного максимума и появлением двух боковых, идентичных центральному по форме и ширине, в 2 раза меньших по высоте и сдвинутых на μ_0 от центра. Функцию надо рассматривать отличной от нуля лишь на отрезке $|\mu| \le 2\Delta\omega\tau_{corr}^{out}$. В целом (20а) хорошо аппроксимирует точную функцию $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ в области значений параметров

$$\left[\begin{array}{ll} \mu_0 \ge 2\sqrt{\pi}, & x_0 \le \frac{1}{2} \\ \mu_0 \ge \frac{x_0}{1-x_0}2\sqrt{\pi}, & x_0 \ge \frac{1}{2} \end{array}\right. . \tag{27}$$

Вне этой области необходимо пользоваться более общей формулой

$$\frac{2\pi\Gamma_0^p(\mu)}{\tau_{corr}^{out}} \cong \frac{A(\mu)\exp\left(-\frac{4}{\pi}\mu^2\right) + B(\mu)\exp\left(-\frac{4}{\pi}(\mu-\mu_0)^2\right)}{1+\mathrm{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mu_0\right)}, \tag{28}$$

где коэффициенты $A(\mu)$ и $B(\mu)$ определяются следующим образом:

при $x_0 \le \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} A(\mu) &\cong \mathrm{erf}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu_0\frac{1-x_0}{x_0} - \mu\right)\right] + \mathrm{erf}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\mu_0-\mu)\right], && 0 \le \mu \le \frac{\mu_0}{2x_0} \\ &\cong 0, && \frac{\mu_0}{2x_0} \le \mu \le \frac{\mu_0}{x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\mu) &\cong \mathrm{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mu\right), && 0 \le \mu \le \frac{\mu_0}{2x_0} \\ &\cong \mathrm{erf}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mu_0}{x_0} - \right)\mu\right], && \frac{\mu_0}{2x_0} \le \mu \le \frac{\mu_0}{x_0} \end{aligned}$$

- коэффициент симметричен относительно $\mu = \frac{\mu_0}{2x_0}$.

при $x_0 \geq \frac{1}{2}$

$$A(\mu) \cong 2\,\mathrm{erf}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu_0 \frac{1-x_0}{x_0} - \mu\right)\right], \qquad 0 \leq \mu \leq \frac{(1-x_0)\mu_0}{x_0}$$

$$\cong 0, \qquad \frac{\mu_0}{2x_0} \leq \mu \leq \frac{\mu_0}{x_0},$$

$$B(\mu) \cong 0, \qquad 0 \leq \mu \leq \frac{2x_0-1}{x_0}\mu_0$$

$$\cong \mathrm{erf}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu_0 \frac{1-x_0}{x_0} + (\mu-\mu_0)\right)\right], \qquad \frac{2x_0-1}{x_0}\mu_0 \leq \mu \leq \mu_0$$

$$\cong \mathrm{erf}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu_0 \frac{1-x_0}{x_0} - (\mu-\mu_0)\right)\right], \qquad \mu_0 \leq \mu \leq \frac{\mu_0}{x_0}$$

-

коэффициент симметричен относительно $\mu = \mu_0$.

Формула (28) переходит в упрощенную (20а) при выполнении (27). Важное отличие (28) от (20а) в том, что коэффициенты в (28) зависят явно не только от μ_0, но и от x_0. Условие (27), позволяющее избежать этой зависимости, - это усиление условия $K_0 >> 1$ применимости рассматриваемых приближений.

Выражения (21-22) для $\Phi^p(\xi,\eta)$ и $\Phi^p(0,\eta)$ при $\varepsilon = 1$ переходят в

$$\Phi^p(\xi,\eta) \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}\eta^2}\left\{\begin{array}{l}\Xi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\eta+\xi), \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) + \Xi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\eta-\xi), \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) - \\ -2\Xi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\xi, \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\end{array}\right\}$$

и

$$\Phi^p(0,\eta) \cong \frac{4}{\sqrt{\pi}\eta^2}\left\{\Xi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\eta, \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) - \Xi\left(0, \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\right\},$$

где вспомогательная функция $\Xi(y,z)$ определена (23), откуда получаем

$$\Xi(y,z) - \Xi(0,z) = y\,\mathrm{erf}\,y + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\exp(-y^2)\cos^2 zy - 1\right] + \\ + \exp(-z^2)\left\{y\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{erf}(y-iz)\right) + z\left[\mathrm{Im}\left(\mathrm{erf}(y-iz)\right) + \mathrm{Im}\left(\mathrm{erf}(iz)\right)\right]\right\}.$$

Подставляя это равенство и (23) в выписанные выражения, в явном виде получим для $\Phi^p(\xi,\eta)$ и $\Phi^p(0,\eta)$

$$\Phi^p(\xi,\eta) \cong$$

$$\cong \frac{1}{2\eta^2}\left\{\begin{array}{l}(\eta+\xi)\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\eta+\xi)\right)+(\eta-\xi)\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\eta-\xi)\right)-2\xi\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\xi\right)+\\ +e^{-\frac{4\mu_0^2}{\pi}}\left[\begin{array}{l}(\eta+\xi)\operatorname{Re}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\eta+\xi)-i\frac{2\mu_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right)+\\ +(\eta-\xi)\operatorname{Re}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\eta-\xi)-i\frac{2\mu_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right)-2\xi\operatorname{Re}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\xi-i\frac{2\mu_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right)+\\ +\frac{8\mu_0}{\pi}\left[\begin{array}{l}\operatorname{Im}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\eta+\xi)-i\frac{2\mu_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right)+\operatorname{Im}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\eta-\xi)-i\frac{2\mu_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right)-\\ -2\operatorname{Im}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\xi-i\frac{2\mu_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right)\end{array}\right]\end{array}\right]\end{array}\right\}-$$

$$-\frac{4}{\pi\eta^2}\exp\left(-\frac{\pi}{16}\xi^2\right)\left\{2\cos^2\frac{\xi\mu_0}{2}-\exp\left(-\frac{\pi}{16}\eta^2\right)\cdot\left[\begin{array}{l}\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{8}\xi\eta\right)\cdot\left(\cos\xi\mu_0\cos\eta\mu_0+1\right)+\\ \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{8}\xi\eta\right)\cdot\sin\xi\mu_0\sin\eta\mu_0\end{array}\right]\right\};$$

(29)

$$\Phi^p(0,\eta) \cong$$

$$\cong \frac{1}{\eta^2}\left\{\eta\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\eta\right)+e^{-\frac{4\mu_0^2}{\pi}}\left[\begin{array}{l}\eta\operatorname{Re}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\eta-i\frac{2\mu_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right)+\\ +\frac{8\mu_0}{\pi}\left[\operatorname{Im}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\eta-i\frac{2\mu_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right)+\operatorname{Im}\left(\operatorname{erf}\left(i\frac{2\mu_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right)\right]\end{array}\right]\right\}-.$$

$$-\frac{8}{\pi\eta^2}\left\{1-\exp\left(-\frac{\pi}{16}\eta^2\right)\cdot\cos^2\frac{\eta\mu_0}{2}\right\}$$

(30)

Сравнение (29) с выражением (21) из [3] для “одногорбого” параболического контура показывает, что в (29) имеются две разные части. Одна - это первые три слагаемых плюс часть последнего слагаемого, которые не зависят от μ_0 и в сумме

отличаются от (21) из [3] растяжением в 2 раза по ξ и η и общим множителем 1/2. Другая часть - это все остальные слагаемые (29), которые от μ_0 зависят.

Еще отчетливее эта структура видна из сравнения (30) и формулы (22) из [3] для “одногорбого” контура. Для удобства сравнения воспроизведем здесь (22) из [3] под номером (31), обозначив соответствующую функцию как $\Phi^{un}(0,\eta)$

$$\Phi^{un}(0,\eta) \cong \frac{1}{\eta^2}\left\{\eta\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\eta\right)\right\} - \frac{2}{\pi\eta^2}\left\{1-\exp\left(-\frac{\pi}{4}\eta^2\right)\right\}. \qquad (31)$$

На рис.5 мы видели, что у функций $\Phi^{p}(0,\eta)$ имеется одинаковый для всех μ_0 “хвост” (совпадающий с “хвостом” $\Phi^{un}(0,\eta)$) и заметное отличие начальных участков функции. Теперь, глядя на (30) и (31), мы можем сказать, что “хвост” определяется первым слагаемым в (30) и частью третьего слагаемого, которые в сумме представляют из себя выражение (31), растянутое в 2 раза по оси абсцисс и имеющее общий множитель 1/2. Обозначим этот “хвост” как $\Phi^{tail}(0,\eta)$ - он образует общий пьедестал функции $\Phi^{p}(0,\eta)$

$$\Phi^{tail}(0,\eta) \cong \frac{1}{\eta^2}\left\{\eta\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\eta\right)\right\} - \frac{4}{\pi\eta^2}\left\{1-\exp\left(-\frac{\pi}{16}\eta^2\right)\right\}. \qquad (32)$$

Этот пьедестал при $\eta = 0$ равен 1/4, т.е. половине $\Phi^{p}(0,0) = \Phi^{un}(0,0) = 1/2$, а при $\eta \to \infty$ совпадает с разложением $\Phi^{un}(0,\eta)$ для “одногорбого” параболического контура (множитель 1/2 и растяжение в 2 раза здесь взаимно компенсируются). Поэтому $\Phi^{tail}(0,\eta >> 1)$ (32) не только не зависит от μ_0, но и совпадает с $\Phi^{un}(0,\eta >> 1)$ (31). Остальные слагаемые в (30) явно зависят от μ_0.

Зависимость эта, как видно из (30), довольно сложна, но ее можно существенно упростить без заметной потери точности, если воспользоваться тем, что эта часть функции (30) равна 1/4 при $\eta = 0$, дает заметный вклад в $\Phi^{p}(0,\eta)$ лишь при малых η, быстро спадает до нуля с ростом η, а параметр $\mu_0 >> 1$. С ростом μ_0 разница $\left(\Phi^{p}(0,\eta) - \Phi^{tail}(0,\eta)\right)$ при заданном η (кроме, естественно, начальной точки $\eta = 0$) тоже быстро стремится к нулю.

При $\eta \to 0$

$$\Phi^{p}_{\eta\to 0}(0,\eta) \cong \frac{1}{2}\left[1-\frac{\pi\eta^2}{96}\left(1+\frac{4\mu_0^2}{\pi}\right)\right]., \qquad (33)$$

$$\Phi^{tail}_{\eta\to 0}(0,\eta) \cong \frac{1}{4}\left[1-\frac{\pi\eta^2}{96}\right],$$

$$\Phi^{p}_{\eta\to 0}(0,\eta)-\Phi^{tail}_{\eta\to 0}(0,\eta)\cong\frac{1}{4}\left[1-\frac{\pi\eta^2}{96}\left(1+\frac{8\mu_0^2}{\pi}\right)\right].$$

Возьмем для функции $\Delta\Phi(\eta,\mu_0)=\Phi^{p}(0,\eta)-\Phi^{tail}(0,\eta)$ 2 простых приближения, удовлетворяющих необходимому поведению при $\eta\to 0$, на бесконечности и нужной зависимости от μ_0 при $\mu_0>>1$:

$$\Delta\Phi_1^{app}(\eta,\mu_0)\cong\frac{8}{\pi\eta^2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\eta}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{8}{\pi}\mu_0^2\right)}\right)}{1+\frac{8}{\pi}\mu_0^2};\qquad(34)$$

$$\Delta\Phi_2^{app}(\eta,\mu_0)\cong\frac{12}{\pi\eta^2}\cdot\frac{1-\exp\left(-\frac{\pi}{48}\eta^2\left(1+\frac{8}{\pi}\mu_0^2\right)\right)}{1+\frac{8}{\pi}\mu_0^2}.\qquad(35)$$

Рис.8а-г показывает качество аппроксимации функции $\Phi^{p}(0,\eta)$ с помощью приближений (34) и (35). Расчет сделан для $x_0=2-\sqrt{2}\cong 0{,}586$ при $K_0=10,\ 10^2,\ 10^6,\ 10^9$ (при этом $\mu_0\cong\sqrt{\pi\ln K_0}\cong 2{,}67\sqrt{\lg K_0}$).

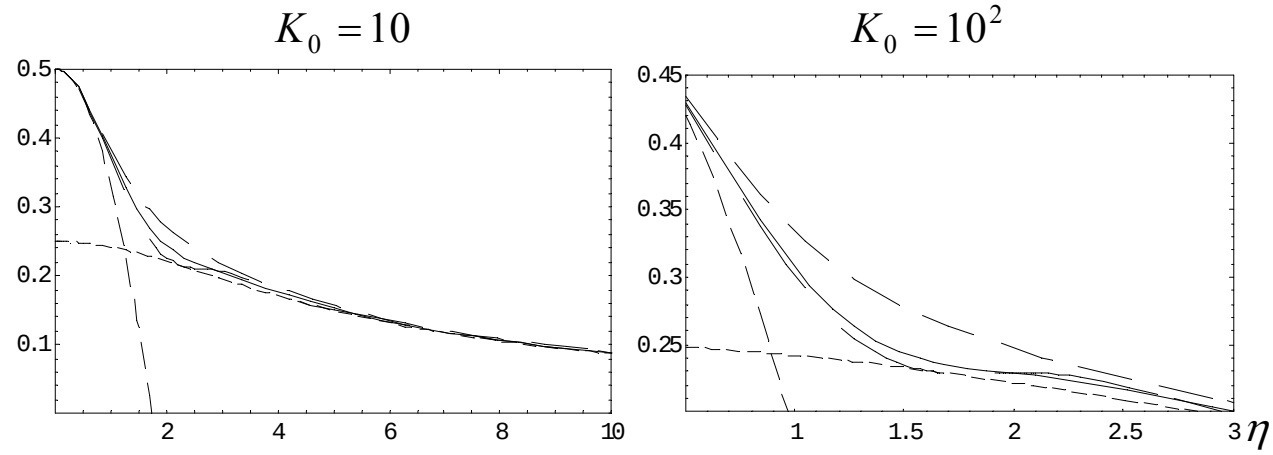
_____ - $\Phi^{p}(0,\eta)$ (формула (30));

_____ _____ - $\Phi^{tail}(0,\eta)+\Delta\Phi_1^{app}(0,\eta)$ ((32) и (34));

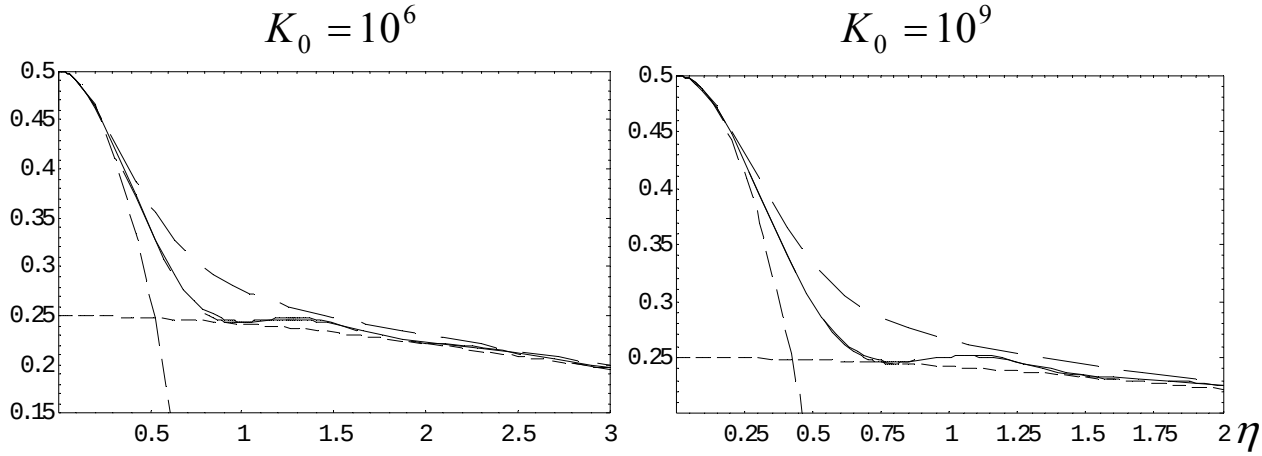
____ ____ ____ - $\Phi^{tail}(0,\eta)+\Delta\Phi_2^{app}(0,\eta)$ ((32) и (35));

__ __ __ __ _ - $\Phi^{p}_{\eta\to 0}(0,\eta)+1/4$ (формула (33));

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ - $\Phi^{tail}(0,\eta)$ (формула (32)).



(а) **(б)**



(в) **(г)**

Рис.8

Из рис.8 следует, что уже при $\mu_0 \geq 2{,}5$ $\Phi_1^{app}(0,\eta)$ дает вполне удовлетворительную аппроксимацию $\Phi^p(0,\eta)$, а при $\mu_0 \geq 4$ - очень хорошую. Следовательно, без потери точности функция (30) может быть заменена на функцию

$$\Phi_{appr}^p(0,\eta) \cong \frac{1}{\eta^2}\left\{\eta \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\eta\right)\right\} - \frac{4}{\pi\eta^2}\left\{1-\exp\left(-\frac{\pi}{16}\eta^2\right)\right\} + \frac{8}{\pi\eta^2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\eta}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{8}{\pi}\mu_0^2\right)}\right)}{1+\frac{8}{\pi}\mu_0^2}. \quad (36)$$

Пользуясь (24) и (36), можно также упростить и формулу (29).

Обратимся теперь к анализу параметра μ_0, фигурирующего во всех полученных функциях (15-16,20-22,25-30,36). Для контура (12) этим параметром мы обозначили выражение

$$\mu_0 = \frac{\sqrt{2\pi}\varepsilon}{(1+\varepsilon)}\cdot\frac{x_0}{1-x_0}\sqrt{\ln K_0}\,, \quad (37)$$

где ε - параметр асимметрии (14) параболического “горба”. Аргументы функций (1-3) и функция (2), согласно (5-6), нормированы на время корреляции квантового шума τ_{corr}^{out} (10). Если перейти в (10) к безразмерному аргументу $x = \Omega/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ - нормировка частоты, то получим безразмерную функцию l, зависящую от K_0 и формы контура $f(x)$

$$l = \tau_{corr}^{out}\cdot\Delta\omega = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\int_0^\infty F^2(x)dx}{\left(\int_0^\infty F(x)dx\right)^2}. \quad (38)$$

Для контура (12) с $\Delta\omega$ согласно (13) при $K_0 >> 1$

$$l^p \cong \frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{\sqrt{2}(1+\varepsilon)} \cdot \frac{\sqrt{\ln K_0}}{1-x_0}. \qquad (39)$$

С ростом K_0 качество приближения (39), в зависимости от ε и x_0, становится хорошим, начиная с весьма различных значений $K_0 >> 1$, подчас далеко за пределами реально достижимых $K_0 \le 10^9$. В то время как полученные выше приближения самих статистических функций являются хорошими как правило уже при $K_0 \ge 10^2 \div 10^3$. Это связано с тем, что параметром малости в приближениях статистических функций является величина $\frac{1}{K_0}$, в то время как в (39) - величина $\frac{1}{\sqrt{\ln K_0}}$. Иллюстрацией сказанного служит рис.9, на котором для контуров с рис.6 приведены графики функций $\tau_{corr}^{out} / \left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$, где числитель рассчитывался численно по формуле (38), а знаменатель - по формуле (39). Как и на рис.6, на рис.9 $x_0 = 0{,}5$ и $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1;\ 2$. Для $\varepsilon = 1$ график представлен сплошной линией; для остальных ε - штриховыми, длина штрихов увеличивается с ростом ε (две последние кривые слились друг с другом); для удобства сравнения сплошной прямой также приведена линия единичного значения ординаты.

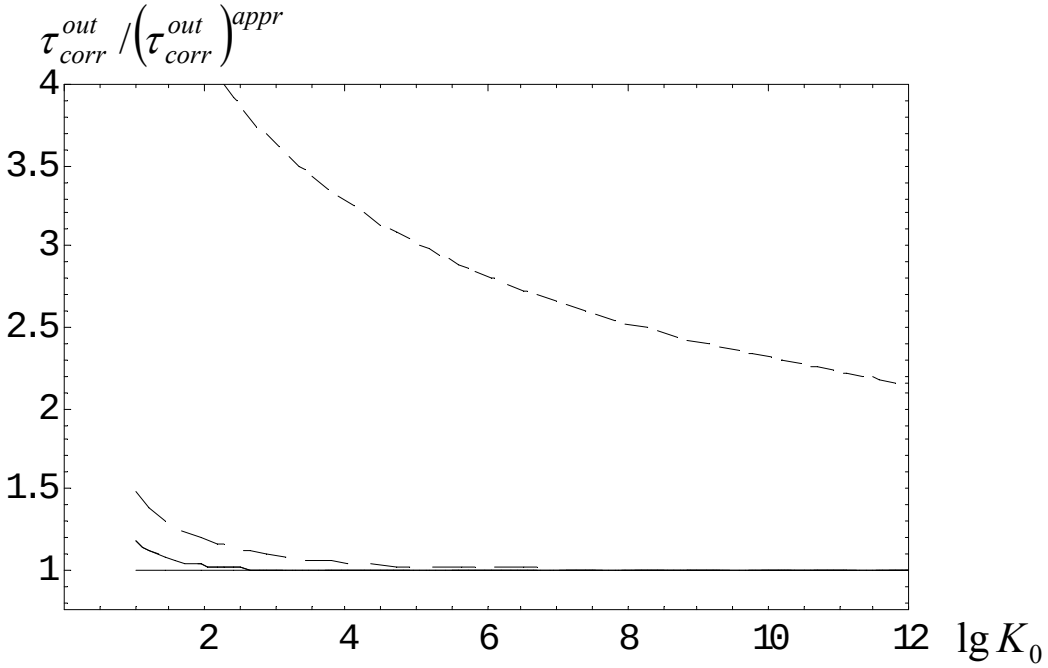


Рис.9

Введем безразмерную величину

$$s = 2lx_0 = 2\Delta\omega \cdot x_0 / \left(\tau_{corr}^{out}\right)^{-1}, \qquad (40)$$

Поскольку

$$2\Delta\omega \cdot x_0 = 2\Omega_{\max} = 2(\omega_{\max} - \omega_0),$$

то правая часть (40) представляет из себя расстояние между “горбами” контура, нормированное на $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{-1}$. Из (37,39) для μ_0 можно записать

$$\mu_0 \cong s.$$

Обращаем внимание на то, что параметр μ_0 в выражениях (15-16,20-22,25-30,36) появился просто как комбинация (37), в которой во все формулы вошли ε, x_0 и K_0. А соотношение $\mu_0 \cong s$ и (40) придают ему прозрачный физический смысл. Рис.9, который в равной степени представляет отношение s/μ_0, показывает, однако, что равенство $\mu_0 \cong s$ может выполняться с ограниченной точностью даже при весьма больших значениях K_0. Покажем, что для “двугорбых” параболических контуров (а в дальнейшем подтвердим и для других типов контуров) именно s, а не μ_0, позволяет получить хорошее подобие статистических характеристик.

Для проверки применимости полученных приближений мы рассчитали численно и по формулам (16,20,22,26,30,36) функции $\gamma_0^p(\xi)$, $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi^p(0,\eta)$ при разных ε и K_0 (величина x_0 пока фиксировалась равной 1/2). Как и на рис.6 и 9 брались $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1;\ 2$, а K_0 варьировалась в пределах $10 \div 10^9$. Результаты расчетов показали, что приближенные формулы хорошо описывают упомянутые функции тогда, когда совпадают точные (38) и приближенные (39) значения τ_{corr}^{out}, т.е. $\mu_0 = s$. Однако в тех случаях, когда τ_{corr}^{out} и $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$ отличны друг от друга, то весьма хорошее совпадение численно рассчитанных функций с соответствующими приближенными аналитическими выражениями наблюдается тогда, когда в последних параметр μ_0 заменен на s.

На рис.10а-д приведены примеры для функции $\gamma_0^p(\xi)$:

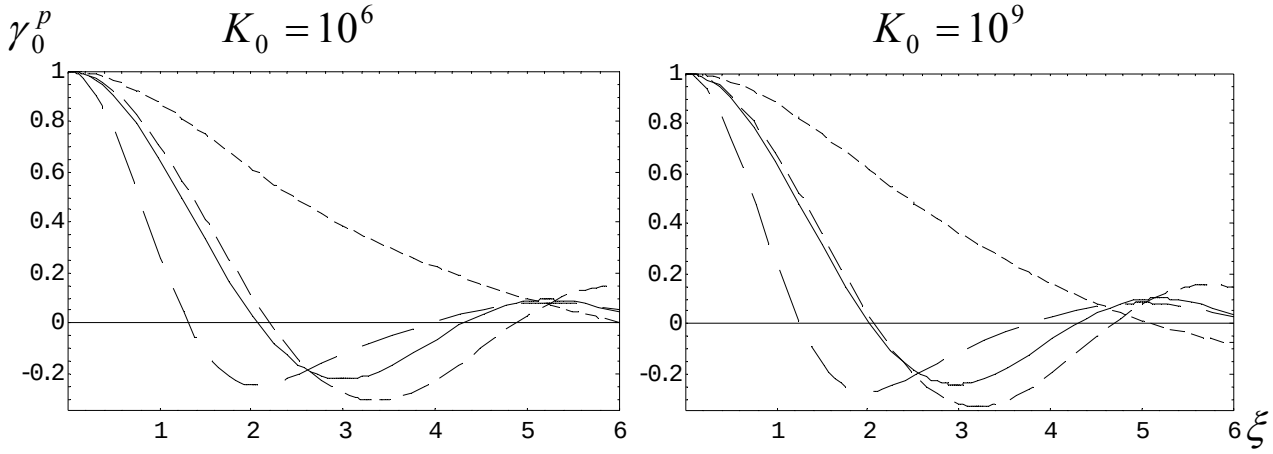
_____ - численный расчет;

_ _ _ _ _ _ _ - расчет по формуле (16) с использованием μ_0 из (37);

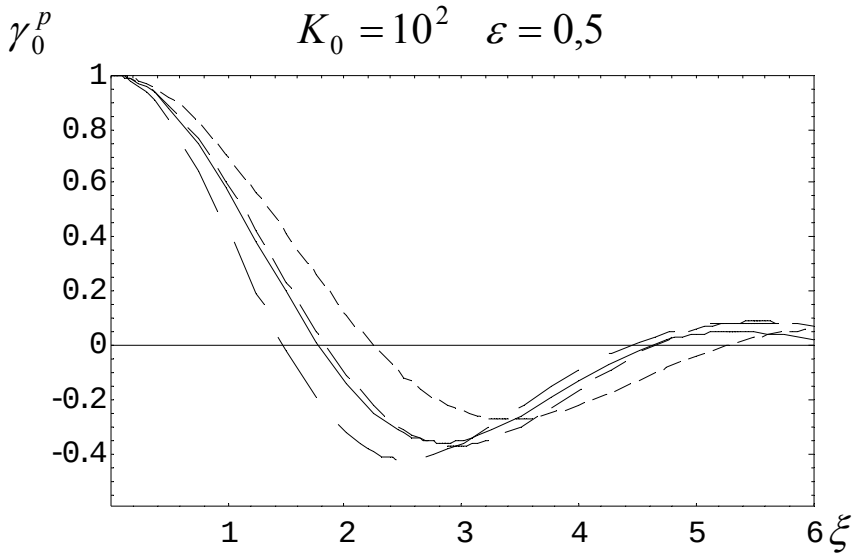
__ __ __ _ - расчет по формуле (16) с использованием s из (40) вместо μ_0;

___ ___ _ - расчет по формуле (16) в предположении $C_2 = 0$ с использованием s вместо μ_0 (для $\varepsilon = 1$ кривая совпадает с предыдущей).

$\varepsilon = 0{,}1$

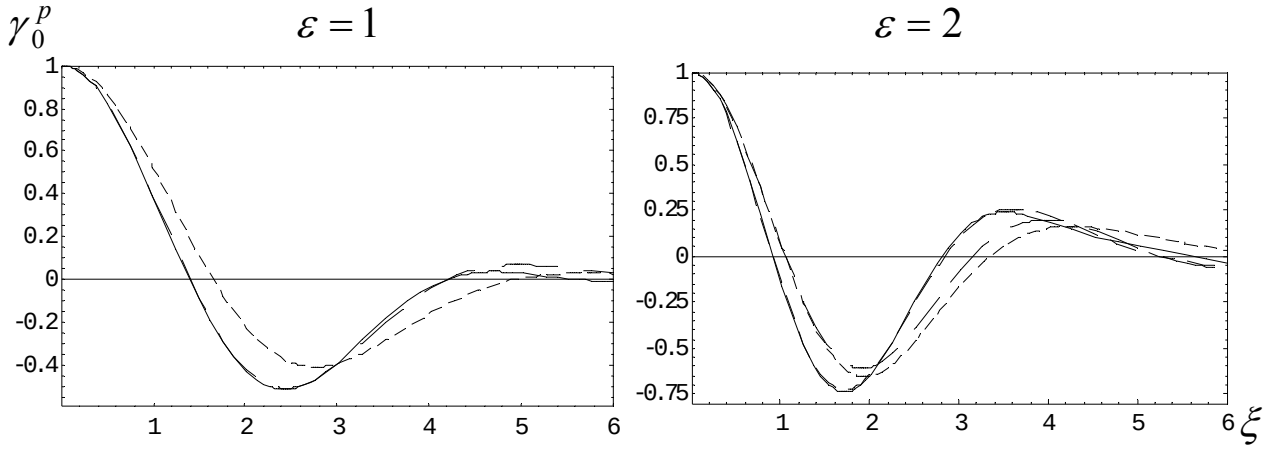


(а) **(б)**



(в)

$K_0 = 10$



(г) **(д)**

Рис.10

Как видно из рис.9, при $\varepsilon = 0{,}1$ τ_{corr}^{out} и $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$ не совпадают даже при $K_0 = 10^{12}$. На рис.10а-б приведены графики для $K_0 = 10^6$ и $K_0 = 10^9$. Для $\varepsilon = 0{,}5$ $\tau_{corr}^{out} \cong \left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$ при $K_0 \geq 10^4$. На рис.10в приведены графики для $K_0 = 10^2$. Для $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$ $\tau_{corr}^{out} \cong \left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$ при $K_0 \geq 10^2$. Поэтому на рис.10г-д приведены графики для $K_0 = 10$.

Видно, что и для K_0, меньших тех, для которых τ_{corr}^{out} (38) и $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$ (39) совпадают, формула (16) для $\gamma_0^p(\xi)$ при замене μ_0 на s дает кривые, близкие к рассчитанным численно. Погрешность вследствие использования μ_0, а не s, здесь заметна (иногда очень заметна). Пренебрежение слагаемым (18) в $\gamma_0^p(\xi)$ (необходимое нам для аналитических расчетов $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi^p(\xi,\eta)$ при $\varepsilon \neq 1$) также везде дает заметную погрешность, сохраняющуюся и при бóльших K_0, когда все остальные кривые сливаются. Далее мы увидим, однако, что это не приводит к столь же заметным погрешностям в $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi^p(\xi,\eta)$.

Для функции $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ аналитическое выражение (20) получено лишь при $\varepsilon = 1$. Расчеты для этого случая приведены на рис.11а-б при $K_0 = 10$ и $K_0 = 10^2$. В первом случае τ_{corr}^{out} и $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$ еще не совпадают, во втором - уже совпадают. Типы кривых те же, что и на рис.10: сплошные кривые - численный расчет, короткие штрихи - формула (20) с μ_0 из (37), длинные штрихи - формула (20) с s из (40) (везде сливается со сплошной кривой).

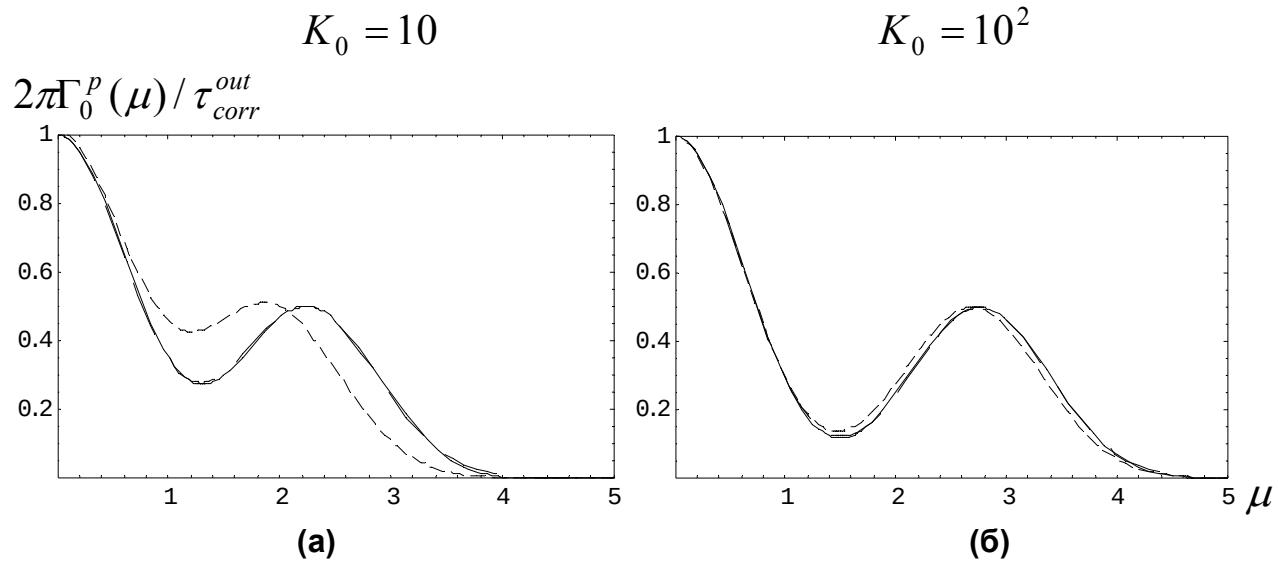
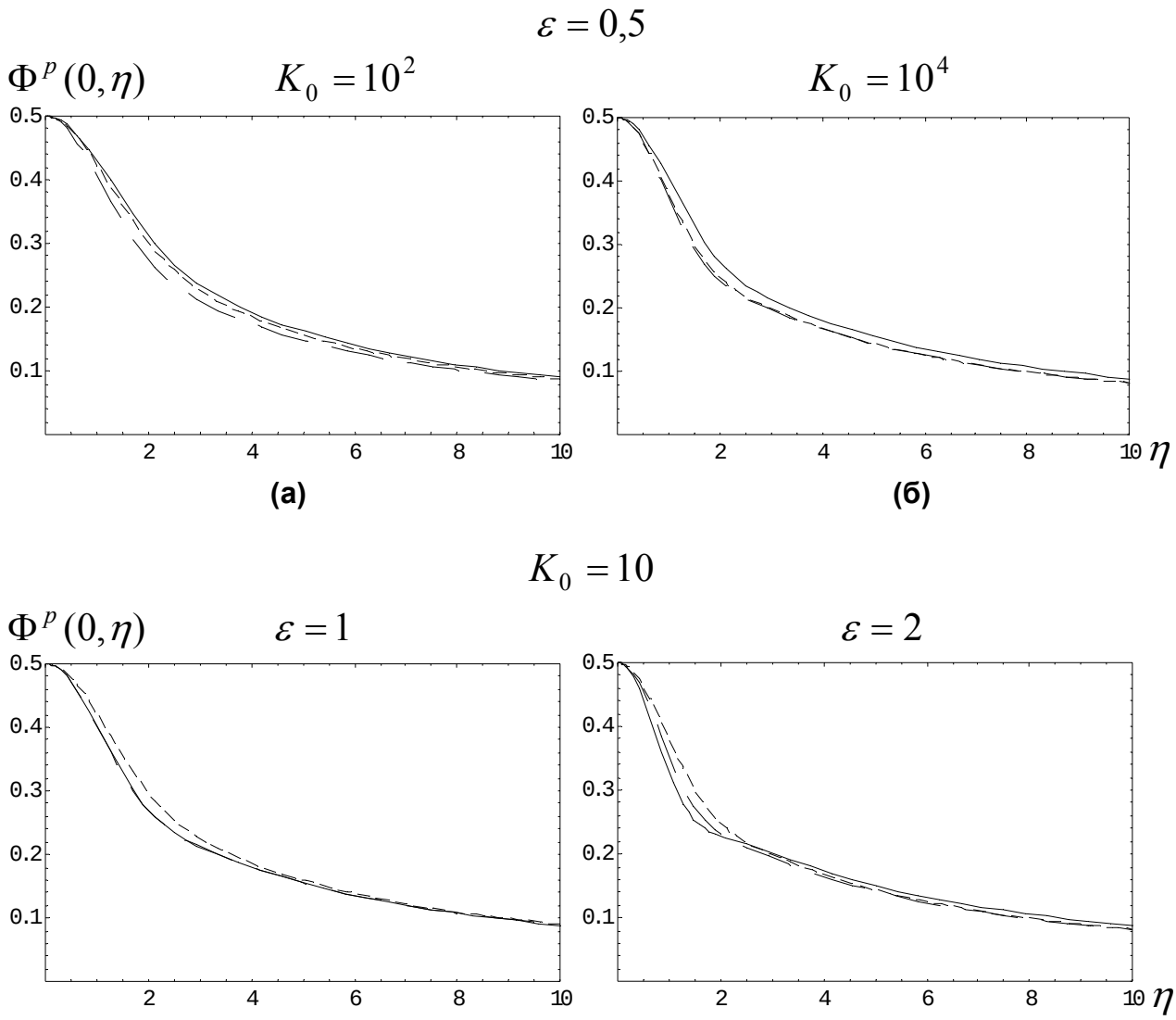


Рис.11

Что касается функции $\Phi^p(\xi,\eta)$, то выражения (21-22) получены в предположении $C_2 = 0$ в $\gamma_0^p(\xi)$ и это вносит небольшую погрешность в $\Phi^p(\xi,\eta)$ при ε сильно отличных от единицы. Если же $\varepsilon \in [0{,}5;2]$, то эта погрешность мала. На рис.12а-г приведены графики $\Phi^p(0,\eta)$ для $\varepsilon = 0{,}5$ ($K_0 = 10^2;10^4$) и для $\varepsilon = 1;2$ ($K_0 = 10$). Кроме рис.12б ($\varepsilon = 0{,}5$, $K_0 = 10^4$) примеры относятся к случаю несовпадения τ_{corr}^{out} и $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$. Типы кривых те же, что и на рис.11. В целом из рис.12 видно, что здесь не только пренебрежение C_2 в $\gamma_0^p(\xi)$, но и различия в μ_0 и s сказываются слабо на результатах. При $\varepsilon = 1$ (рис.12в), когда $C_2 = 0$ точно, замена μ_0 на s улучшает расчеты, при $\varepsilon \neq 1$ это может как ослабить погрешность пренебрежения C_2 (рис.12г), так и усилить ее (рис.12а). Но и то и другое мало́ при $\varepsilon \in [0{,}5;2]$.



(в) **Рис.12** **(г)** Итак, мы показали, что аналитические выражения для функций $\gamma_0^p(\xi)$, $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi^p(\xi,\eta)$, полученные для “двугорбого” параболического контура, хорошо описывают соответствующие точные функции даже при небольших значениях K_0, если вместо фигурирующего в них параметра μ_0 использовать близкий ему, но не всегда равный, s - значение расстояния между “горбами”, нормированное на $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{-1}$. Обсудим этот результат подробнее.

Поскольку функции (7-9) зависят только от $F(\chi)$ (11), естественно, что в них для “двугорбого” параболического контура (12) есть не более трех независимых параметров (будем пока говорить о точном описании без всяких упрощений) плюс параметр нормировки. Изначально это были K_0, два параметра, определяющих контур (12), - ε и x_0, и τ_{corr}^{out}. Параметр нормировки τ_{corr}^{out} тоже зависит только от K_0, ε и x_0 (приближенно при $K_0 >> 1$ - см.(39), более точно - (38)), поэтому нормировка (7-9) именно на τ_{corr}^{out} не добавляет этим функциям зависимости от чего-то еще, кроме K_0, ε и x_0. Если считать, что x_0 в ряду независимых параметров заменено на s - более прозрачный по смыслу, то остается зависимость (7-9) от K_0, ε и s. Особенность выбора нормировки именно на τ_{corr}^{out} в том и заключается, что (7-9) при этом почти совсем от K_0 не зависят; остаются только ε и s. Причем это имеет место даже при малых K_0, когда условие $K_0 >> 1$, необходимое для применимости приближений, не выполняется. Зафиксируем ε и s. Из (39-40) видно, что из-за слабой зависимости s от K_0 диапазон изменения K_0 для сохранения заданного s при вариациях x_0 очень велик. Однако такое изменение K_0 никак не сказывается на виде функций (7-9). Проиллюстрируем это на примерах. Возьмем $\varepsilon = 0{,}5;\ 1;\ 2$ и $x_0 = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}65$ (попытка взять $x_0 > 0{,}65$ приводит к необходимости использовать для сохранения заданного значения s абсурдно малые K_0, подчас много меньшие единицы, что лишено смысла, однако в следующей главе для контуров треугольного типа из-за более сильной зависимости $s(K_0)$ мы сможем проиллюстрировать доказываемое утверждение и при большем диапазоне изменения x_0).

