

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФИЗИЧЕСКИЙ**  
**ИНСТИТУТ**  
*имени*  
*П.Н.Лебедева*



**Ф И А Н**

ПРЕПРИНТ

**31**

**С.Ф. ЛИХАЧЕВ, В.А. ЛАДЫГИН, И.А.ГИРИН**  
**ОБОБЩЕННЫЙ МНОГОЧАСТОТНЫЙ**  
**СИНТЕЗ И ДЕКОНВОЛЮЦИЯ**  
**РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ**  
**ИЗОБРАЖЕНИЙ**

**МОСКВА 2003**

### Аннотация

В работе предложен алгоритм для численного решения задачи многочастотного синтеза и деконволюции изображений космических радиоисточников, наблюдаемых с помощью радиоинтерферометров со сверхдлинной базой (РСДБ). Показано, что разработанный подход позволяет улучшить эффективное заполнение  $(u, v)$ -плоскости и вычислить *неотрицательные* поля интенсивностей наблюдаемых источников на заданой частоте  $\nu$ , а также их спектральные индексы. Многочастотный синтез и анализ изображений, когда наблюдения проводятся одновременно на  $K$  частотах, особенно важен для орбитальных радиоинтерферометров (проект «Радиоастрон»), поскольку позволяет существенно улучшить качество получаемых изображений. В препринте описывается и обосновывается технология выбора вычислительной схемы векторной релаксации, счет по которой, как доказано в данной работе, обеспечивает сходимость к искомому решению в каждой точке расчетной области, если коэффициент усиления этой схемы  $0 < \gamma < 2$ . Разработанный алгоритм протестирован на реальных данных наблюдений, полученных на VLBA.

### Abstract

A numerical solution of the multi-frequency imaging (MFI) for VLBI observations of space radio sources is considered. It is shown that the approach allows to improve  $(u, v)$ -coverage, to estimate non-negative values of the intensity distribution on a given observational frequency, and to estimate spectral indexes of the sources. MFI is extremely important for space VLBI missions (project Radioastron) because it enables to improve quality and morphology of the observational sources. The formal mathematical solution and the strategy of the processing implementation is also described.

## СОДЕРЖАНИЕ

1.	Формулировка модели с ограничениями. О выборе опорной частоты	3
2.	Сеточные аппроксимации расчетных областей. Привязка базовых координат к узлам равномерной сетки	4
3.	Вид целевой функции	6
4.	Формулы для решения задачи условной минимизации целевой функции методом векторной релаксации	8
5.	Алгоритм численного решения задачи	13
6.	Вариант задачи без условий неотрицательности	17
7.	Экспериментальная проверка алгоритма обобщенной многочастотной деконволюции	18
8.	Литература	22
9.	Приложение 1. Некоторые свойства матриц $\mathbf{E}$ и $\widehat{\mathbf{B}}_r$	23
10.	Приложение 2. Выбор схемы векторной релаксации	24
11.	Приложение 3. О сходимости процедуры векторной релаксации	28

## § 1. Формулировка модели с ограничениями. О выборе опорной частоты

При совместной обработке наблюдений выделенного участка небесной сферы, выполненных с помощью узкополосных интерферометров, работающих на близких но различных частотах  $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_K$ , можно использовать следующую модель значений интенсивности источника  $I_{kpq} = I(x_p, y_q, \nu_k)$  в точке  $(x_p, y_q)$  на частоте наблюдения  $\nu_k$ :

$$I_{kpq} \approx (I_0)_{pq} + (I_1)_{pq} \cdot \beta_k + \dots + (I_{N-1})_{pq} \cdot (\beta_k)^{N-1}, \quad k=1, 2, \dots, K, \quad (0.1)$$

