РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Физический институт имени П.Н.Лебедева

ФИАН

ПРЕПРИНТ

16

Е.П.ОРЛОВ

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МОДАМИ РЕЗОНАТОРА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКИМИ ЗЕРКАЛАМИ

МОСКВА 2004

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрены пространственно-временные отношения между движущимися друг относительно друга модами резонатора с плоскими параллельными зеркалами. Показано, что временную координату события (под событием понимается затухание амплитуды волны в определенное число раз) с точки зрения покоящейся моды следует определять через расстояние, которое проходит до точки в пространстве резонатора, где наблюдается это событие, волна движущейся моды. И, наоборот, временная координата события с точки зрения движущейся моды определяется расстоянием, которое проходит до этой точки волна покоящейся моды. Показано также, что координаты события, наблюдаемого из систем отсчета, связанных с этими модами, преобразуются друг в друга с помощью формул преобразования Лоренца. Эти формулы получены без постулата о постоянстве скорости света, а только в предположении, что она не обладает дисперсией, пространство внутри резонатора однородное и изотропное, а коэффициенты отражения зеркал резонатора не зависят от угла падения излучения.

ABSTRACT

The spatial-temporal ratios between the modes moving relative to each other in the cavity with plane-parallels mirrors are considered. It is shown that the temporal coordinate of event (under the event we mean the wave amplitude attenuation by n times) from the viewpoint of the motionless mode should be determined by the distance, covered by the wave of moving mode to the point in the cavity space were the event occurs. On the contrary, the temporal coordinate of event from the viewpoint of the moving mode should be determined by the distance, covered by the wave of the motionless mode to this point. It is also shown that the coordinates of event observed from the coordinate systems connected with these modes are transformed one to another by Lorentz formulas. These formulas are obtained without an assumption on the constancy of the light velocity. We have used only the assumption on the absence of its dispersion, a homogeneous and isotropy of space in the cavity, and independence of mirror reflectivity factor on the angle of incidence of radiation.

1. Введение

Условия существования электромагнитного поля в резонаторах приводят к различным специфическим закономерностям при распространении волн этого поля. Так условия резонанса в определенном направлении резонатора приводят к тому, что волновое число и частота волны (ее энергия) зависят от поперечной к данному направлению составляющей скорости ее распространения. От этой же составляющей скорости зависит и время жизни моды резонатора, образованной этой волной.

Цель данной работы показать, что в резонаторе с плоскими бесконечными параллельными зеркалами пространственно-временные отношения двух волн, распространяющихся под углом друг к другу и образующих моды резонатора, движущиеся по отношению друг к другу в поперечном к оси резонатора направлении, такие же, как в теории относительности при относительном движении двух систем отсчета.

2. Частота моды резонатора в зависимости от скорости движения поперек оси резонатора

Пусть имеется резонатор с плоскими параллельными бесконечными зеркалами. Пространство в резонаторе предполагаем однородным, изотропным и не обладающим дисперсией. Обозначим оси координат в плоскости зеркал резонатора, как Ox и Oy, а ось перпендикулярную зеркалам, как Os. На рис.1. ось Oy перпендикулярна плоскости рисунка и поэтому не видна. Рассмотрим в таком резонаторе моду с определенным продольным индексом q. Будем сначала считать, что она образована плоскими волнами, распространяющимися перпендикулярно к поверхностям зеркал.

Условие резонанса для такой моды, как известно [1], имеет вид

$$k(0)2L = 2\pi q\,, \tag{1}$$

где $k(0)$ - волновое число, L - расстояние между зеркалами. Итак $k(0) = \pi q / L$.

Рассмотрим теперь моды с таким же продольным индексом, но которые образованы плоскими волнами, одна из которых « прямая» распространяется под некоторым углом α к оси резонатора Os, а другая «обратная» распространяется под углом $\pi - \alpha$ к оси резонатора, рис.1. Для таких мод условие резонанса имеет вид:

$$2Lk(\alpha)\cos\alpha = 2\pi q\,, \tag{2}$$

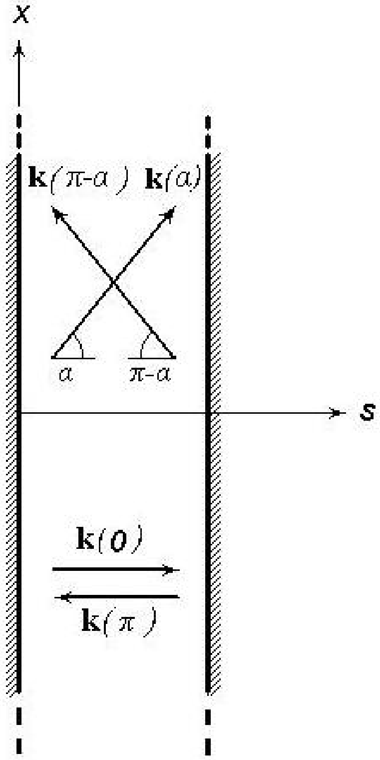

Рис.1.