На рис.13-14 приведены графики контуров $f_p(x)$ и зависимостей $\tau_{corr}^{out}/\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr} = s/\mu_0$ от $\lg K_0$ для $\varepsilon = 0{,}5$ и $x_0 = 0{,}5$ (сплошные кривые), $x_0 = 0{,}25$ (штриховые кривые с короткими штрихами), $x_0 = 0{,}65$ (штриховые

кривые с длинными штрихами). На рис.14 для удобства также приведена сплошная горизонтальная единичная прямая, соответствующая $\tau_{corr}^{out} / \left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr} = 1$.

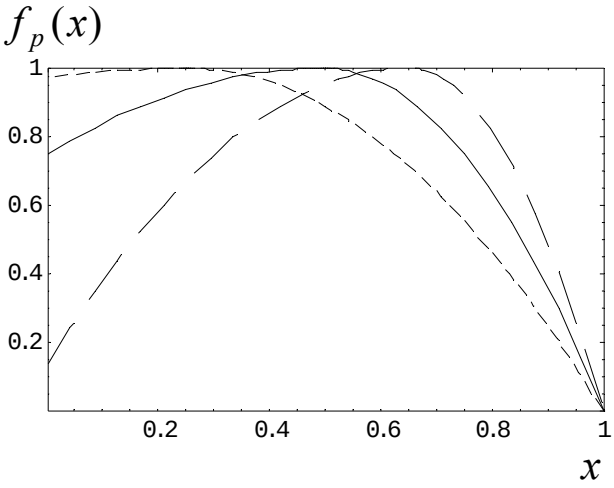


Рис.13

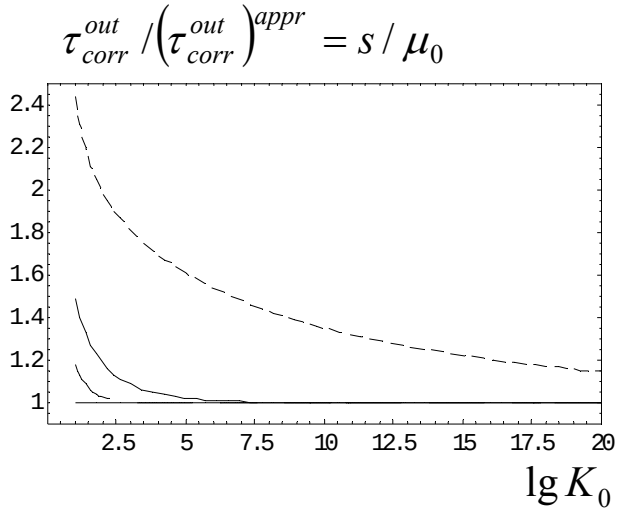
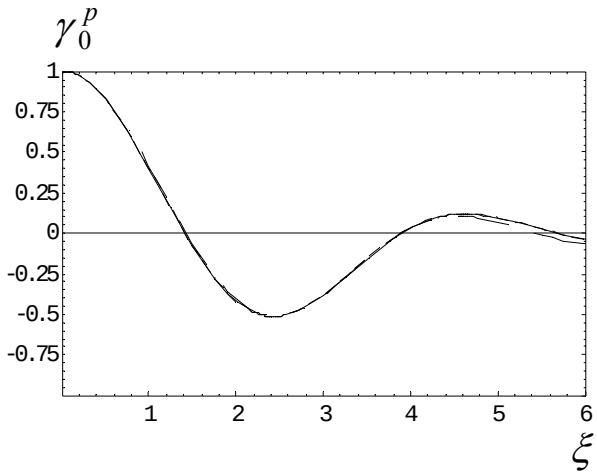
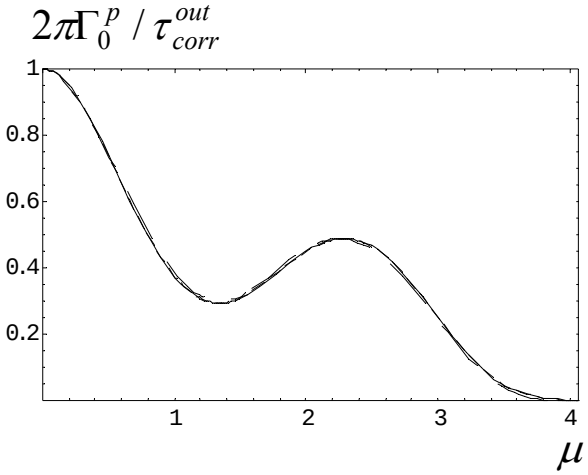


Рис.14

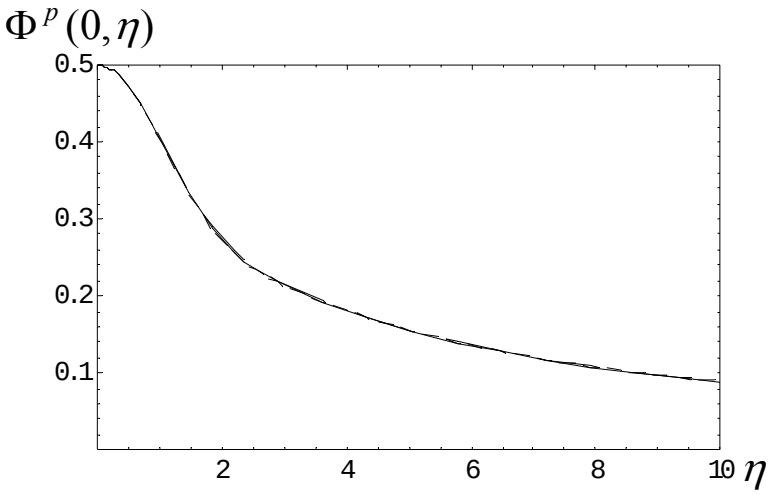
Мы взяли $K_0 = 10^4$ при $x_0 = 0{,}5$. При этом $s = 2{,}6433$ (s здесь слегка отлична от μ_0, как видно из рис.14). Для сохранения этого s при $x_0 = 0{,}25$ надо взять $K_0 = 10^{36}$, что дает $\mu_0 = s = 2{,}6428$. При $x_0 = 0{,}65$ необходимо взять $K_0 = 5{,}415$, что дает $s = 2{,}6434$ (если бы мы подбирали K_0, ориентируясь на μ_0(37), то при $x_0 = 0{,}65$ следовало бы взять $K_0 = 10^{196/169} = 14{,}4465$, что дало бы $s = 2{,}8751$). Расчеты статистических функций при выбранных значениях K_0 приведены на рис.15а-в и показывают очень хорошее совпадение кривых. Типы кривых соответствуют рис.13-14. Напомним, что здесь и далее все функции рассчитывались численно во избежание погрешностей приближений, получаемых в предположении $K_0 >> 1$.



(а)



(б)

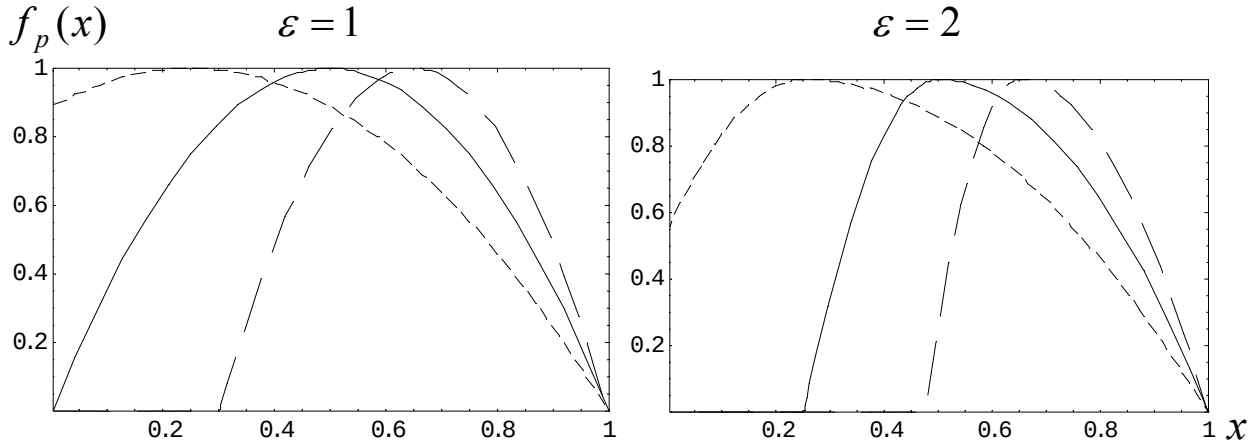


(в)

Рис.15

Заметим, что если бы для рис.15 мы взяли, например, $x_0 = 0{,}75$, а не $x_0 = 0{,}65$, то при $K_0 = 2{,}783$ (согласно (37)) $s = 4{,}0324$ и даже при абсурдно малом значении $K_0 = 0{,}0001$ все еще $s = 3{,}2287$, т.е. не удалось бы приблизиться к необходимой величине $s = 2{,}6433$.

Аналогичные сопоставления функций (7-9) мы провели при $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$. Графики $f_p(x)$ для них приведены на рис.16а-б.



(а) **(б)**

Рис.16

В обоих случаях для $x_0 = 0{,}5$ бралось $K_0 = 10^4$ (при $\varepsilon = 1$ $s = 3{,}805$, а при $\varepsilon = 2$ $s = 5{,}074$). Для $x_0 = 0{,}25$ тогда надо взять $K_0 = 10^{36}$ ($\mu_0 = s$). Для $x_0 = 0{,}65$ численный подбор показал, что вместо $K_0 = 14{,}45$ (оценка по (37)) необходимо взять $K_0 = 3{,}45$ при $\varepsilon = 1$ и $K_0 = 3{,}445$ при $\varepsilon = 2$. Расчеты

функций (7-9) для контуров с рис.16 с указанными значениями K_0, аналогичные рис.15, показали полное совпадение графиков, еще лучшее, чем при $\varepsilon = 0{,}5$.

Итак, мы убедились, что функции (7-9) действительно почти идентичны друг другу, если заданы ε и s. Параметр s существенно влияет на облик функций. Рассмотрим теперь, сколь сильно на них влияет параметр асимметрии “горба” ε.

На рис.17-18 приведены кривые для функций $\gamma_0^p(\xi)$ и $\Phi^p(0,\eta)$ при заданном $\mu_0 \in [2;20]$ и 5-ти значениях ε широкого диапазона: $\varepsilon = 0{,}1;0{,}5;1;2;5$. Использованы приближенные выражения (16) для $\gamma_0^p(\xi)$ и (22) для $\Phi^p(0,\eta)$ (функции $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ не приведены по причине отсутствия аналитических выражений для произвольного ε). Все кривые изображены одинаковыми сплошными линиями; рисунки просто иллюстрируют степень расхождения кривых. Фиксирование μ_0 означает весьма широкий допустимый разброс сочетаний K_0 и x_0, а, следовательно, и весьма визуально различный вид контуров $f_p(x)$.

Функция $\gamma_0^p(\xi)$

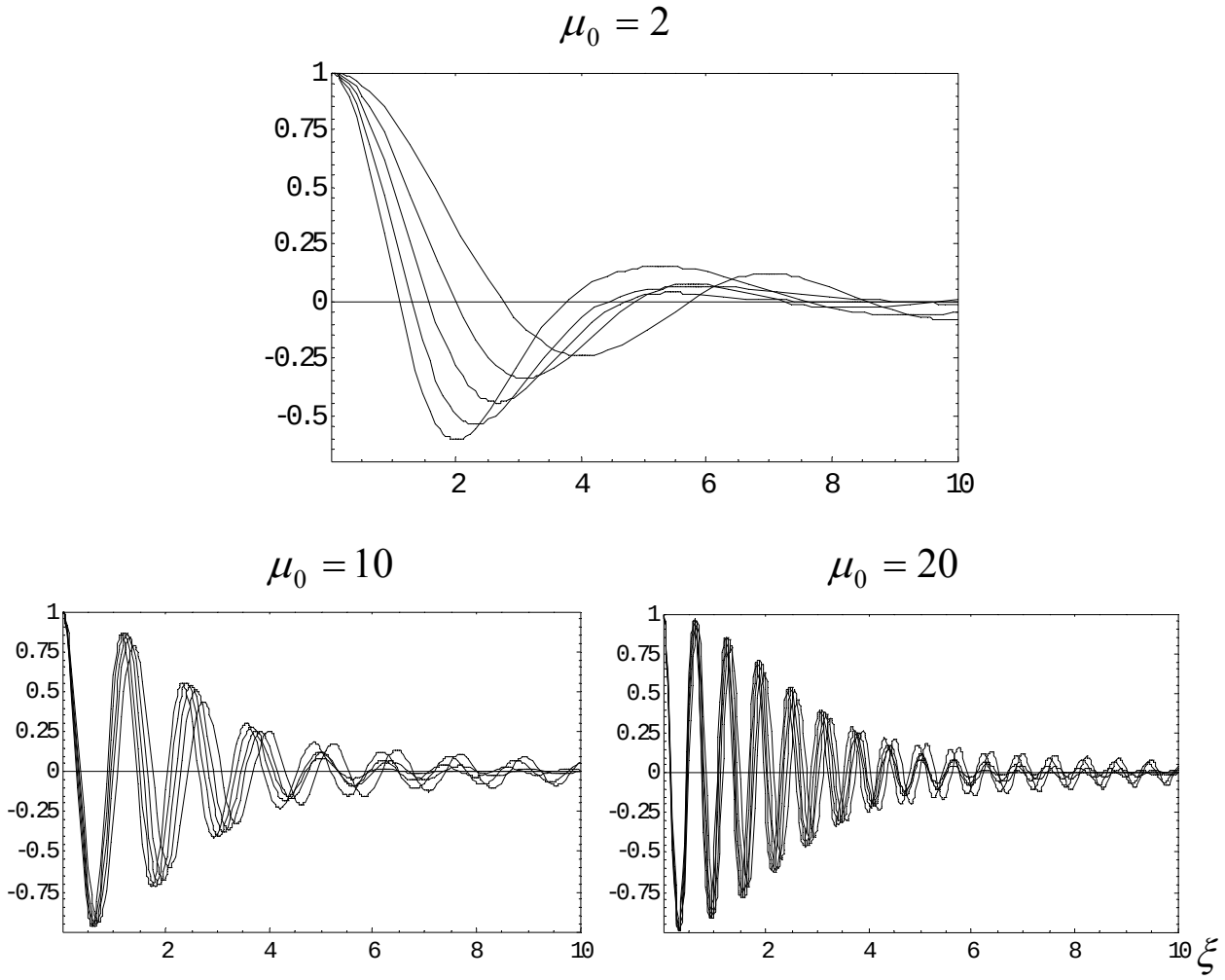


Рис.17

Функция $\Phi^p(0,\eta)$

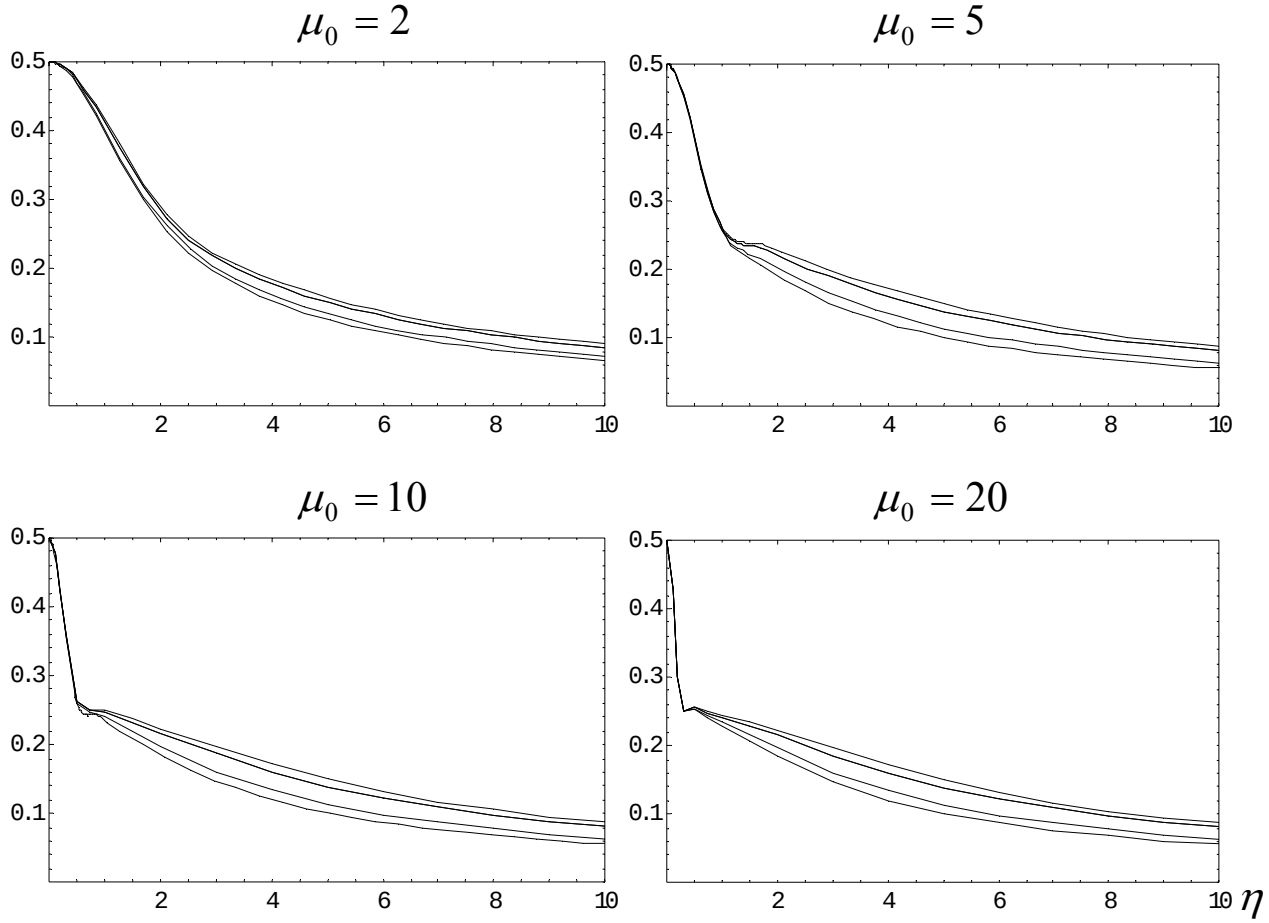


Рис.18

На рис.18 функций $\Phi^p(0,\eta)$ всего по 4 штуки, хотя расчет сделан для 5-ти значений ε (на рис.17 отчетливо видны по 5 линий). Это связано с тем, что выражение (22) идентично для $\varepsilon = a$ и $\varepsilon = \dfrac{1}{a}$, т.е. кривые для $\varepsilon = 0{,}5$ и $\varepsilon = 2$ совпадают. Заметим также, что кривые на рис.18 с ростом μ_0 сливаются в начале координат, но расходятся на “хвостах”. Это нетрудно понять, если с (22) проделать то же упрощение, что и при переходе от (30) к (36) при $\varepsilon = 1$, т.е. для каждого из трех пар слагаемых в (22) использовать приближение вида (36). Тогда мы получим формулу вида (36), где не зависящие от μ_0 первые два слагаемых, преобразуются в три пары слагаемых, сумма которых будет по-прежнему явно зависеть от ε, - они образуют зависящий от ε “хвост”. А последнее, явно зависящее от μ_0, слагаемое в (36) преобразуется в сумму трех слагаемых, которая с ростом μ_0 стремится к зависящему от μ_0, но не зависящему от ε.выражению

$$\frac{1}{\eta^2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin^2\left[\dfrac{\eta}{2}\sqrt{\mu_0^2+\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2}\right]}{\dfrac{\pi}{2}+\left(\mu_0\,\dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2}+\dfrac{\sin^2\left[\dfrac{\eta}{2}\sqrt{\mu_0^2+\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{1+\varepsilon}\right)^2}\right]}{\dfrac{\pi}{2}+\left(\mu_0\,\dfrac{1+\varepsilon}{1}\right)^2}+\\ +\dfrac{4\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\cdot\dfrac{\sin^2\left[\dfrac{\eta}{2}\sqrt{\mu_0^2+\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}}\right]}{\dfrac{\pi}{2}+\left(\mu_0\,\dfrac{(1+\varepsilon)\sqrt{2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right)^2}\end{array}\right\}\xrightarrow{\mu_0>>1}\frac{\sin^2\left(\dfrac{\eta\mu_0}{2}\right)}{(\eta\mu_0)^2}.$$

Как и ожидалось, параметр ε влияет на полученные кривые, хотя и не очень сильно, учитывая тот факт, что реально заметное отличие ε от единица вряд ли встречается. В реальности форма контура имеет довольно гладкую вершину и не следует ожидать большого разрыва производной в функции, ее аппроксимирующей. Мы привели здесь эти данные, с одной стороны, для полноты картины, а с другой, чтобы проиллюстрировать высокую чувствительность результатов именно к поведению функции, описывающей форму контура, вблизи максимумов (в данном случае - к локальной несимметричности формы относительно максимумов). Это не кажется странным, поскольку уже тот факт, что многие реальные контура прекрасно (для построения интересующих нас функций) аппроксимируются параболами или треугольником дает основание полагать, что и величина асимметрии этих фигур скажется на результате. Различия между реальным и аппроксимирующим контурами вне максимумов почти не влияют на результат. Этот факт - следствие большой величины коэффициента усиления K_0.

IV. Треугольная модель “двугорбого” контура.

Рассмотрим теперь контура, описываемые функциями с изломами в максимумах, т.е. имеющими в них отличные от нуля первые производные и разрыв этих производных. Для таких “двугорбых” контуров обратимся к треугольной модели контура. Здесь каждая из двух симметричных половин контура представляется с помощью треугольника с вершиной в максимуме контура

$$f_t(x)=\left[\begin{array}{ll}\left(1+\dfrac{x-x_0}{1-x_1}\right)\cdot\dfrac{1+\operatorname{sign}\left(1+\dfrac{x-x_0}{1-x_1}\right)}{2}, & 0\le x\le x_0\\ 1-\dfrac{x-x_0}{1-x_0}, & x_0\le x\le 1\end{array}\right. \qquad (41)$$

Индекс “t” здесь и далее означает, что функции рассчитаны для треугольной модели (41). По-прежнему, $x = \Omega / \Delta\omega$ и $x_0 = \Omega_{\max} / \Delta\omega$, а $\Delta\omega$ выбрано так, чтобы внешняя прямая обращалась в ноль в точке $x = 1$ (т.е. $f_t(1) = 0$)

$$\Delta\omega = \Omega_{\max} + \frac{-1}{f'_{\Omega+}(\Omega_{\max})}, \quad \Omega = \omega - \omega_0. \tag{42}$$

В выражении для $\Delta\omega$ фигурирует правая производная контура в вершине. Как и в параболической модели $0 < x_0 < 1$, а внутренняя прямая может иметь другой наклон, что по-прежнему характеризуется параметром асимметрии (14). И опять, как в параболической модели, в центре контура ($x = 0$) могут реализоваться три случая: при $1 - x_0 \le x_1 < 1 \quad f_t(x \in [0, x_0 + x_1 - 1]) = 0$ и при $x_1 < 1 - x_0 \quad f_t(0) > 0$ (здесь, как и в параболической модели, x_1 тоже может быть отрицательным числом). Примеры контуров для $x_0 = 0{,}5$ и $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1;\ 2$, включающие в себя все три описанных случая, приведены на рис.19 (для $\varepsilon = 1$ сплошные линии; для остальных - штриховые, длина штрихов увеличивается с ростом ε).

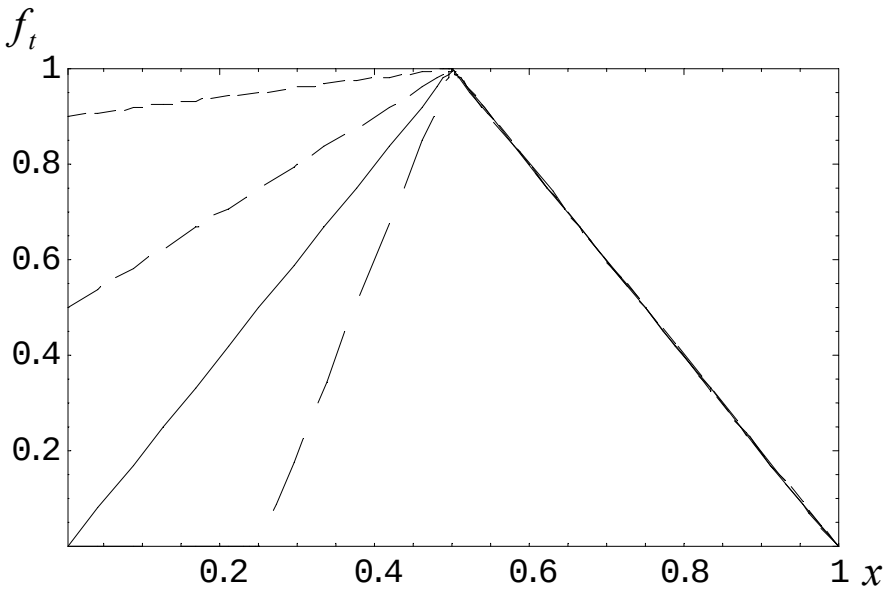


Рис.19

Подстановка контура (41) в (7-9,11) дает следующие выражения для этих функций при $K_0 >> 1$.

Функция $F^t(\chi)$ принимает вид

$$F^t(\chi) \cong \exp\left[-\frac{8}{\pi}\left|\chi - \frac{\mu_0}{2}\right| \cdot \frac{1+\beta}{2}\right], \text{ где } \beta = \left[\begin{array}{ll} \varepsilon, & \chi < \dfrac{\mu_0}{2} \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & \chi > \dfrac{\mu_0}{2} \end{array}\right. . \tag{43}$$

Функция $\gamma_0^t(\xi)$ описывается тем же выражением (16), что и для параболической модели, но с другими, отличными от (17-18) множителями $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$

$$C_1(\xi) = \frac{\varepsilon\left[\varepsilon + \left(\alpha^t \xi\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\alpha^t \xi\right)^2\right] \cdot \left[\varepsilon^2 + \left(\alpha^t \xi\right)^2\right]}, \tag{44}$$

$$C_2(\xi) = \frac{\alpha^t \varepsilon(\varepsilon - 1)\xi}{\left[1 + \left(\alpha^t \xi\right)^2\right] \cdot \left[\varepsilon^2 + \left(\alpha^t \xi\right)^2\right]}, \tag{45}$$

где теперь

$\alpha^t = \dfrac{\pi\varepsilon}{4(1+\varepsilon)}$ (ср. с (19) для параболической модели).

Видно, что, как и $\gamma_0^p(\xi)$, $\gamma_0^t(\xi)$ имеет правильное значение 1 при $\xi = 0$.

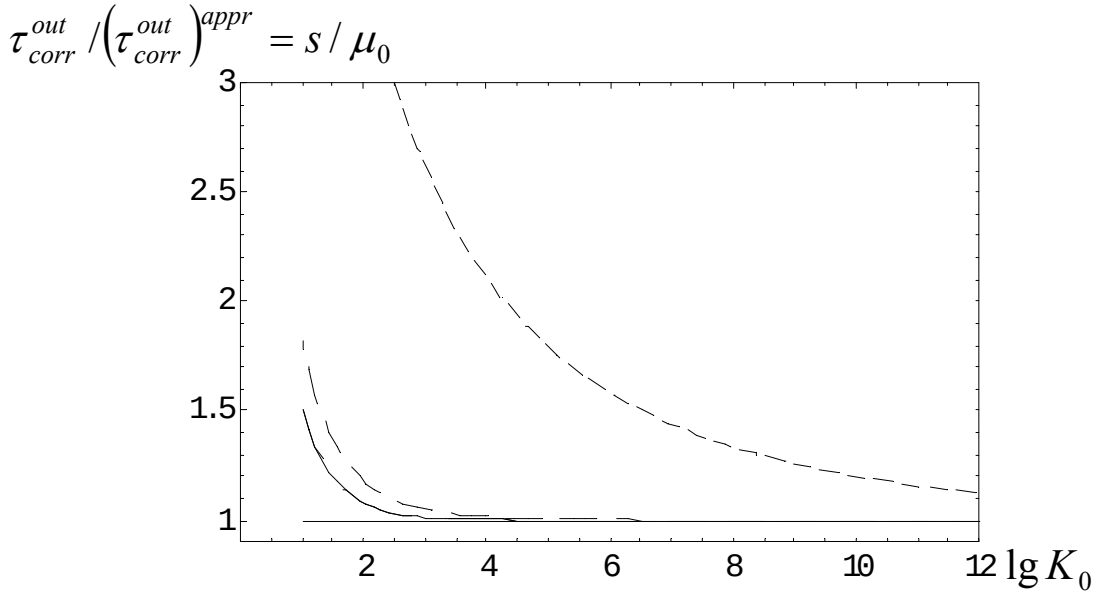


Рис.20

Смысл и роль μ_0 в (16,43) (и в остальных формулах этого раздела) те же, что и в параболической модели. То есть, с одной стороны, это просто параметр

$$\mu_0 = \frac{\pi\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \cdot \frac{x_0}{1 - x_0} \ln K_0, \tag{46}$$

а, с другой стороны, если учесть, что приближенным выражением для (38) в треугольной модели будет

$$l^t = \tau_{corr}^{out} \Delta\omega \cong \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{\ln K_0}{1 - x_0}, \tag{47}$$

то опять получим, что $\mu_0 \cong s$. На рис.20 для контуров с рис.19 (теми же типами кривых) приведены зависимости $\tau_{corr}^{out} / \left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$ от $\lg K_0$, представляющие из себя отношение τ_{corr}^{out}, рассчитанного численно по формуле (38), к значению $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$, рассчитанному приближенно по (47). Эти зависимости также равны s / μ_0. Горизонтальная единичная прямая приведена для удобства сравнения.

Функция $2\pi\Gamma_0^t(\mu) / \tau_{corr}^{out}$ для треугольной модели, как и для параболической, тоже может быть рассчитана точно аналитически по первому равенству в (8). Однако и здесь это не дает удобного для пользования результата, т.к. не удается выделить существенную часть при $K_0 >> 1$. Поэтому опять представляет интерес расчет $2\pi\Gamma_0^t(\mu) / \tau_{corr}^{out}$ по второму равенству в (8) как интеграла от функции (16) с коэффициентами (44-45). В этом случае, в отличие от параболической модели, удается получить приближение при произвольном ε, поскольку такой интеграл берется аналитически. Результирующее выражение имеет вид (функция $2\pi\Gamma_0^t(\mu) / \tau_{corr}^{out}$ - четная, приведено ее значение для $\mu \geq 0$)

$$\frac{2\pi\Gamma_0^t(\mu)}{\tau_{corr}^{out}} \cong \frac{\varepsilon \exp\left(-\frac{\mu}{\alpha^t}\right) - \exp\left(-\frac{\mu}{\alpha^t}\varepsilon\right)}{\varepsilon - 1} + \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\left(f_1(\mu) + f_2(\mu)\right), \qquad (48)$$

где

$$f_1(\mu) = \left[2 + \frac{\mu + \mu_0}{\alpha^t}(1+\varepsilon)\right]\exp\left(-\frac{\mu + \mu_0}{\alpha^t}\varepsilon\right), \qquad (49)$$

а

$$f_2(\mu) = \left[2 + \frac{|\mu - \mu_0|}{\alpha^t}(1+\varepsilon)\right]\exp\left(-\frac{|\mu - \mu_0|}{\alpha^t}\beta\right), \quad \beta = \begin{bmatrix} \varepsilon, & \mu \leq \mu_0 \\ 1, & \mu \geq \mu_0 \end{bmatrix}. \qquad (50)$$

Функция (48) не равна точно 1 при $\mu = 0$ (единице в нуле равно уже первое слагаемое) и не обращается в нуль при $\mu \geq 2\Delta\omega\tau_{corr}^{out} \cong \mu_0 / x_0$, как это должно быть согласно (8). Однако, если $\mu_0 >> 1$, то

$$f_1(0) = f_2(0) = \left[2 + \frac{\mu_0}{\alpha^t}(1+\varepsilon)\right]\exp\left(-\frac{\mu_0}{\alpha^t}\varepsilon\right) << 1.$$

и необходимое условие $2\pi\Gamma_0^t(0) / \tau_{corr}^{out} = 1$ выполняется с хорошей точностью, а при $\mu \geq 2\Delta\omega\tau_{corr}^{out} \cong \mu_0 / x_0$ значение функции очень мало́. Слагаемым f_1 в (48) можно пренебречь ((49) - это “хвост” от второго симметричного бокового максимума $2\pi\Gamma_0^t(\mu) / \tau_{corr}^{out}$, расположенного в области $\mu < 0$). Тогда получим

$$\frac{2\pi\Gamma_0^t(\mu)}{\tau_{corr}^{out}} \cong \frac{\varepsilon\exp\left(-\frac{\mu}{\alpha^t}\right)-\exp\left(-\frac{\mu}{\alpha^t}\varepsilon\right)}{\varepsilon-1}+\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}f_2(\mu). \qquad (48a)$$

Второе слагаемое в (48а) имеет максимум при

$$\mu_{\max}=\left[\begin{array}{l}\mu_0-\dfrac{\pi(1-\varepsilon)}{4(1+\varepsilon)^2},\ \ \varepsilon\le 1\\ \mu_0+\dfrac{\pi(\varepsilon-1)\varepsilon}{4(1+\varepsilon)^2},\ \ \varepsilon\ge 1\end{array}\right.,$$

т.е. при $\varepsilon\neq 1$ этот максимум расположен левее или правее $\mu=\mu_0$ и равен

$$\left[\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}f_2(\mu)\right]_{\max}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\exp\left(-\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)}{(1+\varepsilon)},\ \ \varepsilon\le 1\\ \dfrac{\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{\varepsilon-1}{1+\varepsilon}\right)}{(1+\varepsilon)},\ \ \varepsilon\ge 1\end{array}\right]\le\frac{1}{2}. \qquad (51)$$

Причем, равенство 1/2 в (51) имеет место лишь при $\varepsilon=1$.

Функция $\Phi^t(\xi,\eta)$ тоже может быть получена двумя путями - из первого или из второго интегралов в (9). Первый интеграл в (9) (от $\gamma_0^t(\xi)$) удается рассчитать аналитически лишь в предположении $C_2=0$ и $\cos\left(\xi\frac{\mu_0}{2}\right)\cong 1$, что дает заведомо неверный даже качественно результат, поскольку итоговое выражение не зависит от μ_0, вопреки численным расчетам. Второй интеграл в (9) (от $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$), напротив, позволяет получить хорошее приближение для $\Phi^t(\xi,\eta)$. Основной и боковой максимумы $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ определяют, соответственно, поведение $\Phi(\xi,\eta)$ на “хвосте” η и при $\eta\cong 0$. Поэтому неточности в этих частях интегралов будут давать неточности в соответствующих частях $\Phi(\xi,\eta)$. В нашем случае интеграл от основного максимума (первого слагаемого в (48а)) легко берется, что дает для соответствующей части $\Phi^t(\xi,\eta)$

$$\Phi_{\infty}^{t}(\xi,\eta)\cong\frac{2}{\pi(\varepsilon-1)\eta^{2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{\eta+\xi}{2}\left[\varepsilon\operatorname{arctg}\alpha^{t}(\eta+\xi)-\operatorname{arctg}\frac{\alpha^{t}}{\varepsilon}(\eta+\xi)\right]+\\+\frac{\eta-\xi}{2}\left[\varepsilon\operatorname{arctg}\alpha^{t}(\eta-\xi)-\operatorname{arctg}\frac{\alpha^{t}}{\varepsilon}(\eta-\xi)\right]-\\-\xi\left[\varepsilon\operatorname{arctg}\alpha^{t}\xi-\operatorname{arctg}\frac{\alpha^{t}}{\varepsilon}\xi\right]+\\\frac{\varepsilon}{4\alpha^{t}}\ln\frac{\left[1+(\alpha^{t}\xi)^{2}\right]^{2}\left[\varepsilon^{2}+(\alpha^{t}(\eta+\xi))^{2}\right]\left[\varepsilon^{2}+(\alpha^{t}(\eta-\xi))^{2}\right]}{\left[\varepsilon^{2}+(\alpha^{t}\xi)^{2}\right]^{2}\left[1+(\alpha^{t}(\eta+\xi))^{2}\right]\left[1+(\alpha^{t}(\eta-\xi))^{2}\right]}\end{array}\right\}\quad(52)$$

и

$$\Phi_{\infty}^{t}(0,\eta)\cong\frac{2}{\pi(\varepsilon-1)\eta^{2}}\left\{\eta\left[\varepsilon\operatorname{arctg}\alpha^{t}\eta-\operatorname{arctg}\frac{\alpha^{t}}{\varepsilon}\eta\right]+\frac{\varepsilon}{2\alpha^{t}}\ln\frac{\left[\varepsilon^{2}+(\alpha^{t}\eta)^{2}\right]}{\varepsilon^{2}\left[1+(\alpha^{t}\eta)^{2}\right]}\right\}.\quad(53)$$

Выражения (52-53) правильно описывают функции при $\eta >> \frac{\sqrt{2}}{\mu_0}$. и удовлетворяют соотношению (24). При малых η они принимают вид

$$\Phi_{\infty}^{t}(\xi,\eta)\overset{\eta\to 0}{\to}\frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon^{2}}{\left[\varepsilon^{2}+(\alpha^{t}\xi)^{2}\right]\left[1+(\alpha^{t}\xi)^{2}\right]}$$

и

$$\Phi_{\infty}^{t}(0,\eta)\overset{\eta\to 0}{\to}\frac{1}{4},$$

что близко к **половине** значений $\Phi^{t}(0,0)=1/2$ и $\Phi^{t}(\xi,0)\cong\left(\gamma_{0}^{t}(\xi)\right)^{2}/2$ при малых ξ, т.е., как и в параболической модели, “хвост” дает лишь половину значения $\Phi^{t}(\xi,\eta)$ при $\eta\cong 0$.

Интеграл от бокового максимума (48а) аналитически не берется, однако для него можно получить хорошее приближение. Напрямую в случае $\xi\neq 0$ это сделать сложно из-за зависимости результата от соотношения ξ и η, но можно рассчитать интеграл от $f_2(\mu)$ при $\xi=0$, а затем воспользоваться формулой (24). При $\xi=0$ хорошим приближением является

$$\Phi_{0}^{t}(0,\eta)\cong\frac{\varepsilon^{2}\cdot\frac{\sin^{2}(\mu_{0}\eta/2)}{(\mu_{0}\eta/2)^{2}}}{4\left[1+(\alpha^{t}\eta)^{2}\right]\left[\varepsilon^{2}+(\alpha^{t}\eta)^{2}\right]}.\quad(54)$$

Выражение (54) получается путем интегрирования в (9) $f_2(\mu)$ от $-\infty$ до $+\infty$ с заменой μ^2 в знаменателе под интегралом на μ_0 и при пренебрежении в полу-

ченном результате всеми членами порядка $\frac{\alpha^t}{\mu_0}$ и $\left(\frac{\alpha^t}{\mu_0}\right)^2$. Полученная таким образом функция имеет вид

$$\Phi_0^t(0,\eta) \cong \frac{\varepsilon^2 \cdot \frac{\sin^2(\mu_0\eta/2)}{(\mu_0\eta/2)^2}}{4\left[1+(\alpha^t\eta)^2\right]\left[\varepsilon^2+(\alpha^t\eta)^2\right]}\left\{1-\frac{2(\varepsilon-1)^2(\alpha^t\eta)^2}{\left[1+(\alpha^t\eta)^2\right]\left[\varepsilon^2+(\alpha^t\eta)^2\right]}\right\},$$

однако расчеты показали, что при $\varepsilon \le 1$ второе слагаемое в скобках почти не влияет на вид функции, а при $\varepsilon \ge 2$ приводит к даже качественно неверному поведению (осцилляциям до отрицательных значений), поэтому этим слагаемым в (54) мы также пренебрегли.