с ограничениями  $(I_0)_{pq} \geq 0$ , где  $(I_m)_{pq} = \frac{(\nu_0)^m}{m!} \cdot \frac{\partial^m I}{\partial \nu^m}(x_p, y_q, \nu_0)$  ( $m=0, 1, \dots, N-1$ ) - коэффициенты разложения модельной функции  $I(x_p, y_q, \nu_k)$  в степенной ряд по безразмерному параметру  $\beta_k = \frac{\nu_k}{\nu_0} - 1$ , а  $\nu_0$  - опорная частота наблюдения интерферометра. Задача состоит в вычислении  $N$ -векторного поля коэффициентов  $(\vec{I})_{pq} = ((I_0)_{pq}, (I_1)_{pq}, \dots, (I_{N-1})_{pq})^T$  по заданому критерию оптимизации. Использование разложения (0.1) интенсивностей  $I_{kpq}$  в ряд по  $\beta_k$  обосновано, если функция  $I(\nu)$  достаточно гладкая в окрестности  $\nu = \nu_0$ , а все  $\beta_k$  - малые параметры. Последнее условие выполняется, если диапазон изменения частот  $\nu_1 \leq \nu_k \leq \nu_K$  мал, то есть  $\nu_K - \nu_1 \ll \nu_1$ , а опорная частота  $\nu_0$  выбрана внутри интервала

$$\nu_1 \leq \nu_0 \leq \nu_K, \quad \text{тогда все } |\beta_k| \leq \frac{\nu_K - \nu_1}{\nu_1} \ll 1.$$

Но наименьшее значение величины  $\beta_{\max} = \max_k |\beta_k|$  достигается, если выбрать

$$\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_K}{2}, \quad \text{тогда } \beta_{\max} = \frac{\nu_K - \nu_1}{\nu_K + \nu_1}.$$

В частности, если в точке  $(x_p, y_q)$  интенсивность  $I_{kpq}$  хорошо аппроксимируется степенной зависимостью от частоты  $\nu_k$ :

$$I_{kpq} = (I_0)_{pq} \cdot \left( \frac{\nu_k}{\nu_0} \right)^{\alpha_{pq}}, \quad (0.2)$$

тогда разлагая (0.2) в ряд по  $\beta_k$  получим

$$I_{kpq} = (I_0)_{pq} e^{\xi_k \alpha_{pq}} \approx (I_0)_{pq} \cdot \left( 1 + \xi_k \alpha_{pq} + \frac{(\xi_k \alpha_{pq})^2}{2} \right), \quad \text{где } \xi_k = \ln(1 + \beta_k) \approx \beta_k - \frac{(\beta_k)^2}{2}.$$

Поэтому спектральные индексы  $\alpha_{pq} = \alpha(x_p, y_q)$  связаны с коэффициентами  $(I_0)_{pq}, (I_1)_{pq}$  в (0.1) следующим соотношением:

$$(I_1)_{pq} = \alpha_{pq} \cdot (I_0)_{pq}.$$

Хотя для вычисления величин  $\alpha_{pq}$  достаточно выбрать  $N = 2$ , однако выбирая  $N > 2$  можно еще и проверить справедливость гипотезы (0.2), т.к. тогда, например, коэффициент  $(I_3)_{pq}$  должен быть близок к величине

$$(I_3)_{pq} \approx \frac{1}{2} \alpha_{pq} \cdot (\alpha_{pq} - 1) \cdot (I_0)_{pq}.$$

Поле векторных коэффициентов  $(\vec{I})_{pq} = ((I_0)_{pq}, (I_1)_{pq}, \dots, (I_{N-1})_{pq})^T$  необходимо вычислить на основе обработки серии из  $K$  наборов измерений комплекснозначных значений функций видности  $V_{knm} = V(u_n, v_m, v_k)$ , где точка  $(u_n, v_m)$  определяет приуроченные к единой равномерной сетке координаты базы соответствующего измерения,  $0 \leq n, m < M$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ . Здесь предполагается, что компонента  $w$  базы вдоль линии визирования для всех измерений близка к нулю. Пусть  $k$ -ый набор измерений выполняется на частоте  $v_k$ , и ему соответствует измеренная функция видности  $V(u, v, v_k)$ , удовлетворяющая условию симметрии

$$\vec{V}_{knm} = \vec{V}(u_n, v_m, v_k) = V(-u_n, -v_m, v_k) \quad (0.3)$$

где  $\vec{V}_{knm}$  - величина, комплексно сопряженная  $V_{knm}$ .