где $k(\alpha)$ - волновое число волны, распространяющейся под углом α к оси Os. Следовательно,

$$k(\alpha) = \pi q / L \cos\alpha = \frac{k(0)}{\cos\alpha}. \quad (3)$$

Пусть волновые вектора «прямой» и «обратной» волн, распространяющихся под углом α и $\pi - \alpha$ к оси резонатора, лежат в плоскости Oxs. Тогда проекция волнового вектора на ось Oy равна нулю, а его модуль

$$k(\alpha) = \sqrt{k_x^2(\alpha) + k_s^2(\alpha)}, \quad (4)$$

где $k_x(\alpha)$ и $k_s(\alpha)$ - проекции волновых векторов «прямой» и «обратной» волн на оси Ox и Os, соответственно. Отметим, что проекции волновых векторов этих волн на ось Os равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Так как по предположению пространство в резонаторе изотропное и однородное, и не обладает дисперсией, то между частотой и волновым числом должна существовать связь вида:

$$\omega(\alpha)=ck(\alpha). \quad (5)$$

С учетом этого соотношения можем написать, что

$$\omega(\alpha)=\omega(0)/\cos\alpha. \quad (6)$$

Так как частота моды зависит от поперечной составляющей волнового вектора, то можно найти поперечную групповую скорость прямой или обратной волны данной моды. В рассматриваемом случае имеется только составляющая скорости по оси Ox. Тогда групповая скорость вдоль этой оси

$$u_x(\alpha)=\frac{\partial\omega}{\partial k_x(\alpha)}=c\frac{\partial k(\alpha)}{\partial k_x(\alpha)}=c\frac{\partial}{\partial k_x(\alpha)}\sqrt{k_x^2(\alpha)+k^2(0)}=c\frac{k_x(\alpha)}{\sqrt{k_x^2(\alpha)+k^2(0)}}. \quad (7)$$

Итак, получили, что

$$u_x(\alpha)=c\frac{k_x(\alpha)}{k(\alpha)}=c\sin\alpha, \quad (8)$$

или

$$\sin\alpha=\frac{k_x}{k}=\frac{u_x}{c}. \quad (9)$$

Таким образом, движению вдоль оси $0x$ со скоростью u_x могут быть сопоставлены волны, распространяющиеся в резонаторе под углом α и $\pi-\alpha$ к оси резонатора Os и образующие рассматриваемую моду резонатора. Частота (или же волновое число) этих волн может быть выражено через скорость движения как

$$\omega(\alpha)=\frac{\omega(0)}{\sqrt{1-u_x^2/c^2}};\ k(\alpha)=\frac{k(0)}{\sqrt{1-u_x^2/c^2}}. \quad (10)$$

Если взять стоячую моду, то есть моду, образованную волнами, распространяющимися перпендикулярно зеркалам резонатора, и двигаться поперек резонатора со скоростью u, то такая зависимость частоты моды от скорости движения возникает вследствие поперечного эффекта Доплера [2,3].

Отметим, что связь частоты моды со скоростью ее движения такая же, как связь массы движущегося тела с его массой покоя и скоростью движения. Если под $k(0)$ понимать комптоновское волновое число частицы, а под $k(\alpha)$ понимать импульс частицы, измеренный в единицах $\hbar$, то связь между массой и скоростью сразу же получается из предыдущего рассмотрения

$$\frac{mc}{\hbar} = \frac{\frac{m_0 c}{\hbar}}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}\,, \tag{11}$$

или же

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}\,, \tag{12}$$

где u - скорость движения частицы.