Функция (54), заметно отличная от нуля лишь при $\eta \le \frac{\sqrt{2}}{\mu_0}$, хотя и не так точна в этой области как $\Phi_\infty^t(0,\eta)$ на “хвосте”, однако вместе с $\Phi_\infty^t(0,\eta)$ она правильно описывает $\Phi^t(0,\eta)$ в нуле аргумента ($\Phi_0^t(0,\eta) \xrightarrow{\eta\to 0} 1/4$) и правильно отражает изменение вида $\Phi^t(0,\eta)$ при изменении μ_0. В сумме (53) и (54) дают хорошее приближение $\Phi^t(0,\eta)$ во всей области определения. А применение к ним (24) даст хорошее приближение и для функции $\Phi^t(\xi,\eta)$.

$$\begin{aligned}\Phi^t(0,\eta) &\cong \Phi_\infty^t(0,\eta)+\Phi_0^t(0,\eta) = \\ &= \frac{2}{\pi(\varepsilon-1)\eta^2}\left\{\begin{array}{l}\eta\left[\varepsilon\,\mathrm{arctg}\,\alpha^t\eta-\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha^t}{\varepsilon}\eta\right]+\\ +\frac{\varepsilon}{2\alpha^t}\ln\frac{\left[\varepsilon^2+(\alpha^t\eta)^2\right]}{\varepsilon^2\left[1+(\alpha^t\eta)^2\right]}\end{array}\right\}+\frac{\varepsilon^2\cdot\frac{\sin^2(\mu_0\eta/2)}{(\mu_0\eta/2)^2}}{4\left[1+(\alpha^t\eta)^2\right]\left[\varepsilon^2+(\alpha^t\eta)^2\right]}\end{aligned} \tag{55}$$

При $\varepsilon = 1$ (“горбы” в виде равнобедренных треугольников), как и в параболической модели, приближения заметно упрощаются и становятся точнее.

Выражение (41) для формы контура в этом случае принимает вид

$$f_t(x) = \left(1-\frac{|x-x_0|}{1-x_0}\right)\cdot\frac{1+\mathrm{sign}\left(1-\frac{|x-x_0|}{1-x_0}\right)}{2}.$$

Выражение (43) для $F^t(\chi)$ становится

$$F^t(\chi) \cong \exp\left[-\frac{8}{\pi}\left|\chi-\frac{\mu_0}{2}\right|\right], \tag{56}$$

которое, как легко видеть из сравнения с такой же функцией для “одногорбого” треугольного контура в работе [3], отличается от последней сжатием в 2 раза и сдвигом на $\mu_0 / 2$ по оси абсцисс - как и для параболической модели (см.(25)).

Выражение (16) для треугольной модели при $\varepsilon = 1$ переходит в

$$\gamma_0^t(\xi) \cong \cos\left(\xi \frac{\mu_0}{2}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{8}\xi\right)^2} \tag{57}$$

и тоже, как в параболической модели, отличается от “одногорбого” треугольного контура (формула (25) в [3]) растяжением вдвое по ξ и множителем $\cos\left(\xi \frac{\mu_0}{2}\right)$.

Выражение (48а) для $2\pi\Gamma_0^t(\mu) / \tau_{corr}^{out}$ при $\varepsilon = 1$ приобретает вид

$$\frac{2\pi\Gamma_0^t(\mu)}{\tau_{corr}^{out}} \cong \left(1+\frac{8\mu}{\pi}\right)\exp\left(-\frac{8\mu}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{8|\mu-\mu_0|}{\pi}\right)\exp\left(-\frac{8|\mu-\mu_0|}{\pi}\right), \tag{58}$$

что опять же отличается от соответствующей формулы для “одногорбого” контура сжатием вдвое по μ и появлением бокового максимума с центром в $\mu = \mu_0$ того же функционального вида, что и основной, и в 2 раза меньшего (см.(26) в [3]).

Как и при произвольных ε функция (58) не равна точно 1 при $\mu = 0$ (единице в нуле равно первое слагаемое), однако при $\mu_0 >> 1$ поправка к единице за счет второго слагаемого мала и уменьшается с ростом μ_0.

Выражения для $\Phi^t(\xi,\eta)$ и $\Phi^t(0,\eta)$ при $\varepsilon = 1$ приобретают вид

$$\begin{aligned}\Phi^t(\xi,\eta) \cong{}& \frac{1}{\pi\eta^2}\left\{(\eta+\xi)\operatorname{arctg}\frac{\pi}{8}(\eta+\xi) + (\eta-\xi)\operatorname{arctg}\frac{\pi}{8}(\eta-\xi) - 2\xi\operatorname{arctg}\frac{\pi}{8}\xi\right\} + \\ &+ \frac{1}{2(\mu_0\eta)^2}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{\mu_0(\eta+\xi)}{2}\right)}{\left[1+\left(\frac{\pi}{8}(\eta+\xi)\right)^2\right]^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{\mu_0(\eta-\xi)}{2}\right)}{\left[1+\left(\frac{\pi}{8}(\eta-\xi)\right)^2\right]^2} - 2\frac{\sin^2\left(\frac{\mu_0\xi}{2}\right)}{\left[1+\left(\frac{\pi}{8}\xi\right)^2\right]^2}\right\};\end{aligned} \tag{59}$$

$$\Phi^t(0,\eta) \cong \frac{2\operatorname{arctg}\frac{\pi}{8}\eta}{\pi\eta} + \left\{\frac{\sin(\frac{\mu_0\eta}{2})}{\mu_0\eta\left[1+\left(\frac{\pi}{8}\eta\right)^2\right]}\right\}^2. \tag{60}$$

Сравнение (59-60) с (27-28) из [3] для “одногорбого” треугольного контура показывает, что и здесь “хвосты” (59-60) функционально идентичны функциям “одногорбого” контура, только в 2 раза растянуты по обоим аргументам и имеют общий множитель 1/2, а дополнительные слагаемые, описывающие поведение $\Phi^t(\xi,\eta)$ и $\Phi^t(0,\eta)$ вблизи нуля η, при малых η и $\mu_0 >> 1$ совпадают с аналогичными слагаемыми параболической модели (см.второе слагаемое в (36)).

Покажем теперь для разных ε и K_0 качество аппроксимации функций $\gamma_0^t(\xi)$, $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi^t(0,\eta)$ с помощью выражений (16), (48а) и (55).

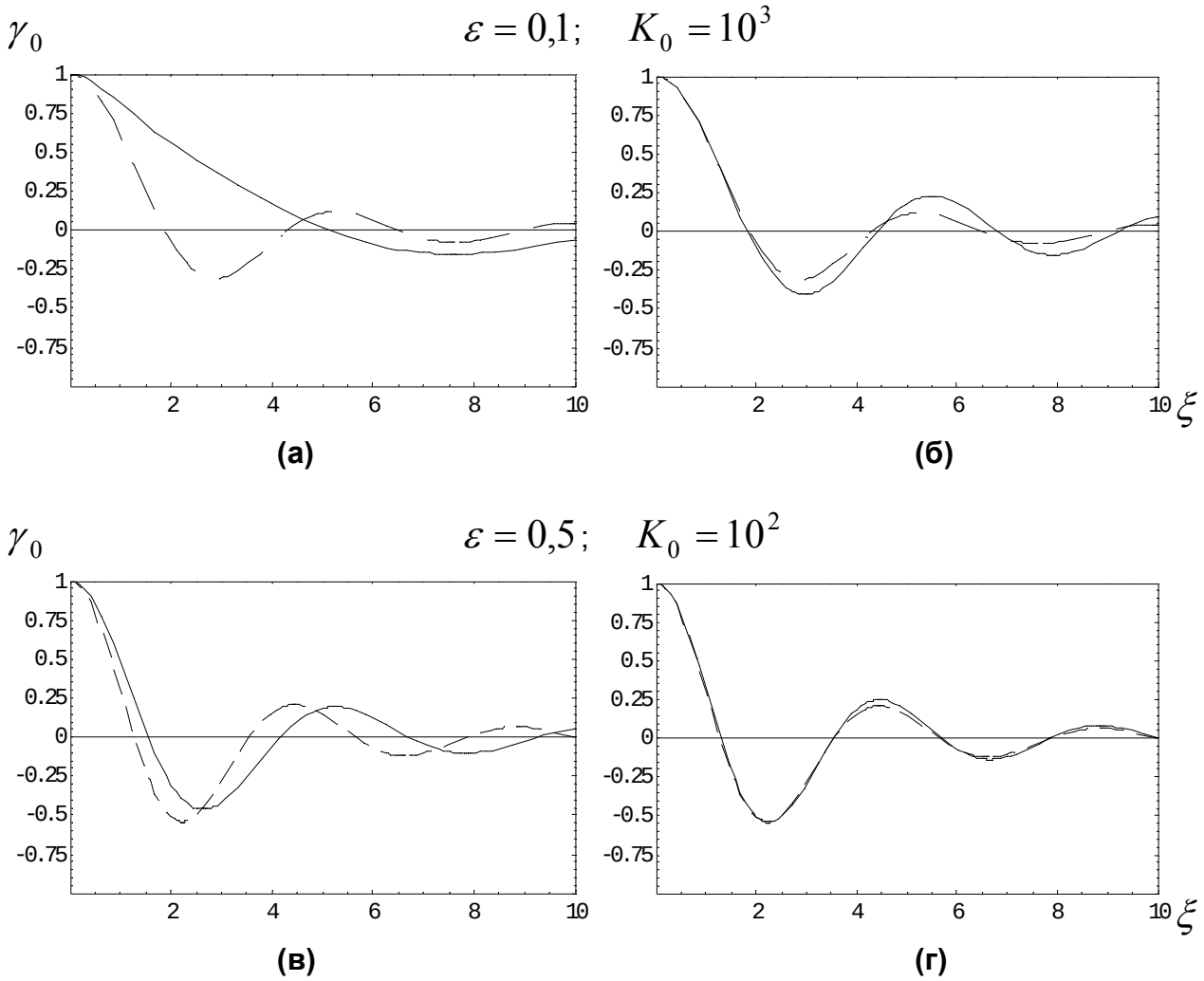
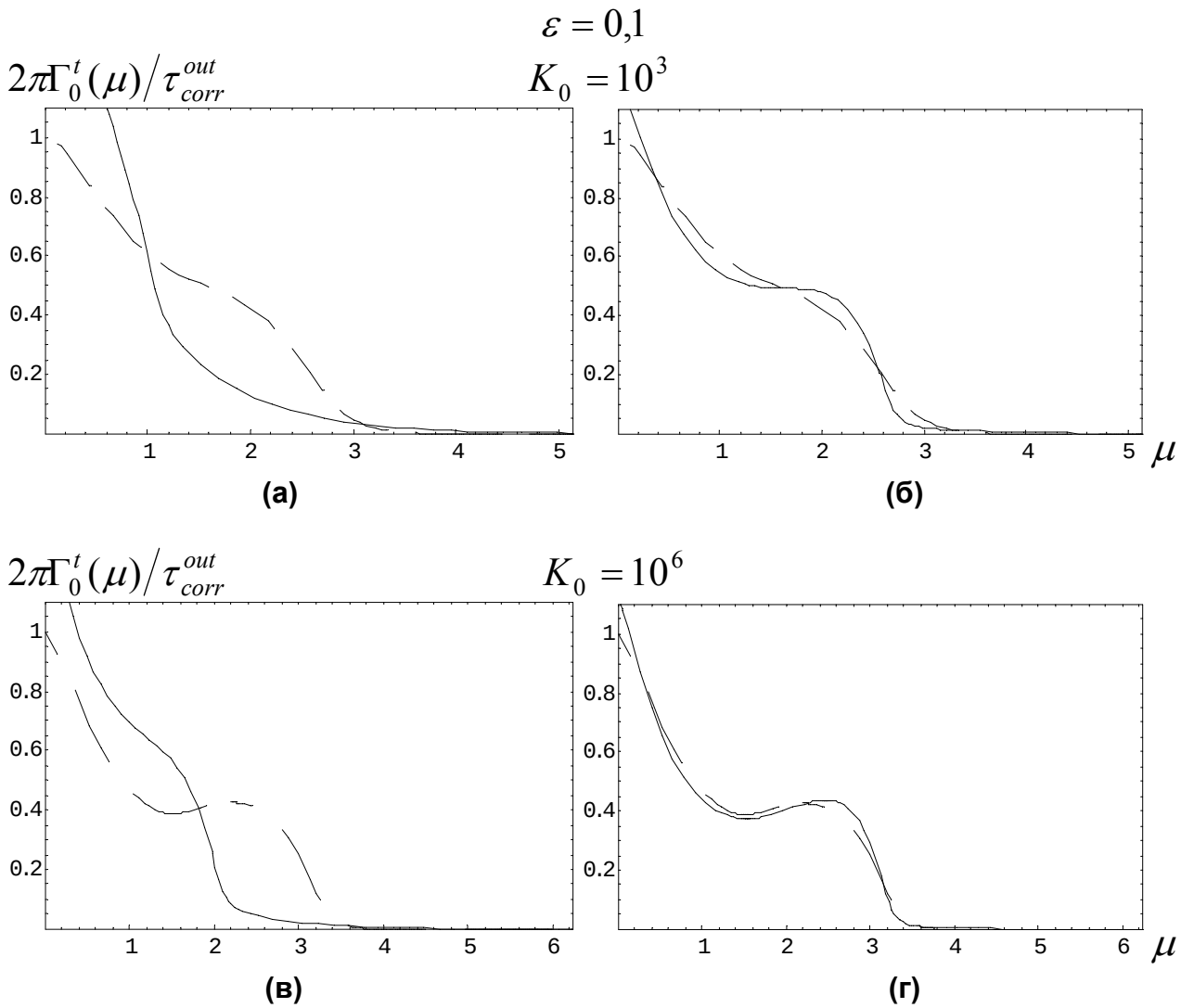


Рис.21

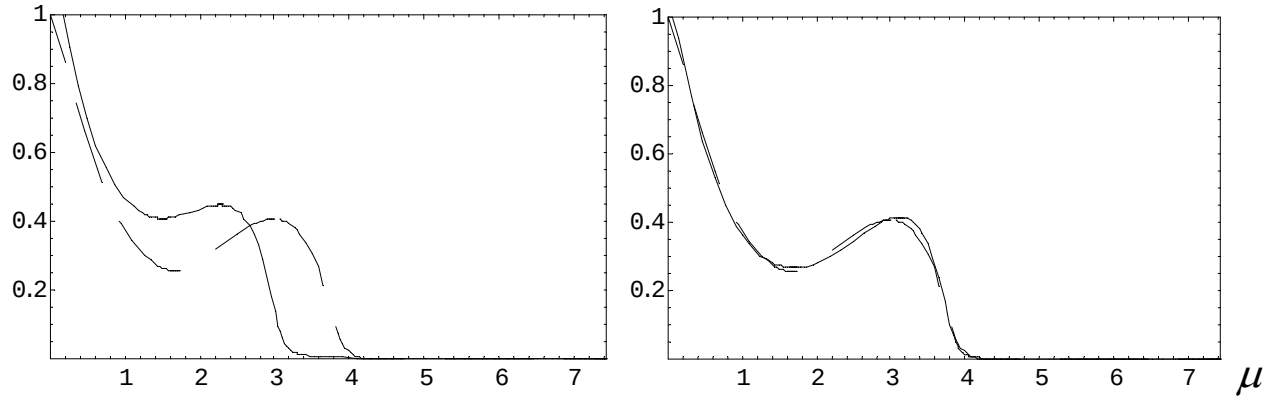
На рис.21а-г представлены примеры графиков $\gamma_0^t(\xi)$ для $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}5$ и $x_0 = 0{,}5$. Взяты заведомо такие K_0 (см.рис.20), чтобы $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr}$ (47) и τ_{corr}^{out} (38) (а также μ_0 (46) и s из (40)) были еще далеки от совпадения. Штриховыми кривыми на рис.21 приведены результаты численного расчета без всяких приближений. А сплошными - расчеты по (16) с коэффициентами (44-45). На графиках (а) и (в) (сле-

ва) взято μ_0 из (46), а на графиках (б) и (г) (справа) μ_0 заменено на s. Видно, сколь сильно улучшает качество приближения замена μ_0 на s.

На рис.22-24 такое же сравнение сделано для функций $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$. Численные расчеты - штриховые кривые; расчеты по формуле (48) - сплошные кривые.(использование (48а) вместо (48) мало меняет ситуацию, даже слегка улучшает приближение вблизи нуля аргумента). Везде $x_0 = 0{,}5$. Рис.22 соответствует $\varepsilon = 0{,}1$, рис.23 - $\varepsilon = 0{,}5$, рис.24 - $\varepsilon = 1$. Как и на рис.21 везде взяты значения K_0, при которых μ_0 заметно отличается от s. На левых рисунках ((а), (в), (д)) взято μ_0 по формуле (46), а на правых ((б), (г), (е)) - s. И опять мы видим разительное улучшение приближений при замене μ_0 на s.



$2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ $K_0 = 10^9$

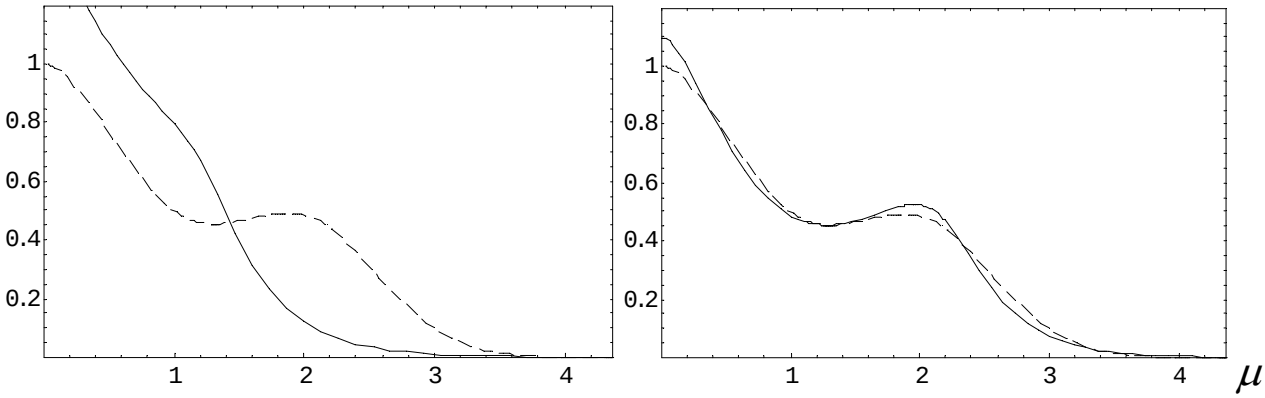


(д) **(е)**

Рис.22

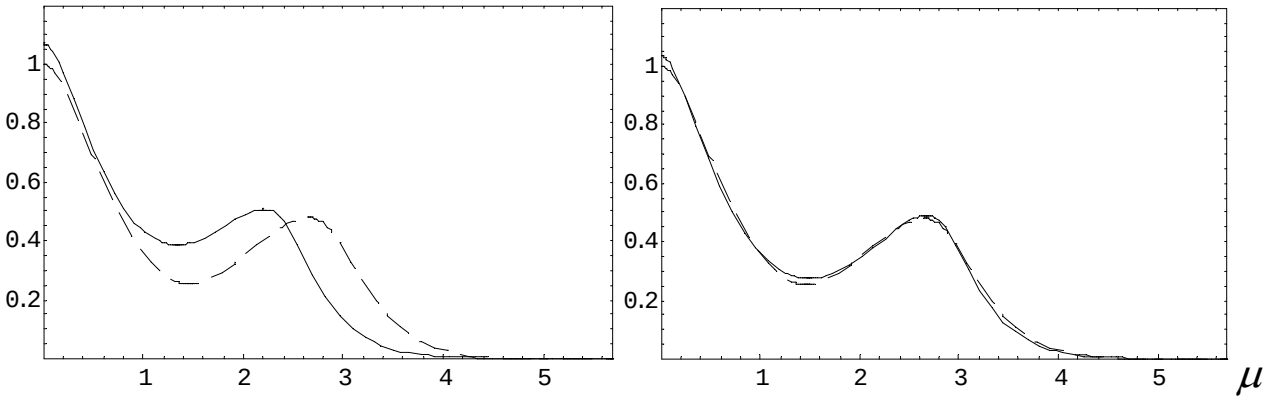
$\varepsilon = 0{,}5$

$2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ $K_0 = 10$



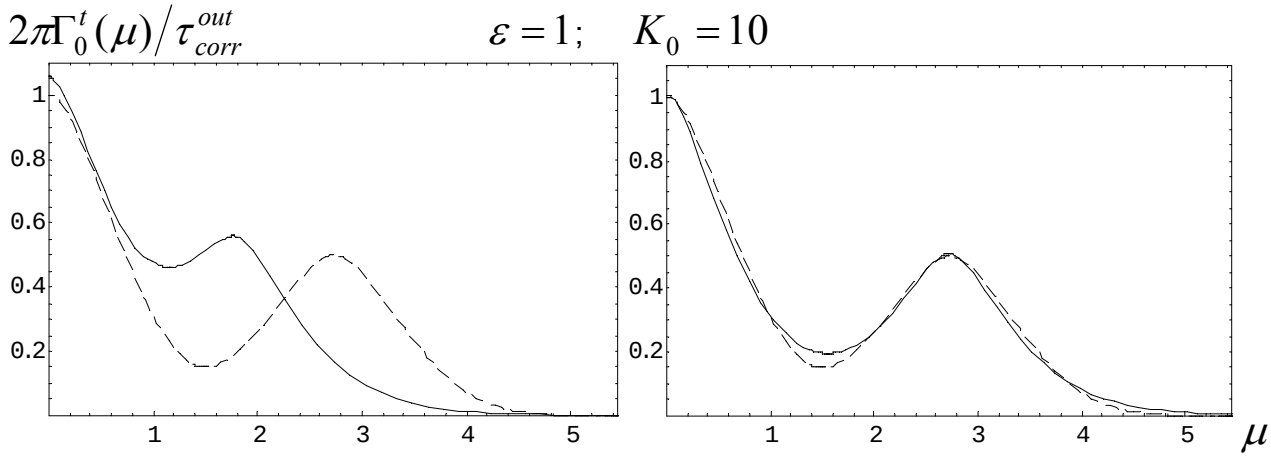
(а) **(б)**

$2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ $K_0 = 10^2$



(в) **(г)**

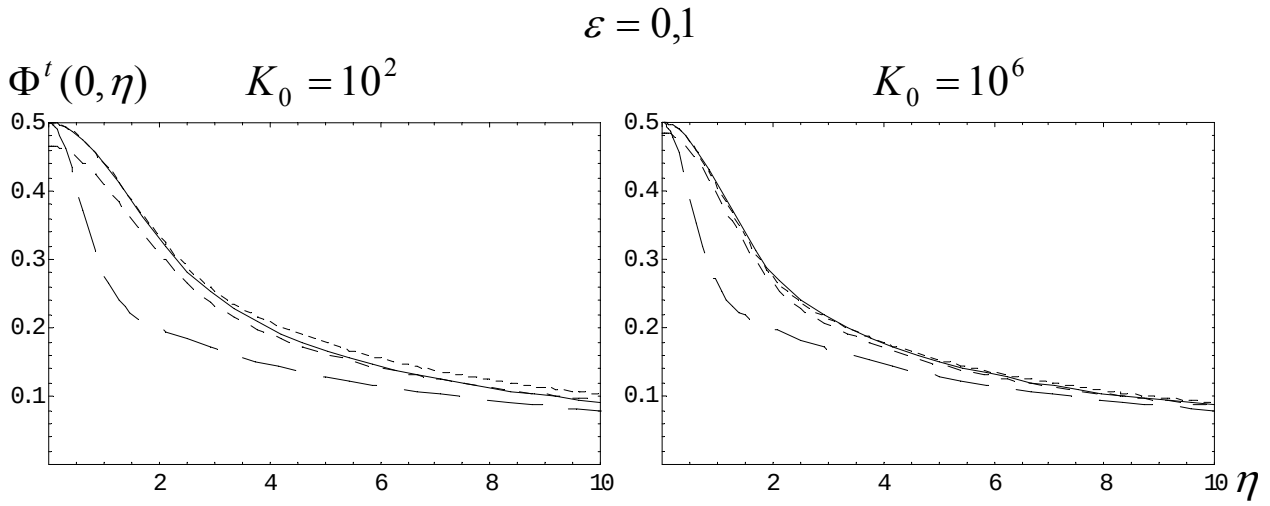
Рис.23



(а) **(б)**

Рис.24

На рис.25а-д сравнительные данные приведены для функции $\Phi^t(0,\eta)$. Уже отмечалось, что формула (54) для начальной области $\Phi^t(0,\eta)$ менее точна, чем (53) для “хвоста”. На рис.25 приведены как численные расчеты $\Phi^t(0,\eta)$ (сплошные кривые), так и несколько приближений к ним (штриховые кривые). Кривые с самыми короткими штрихами (- - - - - - -) рассчитывались численно как первый интеграл в (9) от приближения (16) для $\gamma_0^t(\xi)$. В остальных приближениях $\Phi^t(0,\eta) = \Phi_\infty^t(0,\eta) + \Phi_0^t(0,\eta)$, где $\Phi_\infty^t(0,\eta)$ взято из (53), а $\Phi_0^t(0,\eta)$ считалось либо как точный интеграл от $f_2(\mu)$ (50) по второму равенству в (9) (_ _ _ _ _), либо с помощью формулы (54), т.е. $\Phi^t(0,\eta)$ соответствует (55) (__ __ __). Приведены расчеты для $x_0 = 0{,}5$ и $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1,\ 2$ при K_0, меньших тех, при которых $\mu_0 = s$. Везде μ_0 заменено на s (μ_0 дает бóльшую погрешность).



(а) **(б)**

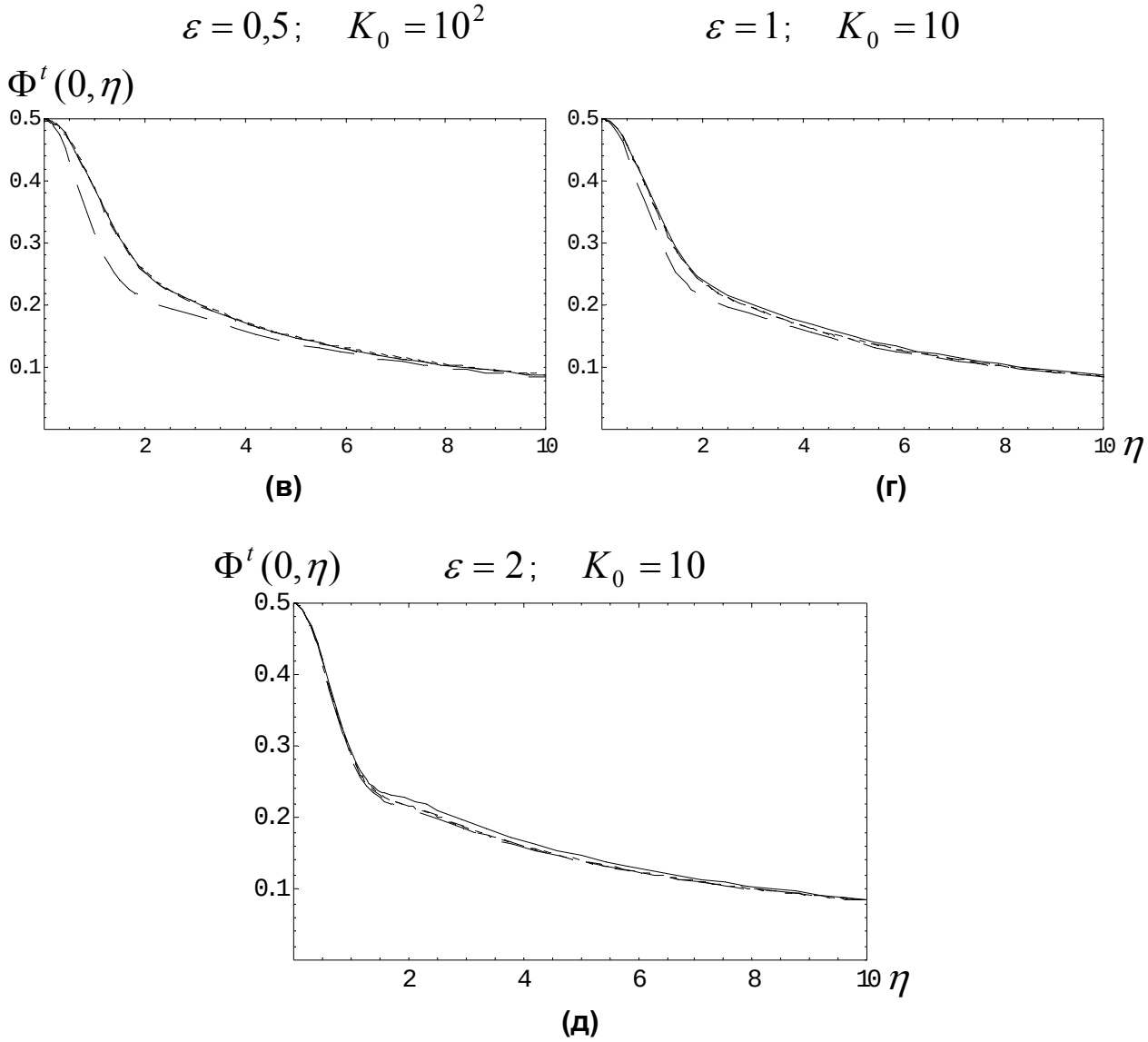


Рис.25

Видно, что при $\varepsilon \in \lfloor 0{,}5;\ 2 \rfloor$ погрешность при использовании (55) для $\Phi^t(0,\eta)$ невелика и вполне допустима. При бóльших отклонениях ε от единицы погрешность в начальной области определения функции становится существенной (рис.25а,б). Нам не удалось получить лучшее, чем (54), приближение для этой области функции (лучшее приближение для интеграла от $f_2(\mu)$) ни путем учета большего количества членов разложения интеграла по $\dfrac{\alpha^t}{\mu_0}$, ни при попытке раскладывать подынтегральное выражение в ряд вокруг не $\mu = \mu_0$, а его собственного максимума, ни при других приближениях подынтегрального выражения.

В заключение приведем приближение для $\Phi^t(\xi,0)$. При $\eta = 0$, используя (52) и прямое интегрирование $f_2(\mu)$ по μ от $-\infty$ до $+\infty$ (нетрудно было бы

проинтегрировать и в правильных пределах от 0 до $+\infty$, но интеграл был бы более громоздким за счет малых хвостов, исчезающих при $K_0 \to \infty$), получим

$$\Phi(\xi,0) \cong \frac{\varepsilon^2 \left\{ \cos^2(\mu_0 \xi/2) - \alpha^t(\varepsilon-1)\xi \dfrac{\left[\varepsilon + (\alpha^t \xi)^2\right]\sin(\mu_0\xi) + \alpha^t(\varepsilon-1)\xi\cos(\mu_0\xi)}{\left[1+(\alpha^t\xi)^2\right]\left[\varepsilon^2+(\alpha^t\xi)^2\right]} \right\}}{2\left[1+(\alpha^t\xi)^2\right]\left[\varepsilon^2+(\alpha^t\xi)^2\right]}$$

Это выражение принимает простой вид при $\varepsilon = 1$

$$\Phi(\xi,0) \cong \frac{\cos^2(\mu_0\xi/2)}{2\left[1+(\alpha^t\xi)^2\right]^2}$$

и для любого ε при $\xi = 0$ равно $1/2$, как это и должно быть.

Полученные для треугольной модели контура приближенные функции (16,43,48а,55), как и в параболической модели, представимы универсальными выражениями, зависящими лишь от параметров μ_0 (или s) и ε. Приведем, как и в предыдущем разделе, результаты расчетов, показывающих независимость функций от x_0 и K_0, если s зафиксировано, а также степень их зависимости от ε.

Проверка независимости функций от x_0 и K_0 при фиксированном μ_0 опять проводилась для $\varepsilon = 0{,}5;\ 1;\ 2$ и $x_0 = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$.

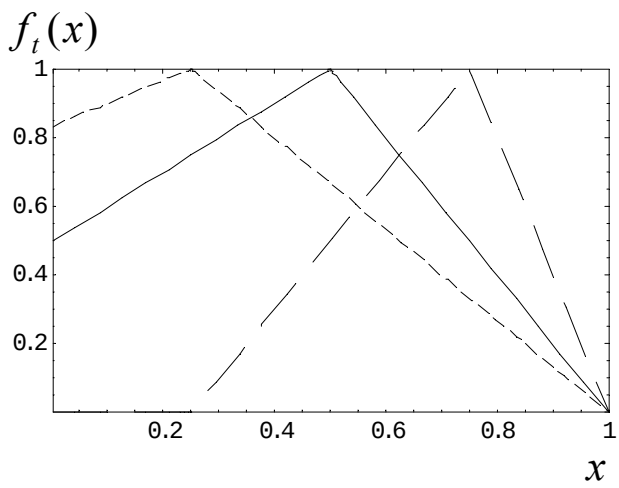


Рис.26

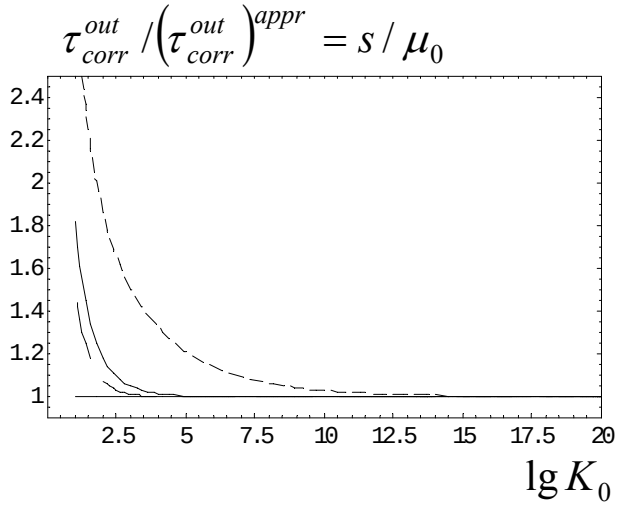


Рис.27

На рис.26 показаны формы контуров $f(x)$, а на рис.27 - отношение $\tau_{corr}^{out} / \left(\tau_{corr}^{out}\right)^{appr} = s/\mu_0$ от $\lg K_0$ для $\varepsilon = 0{,}5$ (на последнем для удобства также приведена сплошная горизонтальная прямая, соответствующая единичной ординате). Для $x_0 = 0{,}5$ - сплошные кривые, $x_0 = 0{,}25$ - штриховые кривые с короткими штрихами, $x_0 = 0{,}75$ - с длинными штрихами.

На рис.28а-в показаны графики функций γ_0^t, $2\pi\Gamma_0^t / \tau_{corr}^{out}$ и $\Phi^t(0,\eta)$ для f_t с рис.26. Формы кривых соответствуют рис.26-27. Для $x_0 = 0{,}5$ взято $K_0 = 2\cdot 10^3$, при котором μ_0 еще отлично от $s = 4{,}114$ (согласно (40)). Для сохранения этого s при $x_0 = 0{,}25$ взято $K_0 = 9{,}04\cdot 10^9$, что дает $s = 4{,}119$ (оценка по (46) потребовала бы $K_0 = 8\cdot 10^9$, при котором $s = 4{,}10$). При $x_0 = 0{,}75$ бралось $K_0 = 0{,}797$, что дает $s = 4{,}113$ (оценка по (46) $K_0 = 10\sqrt{2} \cong 12{,}6$ дала бы $s = 5{,}637$). Функции, как и в параболической модели, считались численно во избежание погрешностей приближений при $K_0 >> 1$.

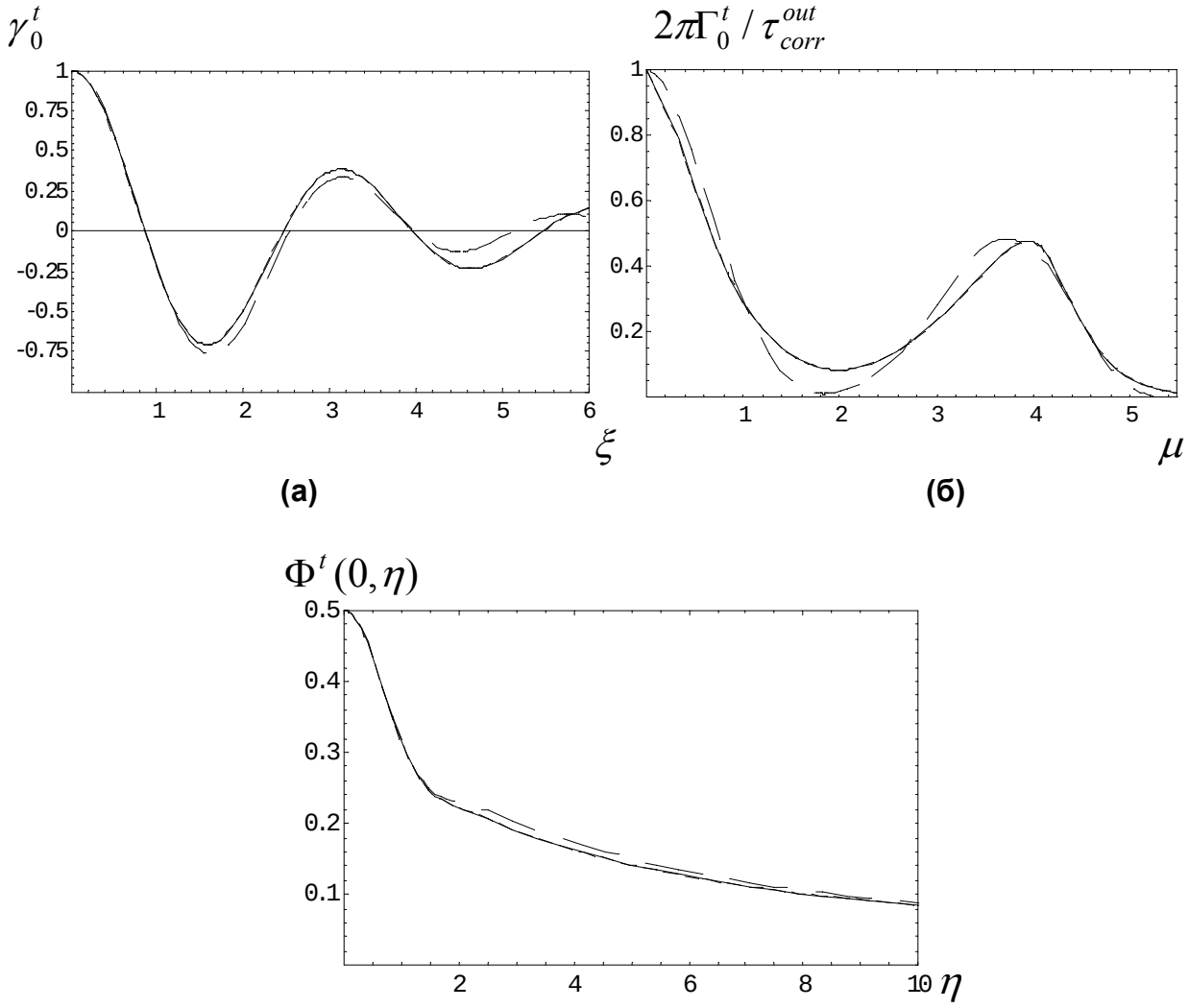


Рис.28

Мы видим очень хорошее совпадение соответствующих графиков. И это несмотря на то, что для $x_0 = 0{,}75$ бралось $K_0 < 1$! При таких значения K_0 никакие

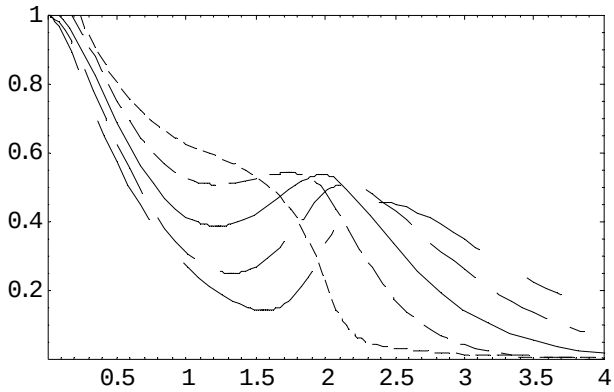
наши приближенные выражения не верны и ожидать независимости результатов от x_0 и K_0 по отдельности, вообще говоря, не приходится. Именно кривые с $K_0 < 1$ слегка отличны от двух других, которые просто неразличимы. Если же брать случаи бóльших значений s, то совпадение будет еще лучше.

Аналогичные расчеты были проделаны и для $\varepsilon = 1$ и 2. При этом значения s в целом возрастают при прочих равных условиях, а это приводит к улучшению совпадения функций. Хотя также некоторые кривые соответствали $K_0 < 1$ (т.е. поглощению, а не усилению). Например, при $\varepsilon = 1$ мы опять взяли $K_0 = 2 \cdot 10^3$ при $x_0 = 0{,}5$. Тогда, чтобы при $x_0 = 0{,}75$ получить то же самое значение $s = 6{,}009$ пришлось взять $K_0 = 0{,}556$, т.е. еще меньше, чем при $\varepsilon = 0{,}5$. И тем не менее для каждой функции (7-9) все кривые практически слились в одну.