## § 2. Сеточные аппроксимации расчетных областей. Привязка базовых координат к узлам равномерной сетки

Пусть точки  $(x_p, y_q)$ , в которых будут определены искомые векторы  $(\vec{I})_{pq}$ , расположены в узлах равномерной сетки с шагом  $\Delta = \frac{2}{M}$ , т.е.

$$x_p = p\Delta - 1, \quad y_q = q\Delta - 1, \quad p, q = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (0.4)$$

Эта сетка покрывает область  $x^2 + y^2 < 1$ , где  $x, y$  - направляющие косинусы, определяющие положение источника на небесной полусфере. Используем следующую дискретную модель значений  $k$ -ой функции видности в точке  $(u_n, v_m)$ :

$$\hat{V}_{knm} = \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} \hat{I}_{kpq} \cdot \exp \{ 2\pi j (u_n x_p + v_m y_q) \}, \quad n, m = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (0.5)$$

где

$$\hat{I}_{kpq} = A_{kpq} \cdot \left( (\hat{I}_0)_{pq} + (\hat{I}_1)_{pq} \cdot \beta_k + \dots + (\hat{I}_{N-1})_{pq} \cdot (\beta_k)^{N-1} \right), \quad (\hat{I}_t)_{pq} = \frac{\Delta^2 \cdot (I_t)_{pq}}{\sqrt{1 - x_p^2 - y_q^2}}, \quad (0.6)$$

$A_{kpq} = A(x_p, y_q, v_k)$  - значение диаграммы направленности интерферометра в точке  $(x_p, y_q)$  при измерениях на частоте  $v_k$ . Ошибки, возникающие при

переходе от интегральной формулы [5] для функции видности к конечной сумме вида (0.5), а также возможность использования в дальнейшем формул дискретного преобразования Фурье накладывают ограничения на точность вычисления базовых координат, а именно, значения  $u, v$  нужно приурочить к узлам единой равномерной сетки с шагом  $\frac{1}{M\Delta} = \frac{1}{2}$  (длины волны, соответствующей частоте  $\nu_0$ ). Чтобы сделать эту “привязку” сначала значения  $u, v$ , если они были измерены на частоте  $\nu_*$ , нужно пересчитать на масштаб соответствующий опорной частоте  $\nu_0$  по формулам:

$$u := \frac{\nu_0 \cdot u}{\nu_*}, \quad v := \frac{\nu_0 \cdot v}{\nu_*}. \quad (0.7)$$

Затем представим  $u, v$ -плоскость в виде объединения квадратов с длинами сторон равными  $\frac{1}{2}$  и с центрами в точках  $\left(\frac{\tilde{n}}{2}, \frac{\tilde{m}}{2}\right)$ , где  $\tilde{n}, \tilde{m}$  – целые числа. Тогда каждой точке  $(u, v)$  можно сопоставить центр того квадрата, которому принадлежит эта точка:

$$(u, v) \Rightarrow \left(\frac{\tilde{n}}{2}, \frac{\tilde{m}}{2}\right) \quad (0.8)$$

где соответствующие значения  $\tilde{n}, \tilde{m}$  определяются формулами:

$$\tilde{n} = \left[2u + \frac{1}{2}\right], \quad \tilde{m} = \left[2v + \frac{1}{2}\right]. \quad (0.9)$$

Здесь  $[h]$  – наибольшее целое число не превосходящее данное вещественное число  $h$ . При этом симметричная точка  $(-u, -v)$  также преобразуется в симметричную точку :

$$(-u, -v) \Rightarrow \left(\frac{-\tilde{n}}{2}, \frac{-\tilde{m}}{2}\right). \quad (0.10)$$