3. Время жизни моды в зависимости от скорости движения

Предположим теперь, что зеркала резонатора не стопроцентные. Тогда мода будет обладать определенным временем жизни. Пусть для покоящейся моды время жизни Δt_0. Тогда понятно, что мода, образованная волнами, распространяющимися под углом к оси резонатора, то есть движущаяся мода, будет жить в резонаторе дольше, так как волны реже отражаются от зеркал резонатора, поскольку им приходится преодолевать большее расстояние от одного отражения до другого. Предположим далее, что коэффициенты отражения зеркал не зависят от углов падения волн на зеркала

Для ответа на вопрос во сколько раз увеличится время жизни движущейся моды по сравнению с временем жизни покоящейся моды, то есть моды, образованной волнами с волновыми векторами перпендикулярными плоскостям зеркал резонатора, найдем продольную фазовую скорость, то есть скорость волны вдоль оси резонатора:

$$v_s(\alpha) = \frac{\partial \omega}{\partial k(0)} = c\frac{\partial k(\alpha)}{\partial k(0)} = c\frac{\partial}{\partial k(0)}\sqrt{k_x^2(\alpha) + k^2(0)} = c\frac{k(0)}{\sqrt{k_x^2(\alpha) + k^2(0)}}\,. \tag{13}$$

Итак, видно, что

$$u_s(\alpha) = c \cdot \cos\alpha = c\sqrt{1 - u_x^2 / c^2}\,. \tag{14}$$

Понятно, что время жизни движущейся моды будет

$$\Delta t(\alpha) = \Delta t_0 \frac{u_s(0)}{u_s(\alpha)} = \frac{\Delta t_0}{\cos\alpha} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u_x^2 / c^2}}\,. \tag{15}$$

Из формулы (15) видно, что движущаяся мода живет дольше и тем дольше, чем больше скорость ее движения. С другой стороны понятно, что если двигаться поперек оси резонатора вдоль оси Ox со скоростью движения моды, то волны, образующие моду резонатора будут распространяться перпендикулярно зеркалам и время жизни моды снова уменьшится до величины, равной Δt_0

Отметим, что полученная зависимость времени жизни моды от скорости движения такая же, как и в теории относительности для тел, движущихся со скоростью u вдоль оси Ox.

Если электромагнитное поле в резонаторе не делить на «прямую» и «обратную» волны, а рассматривать как одну волну, претерпевающую ряд последовательных отражений от зеркал резонатора, то можно сказать, что время жизни моды зависит от числа отражений волны, образующей данную моду, от зеркал резонатора. Для того, чтобы амплитуда волны, образующей движущую моду, упала в такое же число раз, что и амплитуда волны, образующей покоящуюся моду, число отражений от зеркал резонатора должно быть одинаковым для обеих волн. Но для волны, распространяющейся под углом к оси резонатора, чем больше угол α, то есть чем больше скорость движения моды поперек оси резонатора, тем больший путь требуется пройти волне при движении от зеркала к зеркалу, чтобы набрать такое же число отражений, что и волна, которая распространяется вдоль оси резонатора. Таким образом, время жизни моды пропорционально пути, который проходит волна при многократном отражении от зеркал до того момента пока ее амплитуда не упадет до заданного уровня по отношению к первоначальному значению амплитуды.

Сделанное утверждение можно наглядно изобразить следующим образом. Для этого рассмотрим две моды – покоящуюся и движущуюся. Если зеркала резонатора заменить поглощающими перегородками, расположенными на расстоянии L друг от друга как это, обычно, делается в оптике, то для каждой из рассматриваемых мод можно вместо волны, претерпевающей многократные отражения от зеркал резонатора, рассматривать волну, распространяющуюся, например, в положительном направлении оси Os и претерпевающую поглощение при прохождении каждой из перегородок.

Выберем у каждой из волн, отвечающих покоящейся и движущейся модам резонатора, некоторую фазовую поверхность. Эти две фазовые поверхности представляют собой две пересекающиеся плоскости, рис.2,а. Угол между этими плоскостями равен углу α . Свяжем с каждой из этих фазовых поверхностей систему координат. С той, которая отвечает покоящейся моде - $Oxys$, а с поверхностью, которая отвечает движущейся моде - $O^* x^* y^* s^*$. Совместим начала координат этих систем отсчета, а оси Oy и $O^* y^*$ направим вдоль линии пересечения поверхностей, рис.2,b. При этом координата y^* любой точки в «развернутом» пространстве резонатора будет равна координате y этой точки. Начало координат обозначим как O^* .