Теперь проиллюстрируем зависимость функций от параметра ε при фиксированном μ_0. В параболической модели мы сравнивали кривые по их аналитическим приближениям лишь для функций γ_0 и $\Phi(0,\eta)$, поскольку при произвольных ε у нас не было аналитических формул для $2\pi\Gamma_0 / \tau_{corr}^{out}$. Для треугольной модели, мы, наоборот, сравним функции $2\pi\Gamma_0 / \tau_{corr}^{out}$, рассчитанные по формуле (48а). Результаты приведены на рис.29а-г. Каждый рисунок соответствует заданному значению μ_0 в диапазоне $2 \div 20$. Представлены кривые для $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 5$. Сплошной линией приведена функция для $\varepsilon = 1$, а остальные - штриховыми линиями, длина штрихов увеличивается с ростом ε.

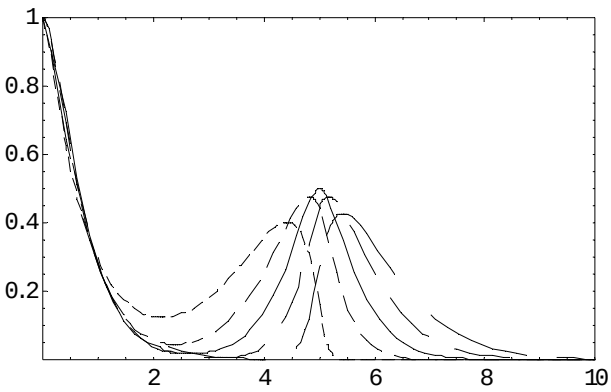
Функция $2\pi\Gamma_0^t(\mu) / \tau_{corr}^{out}$

$\mu_0 = 2$



(а)

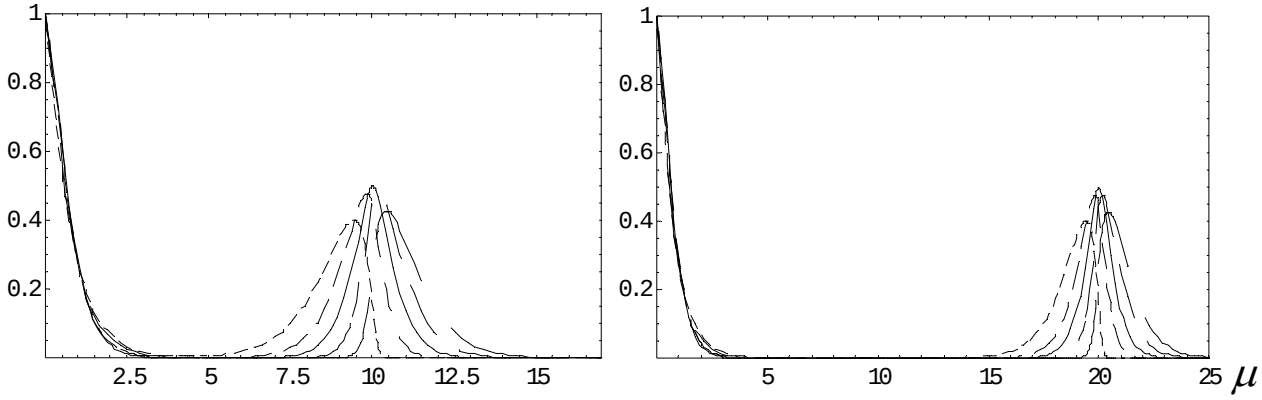
$\mu_0 = 5$



(б)

$\mu_0 = 10$

$\mu_0 = 20$



(в) **(г)**

Рис.29

Видно, что центральный максимум $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ с ростом μ_0 становится почти независимым от ε (первое слагаемое в (48а) не зависит от μ_0 и очень слабо от ε, и с ростом μ_0 уменьшается влияние в этой области “хвоста” второго слагаемого); а боковые максимумы заметно расходятся, т.к. у них имеется зависящие от ε и не зависящие от μ_0 сдвиг и разница в высоте (см.(50-51)).

Наблюдаемая на рис.17-18,29 зависимость функций от ε не кажется странной. Как мы уже отчасти показали и покажем далее, нормированные функции (7-9) для разных контуров при фиксированных s не только хорошо совпадают друг с другом, но и хорошо описываются моделями, в основу которых положена информация о форме контура $f(x)$ лишь вблизи своих максимумов (это как раз и есть параболическая или треугольная модели). Происходит это из-за резкого пика здесь при $K_0 >> 1$ у функции (11), интегрально определяющей все остальные функции. Поэтому функции (7-9) и зависят главным образом от особенностей этого пика, в частности от наличия у него и величины асимметрии, определяемой ε. Более необъяснимо то, что кривые для треугольной и параболической моделей, описываемые совершенно разными аналитическими выражениями, мало отличаются друг от друга при заданных s и ε. А это значит, что совпадут функции (7-9) для контуров широкого функционального вида, как с гладкими экстремумами, так и имеющими в них изломы.

В следующем разделе мы как раз и исследуем этот круг вопросов. То есть сравним между собой функции (7-9) для параболической и треугольной моделей контуров, а также сопоставим их с некоторыми стандартными типами контуров

V. Сопоставление треугольной и параболической моделей “двугорбого” контура и сравнение с реальными контурами.

Итак, мы получили ряд аналитических выражений для статистических характеристик (7-9), которые хорошо описывают эти функции при $K_0 >> 1$ ($K_0 = 10^2 \div 10^3$ в большинстве случаев вполне достаточно).

При произвольных ε наблюдаемый форм-фактор линии усиления на выходе квантового усилителя $F(\chi)$, от которого только и зависят функции (7-9), описывается формулой (15) для параболической модели и (43) для треугольной. При $\varepsilon = 1$ эти выражения переходят, соответственно, в (25) и (56).

Функция $\gamma_0(\xi)$ при произвольном параметре ε описывается выражением (16) с множителями (17-18) для параболической модели и (44-45) для треугольной. При $\varepsilon = 1$ эти выражения упрощаются и принимают вид (26) для параболической модели и (57) для треугольной.

Для функции $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ у нас нет аналитического приближения при произвольном ε для параболической модели; для треугольной модели это выражение (48а). При $\varepsilon = 1$ имеются приближения для обеих моделей - (20а) для параболической и (58) для треугольной.

Для функции $\Phi(\xi,\eta)$ при произвольном ε аналитическое приближение для параболической модели представлено выражением (21); для треугольной модели надо применить преобразование (24) к формуле (55). Для важного частного случая функции - $\Phi(0,\eta)$ - при произвольном ε параболической модели соответствует выражение (22), а треугольной (с несколько меньшей точностью) - (55). При $\varepsilon = 1$ функция $\Phi(\xi,\eta)$ описывается формулой (29) для параболической модели и формулой (59) для треугольной. Для функции $\Phi(0,\eta)$ в этом случае имеются, соответственно, формулы (30) или более упрощенно (36) для параболической модели и (60) для треугольной.

Таким образом, при $\varepsilon = 1$ у нас имеются аналитические выражения для всех функций для обеих моделей, а при $\varepsilon \neq 1$ - по крайней мере для одной модели, хотя в большинстве случаев и для обеих.

Сравним теперь между собой функции (7-9), нормированные согласно (5-6), для треугольной и параболической моделей. Упрощенные аналитические выражения обоих моделей зависят лишь от параметров ε и μ_0. Поэтому и сравнивать функции будем при одинаковых их значениях. При этом могут реализоваться разные сочетания x_0 и K_0, к тому же весьма различные для параболической и треугольной моделей. Сравнение при заданных ε и μ_0 аналитических выражений не зависит от того, какой смысл придается параметру μ_0 (μ_0 или s). При сравнении же результатов численных расчетов будем сравнивать функции при одинаковых ε и подбирать x_0 и K_0 так, чтобы совпали именно значения s из (38,40).

Если говорить об аналитических выражениях для случая $\varepsilon = 1$, то заранее можно ожидать, что функции обоих моделей будут близки друг к другу и в пределах разумной экспериментальной ошибки могут считаться совпадающими. Для функции $\gamma_0(\xi)$ формулы (26) и (57) отличаются от соответствующих выражений для “одногорбых” параболических и треугольных контуров (см. формулы (19) и (25) в [3]) растяжением по оси ξ в 2 раза и одинаковым множителем $\cos\left(\xi \frac{\mu_0}{2}\right)$. Поэтому и совпадение функций для разных моделей будет не хуже, чем для “одногорбых” контуров в [3]. Для функций $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ формулы (20а) и (58) отличаются от соответствующих выражений для “одногорбых” параболических и треугольных контуров (см. (20) и (26) в [3]) сжатием в 2 раза по μ основного максимума и появлением бокового, идентичного основному, в 2 раза ниже его и сдвинутого на μ_0 по оси μ. Поэтому и здесь совпадение для разных моделей не будет хуже, чем для “одногорбых” контуров в [3]. Что же касается $\Phi(0,\eta)$, то (36) для параболической модели и (60) для треугольной отличаются от соответствующих выражений для “одногорбых” параболических и треугольных контуров (см. (22) и (28) в [3]) растяжением по η в 2 раза, общим множителем 1/2 (это обеспечивает “хвосты” функций) и появлением дополнительных слагаемых, описывающих поведение функций вблизи нуля аргумента, функциональный вид которых хотя и отличен в (36) и (60), но становится одинаковым при $\mu_0 >> 1$. Все это позволяет рассчитывать на близость функций $\Phi(0,\eta)$ для обоих моделей не хуже той, что наблюдалась для “одногорбых” контуров в [3]. Учитывая (24), подобное заключение можно сделать и для функции $\Phi(\xi,\eta)$ при $\xi \neq 0$. Приведем однако здесь сопоставление аналитических функций $\Phi(0,\eta)$, поскольку, во-первых, для треугольной модели в (60) предполагается несколько меньшая точность приближения, чем для параболической в (30); во-вторых, для параболической модели кроме более строгой формулы (30) имеется приближение (36); и, в-третьих, для $\Phi(0,\eta)$ слагаемые, описывающие поведение функции в начале координат, отличаются друг от друга при не очень больших μ_0.

На рис.30а-г сравниваются аналитические приближения для $\Phi(0,\eta)$ при $\mu_0 = 1 \div 7$ (при бóльших μ_0 кривые сливаются). Сплошные кривые - приближение (30) параболической модели, кривые с длинными штрихами - приближение (36) для (30), с короткими штрихами - приближение (60) треугольной модели. Видно, что совпадение кривых для разных моделей в начале координат при $\mu_0 \geq 3$ не хуже, чем на “хвостах”; и примерно при тех же значениях μ_0 практически совпадают кривые, описываемые (30) и ее упрощенным вариантом (36).

На рис.31, пользуясь более точным приближением (30) для параболической модели, показано изменение функций $\Phi(0,\eta)$ при изменении μ_0 - μ_0 меняется от 1 до 9 через 2 и возрастает для приведенных кривых сверху вниз.

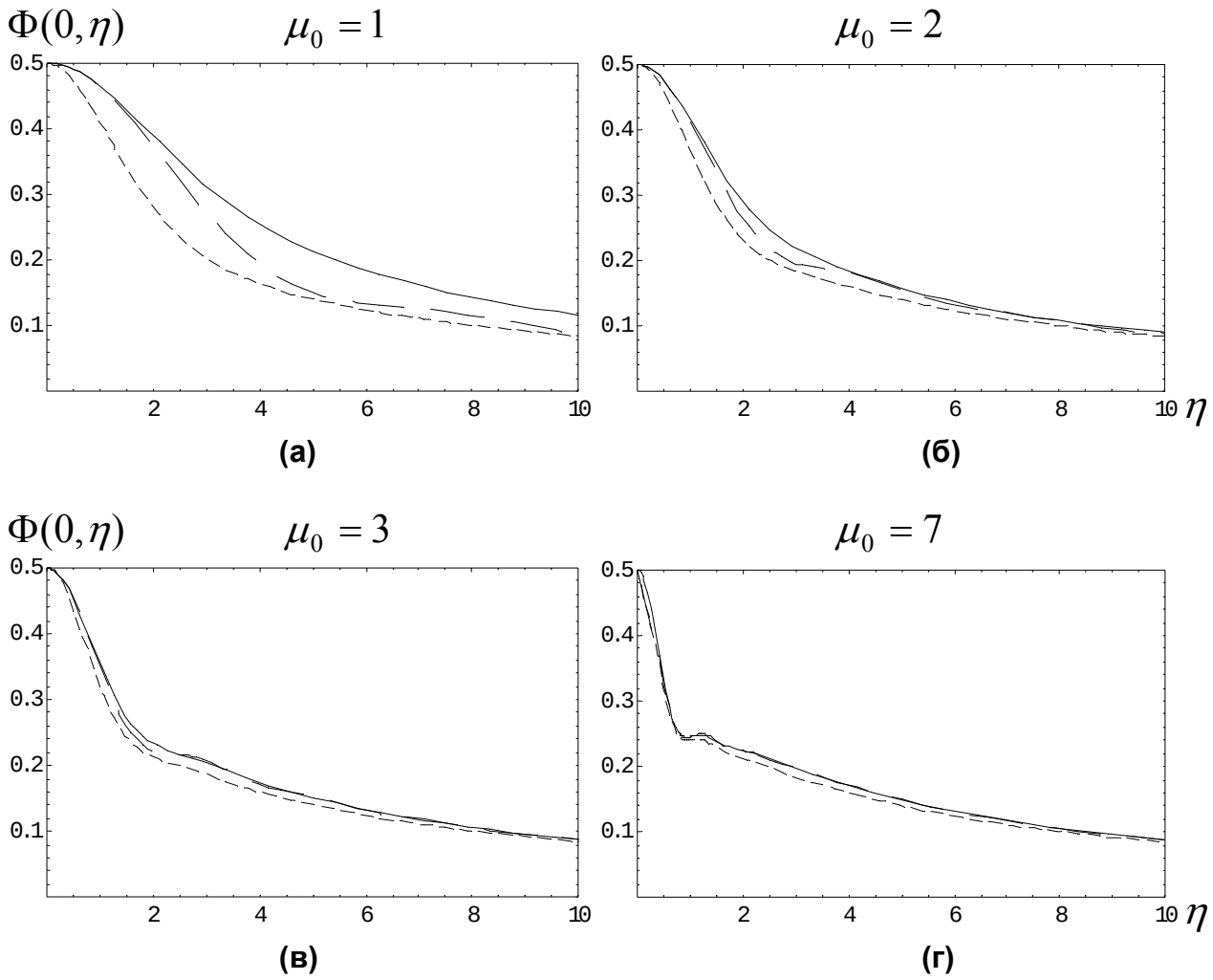

$\Phi(0,\eta)$
$\mu_0 = 1$
$\mu_0 = 2$
$\mu_0 = 3$
$\mu_0 = 7$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
2
4
6
8
10
η
(а)
(б)
(в)
(г)

Рис.30

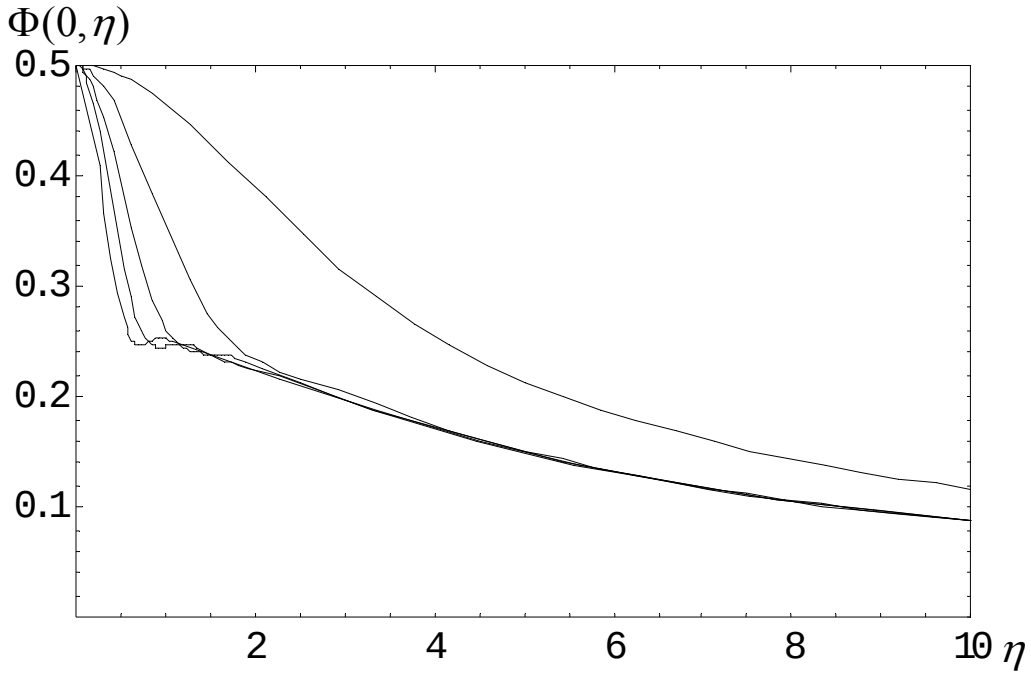
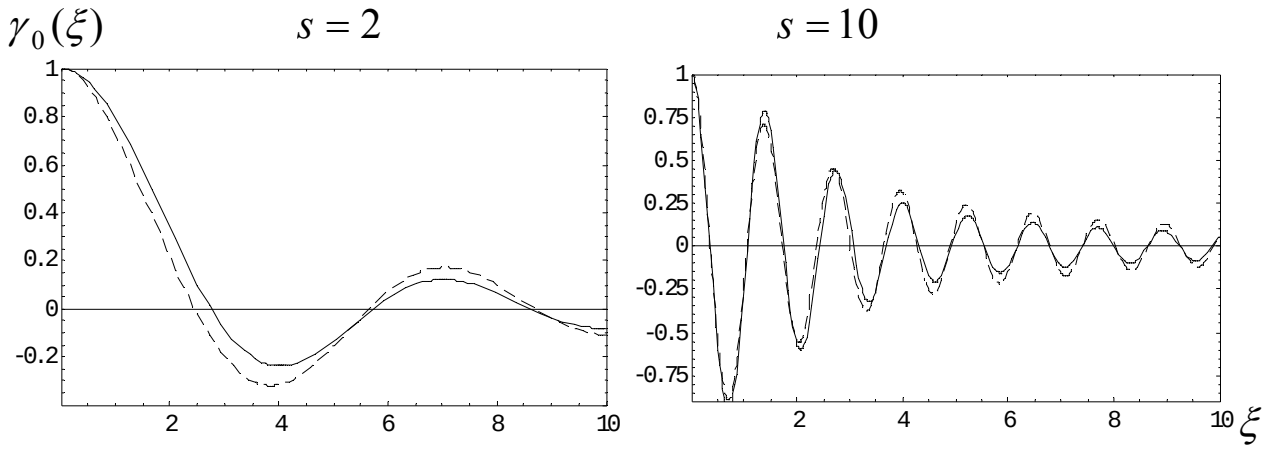

$\Phi(0,\eta)$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
2
4
6
8
10
η

Рис.31

Из рис.30 и 31 видно, что имеются зависящие от μ_0 четко выраженные особенности поведения функции $\Phi(0,\eta)$ в начале координат и оба приближения (36) и (60) хорошо отражают эти особенности.

На рис.32-36 показано совпадение функций $\gamma_0(\xi)$, $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi(0,\eta)$ для двух моделей при $s \in [2;10]$ и различных ε в диапазоне от 0,1 до 5. Функции параболической модели представлены сплошными линиями, треугольной - штриховыми. Для $\gamma_0(\xi)$ и $\Phi(0,\eta)$ кривые рассчитывались по выражениям (16) и (22,55) с заменой μ_0 на s (для $\Phi^p(0,\eta)$ при $\varepsilon = 5$ и $s \geq 10$ выражение (22) упрощалось аналогично замене (30) на (36)). Поскольку при $\varepsilon \neq 1$ для $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ нет аналитической формулы, то для этой функции при каждом ε для заданного значения μ_0 по (37) вычислялось K_0, при котором это μ_0 достигается. Затем для этого K_0 численно рассчитывались $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и s (для небольших s оно отличалось от μ_0). Затем для этого s вместо μ_0 по формуле (48а) рассчитывались $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$. Поэтому для $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ в некоторых случаях данные приведены для s отличных от s для других функций и к тому же различных при разных ε. По той же схеме считался и рис.34 при $\varepsilon = 1$, хотя в этом случае имеются аналитические формулы для обеих моделей.

$\varepsilon = 0{,}1$



(а) **(б)**

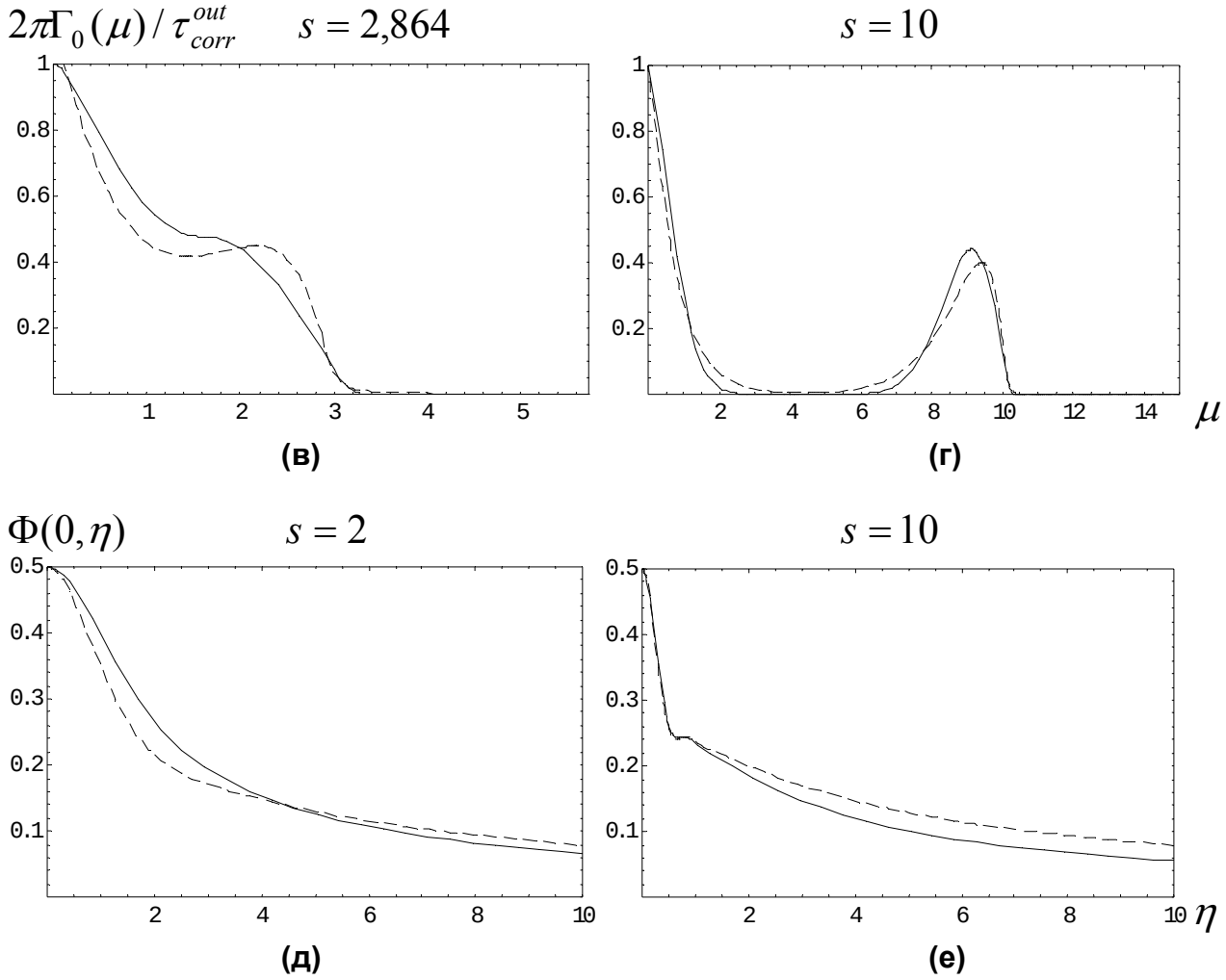
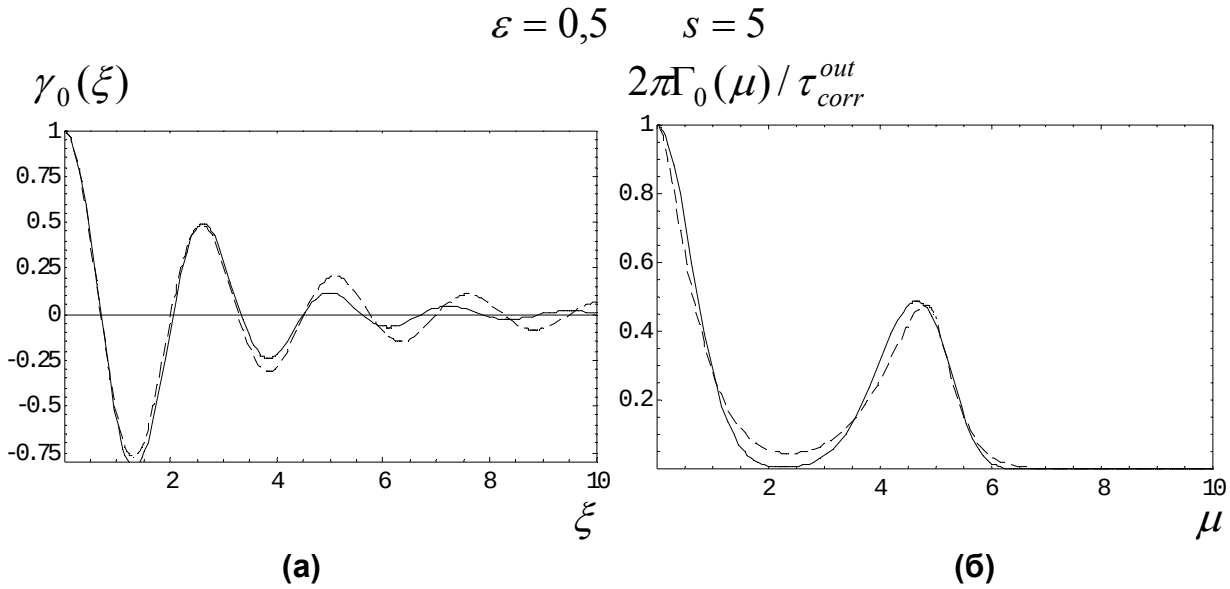
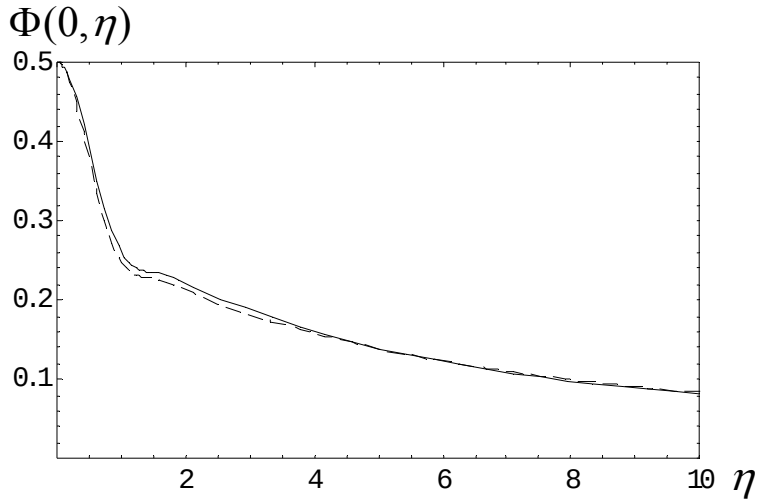

$2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$
$s = 2{,}864$
$s = 10$
μ
(в)
(г)
$\Phi(0,\eta)$
$s = 2$
$s = 10$
η
(д)
(е)

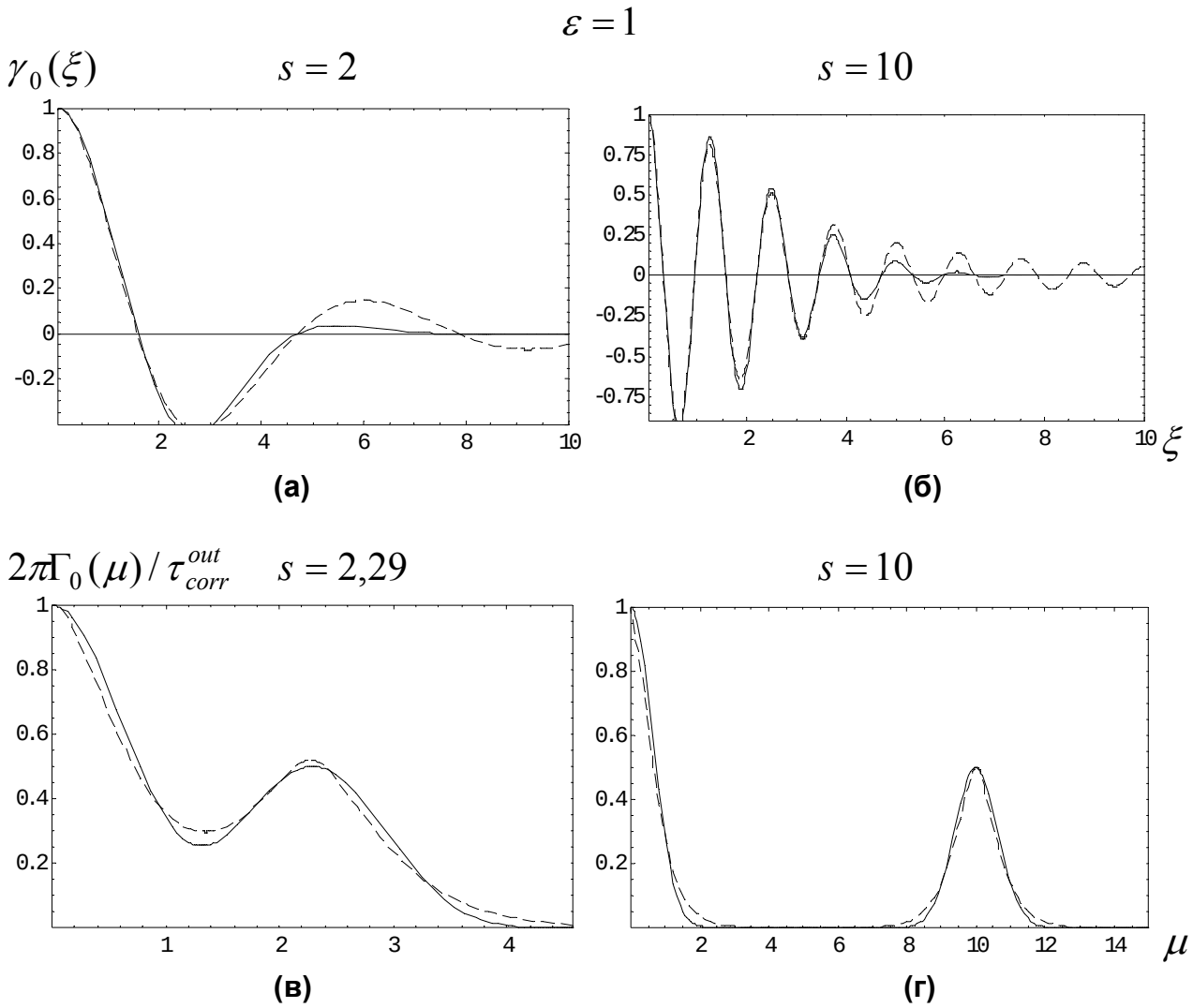
Рис.32


$\varepsilon = 0{,}5$
$s = 5$
$\gamma_0(\xi)$
$2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$
ξ
μ
(а)
(б)


$\Phi(0,\eta)$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
2
4
6
8
10
η

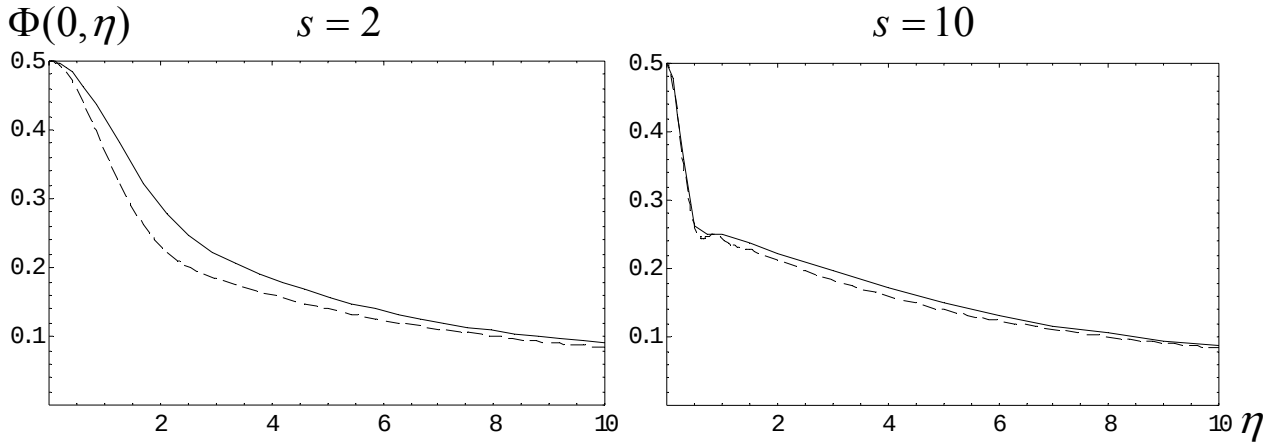
(в)

Рис.33


$\varepsilon = 1$
$\gamma_0(\xi)$
$s = 2$
$s = 10$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
2
4
6
8
10
1
0.75
0.5
0.25
0
-0.25
-0.5
-0.75
ξ
$2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$
$s = 2{,}29$
$s = 10$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
1
2
3
4
2
4
6
8
10
12
14
μ

(а) **(б)**

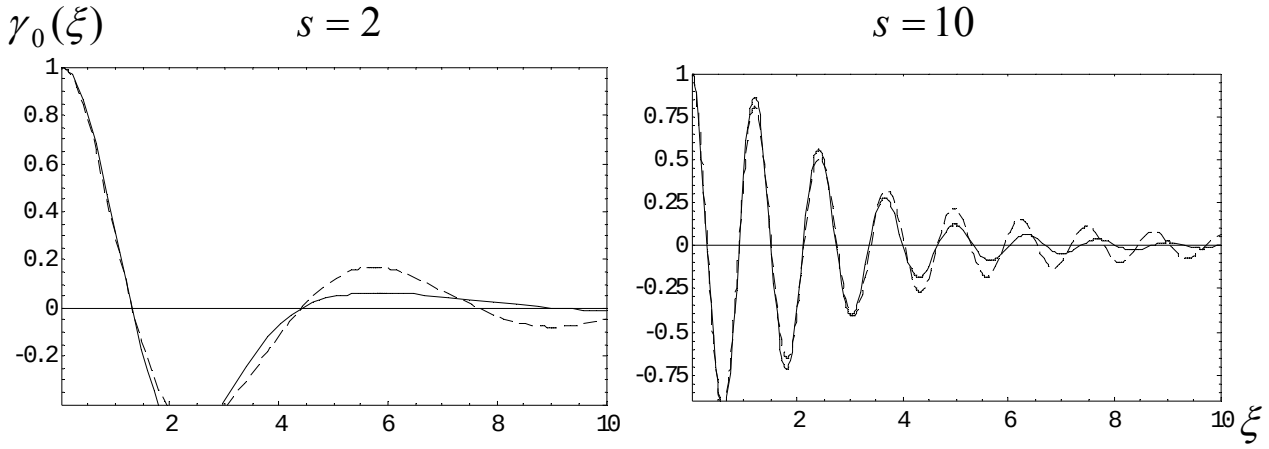
(в) **(г)**



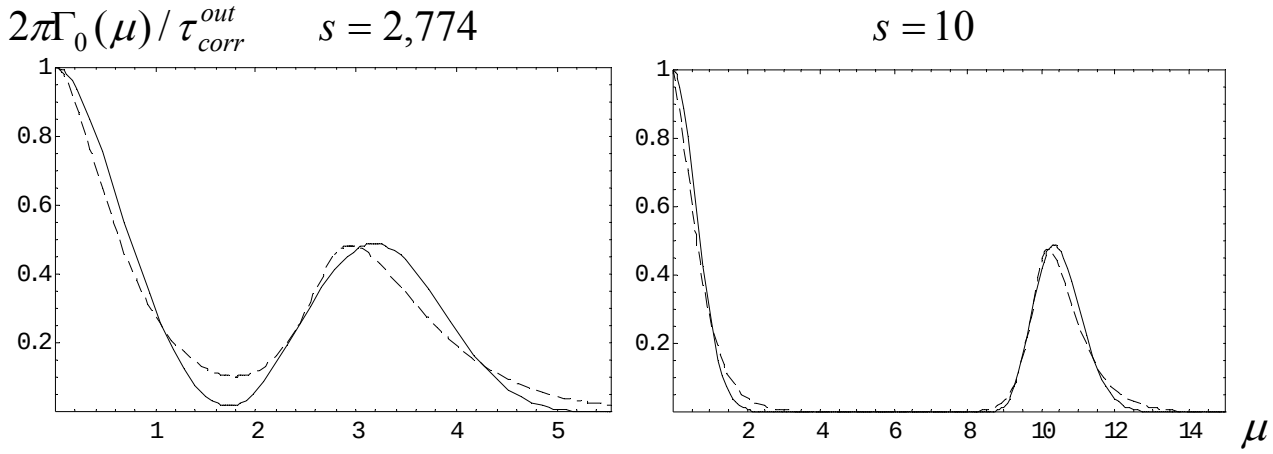
(д) **(е)**

Рис.34

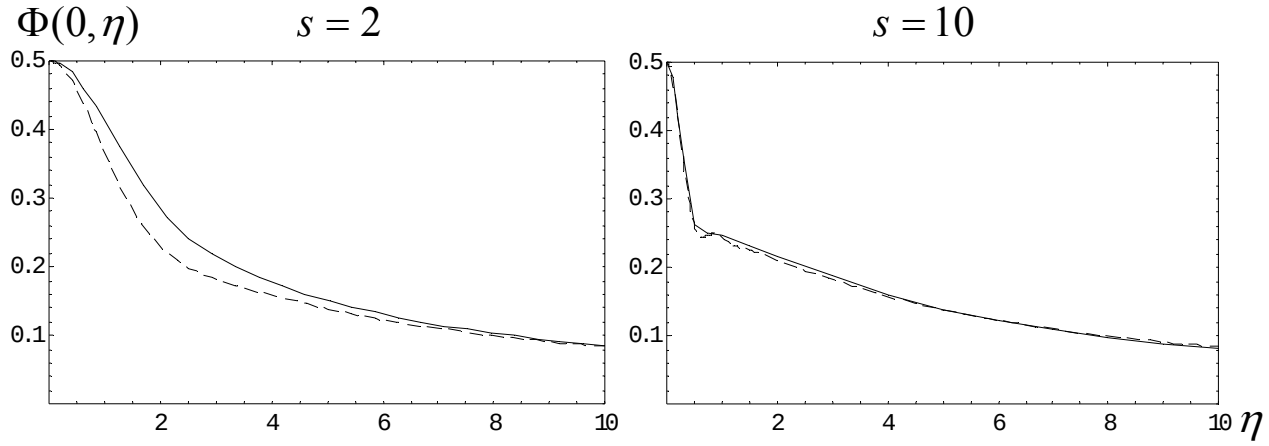
$\varepsilon = 2$



(а) **(б)**



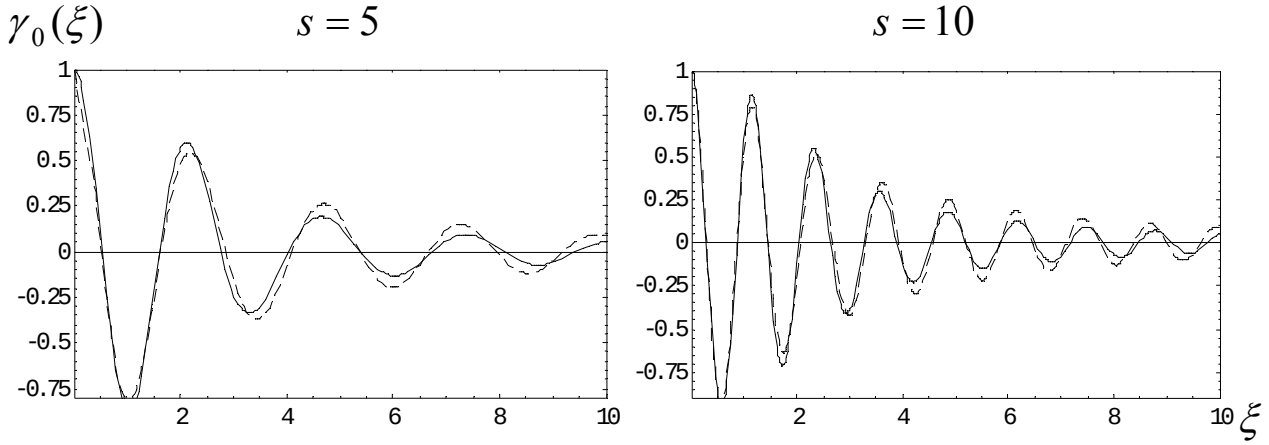
(в) **(г)**



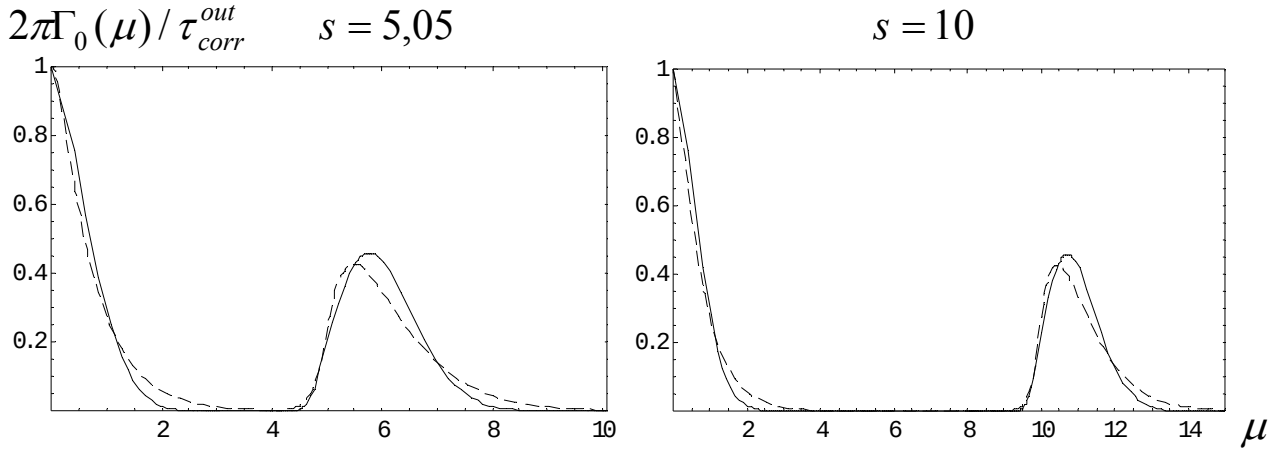
(д) **(е)**

Рис.35

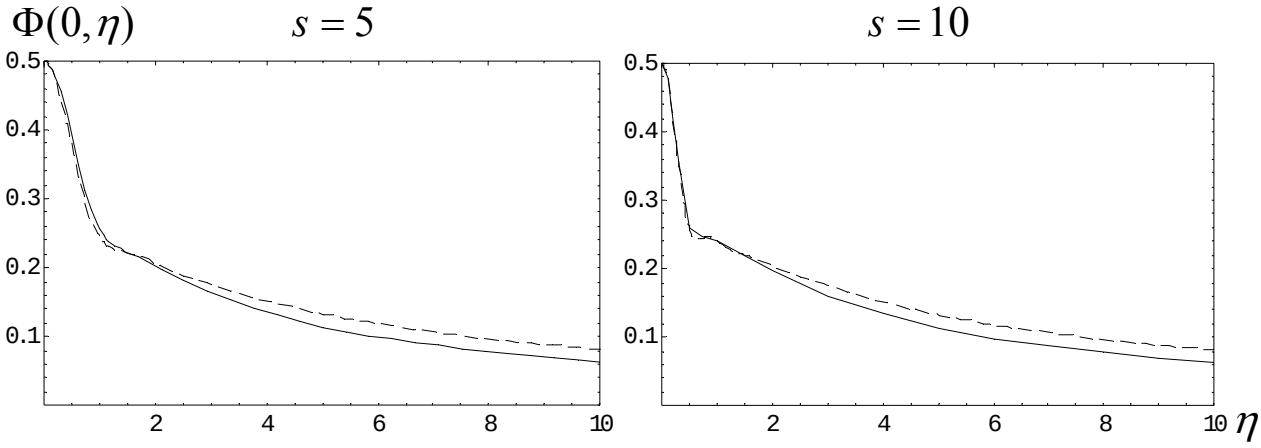
$\varepsilon = 5$



(а) **(б)**



(в) **(г)**



(д) **(е)**

Рис.36

Для остальных s совпадение функций такое же. Видно, что функции для параболической и треугольной моделей практически совпадают при $s \geq 2$ (т.е. весьма небольших) и ε даже сильно отличающихся от единицы.