В формуле двумерного дискретного преобразования Фурье в сомножителях вида  $\exp\left\{-\frac{2\pi j(n_1 n_2 + n_3 n_4)}{M}\right\}$  вместо целых чисел  $n_1, \dots, n_4$  достаточно знать лишь числа  $m_p = n_p \bmod M$  ( $p = 1, \dots, 4$ ), т.е. остатки от деления  $n_p$  на целое число  $M$ , поскольку

$$\exp\left\{-\frac{2\pi j(n_1 n_2 + n_3 n_4)}{M}\right\} = \exp\left\{-\frac{2\pi j(m_1 m_2 + m_3 m_4)}{M}\right\},$$

поэтому к каждой целочисленной координате  $\tilde{n}, \tilde{m}$ , полученной после преобразования (0.8), можно прибавить такое целое число кратное  $M$  ( $M$  – четное число), чтобы выполнялись условия

$$0 \leq n < M, \quad 0 \leq m < M, \quad (0.11)$$

т.е. нужно выбрать

$$n = \begin{cases} \tilde{n} \bmod M, & \text{если } \tilde{n} \geq 0 \\ M + (\tilde{n} \bmod M), & \text{если } \tilde{n} < 0 \end{cases}, \quad m = \begin{cases} \tilde{m} \bmod M, & \text{если } \tilde{m} \geq 0 \\ M + (\tilde{m} \bmod M), & \text{если } \tilde{m} < 0 \end{cases}. \quad (0.12)$$

Это обстоятельство “оправдывает” выбор диапазона (0.11) изменения переменных  $n, m$  в формуле (0.5), если при построении сеточных функций  $V_{knm}$  все измеренные значения аргументов  $u, v$  функций видности были приурочены

$$(u, v) \Rightarrow (u_n, v_m) = \left( \frac{n}{2}, \frac{m}{2} \right) \quad (0.13)$$

к узлам единой равномерной сетки координат базы по формулам (0.7), (0.9), (0.12), (0.13) для всех  $K$  частот наблюдений  $v_k$ .

### § 3. Вид целевой функции

Рассмотрим целевую функцию

$$\rho = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \cdot |V_{knm} - \hat{V}_{knm}|^2, \quad (0.14)$$

где в соответствии с предыдущими определениями  $\hat{V}_{knm}$  - модельные (см. (0.5)), а  $V_{knm}$  - экспериментальные значения  $k$ -ой функции видности, приуроченные к сеточному узлу  $(u_n, v_m)$ , например, способом описанным в § 2. В выражение (0.14) введены весовые коэффициенты  $w_{knm} = w(u_n, v_m, v_k)$ , удовлетворяющие условию

$$w(u_n, v_m, v_k) = w(-u_n, -v_m, v_k) \geq 0, \quad (0.15)$$

причем необходимо выбрать  $w_{knm} = 0$ , если значение  $V_{knm}$  неизвестно. Условия (0.3), (0.15) можно также записать в виде

$$\bar{V}_{knm} = V_{kn'm'}, \quad w_{knm} = w_{kn'm'} \geq 0, \quad (0.16)$$

где индексы  $n', m'$  симметричные  $n, m$  вычисляются в силу (0.10), (0.12) по формулам:

$$n' = \begin{cases} M - n, & \text{если } n \neq 0 \\ 0, & \text{если } n = 0 \end{cases}, \quad m' = \begin{cases} M - m, & \text{если } m \neq 0 \\ 0, & \text{если } m = 0 \end{cases}.$$

Перепишем целевую функцию в виде:

$$\rho = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} (\bar{V}_{knm} V_{knm} - \bar{V}_{knm} \hat{V}_{knm} - \bar{V}_{knm} \hat{V}_{knm} + \bar{V}_{knm} \hat{V}_{knm})$$

и преобразуем в ней отдельные слагаемые.