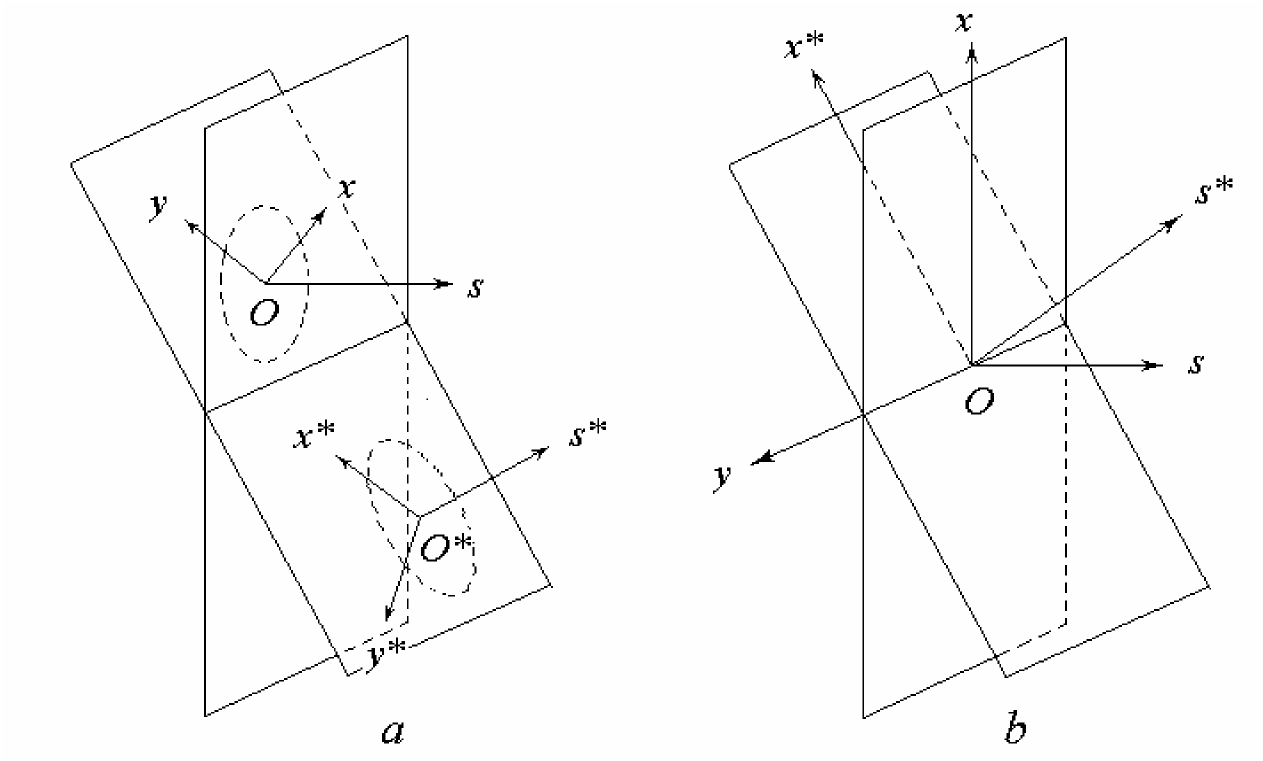

Рис.2.

Выберем на рис.2,b плоскость, совпадающую с плоскостью, в которой лежат оси $O^* s$, Os^* , $O^* x$, Ox^* . Изображение на рис.3 построено в этой плоскости. Отложим вдоль оси $O^* s$ отрезок прямой $O^* A$, кратный длине резонатора с кратностью равной числу отражений (или, что то же самое пересечений поглощающих перегородок) волны, образующей покоящуюся моду, от зеркал резонатора. Вдоль оси $O^* s^*$ также отложим отрезок такой длины, чтобы число отражений от зеркал волны, образующей движущуюся моду было таким же, как и в случае неподвижной моды. Это отрезок O^*M. Он отвечает точке фазовой поверхности с пространственной координатой $x^* = 0$. Из рисунка видно, что время жизни движущейся моды, пропорциональное длине этого отрезка l, выражается через длину отрезка O^*A, которая равна l_0, по формуле

$$l = \frac{l_0}{\cos\alpha} = \frac{l_0}{\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}}. \quad (16)$$