В заключение сопоставим численно рассчитанные функции $F(\chi)$, $\gamma_0(\xi)$, $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi(0,\eta)$ для некоторых конкретных контуров параболического типа (в том смысле, что в области своих симметричных максимумов $f(x)$ этих контуров при разложении в ряд до второго порядка имеет вид (12)) с приближенными аналитическими выражениями, полученными для контуров параболической модели. Ограничимся симметричными ‘’горбами” ($\varepsilon = 1$) и используем приближенные выражения (25-26,20а,30). Рассмотрены качественно различные $f(x)$ как по функциональному виду, так и по отношению ширины каждого ‘’горба” к расстоянию между ними, определяемому параметром x_0. Взяты три варианта этого параметра - малое значение ($x_0 < 1/2$), соответствующее контуру с небольшим провалом в центре; значение, близкое к единице, когда ширина каждого максимума сравнима с расстоянием между ними; и большое значение ($x_0 > 1/2$), т.е. случай двух разнесенных частот с заметным промежутком между ними.

Вариант $x_0 = 0{,}25 < \dfrac{1}{2}$.

Для этого x_0 был взят контур лоренцева типа

$$f_l(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{|x| - x_0}{1 - x_0} \right)^2} \tag{61}$$

с максимумами в точках $|x| = x_0$ ($f_l^{\max} = 1$), небольшим провалом в центре ($f_l(0) = 0{,}9$) и пологими хвостами при $|x| >> 1$. Этот контур аппроксимировался

функцией вида (12) при $x_1 = x_0 = 0{,}25$, для которой выполняется условие $f_l''(x_0) = f_p''(x_0)$ (первые производные обеих функций равны нулю). Графики f_p и f_l приведены на рис.37 (сплошная кривая - f_p, штриховая - f_l).

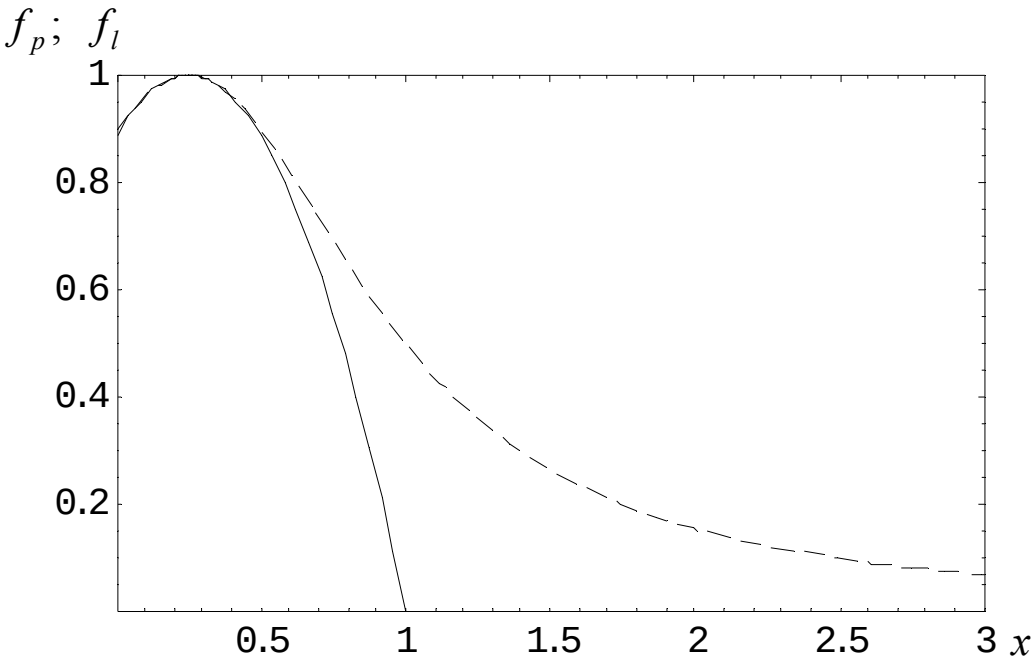
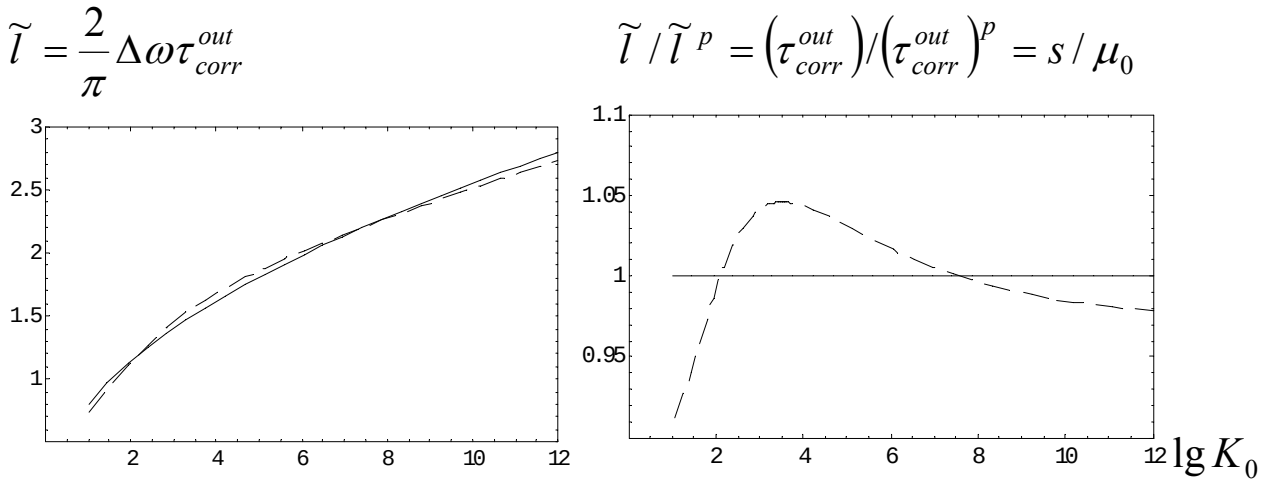


Рис.37

На рис.38а-б приведены зависимости $\tau_{corr}^{out}(\lg K_0)$ для этих двух контуров. Для f_p использовано приближение (39), для f_l (61) - численный расчет (38). На рис.38а показаны сами кривые, приведенные к одному $\Delta\omega$ согласно (13), а на рис.38б - их отношение к (39) (для f_p оно вырождается в единичную прямую).



(а) **(б)**

Рис.38

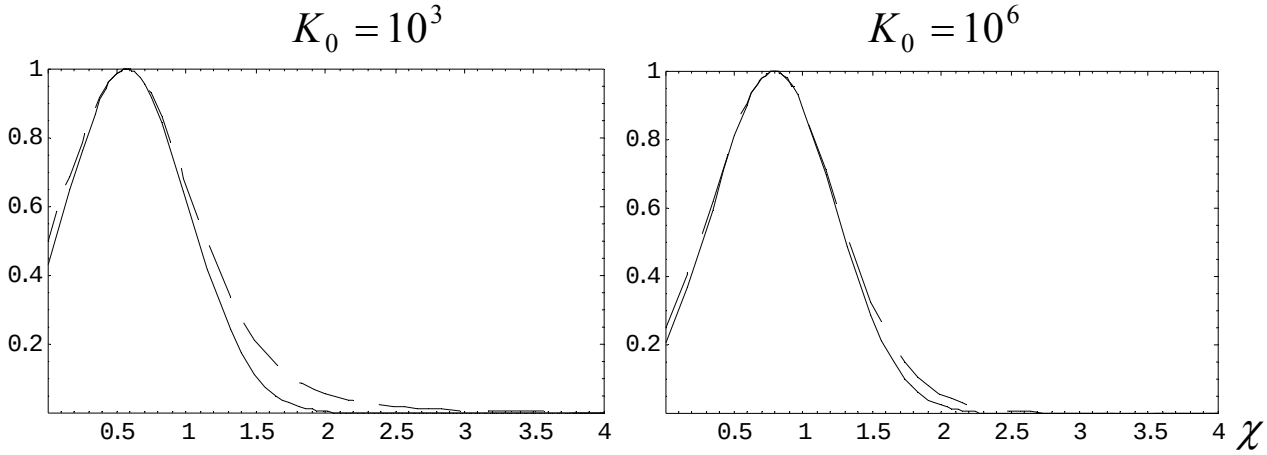
Здесь _____ - аппроксимация (39) $\tilde{l}^{\,p} = \sqrt{\dfrac{\ln K_0}{2\pi}}\,\dfrac{1}{1-x_0}$;

— — — _ - численный расчет для (61) по формуле (38).

Из рис.38 видно, что точное значение τ_{corr}^{out} осциллирует вокруг приближенного. Функции (7-9) для контура (61) сравнивались при $K_0 = 10 \div 10^9$. Ниже приведены графики для $K_0 = 10^3$ (оно близко к максимуму отклонения точного τ_{corr}^{out} от приближенного) и $K_0 = 10^6$ (близко к минимуму отклонения). Как и раньше, сплошные линии везде - приближения параболической модели, а штриховые - численный расчет для контура (61). Согласно (37), для μ_0 в данном случае имеется оценка $\mu_0 \cong \sqrt{\dfrac{\pi}{18}\ln K_0} \cong 0{,}634\sqrt{\lg K_0}$. При сравнении функций мы сопоставляли численные расчеты с приближенными выражениями, в которых вместо этого μ_0 стояло s для контура (61). Расчеты показали, что использование μ_0 вместо s всегда ухудшало совпадение функций и тем больше, чем больше μ_0 и чем сильнее его отличие от s.

На рис.39 приведены графики функции $F(\chi)$. Сплошные кривые рассчитаны по формуле (25). На рис.40 - графики функции $\gamma_0(\xi)$. Сплошные кривые соответствуют выражению (26). На рис.41 приведены графики $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$. Поскольку в этом случае при $K_0 \le 10^6$ условие (27) не выполняется, для расчета сплошных кривых использовалась более строгая формула (28) тоже с заменой μ_0 на s. На рис.42а-г приведены графики функции $\Phi(0,\eta)$. Для сплошных кривых использована формула (30) Графики (а-б) показывают саму функцию $\Phi(0,\eta)$, а (в-г) - отношение численных расчетов для контура (61) к выражению (30). В целом мы видим удивительно хорошее совпадение численных расчетов с аналитическими для всех функций при $K_0 \ge 10^3$, возрастающее с ростом K_0.

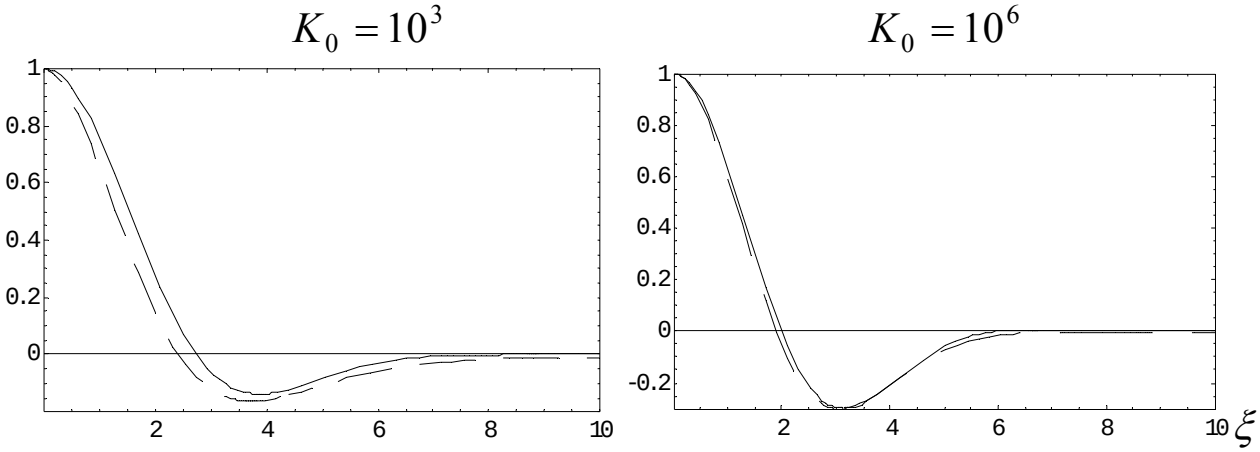
Функция $F(\chi)$



(а) **(б)**

Рис.39

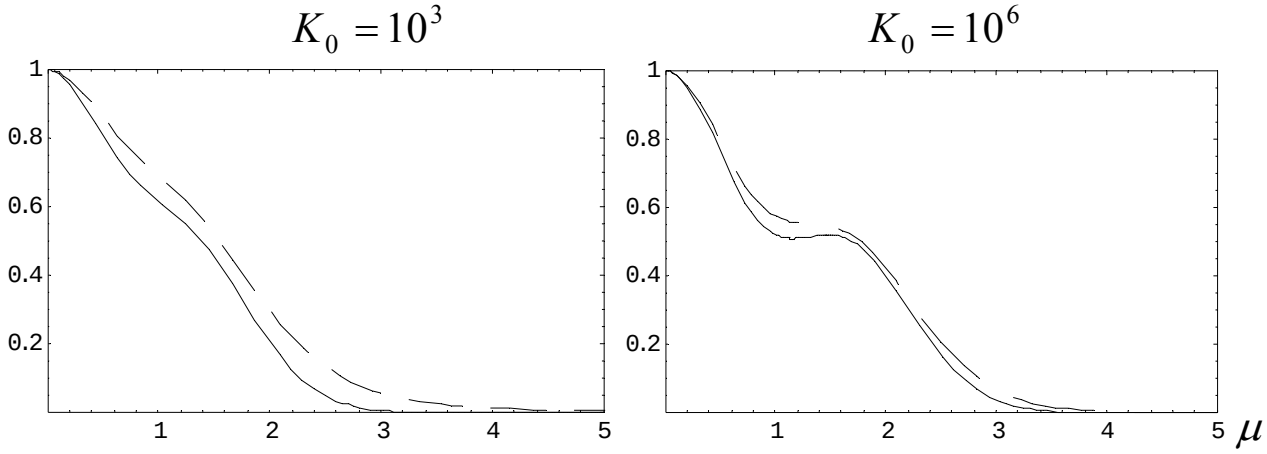
Функция $\gamma_0(\xi)$



(а) **(б)**

Рис.40

Функция $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$



(а) **Рис.41** **(б)**

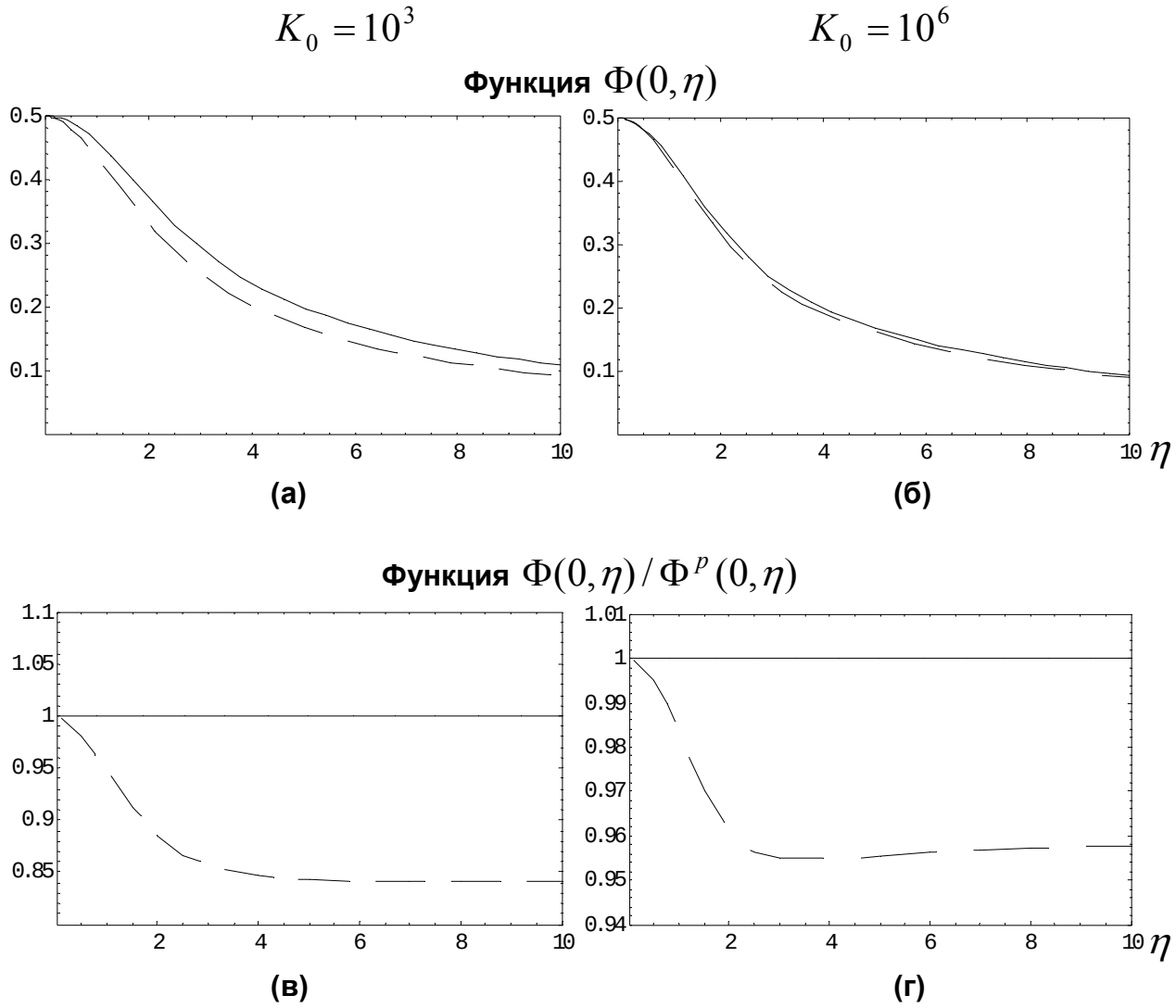


Рис.42

Вариант $x_0 = 2 - \sqrt{2} \cong 0{,}586 \geq \dfrac{1}{2}$.

Для этого x_0 был взят контур максвелловского типа

$$f_m(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \exp\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right], \tag{62}$$

когда ширина максимумов есть величина порядка расстояния между максимумами. Как и в (61), $f_m^{\max} = 1$ при $|x| = x_0$ и для аппроксимации контура бралась модель f_p типа (12) с $x_1 = x_0 = 2 - \sqrt{2}$, для которой $f_m''(x_0) = f_p''(x_0)$. Графики контуров приведены на рис.43 (сплошная кривая - f_p, штриховая кривая - f_m из (62)).

Особенностью контура (62) является еще то, что у него $f_m(0)=0$ и при $x=0$ нет разрыва первой производной $f_m(x)$, как это было в (61).

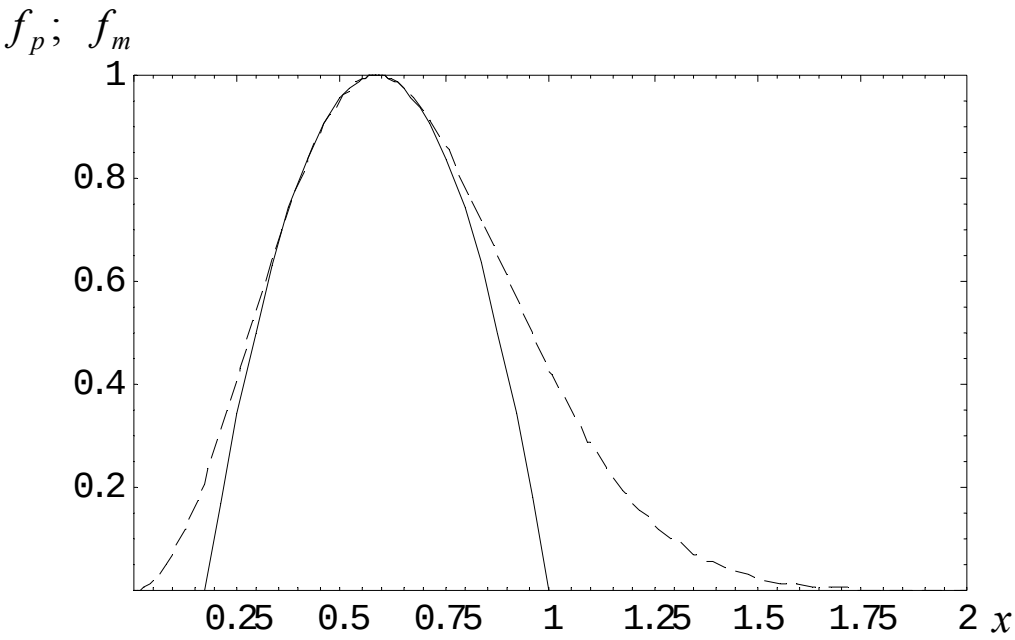


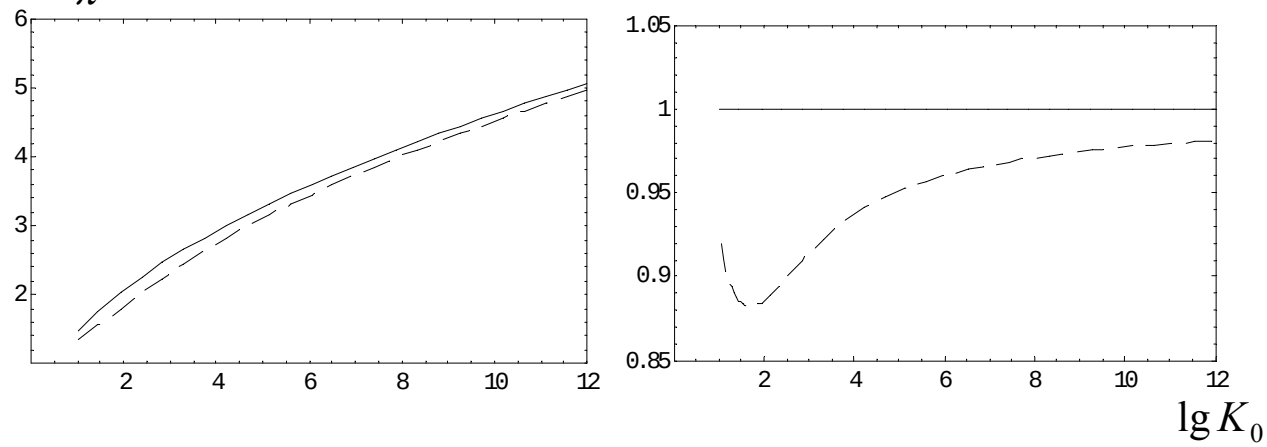
Рис.43

На рис.44а-б приведены функции $\tau_{corr}^{out}(\lg K_0)$ по той же схеме, что и на рис.38а-б.

_____ - аппроксимация (39) $\tilde{l}^{\,p}=\sqrt{\dfrac{\ln K_0}{2\pi}}\,\dfrac{1}{1-x_0}$;

_ _ _ _ - численный расчет для (62) по формуле (38).

$\tilde{l}=\dfrac{2}{\pi}\Delta\omega\tau_{corr}^{out}$ $\qquad$ $\tilde{l}\,/\,\tilde{l}^{\,p}=\left(\tau_{corr}^{out}\right)/\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{p}=s/\mu_0$



(а) **(б)**

Рис.44

В этом случае значение μ_0 по формуле (37) оценивается выражением $\mu_0 \cong \sqrt{\pi \ln K_0} \cong 2{,}67\sqrt{\lg K_0}$. Т.е. при данном K_0 оно в 4 раза больше, чем для $x_0 = 0{,}25$, да и в процентном отношении отличие s от μ_0 на рис.44б больше, чем на рис.38б. Это приводит к тому, что использование в аппроксимациях μ_0 из (37) вместо s для f_m приводит к заметному расхождению функций. Функции (7-9) для f_m опять рассчитывались при $K_0 = 10 \div 10^9$. Приведены графики для $K_0 = 10^2$ и $K_0 = 10^6$. Как и раньше, сплошные линии - приближения параболической модели, а штриховые - численный расчет для f_m из (62).

На рис.45 показаны графики для $F(\chi)$. Сплошные кривые, как и раньше, рассчитаны по формуле (25). На рис.46 - графики функции $\gamma_0(\xi)$. Сплошные кривые соответствуют (26). На рис.47 приведены графики $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$. Поскольку теперь уже при $K_0 \geq 10^2$ условие (27) выполняется, для расчета сплошных кривых использовалось упрощенное выражение (20а). На рис.48а-г приведены графики функции $\Phi(0,\eta)$. И здесь для сплошных кривых использована формула (30). Мы видим еще лучшее, чем при $x_0 = 0{,}25$, совпадение численных расчетов и аналитических приближений для графиков всех функций уже при $K_0 \geq 10^2$, также улучшающееся с ростом K_0.

Функция $F(\chi)$

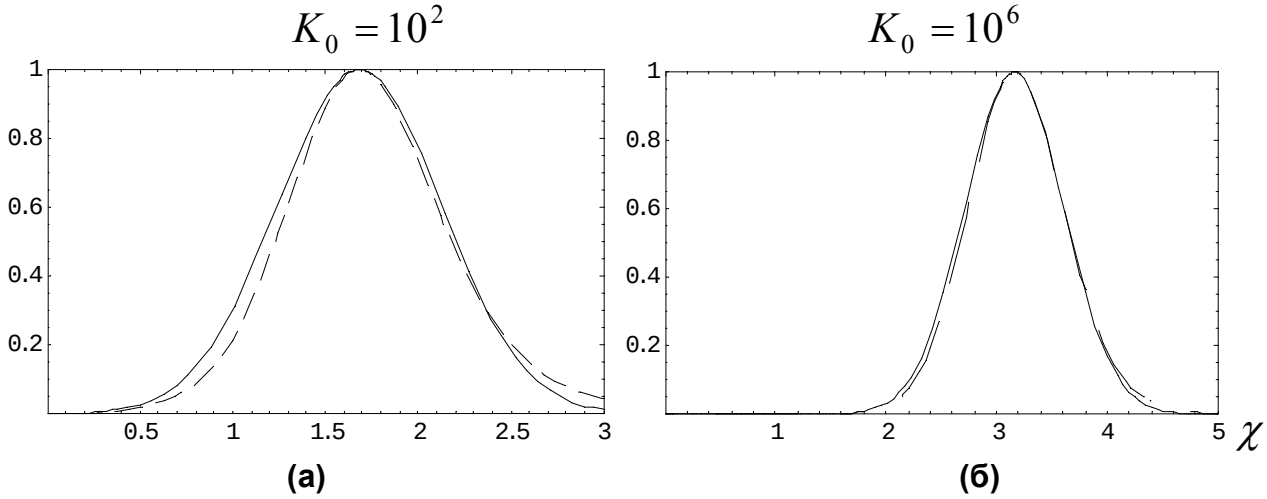
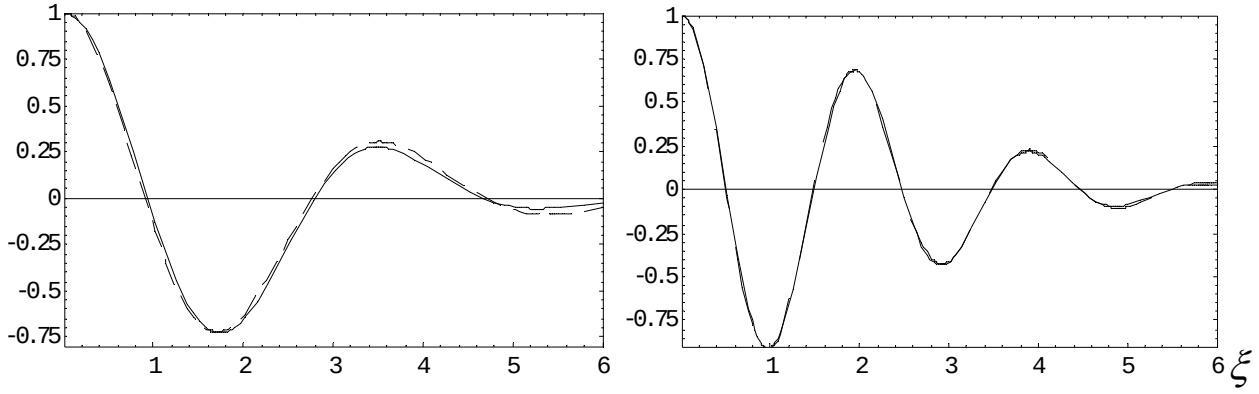


Рис.45

Функция $\gamma_0(\xi)$

$K_0 = 10^2$ $K_0 = 10^6$

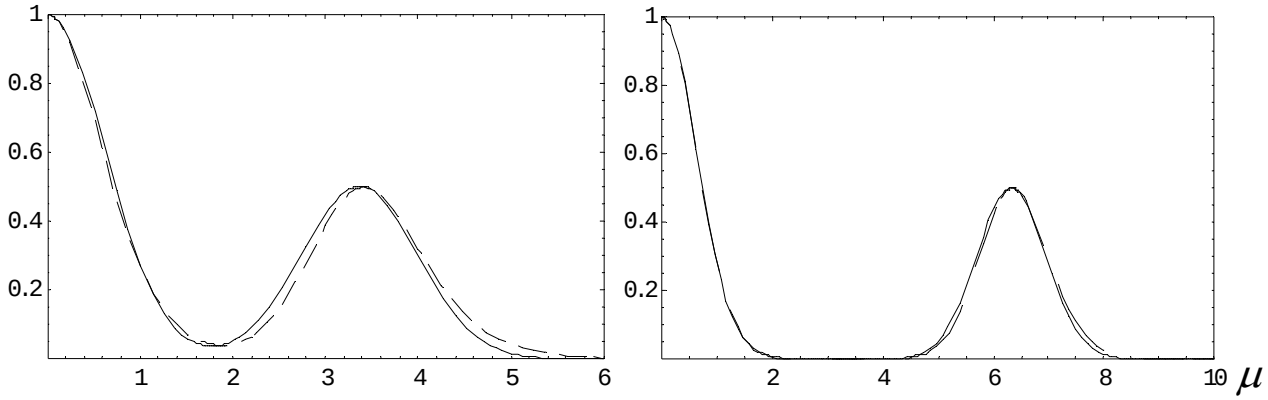


(а) **(б)**

Рис.46

Функция $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$

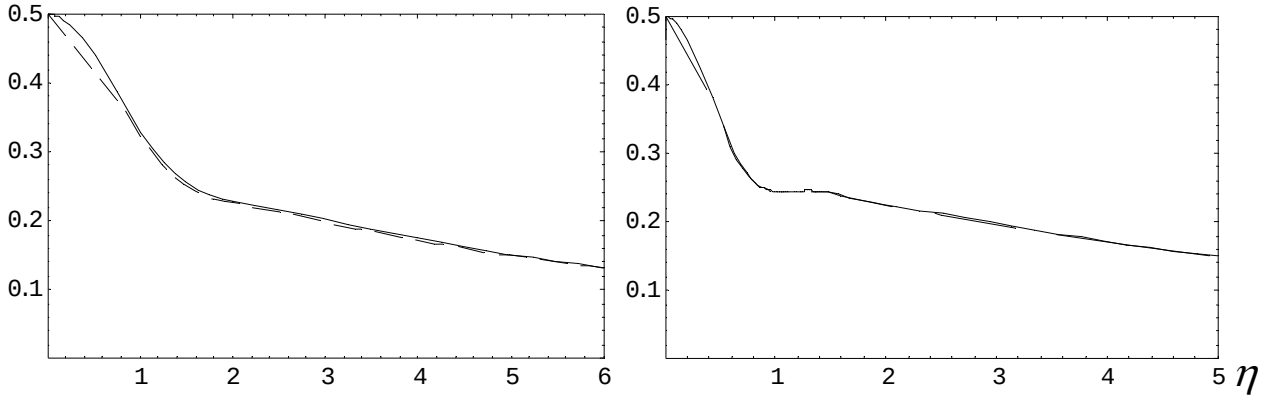
$K_0 = 10^2$ $K_0 = 10^6$



(а) **Рис.47** **(б)**

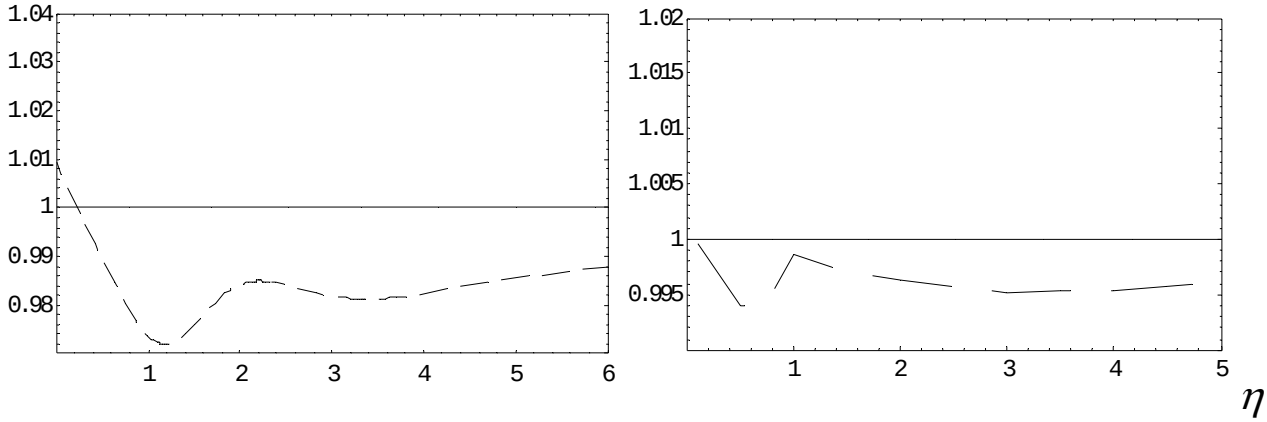
$K_0 = 10^2$ $K_0 = 10^6$

Функция $\Phi(0,\eta)$



(а) **(б)**

Функция $\Phi(0,\eta)/\Phi^p(0,\eta)$



(в) **Рис.48** **(г)**

Вариант $x_0 = 0{,}8 > \dfrac{1}{2}$.

Этот вариант x_0 соответствует расстоянию между максимумами контура в несколько раз большему, чем ширина максимума. Был взят контур гауссова типа

$$f_g(x) = \exp\left[-\left(\frac{|x| - x_0}{1 - x_0}\right)^2\right] \tag{63}$$

с $f_g^{\max} = 1$ при $|x| = x_0$. Для аппроксимации f_g опять бралась модель f_p (12) при $x_1 = x_0 = 0{,}8$, для которой $f_g''(x_0) = f_p''(x_0)$. Графики контуров приведены на рис.49 (сплошная кривая - f_p, штриховая - f_g из (63)). Вблизи центра контуров ($x = 0$) имеется заметная область практически нулевого значения f_g.