Величина  $S_1 = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \bar{V}_{knm} V_{knm}$  не зависит от искомых величин  $(\hat{I}_t)_{pq}$ .

Величина  $S_2 = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \bar{V}_{knm} V_{knm}$  после изменения порядка суммирования в силу (0.5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} V_{knm} \left( \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} \widehat{I}_{kpq} \cdot \exp \left\{ -2\pi j (u_n x_p + v_m y_q) \right\} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^K \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} \widehat{I}_{kpq} \left( \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} V_{knm} \cdot \exp \left\{ -2\pi j (u_n x_p + v_m y_q) \right\} \right) = \sum_{k=1}^K \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} D_{kpq} \widehat{I}_{kpq}, \text{ где} \\
D_{kpq} &= \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} V_{knm} \cdot \exp \left\{ -2\pi j (u_n x_p + v_m y_q) \right\} \quad (0.17)
\end{aligned}$$

- вещественная функция (в силу (0.16)), называемая  $k$ -ой “грязной” картой и вычисленная в точке  $(x_p, y_q)$ . Поэтому  $S_2$ - вещественная величина, т.к.  $\widehat{I}_{kpq}$ -

тоже вещественная функция. Следовательно, значение  $S_3 = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \widehat{V}_{knm} \overline{V}_{knm}$

также вещественное, т.к.  $S_3 = \overline{S_3} = S_2$ . Поэтому

$$S_2 + S_3 = 2 \sum_{k=1}^K \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} D_{kpq} \widehat{I}_{kpq} \quad (0.18)$$

Преобразуем последнее слагаемое  $S_4 = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \widehat{V}_{knm} \widehat{V}_{knm} =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \left\{ \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} \widehat{I}_{kpq} \cdot \exp \left\{ -2\pi j (u_n x_p + v_m y_q) \right\} \right\} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \widehat{I}_{kil} \cdot \exp \left\{ 2\pi j (u_n x_i + v_m y_l) \right\} \right\} = \\
&= \sum_{k=1}^K \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \widehat{I}_{kpq} \widehat{I}_{kil} \left\{ \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \cdot \exp \left\{ 2\pi j (u_n (x_i - x_p) + v_m (y_l - y_q)) \right\} \right\}, \text{ то есть} \\
S_4 &= \sum_{k=1}^K \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} B_{k,p-i,q-l} \widehat{I}_{kpq} \widehat{I}_{kil} \quad (0.19)
\end{aligned}$$

$$\text{где } B_{k,p-i,q-l} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \cdot \exp \left\{ 2\pi j (u_n \cdot (x_i - x_p) + v_m \cdot (y_l - y_q)) \right\} \quad (0.20)$$

- вещественная функция, называемая  $k$ -ым “грязным” лучом и вычисленная в точке  $(x_p - x_i, y_q - y_l)$ . Это значение зависит от разностей индексов  $p-i, q-l$ , т.к. подставляя (0.4), (0.13) в (0.20) получим

$$\begin{aligned}
B_{k,p-i,q-l} &= \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \cdot \exp \left\{ 2\pi j \left( \frac{n}{2} (i-p) \Delta + \frac{m}{2} (l-q) \Delta \right) \right\} = \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi j}{M} (n(i-p) + m(l-q)) \right\}, \quad (0.21)
\end{aligned}$$

$$\text{то есть } B_{kpq} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \cdot \exp \left\{ -\frac{2\pi j}{M} (np + mq) \right\} \quad (0.22)$$

- двумерное дискретное преобразование Фурье  $k$ -ой весовой сеточной функции  $w_{knm}$ .