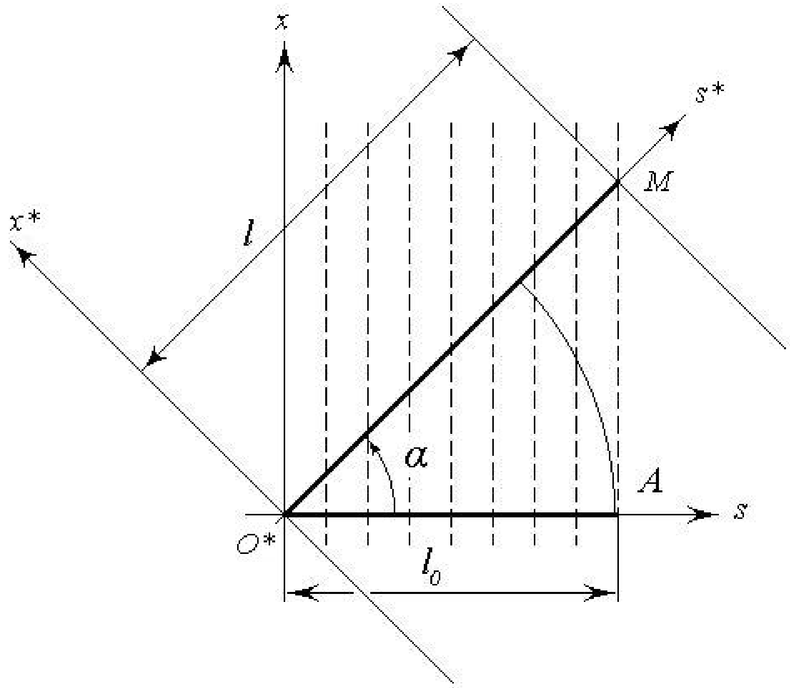

Рис.3.

4. Пространственные и временные координаты события в пространстве резонатора

Отвлечемся теперь от числа отражений волн от зеркал резонатора, и будем называть систему отсчета, связанную с покоящейся модой неподвижной системой отсчета. Систему отсчета, связанную с движущейся модой будем называть движущейся системой отсчета. В неподвижной системе отсчета отложим по оси O^*s отрезок прямой O^*A длиной равной расстоянию l_0, которое волна проходит до тех пор, пока ее амплитуда не уменьшится в заданное число раз.

Затем из точки A восстановим перпендикуляр до пересечения с осью O^*s^* в точке M. Тогда время в неподвижной системе координат можно найти по расстоянию l, которое проходит волна, отвечающая движущейся моде, от начала координат до точки M. Видно, что l и l_0, а, следовательно, t и t_0 будут связаны друг с другом по приведенной выше формуле.

Пусть теперь в «развернутом» пространстве резонаторе распространяется третья волна под углом β к оси резонатора и пусть ее волновой вектор лежит в той же плоскости, что и волновые вектора уже рассмотренных волн. Эта третья волна отвечает моде, движущейся со скоростью $V = c\sin\beta$, причем вектор скорости $\mathbf{V}$ направлен вдоль оси O^*x либо в ее положительном, либо отрицательном направлении. Будем обозначать координатные оси системы отсчета, связанной с этой модой, как $O'x', O'y', O's'$. Эти оси ориентированы так, что плоскость $O'x's'$ совпадает с плоскостями O^*xs и $O^*x^*s^*$, а угол между осями $O's'$ и O^*s равен углу β.

Зададимся вопросом, как определить пространственную координату x' точки M и временную координату l', которая как следует из предыдущих рассуждений, должна равняться некоторому пути, который проходит волна, отвечающая неподвижной моде. Ответ на этот вопрос заключается в определении единого начала отсчета для систем координат $O'x's'$ и O^*xs. Чтобы значения x и l не поменялись, единое начало систем координат O должно быть выбрано так, как показано на рис.4. То есть, во-первых, расстояние между точками B' и M должно равняться l. Это условие задает направление оси $O'x'$. Во-вторых, чтобы не поменялось значение x единое начало отсчета O должно лежать на пересечении оси $O'x'$ и продолжения оси O^*s.

Расстояние, которое проходит волна движущейся моды при наблюдении из системы, связанной с третьей волной, будет выглядеть как отрезок O'^*M. Его длина, как видно из рисунка, равна длине отрезка $BM = l'$

Приведем еще один рисунок (рис.5), на котором можно видеть преобразование координат события M в случае, когда вектор скорости относительного движения

$\mathbf{V}$ направлен в отрицательном направлении оси Ox. Это соответствует отрицательному значению угла α.