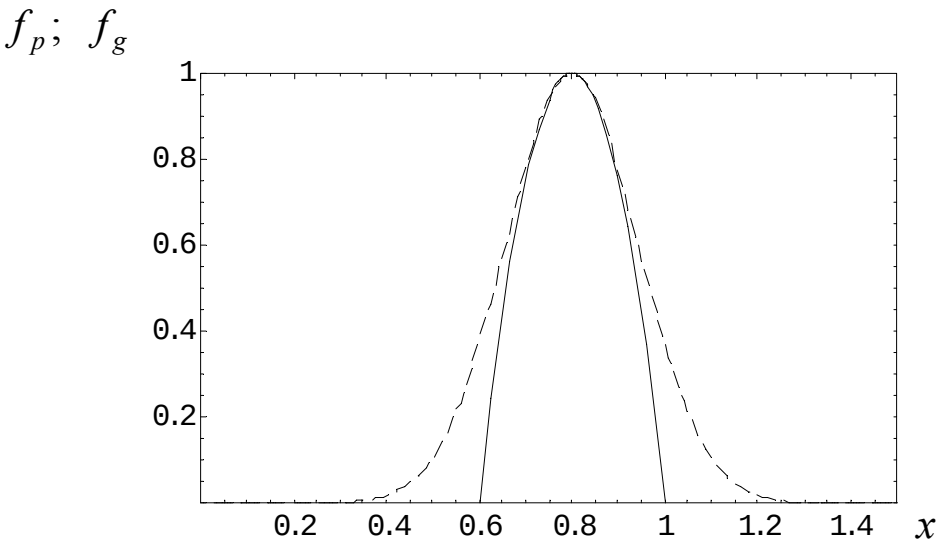


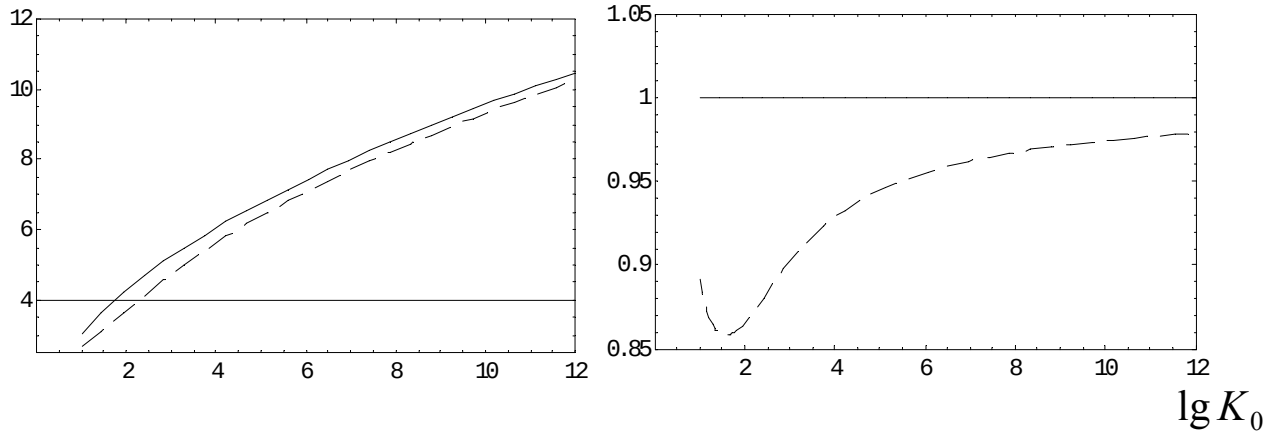
Рис.49

На рис.50а-б приведены функции $\tau_{corr}^{out}(\lg K_0)$ для контура (63) по той же схеме, что и на рис.38,44.

_____ - аппроксимация (39) $\tilde{l}^{\,p} = \sqrt{\dfrac{\ln K_0}{2\pi}}\,\dfrac{1}{1-x_0}$

_ _ _ _ - численный расчет для (63) по формуле (38).

$\tilde{l} = \dfrac{2}{\pi}\Delta\omega\tau_{corr}^{out}$ $\qquad$ $\tilde{l}\,/\,\tilde{l}^{\,p} = \left(\tau_{corr}^{out}\right)/\left(\tau_{corr}^{out}\right)^p = s/\mu_0$



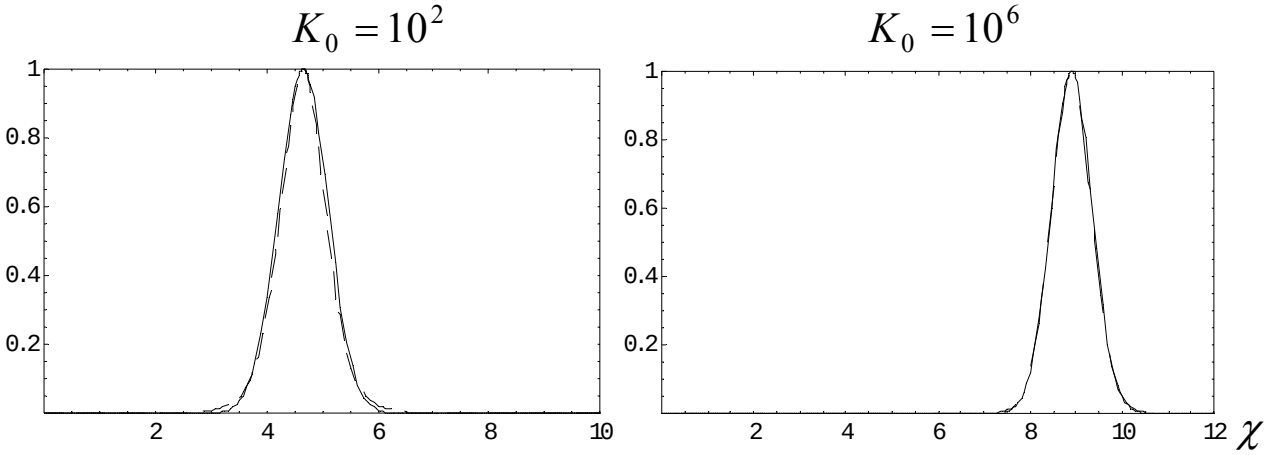
(а) **(б)**

Рис.50

Оценка μ_0 для контура (63) по (37) дает значение более чем на порядок большее, чем при $x_0 = 0{,}25$, - $\mu_0 = \sqrt{8\pi\ln K_0} \cong 7{,}61\sqrt{\lg K_0}$. А процентное отличие s от μ_0 на рис.50б близко к рис.44б. Поэтому использование в приближениях μ_0 из (37) вместо s для f_g привело бы к еще большему расхождению точных и приближенных функций F, γ_0, $2\pi\Gamma_0/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi(0,\eta)$. Функции (7-9) для f_g также считались при $K_0 = 10 \div 10^9$; приведены графики для $K_0 = 10^2$ и $K_0 = 10^6$. Сплошные линии - параболическая модель; штриховые - численный расчет для (63)

На рис.51 показаны графики $F(\chi)$ (сплошные кривые - формула (25)). На рис.52 - графики $\gamma_0(\xi)$ (сплошные кривые соответствуют (26)). На рис.53 - графики $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$, где опять для расчета сплошных кривых использовано выражение (20а), поскольку условие (27) выполняется при $K_0 \geq 10^2$. На рис.54а-г приведены графики $\Phi(0,\eta)$. Сплошные кривые рассчитывалась по формуле (30). Совпадение численных расчетов и приближенных функций при $K_0 \geq 10^2$ здесь еще лучше, чем для двух предыдущих x_0.

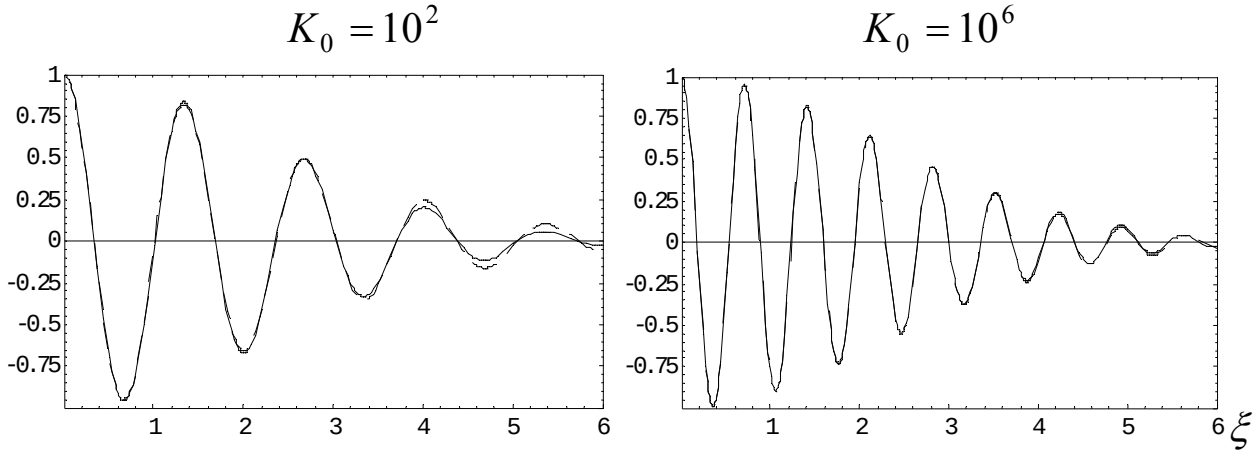
Функция $F(\chi)$



(а) **(б)**

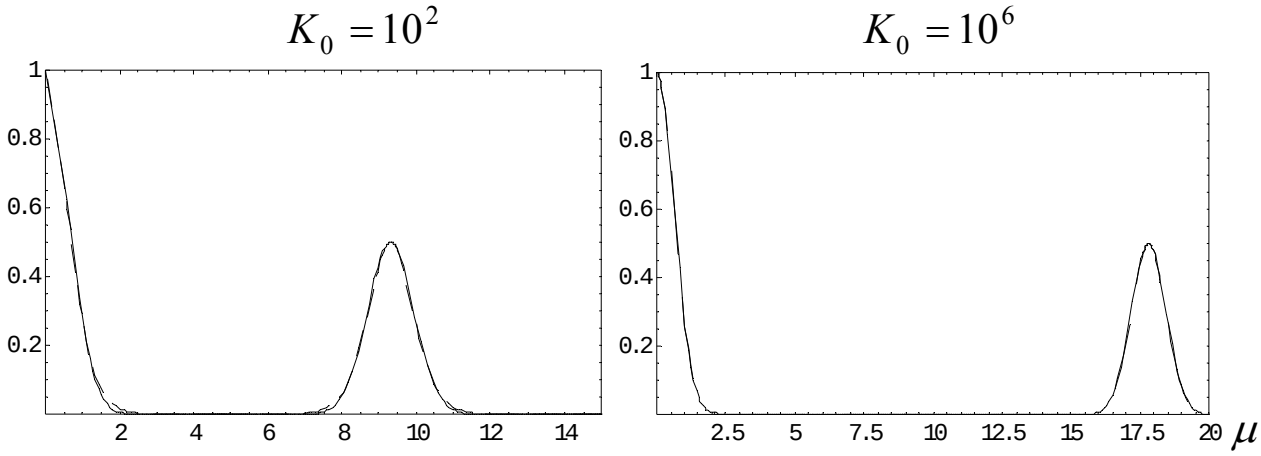
Рис.51

Функция $\gamma_0(\xi)$



(а) **Рис.52** **(б)**

Функция $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$



(а) **Рис.53** **(б)**

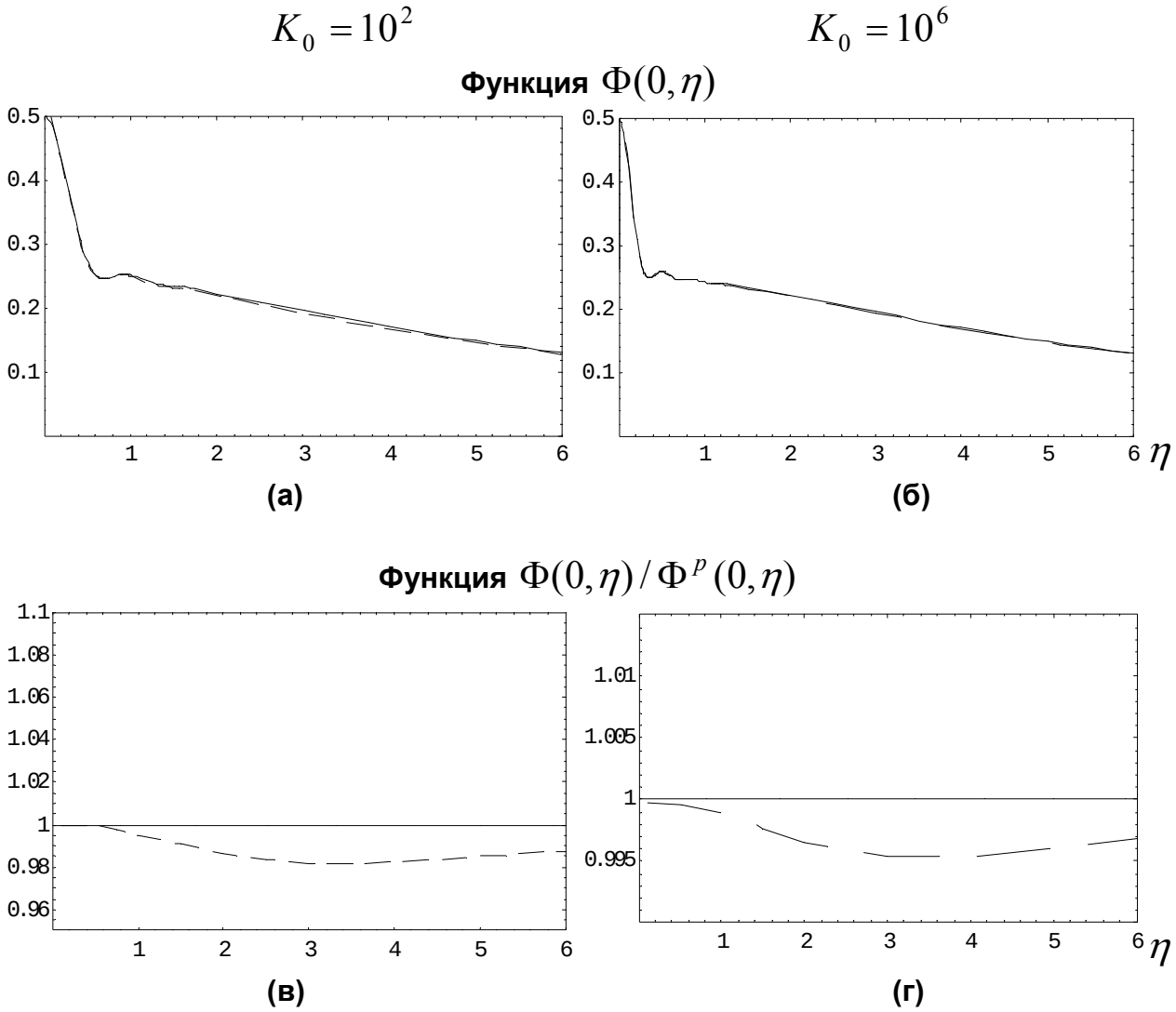


Рис.54

Итак, мы сравнили функции (7-9) для реальных контуров, допускающих параболическую аппроксимацию в области максимумов, и для соответствующих контуров параболической модели и получили очень хорошее совпадение всех кривых, позволяющее использовать аналитические выражения параболической модели для описания статистических характеристик реальных контуров. Расчеты показывают, что с контурами, допускающими треугольную аппроксимацию, дело обстоит аналогично. Собственно, сама треугольная модель (раздел III) и является наиболее естественным приближенным контуром такого типа. И тот факт, что нормированные функции (7-9) для такой модели мало отличаются от соответствующих функций параболической модели, говорит об универсальности предложенной методики их описания вне зависимости от поведения функции в области максимума. Мы также показали, что в качестве параметра приближенных функций обеих моделей необходимо использовать не μ_0 - комбинацию (37) или (46) из x_0, ε и K_0, а близкий ему, но все же слегка отличающийся по величине даже для модельных контуров (12) и (41), и уж тем более для реальных контуров, параметр s, определенный согласно (40).

V. Переход между моделями “одногорбого” и “двугорбого” контуров

Два полученных набора универсальных функций кроме аргументов зависят от трех характеристик контура - τ_{corr}^{out} (10) (на нее происходит нормировка - см.(5-6,8)), параметра асимметрии “горба” ε (см.(14)) и величины s (см.(40)), используемой вместо μ_0 и равной удвоенной частотной отстройке максимума “горба” от центра контура (расстоянию между “горбами”), тоже нормированной на τ_{corr}^{out}.

Реальный “двугорбый” контур обычно хорошо аппроксимируется с помощью модели с $\varepsilon = 1$. Тогда любая аппроксимационная формула не содержит других характеристик контура, кроме s. Величина τ_{corr}^{out} явно в формулах не присутствует, но ее необходимо знать, чтобы вернуться к размерным переменным. Далее в этом разделе ограничимся случаем $\varepsilon = 1$. Аналитические выражения при $\varepsilon = 1$ проще, их имеется 2 полных набора, одинаково хорошо работающих. Параболическая модель более физична - нет разрыва производной в максимуме, по простоте полученные формулы мало отличаются друг от друга (см. (26) и (57), (20а) и (58)), (36) и (60)), а для $\Phi(\xi, \eta)$ выражения (59-60) для треугольной модели хотя и проще (29-30) для параболической, но последние могут быть существенно упрощены без заметной потери точности до (36) при $\xi = 0$ и аналогично по формуле (24) при $\xi \neq 0$. Ниже мы покажем, что функции $\Phi(\xi, \eta)$ треугольной модели непригодны для предельного перехода к функциям “одногорбых” контуров.

Рассмотрение нами “двугорбого” контура было построено на аналогии и обобщении “одногорбого”. Поэтому и результаты изложены как подобие функций соответствующим универсальным функциям от безразмерных аргументов (5-6) с дополнительной зависимостью от параметра s. Мы уже говорили вначале, что “одногорбый” контур вполне определен для наших целей поиска подобия одной характеристикой - своей шириной, а “двугорбый” - двумя независимыми характеристиками: шириной “горбов” и расстоянием между ними. Поэтому в первом случае τ_{corr}^{out} оказалось достаточно для описания контура, а во втором для этого нужен еще и s. Новая степень свободы привела к появлению параметра в универсальных функциях. Но на s можно взглянуть по-другому - как на дополнительный аргумент функций, аналогичный (5-6), поскольку он тоже является физической величиной - частотным расстоянием между “горбами”, нормированным на τ_{corr}^{out}. Тогда “одногорбый” контур есть просто частный случай “двугорбого” при $s = 0$. А τ_{corr}^{out} - по-прежнему параметр нормировки всех аргументов и функции $\Gamma_0(\mu)$. Таким образом, для “двугорбых” контура просто на единицу увеличивается пространство независимых аргументов универсальных функций. Собственно, аргумент s ничем не отличается в этом плане от аргумента η в (5). Оба эти аргумента (и s, т.е. нормированный частотный сдвиг $2(\omega_{\max} - \omega_0)$ - см.(40), и η, т.е. нормированное время усреднения квантового шума τ_e) выступают в рассматриваемых статистических функциях не как временные или частотные аргументы этих функций, а, скорее, как

параметры, характеризующие экспериментальные условия. Они неизменны для заданных экспериментальных условий, в отличие от τ, ω и Ω, которые меняются в широком диапазоне. Одним из замечательных результатов данной работы можно считать тот факт, что рассматриваемые статистические функции принимают полностью универсальный вид, если **все** аргументы и параметры, от которых они зависят, временной и частотной размерности, равно как и сами функции, если они не безразмерны, а имеют временную или частотную размерность, нормировать на τ_{corr}^{out}.

Итак, рассмотрим s как дополнительный аргумент. Чтобы он был полноценным аргументом, необходимо полученные функции правильно определить для всех допустимых значений s, в том числе в переходной области $s \to 0$ от "двугорбого" контура к "одногорбому" и в пределе $s = 0$ (соответствующего $x_0 = 0$ - "одногорбому" контуру). Переход от формул "двугорбого" контура к формулам "одногорбого" должен происходить при $s \to 0$ и $\varepsilon = 1$ (в формулах вместо s стоит μ_0, соответственно, надо рассматривать $\mu_0 \to 0$). Мы уже отмечали, что при этом выражения (25,56) для $F^{p,t}(\chi)$ и (26,57) для $\gamma_0^{p,t}(\xi)$ переходят в соответствующие выражения для "одногорбых" контуров с сжатием по оси χ и растяжением по ξ в 2 раза. То же самое и в отношении формул (20) и (48) для $2\pi\Gamma_0^{p,t}(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ - они переходят в формулы для "одногорбых" контуров с сжатием в 2 раза по μ и одновременным увеличением в 2 раза самих функций. И, наконец, если в (29-30) для $\Phi^p(\xi,\eta)$ положить $\mu_0 = 0$, а вместо (59-60) для $\Phi^t(\xi,\eta)$ взять интегралы по формуле (9) от (48) при $\mu_0 = 0$ и $\varepsilon = 1$, то мы опять в точности получим выражения для "одногорбых" контуров, растянутые в 2 раза по ξ и η. (Если подставить $\mu_0 = 0$ непосредственно в (59-60), то полученные функции кроме растяжения будут отличаться от функций "одногорбого" треугольного контура по виду, что и понятно - вторая половина (59-60) выводилась в предположении $\mu_0 >> 1$. Интересно, однако, что полученные таким образом функции принципиально отличаются от функций параболической модели - они совсем не близки функциям "одногорбого" треугольного контура, растянутым в 2 раза по ξ и η, а практически не отличаются от них без всякого растяжения). Итак, формально полагая в приведенных выше формулах $\mu_0 = 0$, мы получим переход к функциям "одногорбых" контуров, но с растяжением (или сжатием) в 2 раза по аргументам плюс увеличение значений функций $2\pi\Gamma_0^{p,t}(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ в 2 раза. Поскольку точные функции (в том числе и для модельных контуров), численно рассчитанные по (1-3,11), с аргументами, нормированными на численно же рассчитанное по формуле (10) τ_{corr}^{out}, подобны универсальным именно в том виде, как описано в работах [1-3] и предыдущих главах данной работы, а переход между ними не должен иметь особенностей, то полученный скачок является следствием сделанных упрощений, а не имеет место в реальности.

В реальности должен существовать плавный переход между двумя группами нормировок.

Скачок в формулах для модельных контуров возник из-за способа упрощения выражений при выполнении условия $K_0 >> 1$. При выводе формул для четко выраженной “двугорбой” структуры предполагалось также выполнение условия $x_0\sqrt{\ln K_0} >> 1$ для параболической модели и $x_0 \ln K_0 >> 1$ для треугольной. В переходной же области $x_0 \to 0$ это предположение неверно, а при $x_0 = 0$ соответствующие слагаемые вообще отсутствуют. Снятие предположения $x_0\sqrt{\ln K_0} >> 1$ ($x_0 \ln K_0 >> 1$) изменит как приближенные выражения для τ_{corr}^{out} (10) у модельных контуров, так и приближенные выражения для функций.(7-9,11).

Начнем с τ_{corr}^{out}. Для обоих моделей (38) позволяет точно рассчитать $\tau_{corr}^{out}(K_0, x_0, \varepsilon)$. При $x_0 \le 0{,}5$ и $\varepsilon = 1$ это дает

$$\left(\tau_{corr}^{out}\Delta\omega\right)^p = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}\ln K_0}}{1-x_0}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{l}\mathrm{erf}\left(\frac{x_0}{1-x_0}\sqrt{2\ln K_0}\right)+\mathrm{erf}\sqrt{2\ln K_0}-\\ -\frac{2\sqrt{2}}{K_0}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{x_0}{1-x_0}\sqrt{\ln K_0}\right)+\mathrm{erf}\sqrt{\ln K_0}\right]+\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\ln K_0}}{\sqrt{\pi}K_0^2(1-x_0)}\end{array}\right\}}{\left\{\mathrm{erf}\left(\frac{x_0}{1-x_0}\sqrt{\ln K_0}\right)+\mathrm{erf}\sqrt{\ln K_0}-\frac{2\sqrt{\ln K_0}}{\sqrt{\pi}K_0^2(1-x_0)}\right\}^2} \quad (64);$$

$$\left(\tau_{corr}^{out}\Delta\omega\right)^t = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln K_0}{1-x_0}\cdot\frac{\left\{1-\frac{4}{K_0}+\frac{3}{2K_0^2}-\frac{1}{2\cdot K_0^{2\frac{x_0}{1-x_0}}}+\frac{2}{K_0^{1+\frac{x_0}{1-x_0}}}+\frac{\ln K_0}{K_0^2(1-x_0)}\right\}}{\left\{2-\frac{1}{K_0}-\frac{1}{K_0^{\frac{x_0}{1-x_0}}}-\frac{\ln K_0}{K_0(1-x_0)}\right\}^2} \quad (65).$$

Выражения (39,47) для τ_{corr}^{out}, использованные выше, получены из (64-65) при $K_0 >> 1$ и $x_0 > 0$ в дополнительном предположении $x_0\sqrt{\ln K_0} >> 1$ или $x_0 \ln K_0 >> 1$. Если же сразу положить $x_0 = 0$, то значения τ_{corr}^{out} при $K_0 >> 1$ окажутся ровно в 2 раза больше (ср. с (18,24) в [3]), что и соответствует, согласно (5-6), растяжению функций с аргументами ξ и η и сжатию функции с аргументами

μ и χ по осям в 2 раза. Вдобавок функция (8), тоже нормированная на τ_{corr}^{out}, оказывается нормированной на 2 в нуле аргумента, а не к единице. Именно для того, чтобы в этом случае для $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ аккуратно провести предельный переход, мы вернулись от (20а,58) к более точным формулам (20,48), содержащим равноправные боковые максимумы в положительной и отрицательной областях аргументов, которые при $\mu_0 \to 0$ сливаются с основным максимумом, удваивая его величину. Поэтому при формальном предположении $\mu_0 \to 0$ в (20) и (48) (при $\varepsilon = 1$) функция $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ отличается от соответствующей функции “одногорбого” контура сжатием в 2 раза по оси абсцисс и таким же растяжением по оси ординат. Итак, использованный нами способ упрощения выражений (64-65) при $K_0 >> 1$ привел при $\mu_0 \to 0$ к ошибочному скачку в τ_{corr}^{out} в 2 раза.

Если же в (64-65) не предполагать, что $x_0\sqrt{\ln K_0} >> 1$ ($x_0 \ln K_0 >> 1$), то при $K_0 >> 1$ они перейдут не в (39,47) (при $\varepsilon = 1$), а примут вид

$$\left(\tau_{corr}^{out}\Delta\omega\right)^p \overset{K_0>>1}{\cong} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}\ln K_0}}{1-x_0}\cdot\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{1-x_0}\sqrt{2\ln K_0}\right)+1}{\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{1-x_0}\sqrt{\ln K_0}\right)+1\right\}^2},$$

$$\left(\tau_{corr}^{out}\Delta\omega\right)^t \overset{K_0>>1}{\cong} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln K_0}{1-x_0}\cdot\frac{1-\frac{1}{2\cdot K_0^{2\frac{x_0}{1-x_0}}}}{\left\{2-\frac{1}{K_0^{\frac{x_0}{1-x_0}}}\right\}^2},$$

откуда, принимая во внимание выражения (37) и (46) для μ_0, получим

$$\left(\tau_{corr}^{out}\Delta\omega\right)^p \overset{K>>1}{\cong} \left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}\ln K_0}}{2(1-x_0)}\right)\cdot 2\frac{1+\operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mu_0\right)}{\left\{1+\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu_0\right)\right\}^2} = \left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}\ln K_0}}{2(1-x_0)}\right)\cdot P(\mu_0); \qquad (66)$$

$$\left(\tau_{corr}^{out}\Delta\omega\right)^{t} \overset{K_0>>1}{\cong} \left(\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\ln K_0}{1-x_0}\right)\cdot 2\frac{2-\exp\left[-\frac{8}{\pi}\mu_0\right]}{\left\{2-\exp\left[-\frac{4}{\pi}\mu_0\right]\right\}^2} = \left(\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\ln K_0}{1-x_0}\right)\cdot T(\mu_0). \qquad (67)$$

Для удобства дальнейших ссылок перепишем выражения (37) и (46) для μ_0 при $\varepsilon = 1$. Из (37) тогда для параболической модели получим

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{x_0}{1-x_0}\sqrt{\ln K_0}, \qquad (68)$$

и из (46) для треугольной -

$$\mu_0 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{x_0}{1-x_0}\ln K_0. \qquad (69)$$

Выражения (66-67) являются произведениями двух сомножителей. Первые равны (39) и (47), т.е. полученным выше $\tau_{corr}^{out}\Delta\omega$ “двугорбых” контуров. А вторые зависят лишь от μ_0 и при изменении μ_0 от 0 до ∞ меняются от 2 до 1, тем самым обеспечивая необходимый переход от (39,47) к выражениям (18,24) работы [3]. Реально, как видно из рис.55, переход укладывается в диапазон $\mu_0 \in [0;2]$ (сплошная кривая - $P(\mu_0)$, штриховая - $T(\mu_0)$).

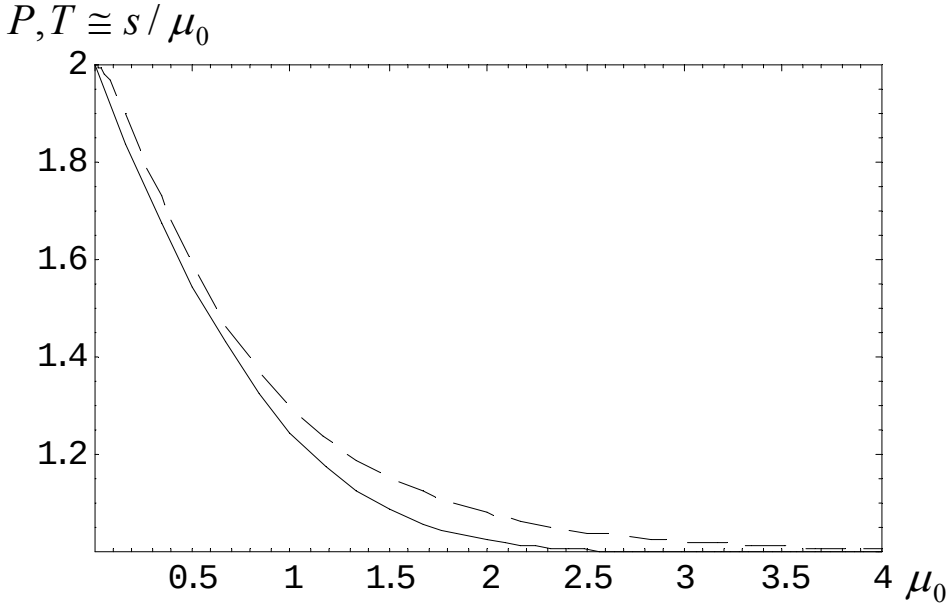


Рис.55

Из формул (66-67) и (68-69) вытекают соотношения для s и μ_0, соответственно, для параболической и треугольной моделей

$$s \cong \mu_0 P(\mu_0); \qquad (70)$$

$$s \cong \mu_0 T(\mu_0). \qquad (71)$$

Т.е. множители $P,T(\mu_0)$ приближенно равны отношению s к μ_0 для модельных контуров во всем диапазоне их изменения, включая $s = \mu_0 = 0$. Соотношения (70-71) определяют и обратные функции $\mu_0(s)$, которые, однако, для обеих моделей не выражаются аналитически.

На рис.56 приведены при $K_0 = 10^2$ и $K_0 = 10^3$ точные и приближенные, согласно (66-67), значения $(\tau_{corr}^{out}\Delta\omega)^{p,t}$, показывающие, сколь удачны приближения (66-67) в переходной области. Кривые приведены в зависимости от x_0 ($x_0 \le 0{,}5$), связанной с μ_0 формулами (68-69). Сплошные кривые везде - функции (64-65). Кривые с короткими штрихами - расчет по формулам (66-67). А кривые с длинными штрихами - тоже расчет по формулам (66-67), где, однако, в качестве аргументов P и T вместо μ_0 взяты s с использованием точных значений $(\tau_{corr}^{out}\Delta\omega)^{p,t}$ из (64-65).

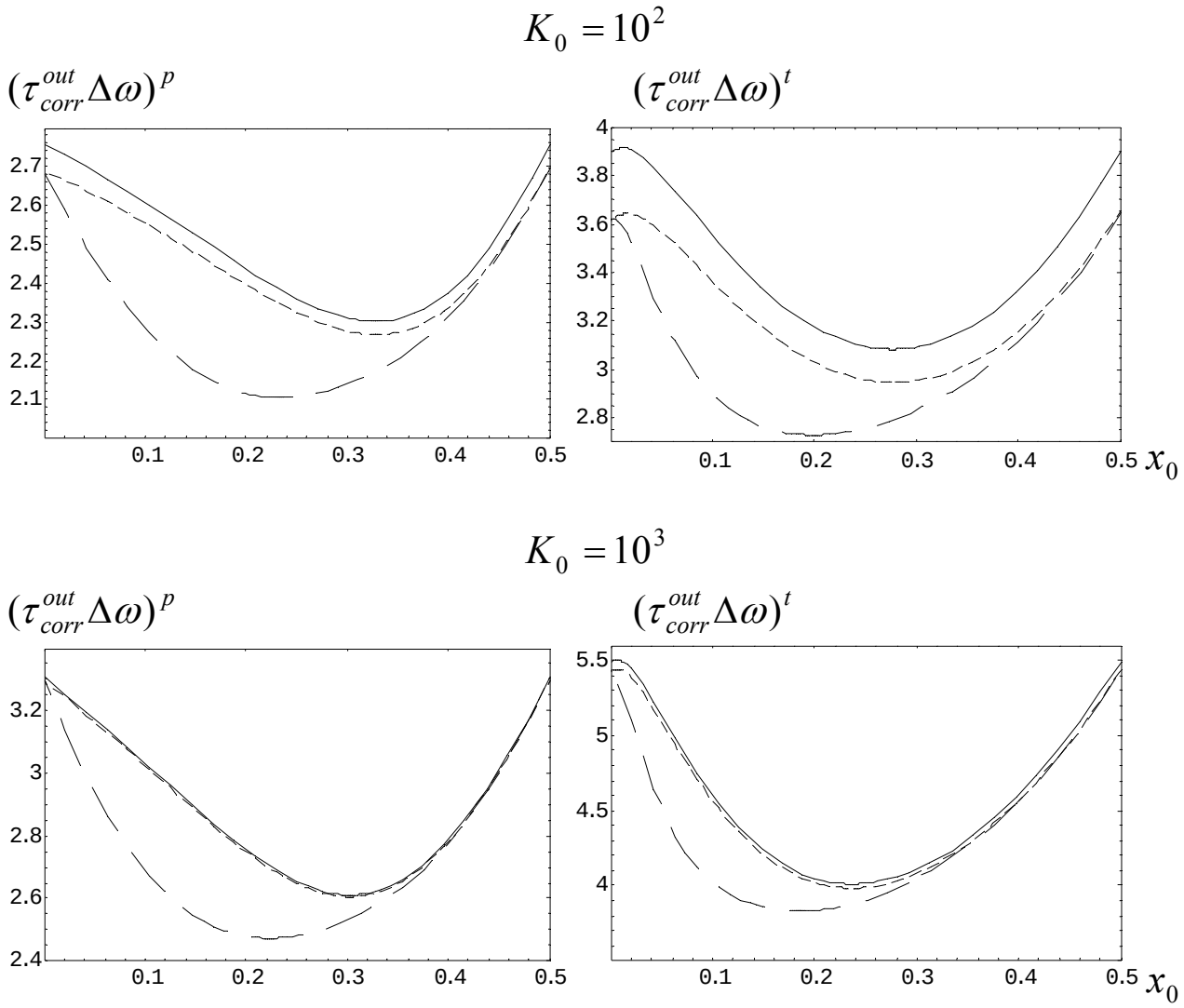


Рис.56

Видно, что при $K_0 > 10^2$ и $x_0 \geq 0{,}4$ почти нет различия между всеми тремя функциями. Функции (66-67) мало отличаются от (64-65) уже при $K_0 \geq 10^2$ во всем диапазоне изменения x_0. Замена же в (66-67) μ_0 на s приводит к заметному отличию $(\tau_{corr}^{out}\Delta\omega)^{p,t}$ при $x_0 < 0{,}4$ (т.е. $\mu_0 \leq 2-3$) даже при больших значениях K_0.

В переходной области отличие μ_0 от s возрастает до двух раз. Мы уже отмечали, что и вне переходной области при $s \cong \mu_0 > 2$ s и μ_0 слегка различаются. Замечательный результат данной работы как раз в том и заключается, что в полученных упрошенных формулах для обоих моделей при $\mu_0 > 2$ мы заменили μ_0 на s и именно тогда получили наилучшее совпадение для всех функций точных и универсальных кривых для различных типов контуров, включая модельные, и даже при совсем уж небольших значениях K_0. Теперь, когда мы установили, что при $\mu_0 \to 0$ связь $s \cong \mu_0$ не сохраняется ($s/\mu_0 \to 2$), тем более будем стремиться описать переход к “одногорбому” случаю при выполнении условия $s \to 0$, используя как новый параметр именно s, имеющий прозрачный смысл для любого контура. К вопросу перехода от μ_0 к s вернемся позже, а сейчас рассмотрим поправки функций (7-9,11) в переходной области как функции μ_0.

Уже использование (66-67) вместо (39,47) позволяет получить переход всех функций от “двугорбого” контура к “одногорбому”, т.е. от результатов настоящей работы к результатам работ [1-3]. Для этого необходимо в полученных формулах для функций (7-9,11) вместо (5-6) использовать аргументы (5), умноженные на $P(\mu_0)$ или $T(\mu_0)$, и (6), деленные на $P(\mu_0)$ или $T(\mu_0)$. Например,

$$\xi \to \xi \cdot P(\mu_0); \quad \eta \to \eta \cdot P(\mu_0);$$
$$\mu \to \mu / P(\mu_0); \quad \chi \to \chi / P(\mu_0).$$

Плюс на тот же множитель надо поделить функцию (20). Для $T(\mu_0)$ аналогично, а делить надо функцию (48) при $\varepsilon = 1$. Мы уже отмечали, что (20) и (48) при малых μ_0 не равны единице в нуле аргумента, как это должно быть согласно (8). Нормировка на $P, T(\mu_0)$ не обеспечивает точную единицу, но заметно улучшает ситуацию. На рис.57а показаны в зависимости от μ_0 значение (20) в нуле аргумента, равное $1 + \exp\left[-4\mu_0^2/\pi\right]$ (штриховая кривая), и отношение этого выражения к $P(\mu_0)$ (сплошная кривая), и аналогично на рис.57б - значение (48) при $\varepsilon = 1$ в нуле аргумента, равное $1 + (1 + 8\mu_0/\pi)\exp\left[-8\mu_0/\pi\right]$, и его отношение к $T(\mu_0)$. Единичные прямые оси ординат приведены для удобства сравнения. Видно, что

отличие от единицы отношений функций (20) к $P(\mu_0)$ и (48) к $T(\mu_0)$ в нуле аргумента мало́ при любых μ_0 и почти исчезает при $\mu_0 \geq 2$.

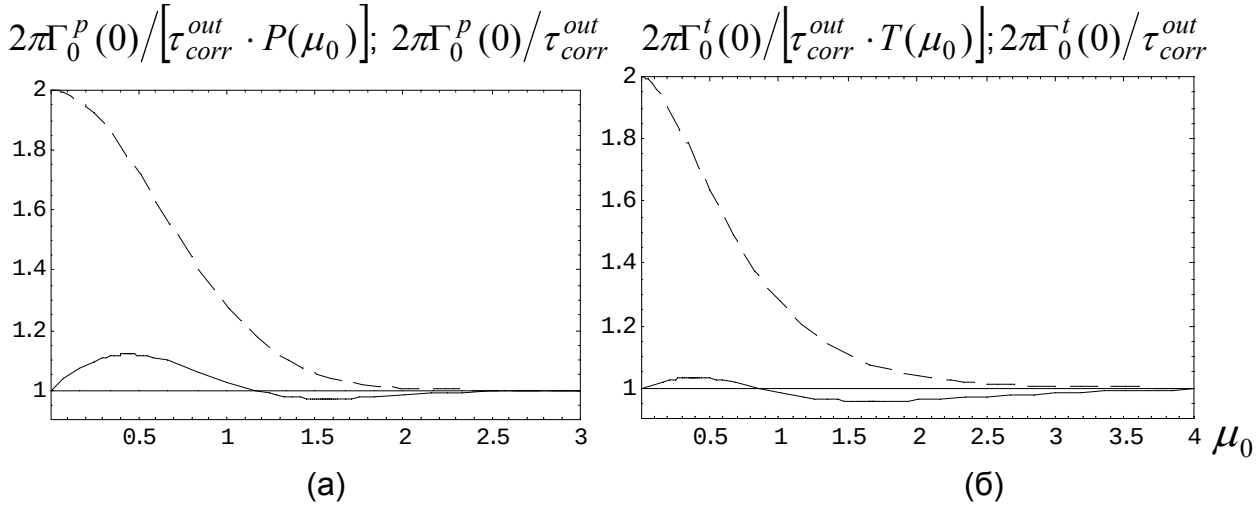


Рис.57

Реально поправки (66-67) необходимо использовать лишь в переходной области $\mu_0 \in (0,2)$. При $\mu_0 = 0$ и $\mu_0 > 2$ можно пользоваться прежними выражениями. С поправками (66-67) μ_0 становится равноправным аргументом функций во всем диапазоне своего изменения.

Учет конечности значений $x_0\sqrt{\ln K_0}$ и $x_0 \ln K_0$ при $K_0 >> 1$ меняет не только упрощенные выражения для τ_{corr}^{out}, но и для всех функций (7-9,11). В них в переходной области $\mu_0 \in (0,2)$ будут как изменения, связанные с поправками аргументов, так и дополнительные изменения. Выражения $x_0\sqrt{\ln K_0}$ и $x_0 \ln K_0$ можно связать с μ_0 согласно формулам (68-69).