Учитывая (0.16), (0.22) область определения функций  $B_{kpq}$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) можно расширить на все целые значения  $p, q$ , используя соотношения

$$B_{kpq} = B_{k,-p,-q} = B_{k,p+iM,q+iM},$$

где  $i, l$  – любые целые числа. Аналогично выражение (0.17) сводится к виду



$$D_{kpq} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} V_{knm} \cdot \exp \left\{ -2\pi j \left( \frac{n}{2}(p\Delta - 1) + \frac{m}{2}(q\Delta - 1) \right) \right\}$$

ИЛИ

$$D_{kpq} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^{n+m} \cdot w_{knm} V_{knm} \cdot \exp \left\{ -\frac{2\pi j}{M} (np + mq) \right\} \quad (0.23)$$

- дискретное преобразование Фурье функции  $(-1)^{n+m} \cdot w_{knm} V_{knm}$ .

Формулы (0.22), (0.23) понадобятся в дальнейшем при вычислении просуммированных по частотам с соответствующими весами значений “грязных” карт и лучей.

Учитывая (0.18), (0.19), (0.21) целевая функция имеет вид:

$$\rho = S_1 - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} D_{kpq} \hat{I}_{kpq} + \sum_{k=1}^K \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} B_{k,p-i,q-l} \hat{I}_{kpq} \hat{I}_{kil}$$

или вид с явной зависимостью от искомым величин  $(\hat{I}_t)_{pq}$  (см. (0.6)) :

$$\begin{aligned} \rho = S_1 - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} D_{kpq} A_{kpq} \cdot \left( (\hat{I}_0)_{pq} + (\hat{I}_1)_{pq} \cdot \beta_k + \dots + (\hat{I}_{N-1})_{pq} \cdot (\beta_k)^{N-1} \right) + \\ \sum_{k=1}^K \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} B_{k,p-i,q-l} A_{kpq} A_{kil} \cdot \left( (\hat{I}_0)_{pq} + (\hat{I}_1)_{pq} \cdot \beta_k + \dots + (\hat{I}_{N-1})_{pq} \cdot (\beta_k)^{N-1} \right) \times \\ \times \left( (\hat{I}_0)_{il} + (\hat{I}_1)_{il} \cdot \beta_k + \dots + (\hat{I}_{N-1})_{il} \cdot (\beta_k)^{N-1} \right). \end{aligned} \quad (0.24)$$

#### § 4. Формулы для решения задачи условной минимизации целевой функции методом векторной релаксации

Далее будем предполагать, что выполнены условия:

- $K \geq N \geq 1$ , и для любой точки  $(x_p, y_q)$
- либо  $A_{kpq} = 0$  для всех  $k = 1, 2, \dots, K$ , тогда  $(x_p, y_q) \in G_1$ ,
- либо  $A_{k_n p q} \neq 0$  не менее чем для  $N$  различных частотных индексов  $k_1, \dots, k_N$ , тогда  $(x_p, y_q) \in G_2$ .

Построим алгоритм для решения задачи минимизации функции  $\rho$ , (см. (0.24)) при наличии ограничений – неравенств

$$(\hat{I}_0)_{pq} \geq 0, \quad p, q = 0, 1, \dots, M-1. \quad (0.26)$$

Эта задача квадратичного программирования отличается от классической задачи на условный экстремум, в которой имеются только условия – равенства, и ее решение, т.е.  $\approx \frac{\pi}{4} \cdot N \cdot M^2$  компонент векторного поля

$(\vec{\hat{I}})_{pq} = \left( (\hat{I}_0)_{pq}, (\hat{I}_1)_{pq}, \dots, (\hat{I}_{N-1})_{pq} \right)^T$  согласно теории Куна и Такера [1,2]

удовлетворяет следующей системе равенств и неравенств:

$$(D_1)_{pq} = 0, \dots, (D_{N-1})_{pq} = 0, \quad (0.27)$$

$$\text{если } (\widehat{I}_0)_{pq} = 0, \text{ тогда } (D_0)_{pq} \leq 0, \quad (0.28)$$

$$\text{если } (\widehat{I}_0)_{pq} \neq 0, \text{ тогда } (D_0)_{pq} = 0 \text{ и } (\widehat{I}_0)_{pq} > 0, \quad (0.29)$$