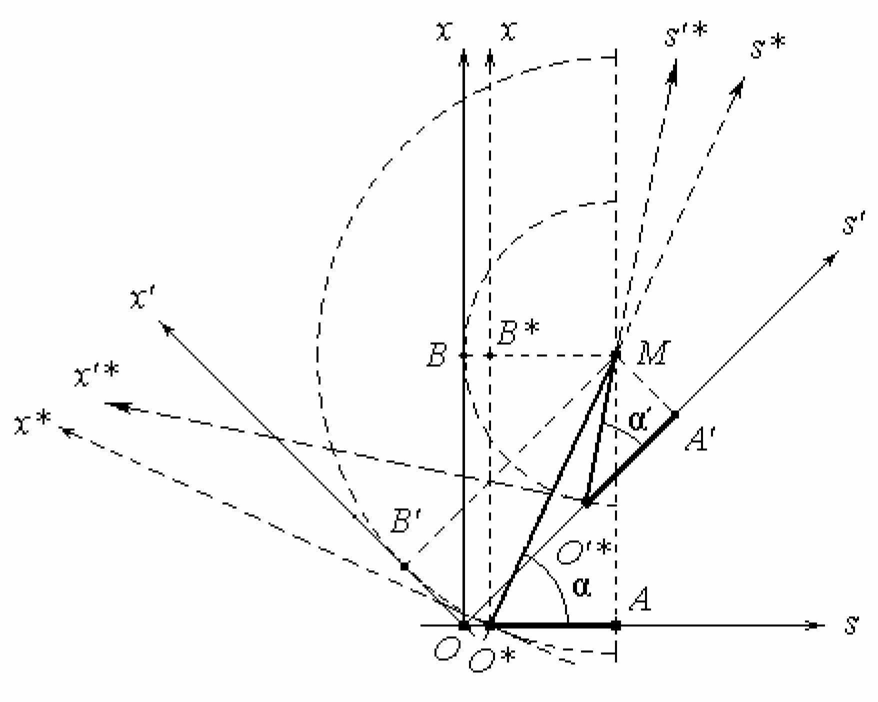

Рис.4.

Из рис.4 и рис.5 мы видим, что при переходе к системе координат, связанной с движущейся модой меняется как пространственная, так и временная координата события.

В рафинированном виде приведенные выше рассуждения будут выглядеть следующим образом (соответствующие им построения представлены на рис.6). Возьмем две системы координат $Oxys$ и $Ox'y's'$ с единым началом в точке O с совпадающими осями Oy и Oy', и, повернутые друг относительно друга на угол β вокруг этих совпадающих осей. Возьмем некоторую точку M и опустим из нее перпендикуляры на координатные оси систем отсчета. На рис.4 показаны проекции этих перпендикуляров и точки M на плоскость, проходящую через оси Os, Os'. Проекция точки M на эту плоскость обозначена также буквой M.

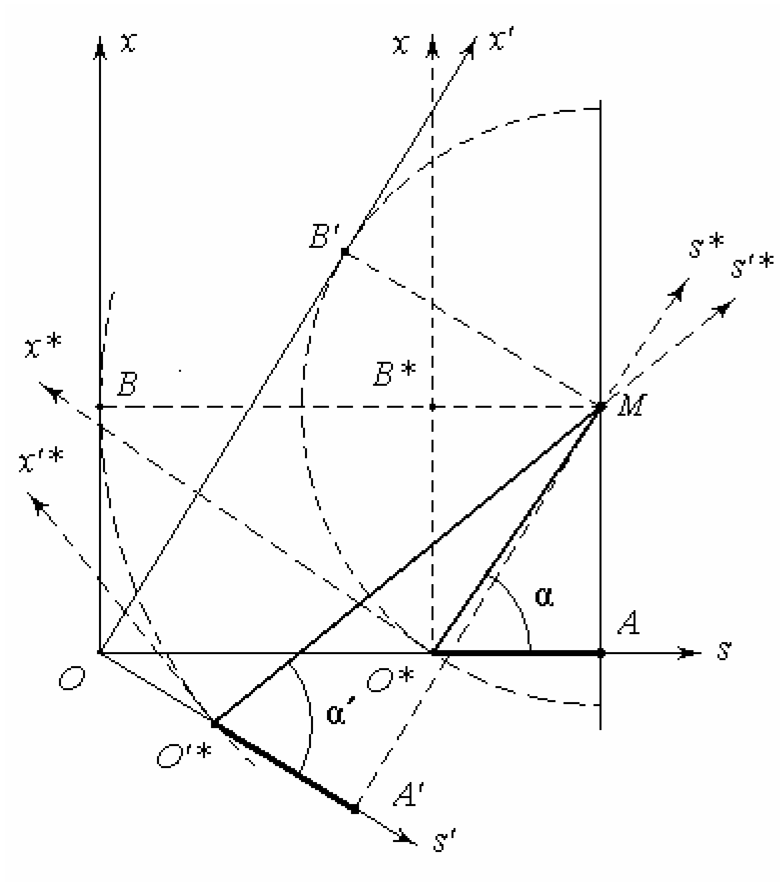

Рис.5.