Подстановка (66-67) в (11) для функций $F(\chi)$ при $x_0 \leq 0{,}5$ и допустимые при $K_0 >> 1$ упрощения в переходной области μ_0 дают для параболической модели (аргумент χ по-прежнему определен согласно (6) с τ_{corr}^{out} из (66-67))

$$F^p(\chi) \cong \exp\left[-\frac{8}{\pi}\left(\frac{\chi}{P(\mu_0)} - \frac{\mu_0}{2}\right)^2\right] \tag{72}$$

и для треугольной

$$F^t(\chi) \cong \exp\left[-\frac{8}{\pi}\left|\frac{\chi}{T(\mu_0)} - \frac{\mu_0}{2}\right|\right]. \tag{73}$$

Отличия от (25) и (56), как видно, лишь в поправках за счет τ_{corr}^{out} из (66-67).

Если подставить (66-67) в (7) и допустить конечность значений $x_0\sqrt{\ln K_0}$ и $x_0 \ln K_0$ при $K_0 >> 1$, то для функций $\gamma_0(\xi)$ при $x_0 \le 0{,}5$ получим теперь для параболической модели

$$\gamma_0^p(\xi) \overset{K_0>>1}{\cong} \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{32}(\xi P(\mu_0))^2\right)\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\xi\frac{\mu_0 P(\mu_0)}{2}\right)\cdot\left[\mathrm{Re}(\mathrm{erf}\, a_1)+\mathrm{Re}(\mathrm{erf}\, a_2)\right]- \\ -\sin\left(\xi\frac{\mu_0 P(\mu_0)}{2}\right)\cdot\left[\mathrm{Im}(\mathrm{erf}\, a_1)+\mathrm{Im}(\mathrm{erf}\, a_2)\right]\end{array}\right\}}{1+\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu_0\right)},$$

$$a_1 = \sqrt{\ln K_0} - i\sqrt{\frac{\pi}{32}}\xi P(\mu_0); \quad a_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu_0 - i\sqrt{\frac{\pi}{32}}\xi P(\mu_0); \tag{74}$$

и для треугольной модели

$$\gamma_0^t(\xi) \overset{K_0>>1}{\cong} \frac{\cos\left(\xi\frac{\mu_0 T(\mu_0)}{2}\right)-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{4}{\pi}\mu_0\right)}{\left[1+\left(\frac{\pi}{8}\xi T(\mu_0)\right)^2\right]\cdot\left[1-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{4}{\pi}\mu_0\right)\right]}. \tag{75}$$

Здесь также ξ определено согласно (5) с τ_{corr}^{out} из (66-67). Заметим, что в отличие от (72-73) выражения (74-75) заметно по виду отличаются от (26,57), в которых вместо ξ стоит $\xi P(\mu_0)$ или $\xi T(\mu_0)$. В особенности усложнилось выражение (74) для параболической модели. При $s \cong \mu_0 > 2$ (74-75) с хорошей точностью переходят в (26,57). В численных расчетах мы рассмотрели отличие (74) от (26) с заменой ξ на $\xi P(\mu_0)$ и отличие (75) от (57) с заменой ξ на $\xi T(\mu_0)$ во всей переходной области $\mu_0 \in [0,2]$. Отличие оказалось небольшим.

На рис.58 при разных $\mu_0 \in [0,2]$ в зависимости от ξ сравниваются функции (74) (сплошные кривые) и (26) с заменой ξ на $\xi P(\mu_0)$

$$\gamma_0^p(\xi) \cong \exp\left(-\frac{\pi}{32}(\xi P(\mu_0))^2\right)\cos\left(\xi\frac{\mu_0 P(\mu_0)}{2}\right) \tag{76}$$

(штриховые линии). Поскольку (74) зависит еще и от K_0, для расчетов взято довольное малое его значение - $K_0 = 10^2$; для бóльших K_0 различия кривых меньше. Следует отметить, что малым оказалось именно отличие всей функции (74) от (76), а не отличия коэффициента при косинусе в числителе от единицы и коэффициента при синусе от нуля или в сумме отличие выражения в фигурных скобках, деленного на знаменатель, от косинуса. В них-то как раз наблюдается заметное от-

личие в диапазоне $\mu_0 \in [0,2]$, да и за его пределами тоже. Рис.58 доказывает, что для параболической модели можно пользоваться выражением (76) вместо (74) в переходной области

$$K_0 = 10^2$$

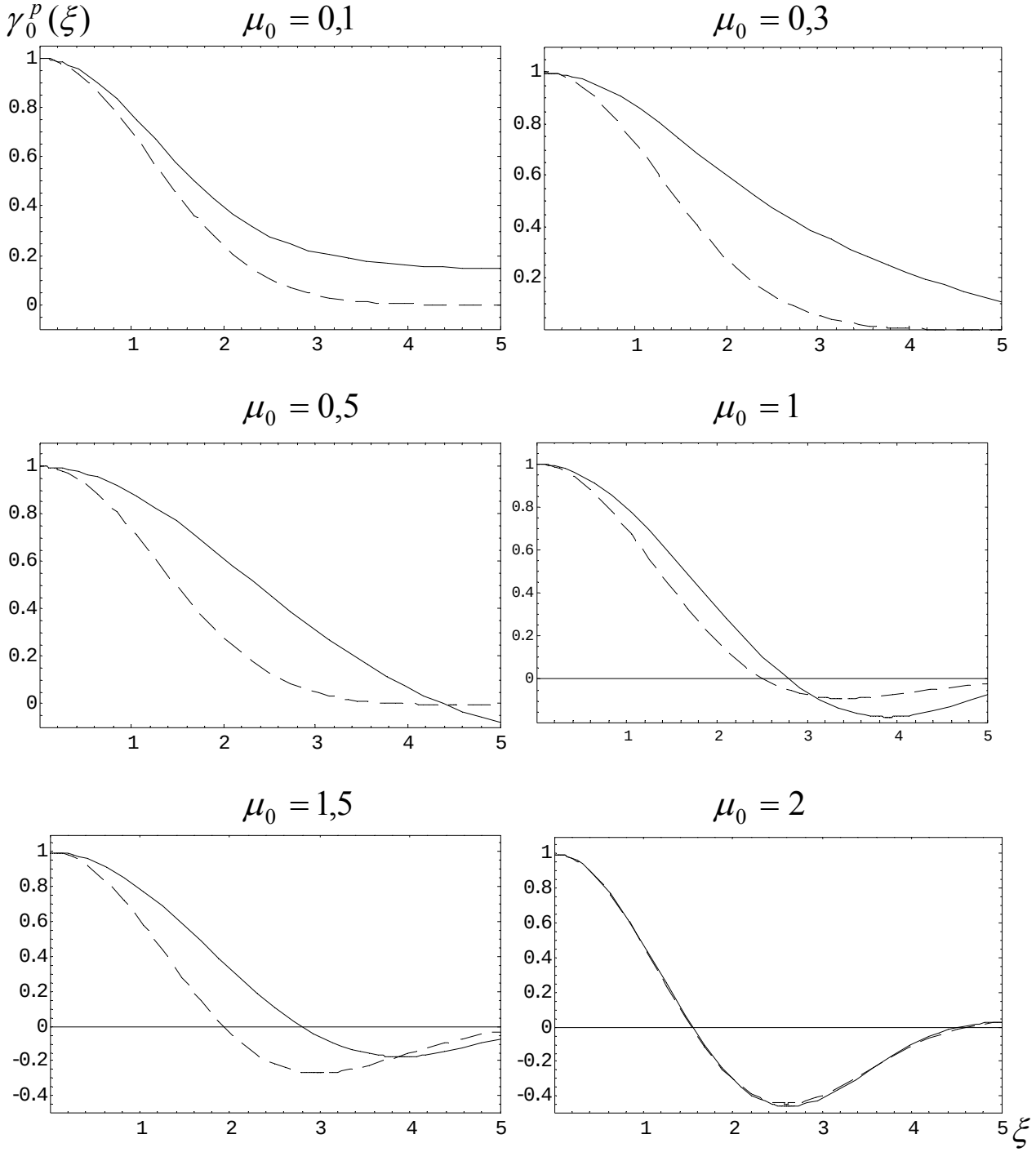


Рис.58

На рис.59, аналогичном рис.58, но для треугольной модели, сравниваются функции (75) (сплошные кривые) и (57) с заменой ξ на $\xi T(\mu_0)$

$$\gamma_0^t(\xi) \cong \cos\left(\xi \frac{\mu_0 T(\mu_0)}{2}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{8}\xi T(\mu_0)\right)^2} \tag{77}$$

(штриховые линии). В (75) нет зависимости от K_0 и это сравнение подходит для любых K_0. Рис.59 в еще большей степени, чем рис.58, доказывает возможность использования в переходной области выражения (77) вместо (75).

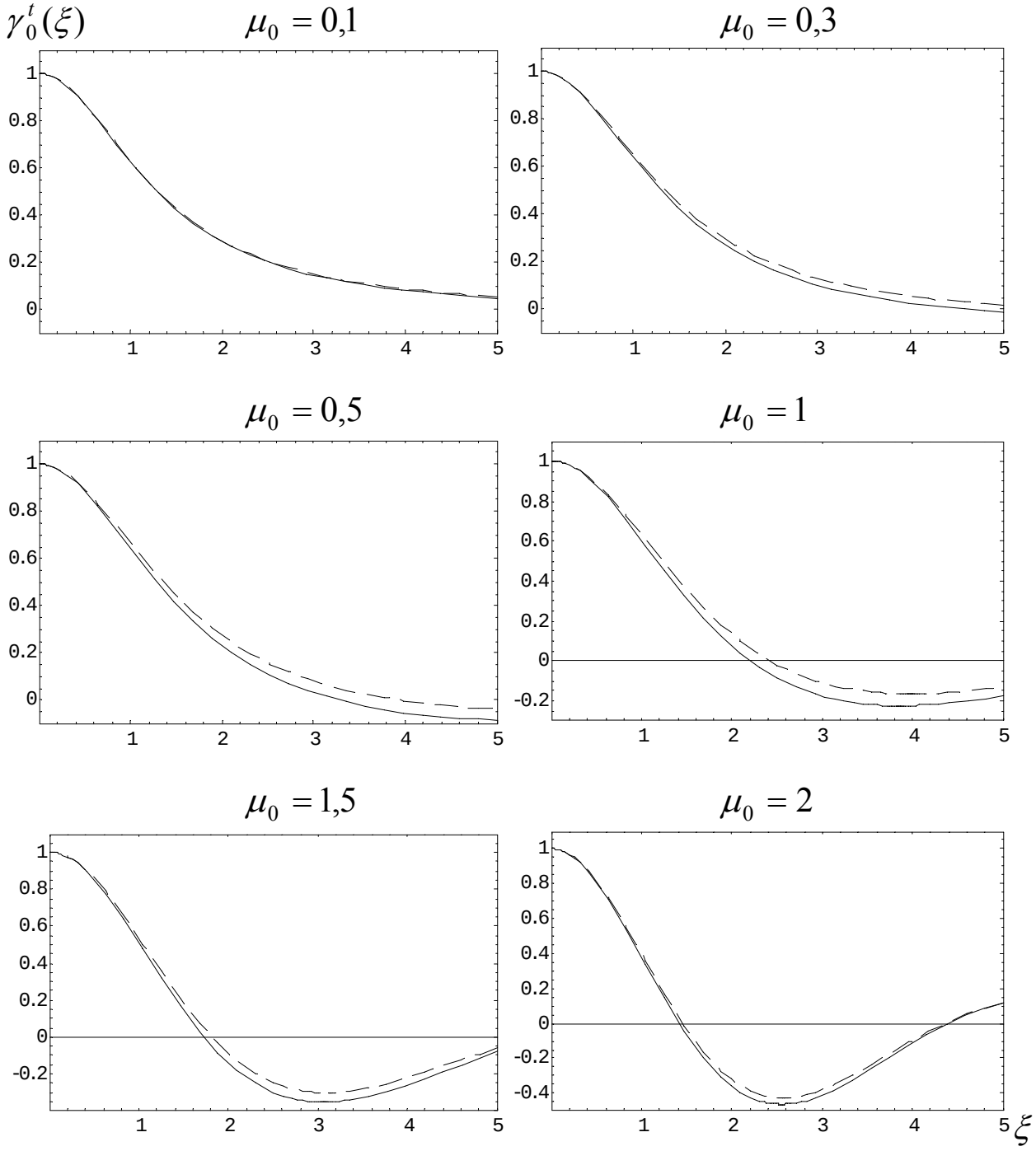


Рис.59

Функцию $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ параболической модели не удается рассчитать через более точную функцию (74). В этом случае можно лишь взять интеграл согласно второму равенству в (8) от упрощенной функции (76) Тогда получим

$$\frac{2\pi\Gamma_0^p(\mu)}{\tau_{corr}^{out}} \cong \frac{1}{P(\mu_0)}\left\{\exp\left(-\frac{4\left(\frac{\mu}{P(\mu_0)}\right)^2}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\left[\exp\left(-\frac{4\left(\frac{\mu}{P(\mu_0)}-\mu_0\right)^2}{\pi}\right)+\exp\left(-\frac{4\left(\frac{\mu}{P(\mu_0)}+\mu_0\right)^2}{\pi}\right)\right]\right\}, \quad (78)$$

что соответствует (20) с заменой μ на $\mu/P(\mu_0)$, деленному на $P(\mu_0)$.

Для треугольной модели интеграл от (75), рассчитанный согласно второму равенству в (8), дает

$$\frac{2\pi\Gamma_0^t(\mu)}{\tau_{corr}^{out}} = \frac{2}{2-\exp\left(-\frac{8}{\pi}\mu_0\right)}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\begin{aligned}&\exp\left(-\frac{8\left|\frac{\mu}{T(\mu_0)}-\mu_0\right|}{\pi}\right)\left(1+\frac{8\left|\frac{\mu}{T(\mu_0)}-\mu_0\right|}{\pi}\right)+\\&+\exp\left(-\frac{8\left(\frac{\mu}{T(\mu_0)}+\mu_0\right)}{\pi}\right)\left(1+\frac{8\left(\frac{\mu}{T(\mu_0)}+\mu_0\right)}{\pi}\right)\end{aligned}\right]+\\&+\exp\left(-\frac{8\mu}{\pi T(\mu_0)}\right)\left(1+\frac{8\mu}{\pi T(\mu_0)}\right)\left(1+\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{8}{\pi}\mu_0\right)\right)-\\&-\exp\left(-\frac{4}{\pi}\mu_0\right)\left[\begin{aligned}&\exp\left(-\frac{8\left|\frac{\mu}{T(\mu_0)}-\frac{\mu_0}{2}\right|}{\pi}\right)\left(1+\frac{8\left|\frac{\mu}{T(\mu_0)}-\frac{\mu_0}{2}\right|}{\pi}\right)+\\&+\exp\left(-\frac{8\left(\frac{\mu}{T(\mu_0)}+\frac{\mu_0}{2}\right)}{\pi}\right)\left(1+\frac{8\left(\frac{\mu}{T(\mu_0)}+\frac{\mu_0}{2}\right)}{\pi}\right)\end{aligned}\right]\end{aligned}\right\}. \quad (79)$$

При $\mu_0 = 0; T(0) = 2$ (79) совпадает с (26) из работы [3] для “одногорбого” контура, а при $\mu_0 \cong s >> 1; T(\mu_0) = 1$ - с (58) настоящей работы. И оно отлично от выражения, которое получается из (48) при $\varepsilon = 1$ и замене μ на $\mu/T(\mu_0)$

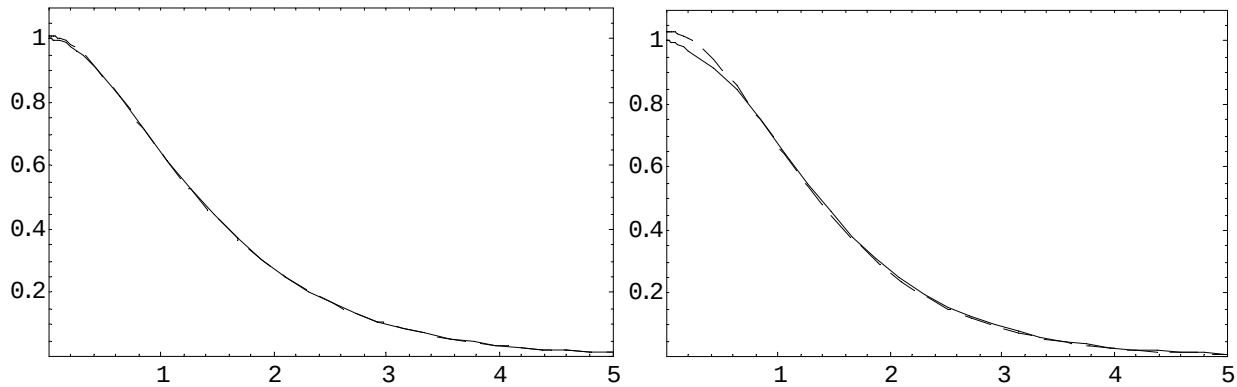
$$\frac{2\pi\Gamma_0^t(\mu)}{\tau_{corr}^{out}} = \frac{1}{T(\mu_0)}\left\{\begin{array}{l}\exp\left(-\dfrac{8\mu}{\pi T(\mu_0)}\right)\left(1+\dfrac{8\mu}{\pi T(\mu_0)}\right)+\\ +\dfrac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\exp\left(-\dfrac{8\left|\dfrac{\mu}{T(\mu_0)}-\mu_0\right|}{\pi}\right)\left(1+\dfrac{8\left|\dfrac{\mu}{T(\mu_0)}-\mu_0\right|}{\pi}\right)+\\ +\exp\left(-\dfrac{8\left(\dfrac{\mu}{T(\mu_0)}+\mu_0\right)}{\pi}\right)\left(1+\dfrac{8\left(\dfrac{\mu}{T(\mu_0)}+\mu_0\right)}{\pi}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}. \quad (80)$$

Отличие (79) от (80) еще и в том, что при $\mu = 0$ (79) тождественно равно единице, как это и должно быть согласно (8). Отличие (78,80) от единицы при $\mu = 0$ было показано на рис.57а-б (сплошные кривые).

На рис.60 приближения (79-80) для $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ сравниваются между собой от μ для различных μ_0 переходной области. Сплошные кривые - функции (79), штриховые - (80). Отличия кривых незначительны.

$\mu_0 = 0{,}1$ $\mu_0 = 0{,}3$

$2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$



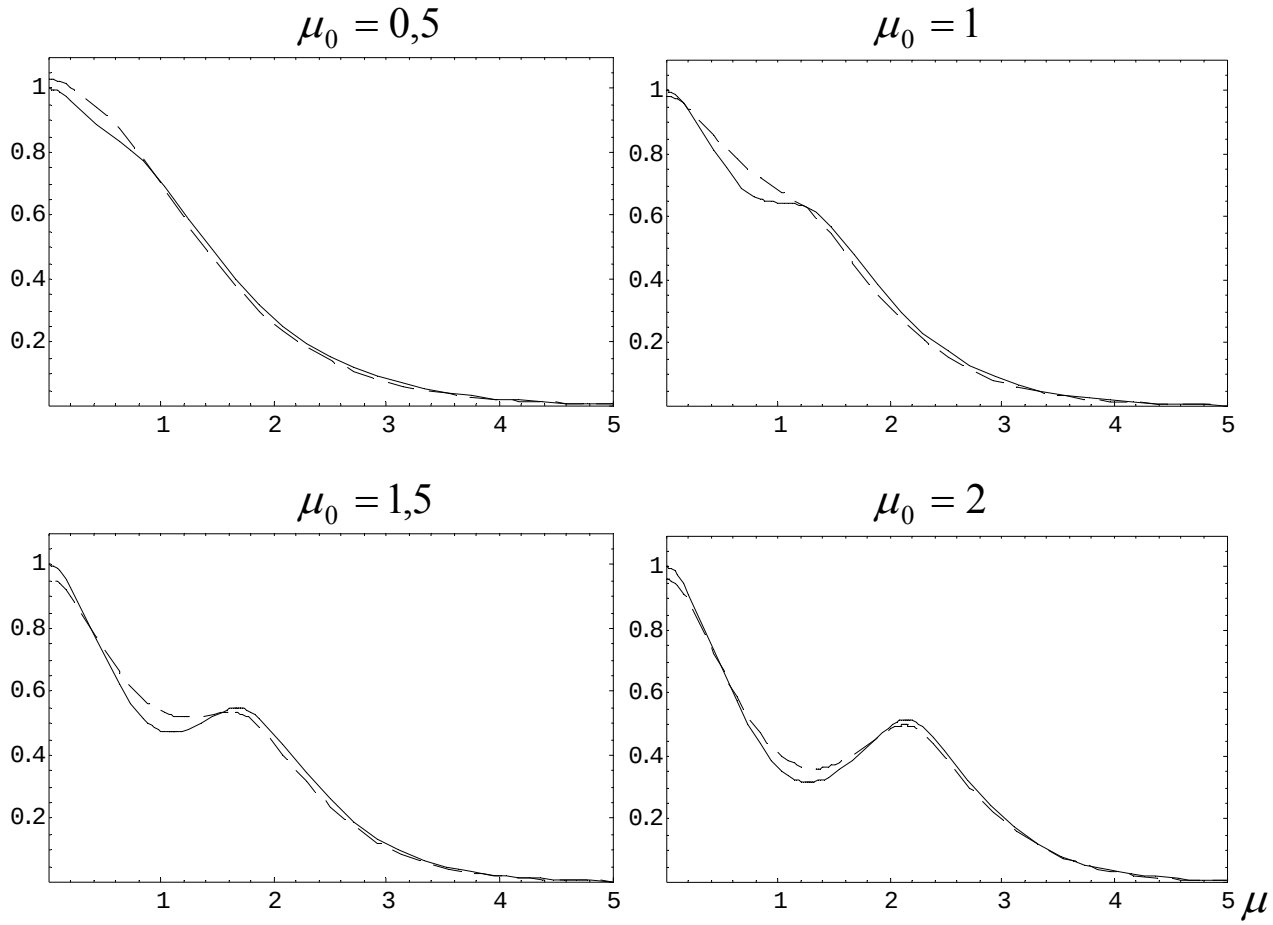


Рис.60

Для функции $\Phi(\xi,\eta)$ в треугольной модели интеграл (9) не берется ни от $\gamma_0^t(\xi)$ в виде (75) , ни от $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ в виде (79), а (59-60) нельзя модифицировать соответствующей заменой аргументов - мы уже отмечали, что полученные таким образом функции при $\mu_0 = 0; T(0) = 2$ не дадут функций “одногорбого” контура, а окажутся сжатыми вдвое по своим аргументам; при других $\mu_0 \in [0,2]$ ситуация не лучше. В параболической модели также интеграл (9) не берется от (74). Следовательно, в переходной области μ_0 у нас нет функции $\Phi(\xi,\eta)$ треугольной модели и можно воспользоваться только выражениями (29-30) для параболической модели, заменив η и ξ на $\eta P(\mu_0)$ и $\xi P(\mu_0)$. Обозначим такие функции через $\widetilde{\Phi}^p(\xi,\eta)$ и $\widetilde{\Phi}^p(0,\eta)$ - они и осуществляют переход между функциями “двугорбого” и “одногорбого” контуров.

Итак, мы получили выражения для функций (7-11) в переходной области от “двугорбого” контура к “одногорбому”, обеспечивающие плавный переход между формулами работ [1-3] и настоящей работой, и показали, что в качестве хорошего приближения этих функций можно взять формулы для “двугорбого” контура любой из двух моделей (кроме $\Phi(\xi,\eta)$ для треугольной), заменив в них η и ξ на

$\eta P(\mu_0)$ и $\xi P(\mu_0)$ или $\eta T(\mu_0)$ и $\xi T(\mu_0)$, а μ и χ - на $\mu / P(\mu_0)$ и $\chi / P(\mu_0)$ или $\mu / T(\mu_0)$ и $\chi / T(\mu_0)$. Однако, чтобы применять полученные результаты для произвольных контуров, необходимо решить еще два вопроса.

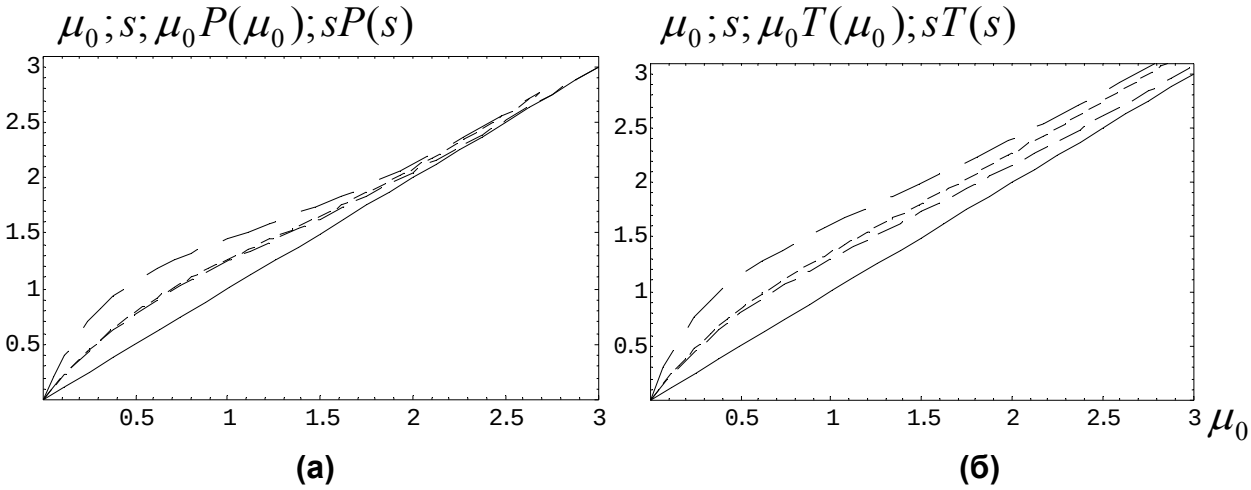
Во-первых, надо в полученных приближениях перейти от μ_0 (аргумента, зависящего от модели и непонятного смысла в переходной области) к зависимостям от аргумента s, имеющего четкий физический смысл для произвольного контура.

И, во-вторых, надо в численных расчетах для произвольных контуров переходной области показать применимость полученных результатов.

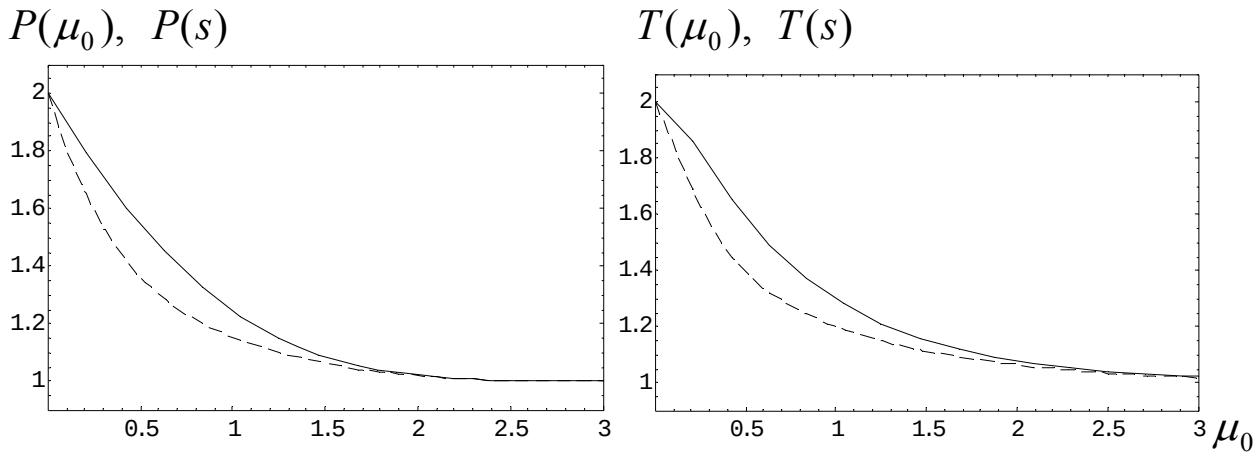
Обратимся к первой задаче, отчасти при этом решая и вторую. Сравним, в том числе и при малых значениях $K_0 \le 10^2$, для модельных - треугольного и параболического - контуров в переходной области аргумента s точные численные расчеты функций (7-9) с полученными аналитическими выражениями. Используем при этом различные приближения для функций и для замены в них μ_0 на s. Это позволит сделать выбор и функций и замены, которые мы впоследствии опробуем на некоторых стандартных формах контуров - лоренцевом, гауссовом. Эта задача совсем не сводится к рассмотренной выше задаче уточнения при $K_0 >> 1$ аналитических выражений в переходной области. Рис.56 для τ_{corr}^{out}, а также рис.58-60 показали, что и с уточнением эти выражения все-таки имеют ограниченную точность, особенно при $K_0 \le 10^2$. И заранее нельзя знать как скажется на этой неточности тот или иной способ замены μ_0 на s.

В области $\mu_0 \in [0,2]$ мы сравнили численно рассчитанные функции (7-9) для параболической и треугольной моделей от аргументов (5,6), нормированных на численно же рассчитанные τ_{corr}^{out}, с приближенными выражениями (74-80) и $\widetilde{\Phi}^p(0,\eta)$ при разных способах замены μ_0 на s. Как легко видеть, при этом надо искать замену μ_0, функциям $P, T(\mu_0)$ и произведениям $\mu_0 P(\mu_0)$ и $\mu_0 T(\mu_0)$.

$$K_0 = 10^2$$



(а) **(б)**



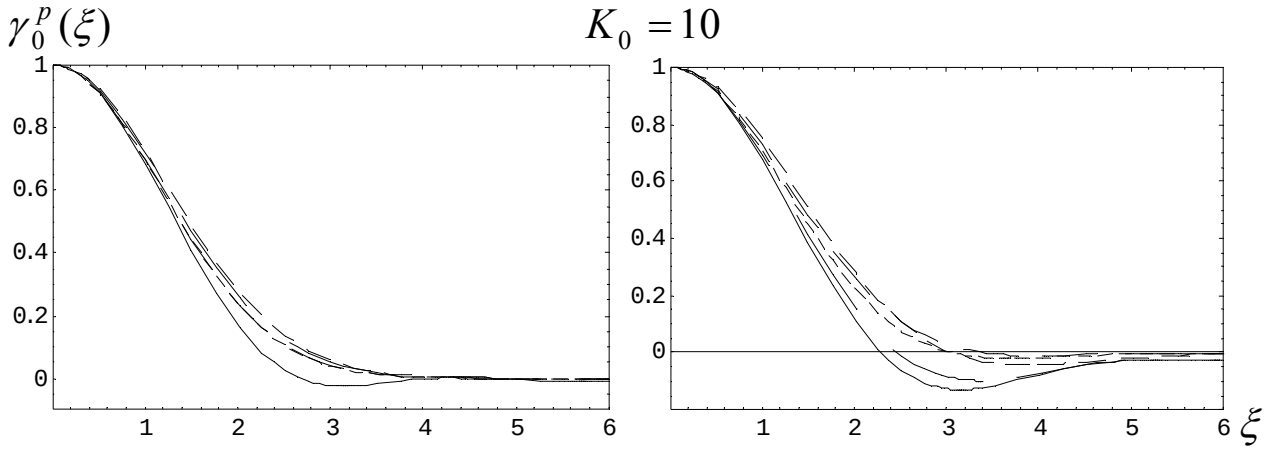
(в) **(г)**

Рис.61

На рис.61а-г в переходной области значений μ_0 для модельных контуров показана погрешность замены μ_0 из (68-69) на s согласно (70-71) или (40) и $P,T(\mu_0)$ на $P,T(s)$ (неточность равенств (70-71) для s точному значению (40) показана на рис.56). На рис.61а сплошная прямая - функция μ_0, штриховые кривые (длина штрихов увеличивается в указанной последовательности) - функция $s(\mu_0)$ из (40), функция (70) и функция $s(\mu_0)P(s(\mu_0))$. На рис.61б аналогично сравниваются функции для треугольной модели. Видно, что близки между собой лишь $s(\mu_0)$ и функции (70-71). На рис.61в сплошная кривая - функция $P(\mu_0)$, штриховая - $P(s=\mu_0 P(\mu_0))$; на рис.61г - аналогично для треугольных контуров. Данные приведены для $K_0=10^2$; для меньших K_0 отличие кривых возрастает, а для бóльших - немного уменьшается, но все равно остается заметным.

Для функции $\gamma_0^p(\xi)$ с точным расчетом сопоставлялись 4 варианта приближения (76): 1) в обоих сомножителях - μ_0 из (68); 2) в экспоненте - μ_0 (68), а в аргументе косинуса, принимая во внимание равенство (70), $\mu_0 P(\mu_0)$ заменено на s из (40); 3) в аргументе экспоненты μ_0 заменено на s из (40), а в аргументе косинуса - $\mu_0 P(\mu_0)$ на s; 4) все μ_0 в (76) заменены на s (в аргументе косинуса теперь - произведение $sP(s)$). Расчеты делались для параболических контуров при $K_0=10\div10^3$, а параметр x_0 варьировался так, чтобы μ_0 и s пробегали значения от $0{,}1$ до примерно $1{,}5$. Самое удивительное, что **во всех случаях** наилучшее совпадение точных расчетов наблюдалось с вариантом 4) приближения, т.е. когда в (76) все μ_0 заменялись на s без учета (70). Каким-то образом неточности приближения (76) по сравнению с (74) (см.рис.58) и с точной функцией компенсировались

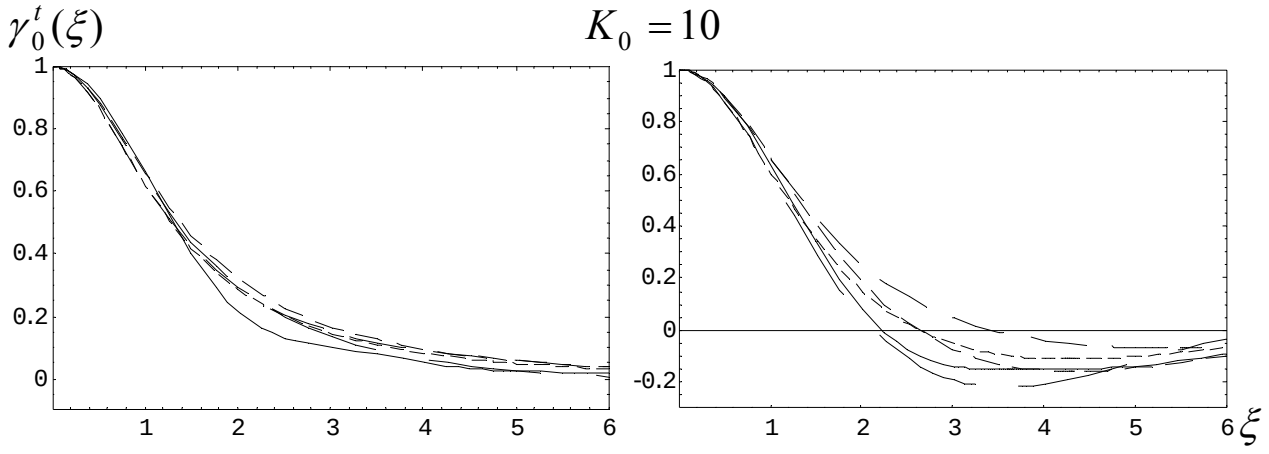
неточностями замены μ_0 на s (см.рис.56, 61). На рис.62 приведены 2 характерных примера при $K_0 = 10$. Сплошные кривые - численный расчет, штриховые - 4 описанных варианта приближения. Наилучшие приближения везде (самые длинные штрихи) - вариант 4). При бóльших K_0 преимущество варианта 4) еще больше. Мы сопоставили полученные результаты с расчетами по более точному приближению (74) с теми же 4-мя вариантами замены μ_0 на s. Оно действительно дало лучшее приближение точных кривых, но лишь по варианту 1), т.е. с μ_0, определенному согласно (68); любая замена μ_0 на s в (74) только ухудшает ситуацию по сравнению с уже достигнутым с помощью (76).



$x_0 = 0{,}05$ $(\mu_0 = 0{,}10; s = 0{,}22)$ $x_0 = 0{,}25$ $(\mu_0 = 0{,}63; s = 1{,}03)$

Рис.62

Аналогичные исследования были проведены и для функции $\gamma_0^t(\xi)$. Результаты сравнения точного численного расчета (сплошные кривые) и функции (77) при различных вариантах замены μ_0 на s (штриховые кривые) привели к такому же итогу, как и для функции $\gamma_0^p(\xi)$ - наилучшее приближение всегда получалось тогда, когда все μ_0 заменялись на точные s и равенство (71) в расчет не принималось. Опять каким-то образом неточности рис.56,59,61 взаимно компенсируются. Два характерных примера для $\gamma_0^t(\xi)$ приведены на рис.63 при тех же, что и на рис.62, значениях K_0 и x_0. Вариант приближения 4) (самые длинные штрихи) - наилучший. Как и для $\gamma_0^p(\xi)$, с более точной формулой (75) лучшее приближение будет в варианте 1) - при всех μ_0, а не s, и это приближение несколько лучше, чем (77) при всех s. А наихудшие приближения при применении формулы (76) для $\gamma_0^p(\xi)$ и (77) для $\gamma_0^t(\xi)$ всегда получались в том случае, когда μ_0 заменялось на s, но принимались во внимание равенства (70-71).

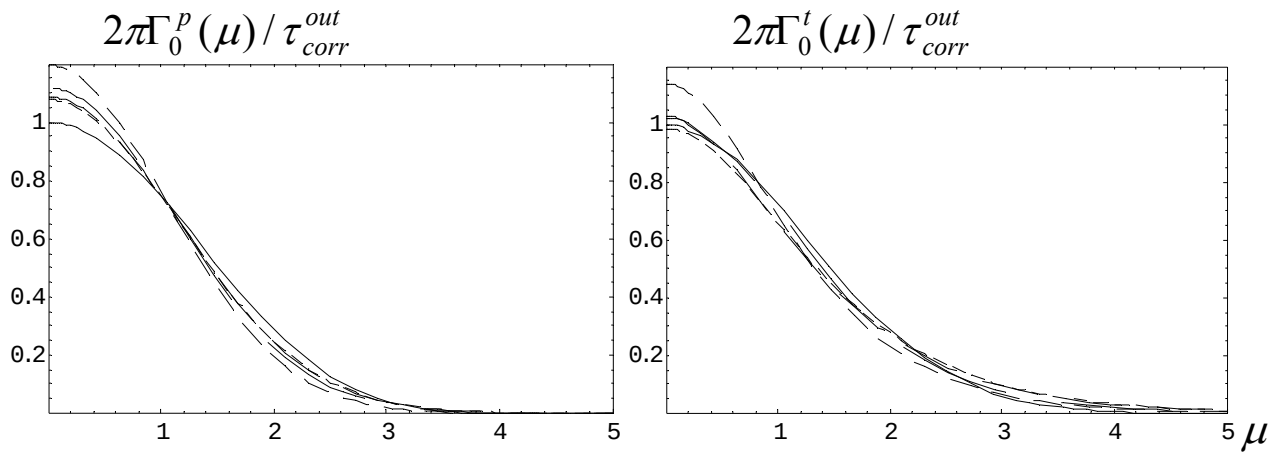


$x_0 = 0{,}05\ (\mu_0 = 0{,}095; s = 0{,}271)$ $x_0 = 0{,}25\ (\mu_0 = 0{,}603; s = 1{,}194)$

Рис.63

Для функции $2\pi\Gamma_0^p(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ нет специального приближения в переходной области s, поэтому сравнивались численные расчеты и различные варианты замены μ_0 на s в обобщенной формуле (78). Для $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ сравнение проводилось как для обобщенной формулы (80), так и для приближения (79), полученного специально в переходной области. На рис.64 приведены по одному примеру сравнения точных функций $2\pi\Gamma_0^{p,t}(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ с приближениями (78) (параболическая модель, левый график) и (80) (треугольная модель, правый график). Варианты замены μ_0 на s и соответствующие им типы кривых - те же, что и на рис.62-63. Опять во всех случаях лучшим был вариант 4) - замена всех μ_0 на s (самые длинные штрихи), а худшим - 1) - замена μ_0 на s с учетом (70-71).

$x_0 = 0{,}1$; $K_0 = 10$.



$\mu_0 = 0{,}21; s = 0{,}435$ $\mu_0 = 0{,}2; s = 0{,}52$

Рис.64

Пример сравнения точного расчета $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ (сплошные кривые) и приближенного при различных вариантах замены μ_0 на s в формулах (79) и (80) приведен на рис.65.