Исходя из предыдущих рассуждений, можем сказать, что момент времени, соответствующий этой точке в неподвижной системе отсчета, будет определяться расстоянием l, которое проходит волна движущейся моды от точки B' до точки M, а ее положение - расстоянием x между точками A и M.

В движущейся системе отсчета в силу равноправности систем координат ей будет отвечать момент времени, определяемый расстоянием l', которое проходит волна неподвижной моды от точки B до точки M, и положение, определяемое расстоянием x' между точками A' и M.

Таким образом, точку M в «развернутом» пространстве резонатора можно трактовать как некоторое событие (в данном примере под событием будет подразумеваться затухание волны в определенное число раз). Пространственными координатами x, y этой точки являются проекции радиус-вектора этой точки на плоскость волнового фронта волны, образующей неподвижную моду. Временная координата определяется расстоянием l, которое волна движущейся моды проходит до этой точки. И, наоборот, пространственными координатами x', y' точки M являются проекции ее радиус-вектора на плоскость волнового фронта движущейся моды. Ее временная координата определяется расстоянием l', которое волна покоящейся моды проходит до этой точки.

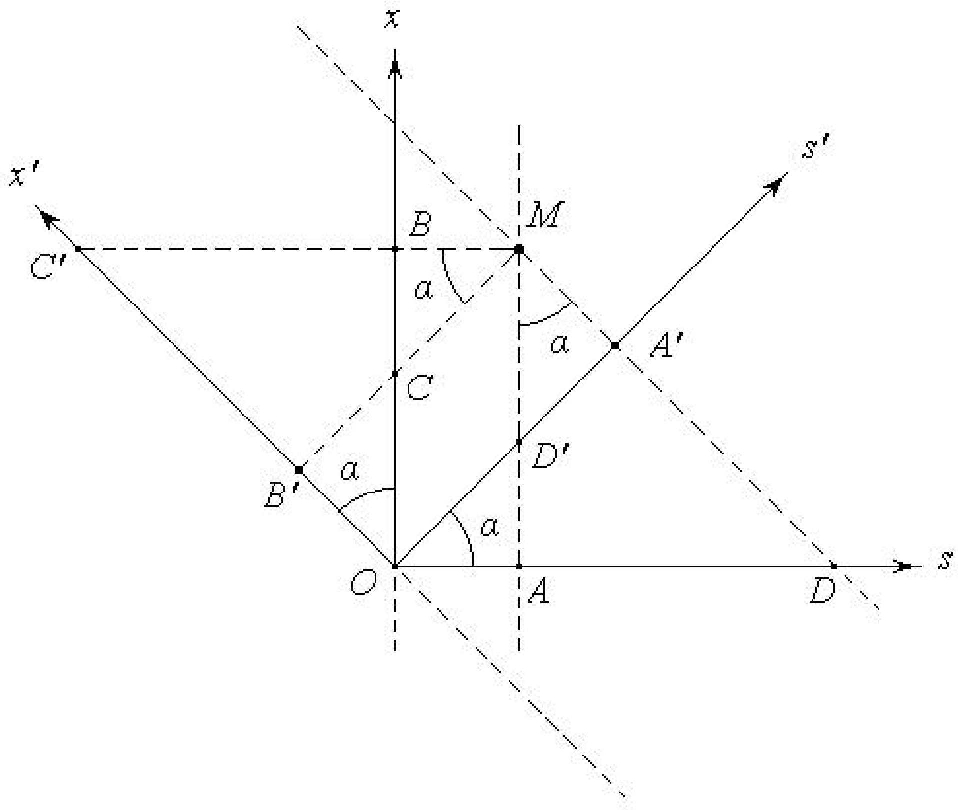

Рис.6.

5. Формулы преобразования координат события

Итак, координаты точки M в неподвижной системе x, y, l, а в движущейся - x', y', l' ($y' = y$), рис.6. Выясним, как связаны между собой координаты x, l, x', l'. Из рисунка видно, что $x' = OB' = OC' - C'B' = \dfrac{OB}{\cos\beta} - B'M\,\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{x}{\cos\beta} - l\,\mathrm{tg}\,\beta$.