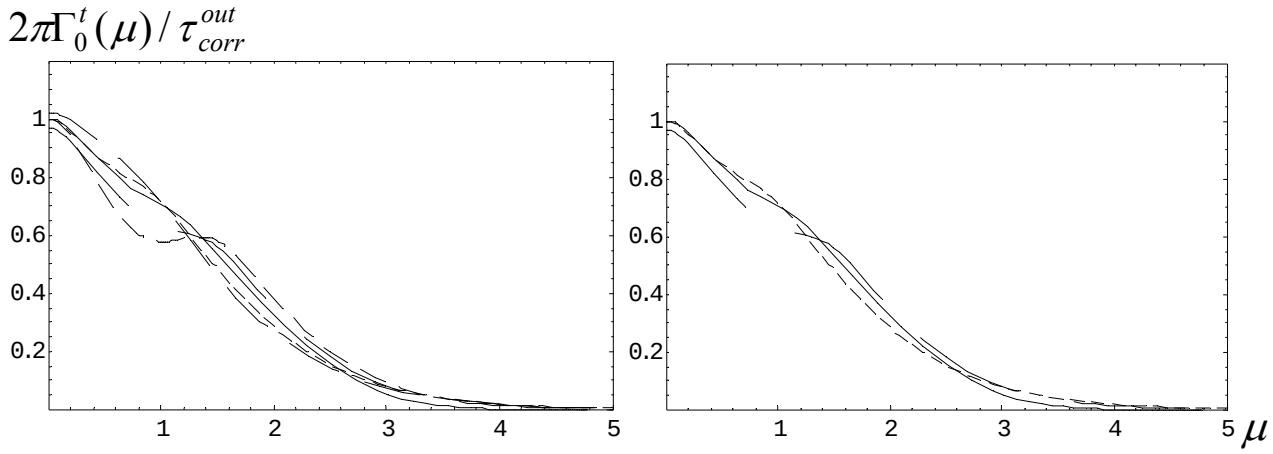


Рис.65

Взят случай $x_0 = 0{,}25; K_0 = 10$ ($\mu_0 = 0{,}60; s = 1{,}19$). Кривая с самыми короткими штрихами - точная функция (79), с самыми длинными штрихами - (80) с заменой всех μ_0 на s. Для удобства сравнения на правом графике оставлены только два этих варианта приближения. Два других приближения на левом графике - это (79) с заменой всех μ_0 на s и точная функция (80). Видно, во-первых, что оставленные на правом графике варианты приближения - наилучшие, два других - хуже. Во-вторых, из двух хороших вариантов, хотя (79) и лучшее приближение точной функции, (80) с заменой всех μ_0 на s немногим ему уступает и вполне может быть использована. И, в-третьих, из двух худших вариантов наихудшим везде был тот, в котором в более точной формуле (79) заменялись μ_0 на s. Расчеты при других значениях параметров переходной области дали точно такие же картинки. Значит, общий вывод и для $2\pi\Gamma_0^t(\mu)/\tau_{corr}^{out}$, и для $\gamma_0^{p,t}(\xi)$ тот, что более точные выражения переходной области (там, где они есть), конечно, дают лучшие приближения, но при этом функции должны быть обязательно от μ_0; а для произвольных контуров в переходной области смысл этого аргумента неясен. В то же время замена μ_0 на s в уже имеющихся у нас при $\mu_0 >> 1$ упрощенных формулах для всех функций дает весьма хорошие приближения и в переходной области. Это позволит применить эти приближения и для произвольных контуров.

Последняя иллюстрация для модельных контуров в переходной области - сравнение точных и приближенных выражений для функции $\Phi^p(0,\eta)$ (напомним, что в треугольной модели переход $\mu_0 \to 0$ в (60) по характеру вывода формулы приводит к качественно неверному результату). На рис.66 приведен типичный при-

мер сравнения для $\Phi^p(0,\eta)$. Те же варианты замен μ_0 на s в $\widetilde{\Phi}^p(0,\eta)$, что и на рис.62-64. И опять худший вариант - замена μ_0 на s с учетом (70), лучший - просто замена μ_0 на s.

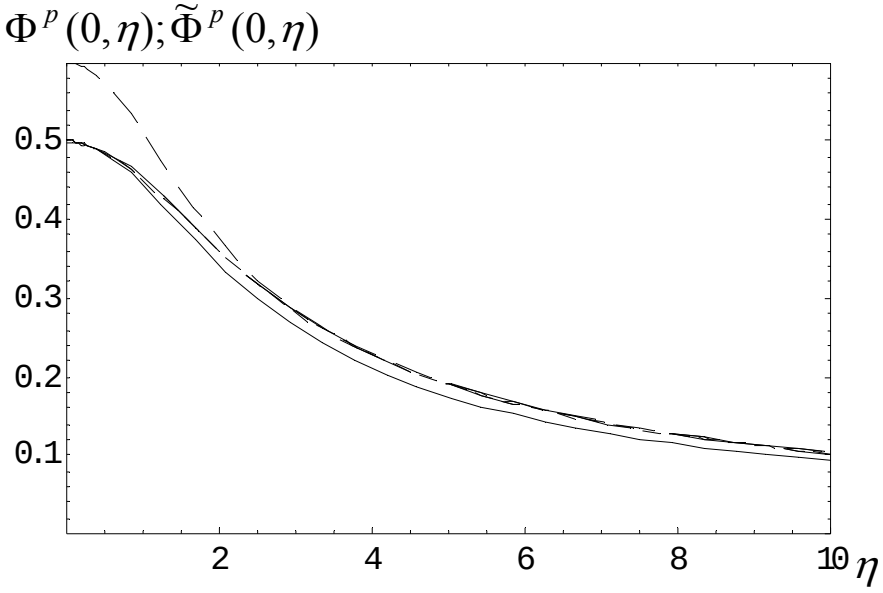
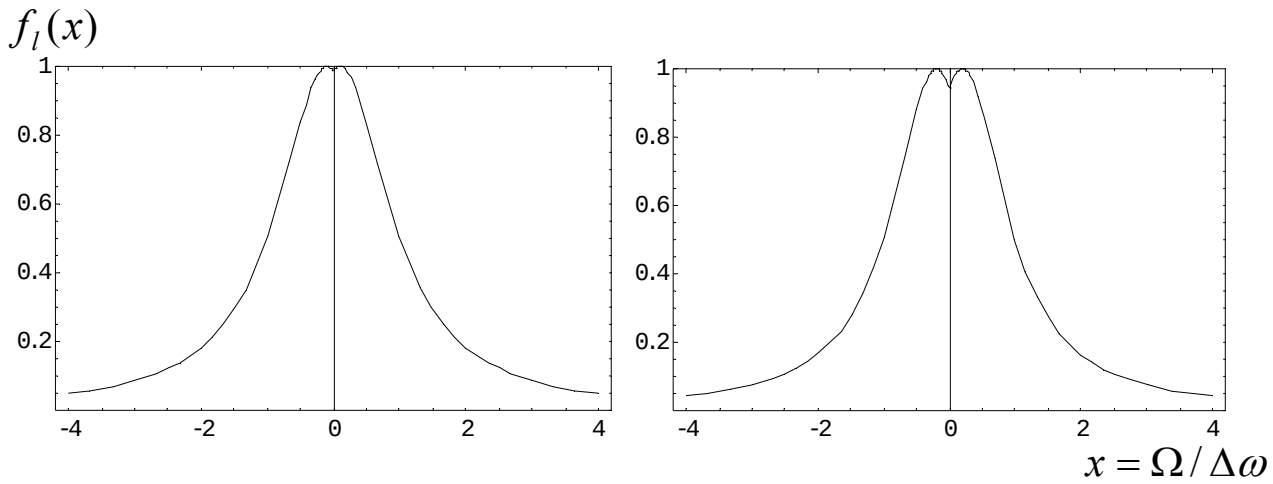


Рис.66

Сравним теперь полученные приближенные функции в переходной области аргумента s с результатами точных расчетов для некоторых практически встречающихся контуров. Для сравнения возьмем для значения $s \cong 0{,}5$ двойные контура лоренцева типа (61), для $s \cong 1$ - двойные контура гауссова типа (63). Оба этих типа контуров при $x_0 = 0$ переходят в соответствующие “одногорбые” контура. И, наконец, для $s \cong 1{,}5$ сравним приближенные функции с точными расчетами для контуров, в которых за счет искусственно введенной асимметрии формы максимумов контуров достигнут в промежуточной области s провал контура до нуля в центре линии. Этот последний случай сравнения, вообще говоря, рассматривает нефизичную ситуацию, и цель такого сравнения преследует чисто математический интерес. Во всех трех случаях сравнение численных расчетов будем проводить с приближениями параболической модели, поскольку именно эта модель описывает структуру контуров в максимумах.

На рис.67 показаны 2 примера контура (61), для которых на рис.68-69 приведены результаты расчетов функций (7-8) и $\Phi(0,\eta)$. Для наглядности графики $f_l(x)$ даны и в отрицательной и в положительной областях аргумента. Параметры подобраны так, чтобы в обоих случаях $s \cong 0{,}5$ и одно из K_0 было малым. На рис.68 приведены функции для левого контура рис.67, а на рис.69 - для правого. Сплошные линии - численный расчет, штриховые - функции (76), (78) и $\widetilde{\Phi}^p(0,\eta)$ с заменой μ_0 на s.



$K_0 = 10^3; x_0 = 0{,}1$
$s = 0{,}499$

$K_0 = 10; x_0 = 0{,}2$
$s = 0{,}458$

Рис.67

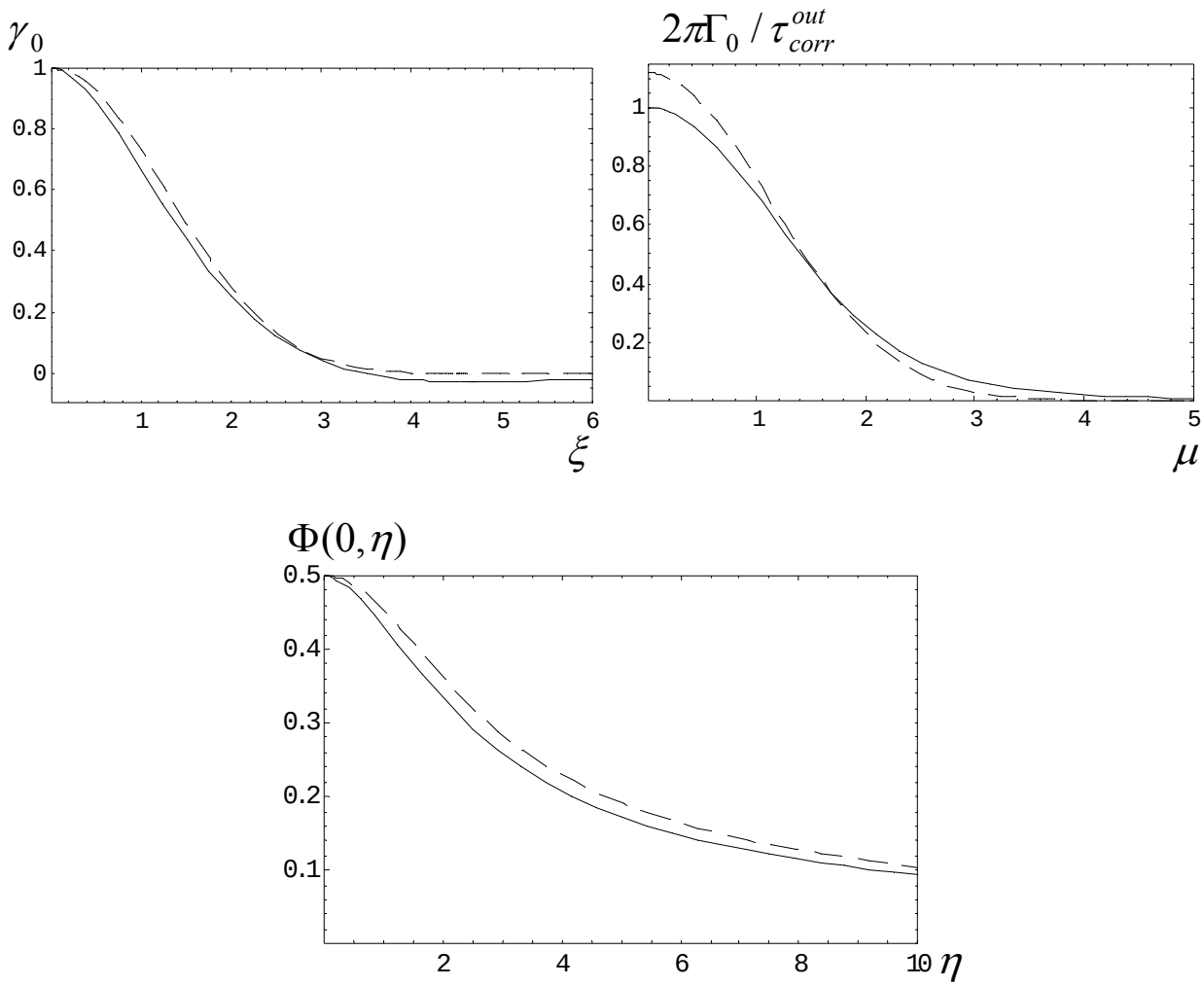


Рис.68

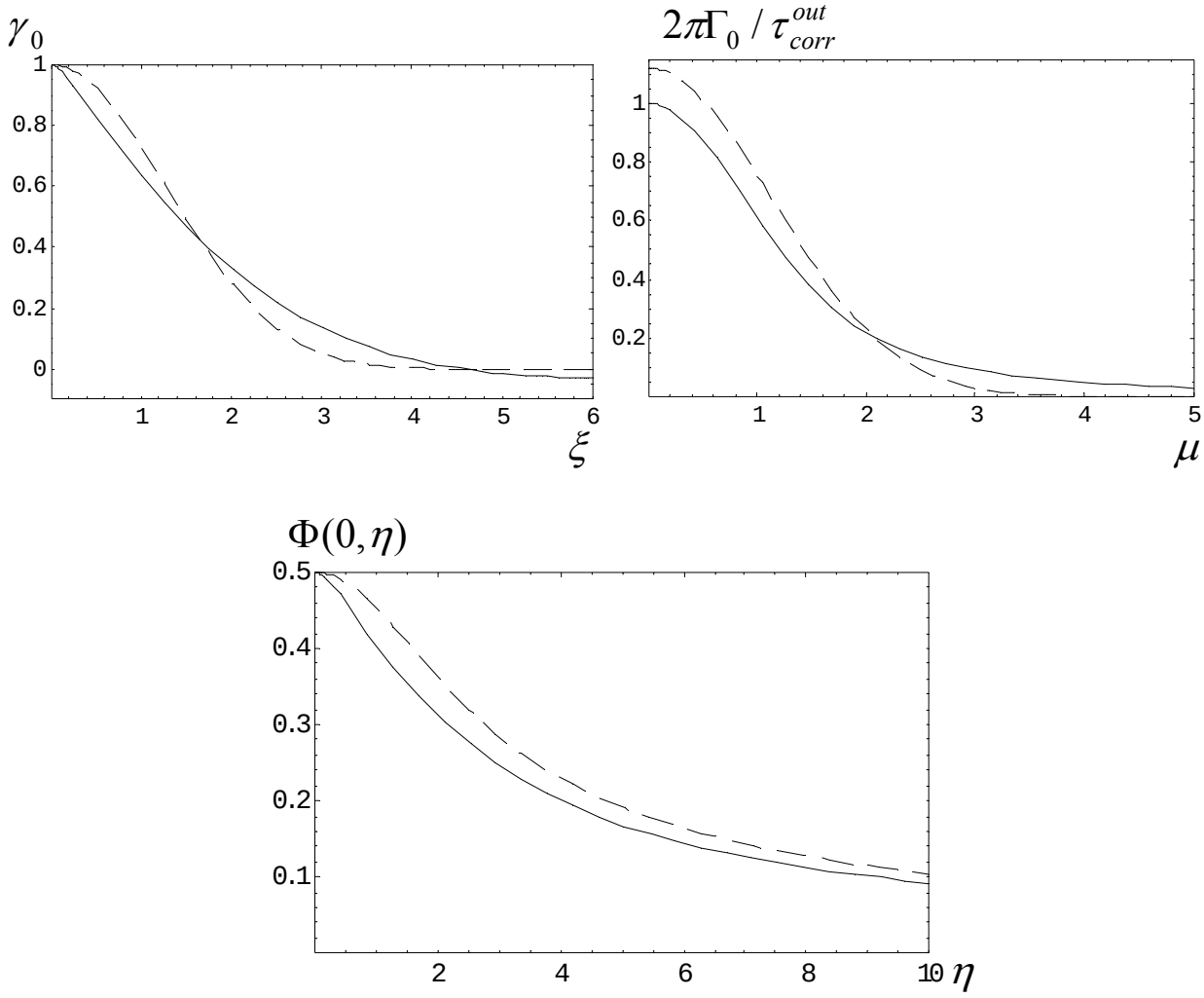
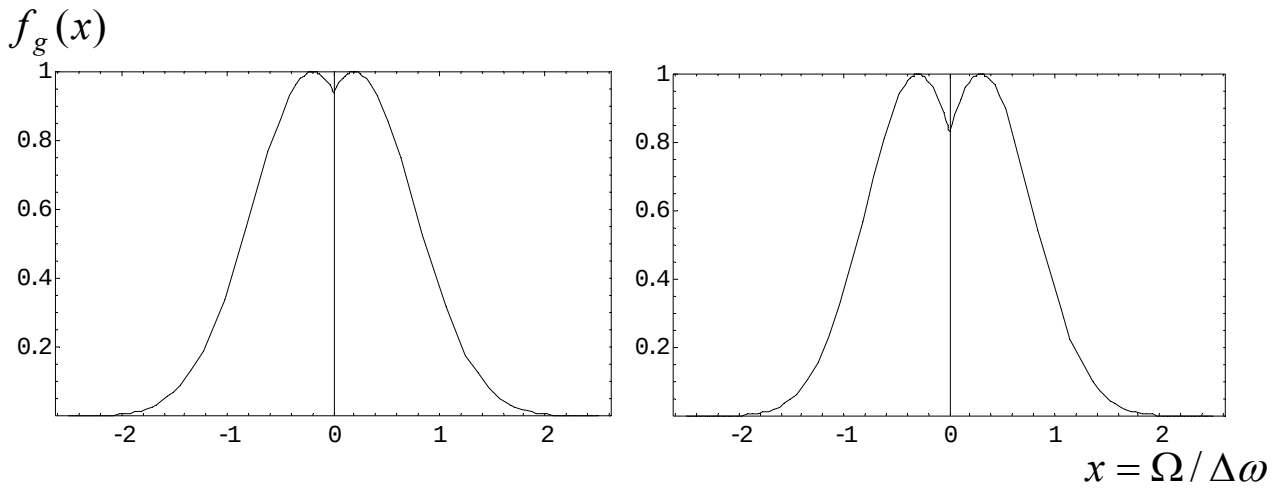


Рис.69

Из рис.68-69 видно, что согласие точных и приближенных функций высокое даже для малых K_0, плохо подходящих под условие $K_0 >> 1$.

Еще лучшее согласие получилось для контуров (63) гауссова типа, по-видимому, из-за отсутствия здесь вклада “хвостов” лоренцевых функций. На рис.70 приведены графики контуров $f_g(x)$, для которых делались расчеты в промежуточной области. Параметры подбирались так, чтобы $s \cong 1$. На рис.71 приведены функции для левого контура рис.70, а на рис.72 - для правого. Как и на рис.68-69, сплошные линии - численный расчет, штриховые - функции (76), (78) и $\widetilde{\Phi}^p(0,\eta)$ с заменой μ_0 на s. Точность приближений для малых значений K_0 оказалась ничуть не хуже, чем для больших.



$K_0 = 10^2; x_0 = 0{,}2$
$s = 0{,}870$

$K_0 = 10; x_0 = 0{,}3$
$s = 1{,}016$

Рис.70

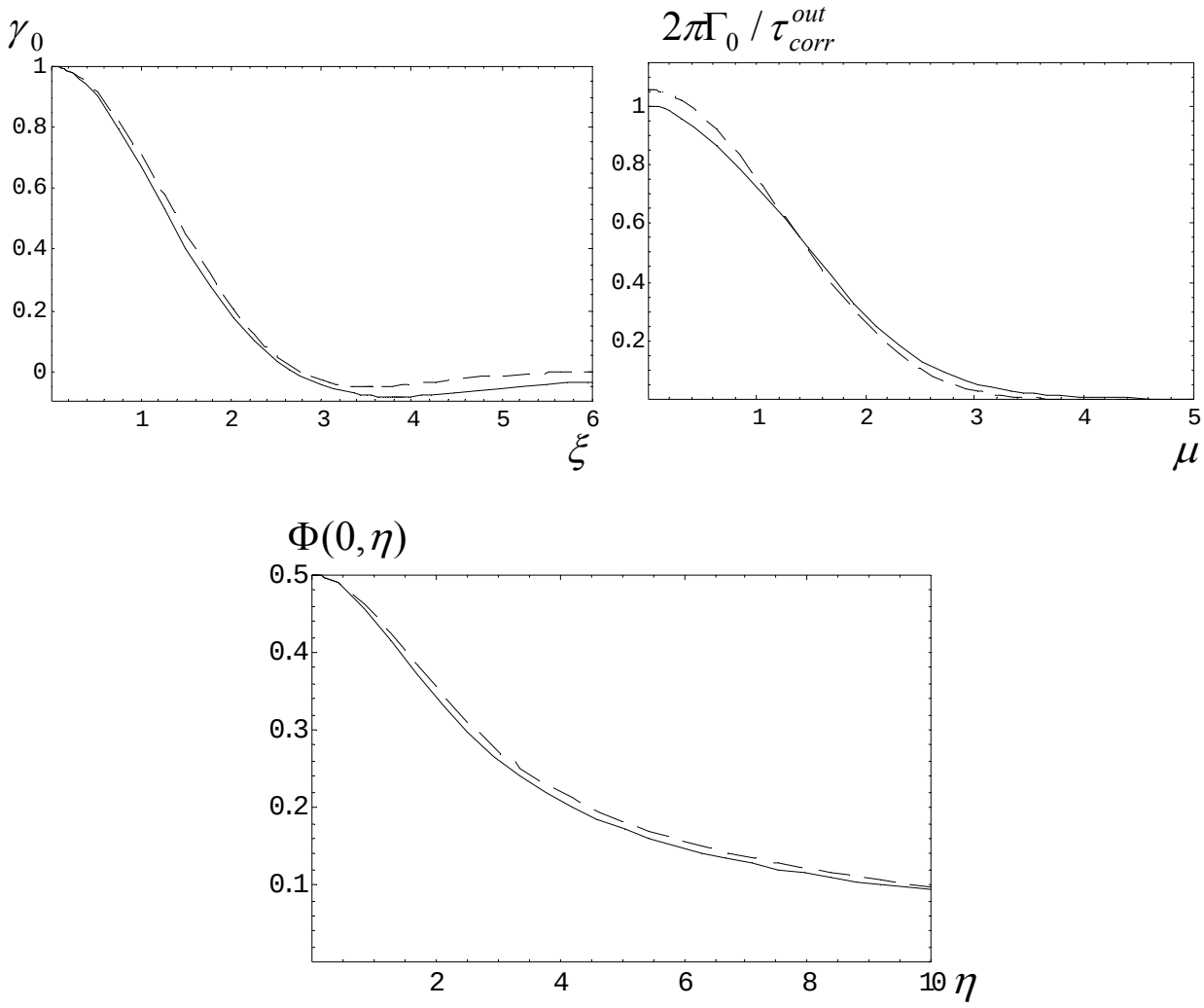


Рис.71

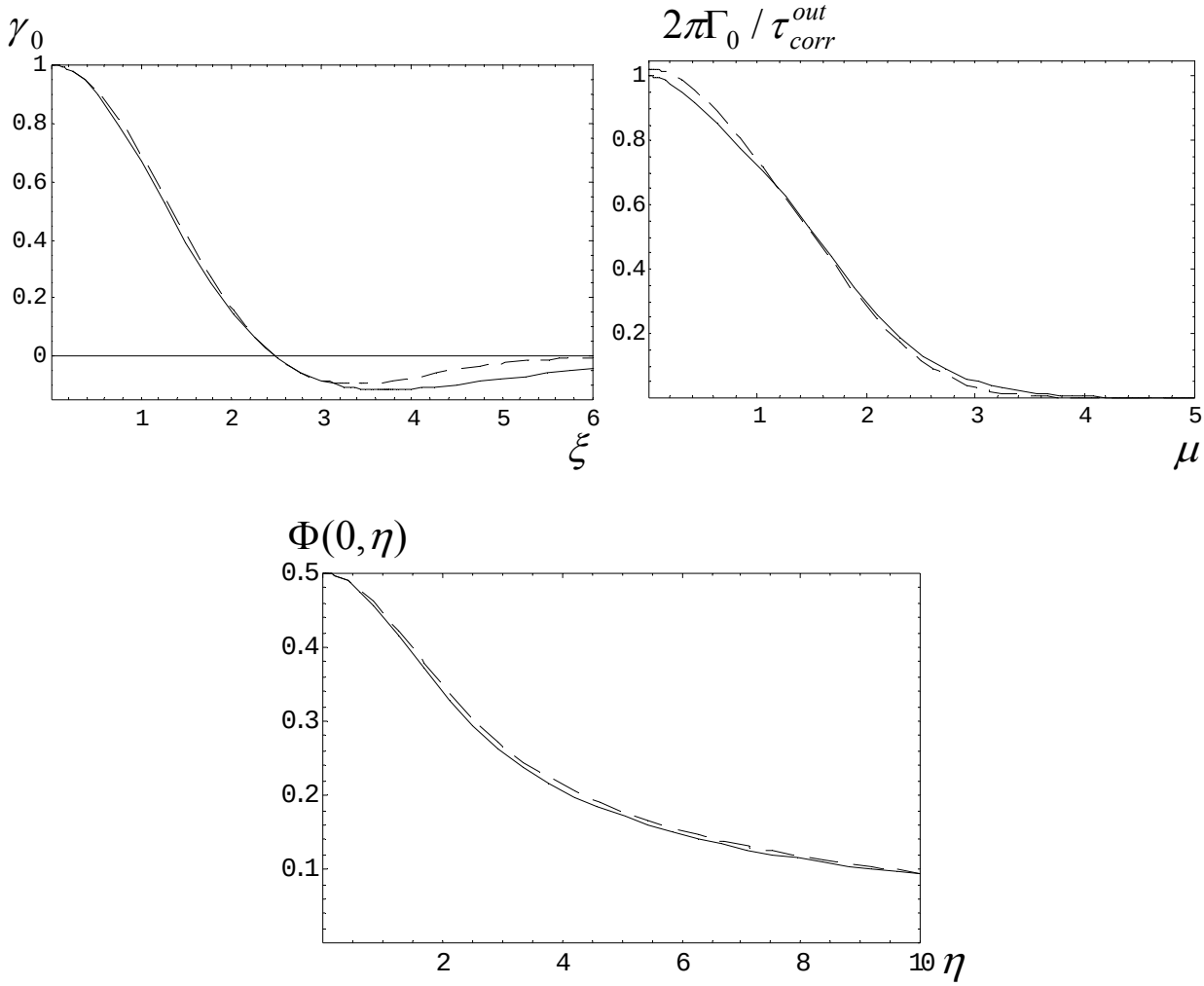


Рис.72

И, наконец, рассмотрим как влияет асимметрия “горбов” контура в максимумах на статистические характеристики в переходной области значений s. На рис.73 приведены форма контура и функции $\gamma_0(\xi)$, $2\pi\Gamma_0(\mu)/\tau_{corr}^{out}$ и $\Phi(0,\eta)$ для контура с провалом в центре до нуля за счет асимметрии второй производной контура в вершинах (с коэффициентом асимметрии (14) $\varepsilon \cong 2{,}2$). Результаты численного расчета (сплошные линии) сопоставлены с приближенными выражениями (штриховые линии), рассчитанными по вышеприведенным формулам при $\varepsilon = 1$, т.е. без учета асимметрии. Контур описывался выражением типа (62), но с разным коэффициентами справа и слева от вершины

$$f_m(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2 \exp\left[1 - \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2\right], & |x| \le x_0 \\ \left(\dfrac{|x| + x_1 - x_0}{x_1}\right)^2 \exp\left[1 - \left(\dfrac{|x| + x_1 - x_0}{x_1}\right)^2\right], & |x| \ge x_0 \end{cases}, \qquad (82)$$

где для рис.73 взято $x_0 = 0{,}35$ и $x_1 = 0{,}7$. Расчеты рис.73 делались при $K_0 = 10$; при этом $s = 1{,}58$.

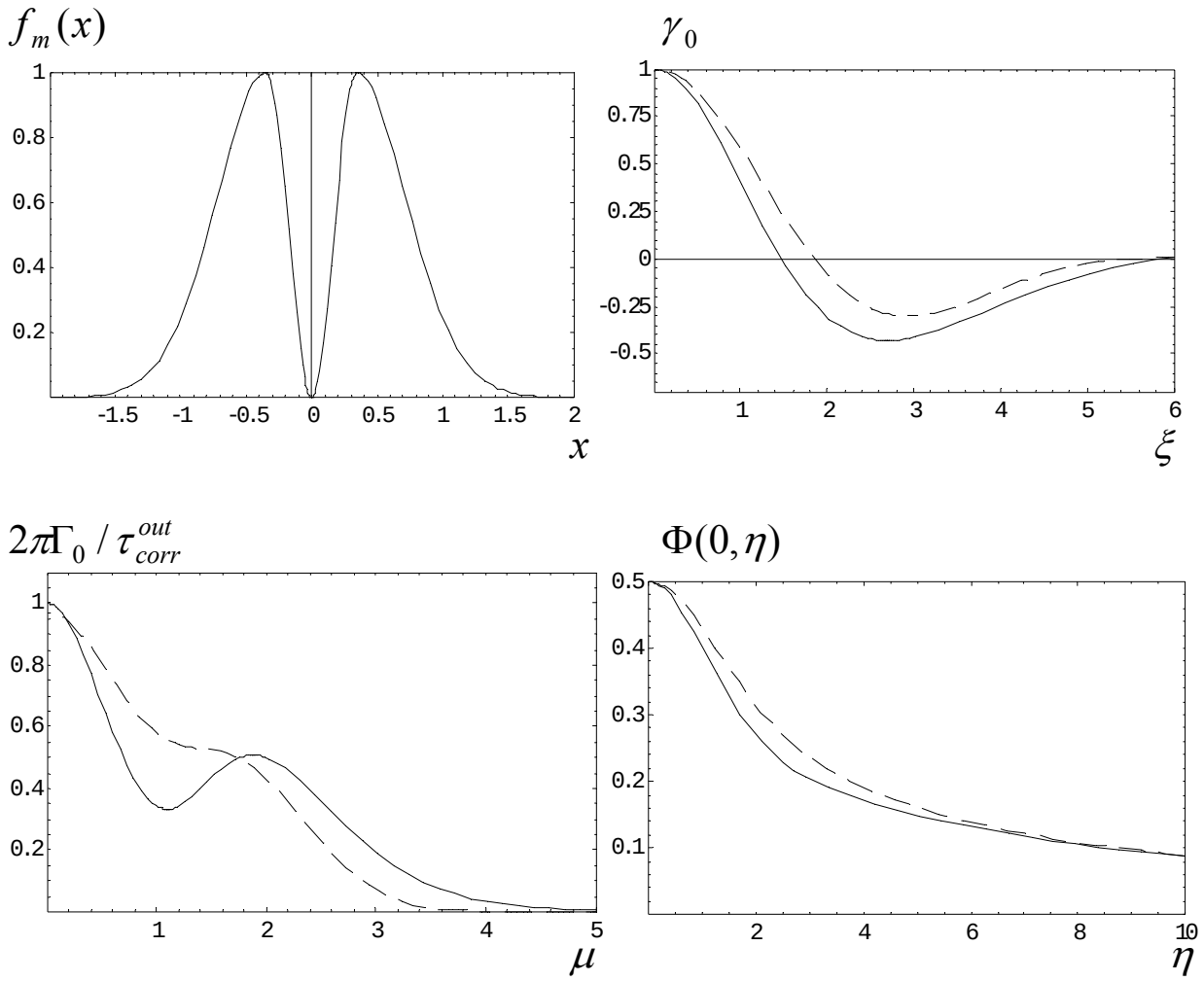


Рис.73

Видно, что совпадение точных и приближенных функций на рис.73 хуже, чем с тем же значением $K_0 = 10$ на рис.69 (асимметрия дает бóльшую погрешность, чем хвосты лоренцевой функции), и уж тем более хуже, чем на рис.72 (здесь хвосты одинаковы, погрешность лишь за счет асимметрии). При увеличении разницы между x_0 и x_1 в (82), т.е. увеличении ε и уменьшении s, совпадение ухудшается. Таким образом, и в переходной области значений s, равно как и при $s >> 1$, статистические характеристики зависят от асимметрии вершин контура. Мы уже отмечали, что рассмотрение нами асимметричных форм “горбов” не было продиктовано практической необходимостью. В реальности локальная форма “горба” в близкой окрестности максимума всегда симметрична. Наше рассмотрение преследовало цель анализа математической стороны вопроса. С физической точки зрения локальная асимметрия “горба” не должна была бы сколько-нибудь заметно влиять на статистические функции, эффективная ширина “горбов” и их разнесенность - значительно более важные факторы. Однако математически оказалось иначе, фактор

асимметрии играет в полученных выражениях заметную роль. Отсюда следуют два важных вывода. Первый уже неоднократно подчеркивался нами и здесь и в предыдущих работах. За счет большого коэффициента усиления K_0, стоящего в показателях степеней подынтегральных выражений (а подчас для этого достаточно $K_0 \geq 10$ и даже менее именно потому, что он стоит в показателе степени), определяющей поведение статистических характеристик в целом является главным образом область вблизи максимумов подынтегральных выражений, где функции хорошо определены своим первым членом разложения в ряд Тейлора. Этот факт хорошо известен в математических приложениях при приближенных расчетах интегралов от функций с ярко выраженным экстремумом (метод перевала). А второй вывод следовало бы сформулировать так. Математическая модель, даже грубая, должна верно отражать основные качественные свойства исследуемого объекта, тем более в области, наиболее важной для математической обработки. Замена параболического локально симметричного “горба” (каковой реально существует в действительности) на изломанный треугольный, но по-прежнему симметричный, не повлияло сколько-нибудь существенно на качество подобия, в то же время внесение физически нереальной локальной асимметрии даже при сохранении гладкости функции в максимуме, привело к заметной погрешности результатов. Следовательно, треугольная симметричная модель (и даже, как мы видели в предыдущих работах [1-3], прямоугольная), сохраняют существенные свойства моделируемого объекта и потому мало изменяют результаты расчетов по сравнению с более точной параболической моделью, а вот нарушение факта локальной симметричности максимумов заметно влияет на полученные результаты, а значит, соответствующие модели являются неадекватными физической природе исследуемого объекта.

VI. Выводы

Подведем итоги. Функции (7-9) в рассмотренном случае “двугорбых” контуров линии усиления хорошо описываются универсальными формулами, полученными с помощью параболической или треугольной моделей “горбов” контура в пределе $K_0 \to \infty$. Модели с локально асимметричными “горбами”, у которых левая и правая производные в максимуме каждого из “горбов” различны, также дают близкие результаты для треугольной и параболической моделей, однако, обе приводят к выражениям, заметно отличающимся от функций, полученных с помощью моделей с локально симметричными “горбами”; и чем больше значение параметра асимметрии ε, тем отличие больше. Это свидетельствует о том, что физически нереальная локальная асимметрия “горбов” вносит в модель большую погрешность, существенно бóльшую, чем замена гладкого параболического, но симметричного максимума, на изломанный треугольный, но по-прежнему локально симметричный в максимуме. Следовательно, модели реальных контуров следует выбирать среди локально симметричных моделей (треугольных, параболических и т.д.).

Универсальные функции (7-9), полученные с помощью обеих этих моделей, близки между собой. При возрастании K_0 каждая из функций (7-9) для некоторого реального контура также стремится к предельной универсальной функции, не зависящей от конкретных параметров контура и условий эксперимента. И эти предель-

ные функции в равной степени могут быть описаны как с помощью треугольной, так и с помощью параболической модели. Чем больше K_0, тем ближе реальные функции к функциям универсальным. В большинстве случаев уже при $K_0 \cong 10^2 \div 10^3$ разброс этих функций не превышает нескольких процентов.

Универсальные функции “двугорбых” контуров в реальном случае локально симметричных “горбов” ($\varepsilon = 1$) кроме аргументов (5-6) зависят от параметра s, равного отношению разности частот между максимумами “горбов” к $\left(\tau_{corr}^{out}\right)^{-1}$.

Этот параметр можно рассматривать как новый аргумент функций (7-9). Если $s \geq 2$ (отчетливо выраженная “двугорбая” структура), то фигурирующий в формулах, полученных в параболической или треугольной модели “горбов” контура, параметр μ_0 (см. гл.I-III) почти равен s, но все же отличается от него. Выражения для универсальных функций получаются при замене в этих формулах μ_0 на s.

Чтобы получить выражения для универсальных функций в переходной области от “двугорбого” контура к “одногорбому” ($s \in [0;2]$), включая предельный случай “одногорбого” контура ($s = 0$), в этих же формулах помимо замены μ_0 на s необходимо еще модифицировать остальные аргументы, то есть умножить аргументы (5) на $P(s)$ или $T(s)$ и поделить аргументы (6) на $P(s)$ или $T(s)$, в зависимости от того, какая модель использована - параболическая или треугольная (см. формулы (66) и (67)). Исключение составляет формула для $\Phi(\xi,\eta)$, полученная в треугольной модели, что подробно обсуждалось в гл. V. Поскольку при $s \geq 2$ $P(s) \cong T(s) \cong 1$, такая модификация аргументов дает хорошее аналитическое приближение функций (7-9) во всем диапазоне изменения s и точный переход при $s = 0$ к формулам, полученным ранее в работах [1-3] для “одногорбых” контуров линии усиления.

VII. Заключение

В настоящей работе проведено исследование законов преобразования статистических характеристик квантового шума оптического усилителя с “двугорбым” контуром линии усиления при изменении коэффициента усиления и параметров контура линии.

Исследованы такие характеристики квантового шума как временна́я часть коэффициента корреляции, спектральная плотность на выходе квадратичного детектора, коэффициент корреляции флуктуаций мощности, усредненный по некоторому времени наблюдения.

Показано, что в случае “двугорбого” контура линии усиления функции, описывающие эти характеристики, при нормировке всех аргументов и параметров с временной размерностью на время корреляции квантового шума, а всех аргументов и параметров с частотной размерностью - на величину, обратную времени корреляции, практически совпадают друг с другом, и чем больше коэффициент усиления,

тем лучше совпадение. В большинстве случаев коэффициента усиления $10^2 \div 10^3$ вполне достаточно для получения точности совпадения в несколько процентов. Таким образом, при увеличении коэффициента усиления функции, отвечающие перечисленным статистическим характеристикам, стремятся к универсальным функциям.

Эти универсальные функции для “двугорбых” контуров линии усиления отличаются от универсальных функций в случае “одногорбых” контуров наличием дополнительного аргумента, представляющего собой нормированную указанным выше образом разность частот между “горбами”, и, следовательно, в пространстве аргументов, включающем этот дополнительный аргумент, статистические характеристики квантового шума также обладают свойством подобия.

Получены аналитические выражения для универсальных функций на основе параболической и треугольной моделей “горбов” контура линии. Эти выражения дают близкие между собой значения и в равной степени могут быть использованы для аппроксимации функций в случае реальных контуров.

Исследовано влияние локальной асимметрии каждого из “горбов” на вид универсальных функций. Показано, что он весьма чувствителен к нарушению локальной симметрии в максимуме “горба”. Поэтому следует использовать аналитические выражения для универсальных функций, полученные в моделях с локально симметричными “горбами“, адекватных реальным контурам линии усиления.

Показано, что при уменьшении разности частот между “горбами“ до нуля аналитические выражения для универсальных функций, полученные в данной работе, плавно переходят в выражения для универсальных функций, полученные ранее для случая “одногорбых” контуров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Е.П., Сизова И.М. О подобии статистических характеристик спонтанного излучения квантового усилителя при различных коэффициентах усиления. Препринт ФИАН (28). Москва, 2001.
2. Orlov E.P., Sizova I.M. On the similarity of the statistical characteristics of spontaneous radiation of a quantum amplifier at different gain factors. Journal of Russian Laser research. 2002. V.23. N.4. P.299-331.
3. Орлов Е.П., Сизова И.М. О времени корреляции квантового шума оптического усилителя с точки зрения свойства подобия его статистических характеристик. Препринт ФИАН (29). Москва, 2002.
4. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. 208 с.