Аналогично $l' = BM = C'M - C'B = \dfrac{B'M}{\cos\beta} - OB\,\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{l}{\cos\beta} - x\,\mathrm{tg}\,\beta$. Таким образом,

$$x' = \frac{x - l\sin\beta}{\cos\beta};\ l' = \frac{l - x\sin\beta}{\cos\beta}. \qquad (17)$$

Нетрудно видеть с учетом формул $\sin\beta = V/c$, $\cos\beta = \sqrt{1 - V^2/c^2}$, $l = ct$, $l' = ct'$, что формулы (17) являются формулами преобразованиями Лоренца

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\ t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (18)$$

Обратные преобразования получаются таким же образом, что и прямые. Действительно, $x = OB = OC + CB$. Так как $OC = OB'/\cos\beta = x'/\cos\beta$, а $CB = BM\ \mathrm{tg}\,\beta = l'\,\mathrm{tg}\,\beta$, то $x = \frac{x'}{\cos\beta} + l'\,\mathrm{tg}\,\beta$. Далее, $l = B'M = B'C + CM$. Так как $B'C = OB'\,\mathrm{tg}\,\beta = x'\,\mathrm{tg}\,\beta$, а $CM = BM/\cos\beta = l'/\cos\beta$, то $l = \frac{l'}{\cos\beta} + x'\sin\beta$. В результате имеем формулы выражающие x, l через x', l':

$$x = \frac{x' + l'\sin\beta}{\cos\beta};\ l = \frac{l' + x'\sin\beta}{\cos\beta}. \qquad (19)$$

Это обратное преобразование. Оно также совпадает с обратным преобразованием Лоренца.

6. Обсуждение результатов

Существенным моментом проведенного исследования пространственно-временных отношений между модами резонатора является то, что формулы преобразования Лоренца получены без использования постулата о постоянстве скорости света. Использовались только предположения, что она не обладает дисперсией, пространство внутри резонатора однородное и изотропное, а коэффициенты отражения зеркал резонатора не зависят от того, под каким углом падает на них излучение.

Более того, если провести рассуждения, подобные проведенным в данной работе, для резонатора в четырехмерном пространстве, то можно показать, что постоянство скорости света будет естественным следствием распространения волн с нулевой комптоновской длиной волны в таком резонаторе.

В грубой форме для трехмерного пространства эти рассуждения выглядят таким образом. Рассмотрим в резонаторе с плоскими бесконечными параллельными зеркалами волну с длиной волны большей, чем длина резонатора. Такая волна является «закритичной» волной для данного резонатора и продольная составляющая ее волнового вектора равна нулю. «Распространяясь» от какого-то из зеркал она тотчас дифрагирует и ее волновой фронт в «развернутом» пространстве резонатора является сферическим. Поэтому из систем отсчета, повернутых друг относительно друга на какой то угол, этот сферический фронт будет наблюдаться одинаковым образом.

Если перенести эти рассуждения на четырехмерное пространство и предположить в нем наличие резонатора, подобного рассмотренному резонатору в трехмерном пространстве, то можно прийти к заключению, что скорость движения частиц с нулевой массой покоя не будет зависеть от того, из какой системы отсчета ведется наблюдение этих частиц.

7. Заключение

В настоящей работе проанализированы пространственно временные отношения, возникающие между двумя волнами, распространяющимися под некоторым углом друг к другу в резонаторе, образованном двумя плоскими параллельными бесконечными зеркалами. При волновом векторе одной из них направленном вдоль оси резонатора, она при многократном отражении от зеркал образует покоящуюся моду резонатора. Вторая волна образует при этом движущуюся моду.

Иными словами в работе рассмотрены пространственно-временные отношения между двумя поперечными модами резонатора, движущимися по отношению друг к другу в поперечном к оси резонатора направлении с некоторой скоростью, определяемой углами распространения волн, образующих эти моды.

Показано, что временной координатой события (в данной работе под событием подразумевается затухание волны в определенное число раз) с точки зрения покоящейся моды является расстояние $l = ct$, которое проходит до некоторой точки в «развернутом» пространстве резонатора, где наблюдается это событие волна движущейся моды. И, наоборот, временной координатой события с точки зрения движущейся моды является расстояние $l' = ct'$, которое проходит до этой точки волна покоящейся моды. Пространственными координатами события x, y и x', y' являются проекции рассматриваемой точки на волновой фронт волны покоящейся моды, и, соответственно, на волновой фронт волны движущейся моды.

Показано также, что координаты x, y, l и x', y', l' выражаются друг через друга с помощью формул преобразования Лоренца. Существенно то, что эти формулы преобразования получены без постулата о постоянстве скорости света, а только в предположении, что она не обладает дисперсией, пространство внутри резонатора однородное и изотропное, а коэффициенты отражения зеркал резонатора не зависят от угла падения излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. Радио, 1966.
2. Паули В. Теория относительности. // Под ред. В.Л.Гинзбурга и В.П.Фролова. М.: Наука, 1991.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Государственное изд. физико-математической литературы, 1962.