где  $m$ -ая остаточная карта  $(D_m)_{pq}$  определяется формулой:

$$(D_m)_{pq} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial (\widehat{I}_m)_{pq}} = \sum_{k=1}^K A_{kpq} \cdot D_{kpq} \cdot (\beta_k)^m - \\ - \sum_{k=1}^K A_{kpq} \cdot (\beta_k)^m \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} A_{kil} \cdot B_{k,p-i,q-l} \cdot \left( (\widehat{I}_0)_{il} + (\widehat{I}_1)_{il} \cdot \beta_k + \dots + (\widehat{I}_{N-1})_{il} \cdot (\beta_k)^{N-1} \right), \quad (0.30) \\ m = 0, 1, \dots, N-1$$

а условия (0.27) - (0.29) должны выполняться только для точек  $(x_p, y_q) \in G_2$ . Заранее неизвестно в каких точках в условиях (0.28), (0.29) будут выполняться равенства  $(D_0)_{pq} = 0$ , а в каких неравенства  $(D_0)_{pq} \leq 0$ , поэтому задача является нелинейной, хотя все остаточные карты  $(D_m)_{pq}$  линейно зависят от искомого  $(\widehat{I}_n)_{il}$ .

Предлагаемый здесь алгоритм векторной релаксации для численного решения этой задачи состоит из последовательности шагов, на каждом из которых по значениям  $(D_m)_{rt}^{(s-1)}, (\widehat{I}_0)_{rt}^{(s-1)}$ , полученным на предыдущем  $(s-1)$ -ом шаге, выбирается подходящая точка  $(x_p, y_q) \in G_2$ , в которой уточняются значения только одного вектора коэффициентов  $(\vec{I})_{pq}^{(s-1)} \Rightarrow (\vec{I})_{pq}^{(s)}$  таким образом, чтобы обеспечить уменьшение функции  $\rho$  при выполнении условия  $(\widehat{I}_0)_{pq}^{(s)} \geq 0$  и условий сходимости этой процедуры к решению с заданным коэффициентом усиления схемы релаксации  $\gamma$ . Все остальные векторы  $(\vec{I})_{il}$  на этом шаге остаются неизменными, т.е.

$$(\vec{I})_{il}^{(s)} = (\vec{I})_{il}^{(s-1)}, \text{ если } (i, l) \neq (p, q). \quad (0.31)$$

Далее осуществляется расчет значений остаточной векторной карты  $(\vec{D})_{rt}^{(s)} = ((D_0)_{rt}^{(s)}, (D_1)_{rt}^{(s)}, \dots, (D_{N-1})_{rt}^{(s)})^T$  для всех точек  $(x_r, y_t) \in G_2$  по формуле

$$(\vec{D})_{rt}^{(s)} = (\vec{D})_{rt}^{(s-1)} - \mathbf{B}_{pqrt} \circ \left( (\vec{I})_{pq}^{(s)} - (\vec{I})_{pq}^{(s-1)} \right), \quad (0.32)$$

полученной вычитанием из формулы (0.30) при  $(\tilde{I})_{rt} = (\tilde{I})_{rt}^{(s)}$  той же формулы

$$\text{при } (\tilde{I})_{rt} = (\tilde{I})_{rt}^{(s-1)} \text{ с учетом соотношений (0.31). Здесь } \widehat{\mathbf{V}}_{pqrt} = \begin{pmatrix} \widehat{B}_0 & \widehat{B}_1 & \cdots & \widehat{B}_{N-1} \\ \widehat{B}_1 & \widehat{B}_2 & \cdots & \widehat{B}_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \widehat{B}_{N-1} & \widehat{B}_N & \cdots & \widehat{B}_{2N-2} \end{pmatrix}$$

- матрица значений  $B_{k,p-r,q-t}$  “грязных” лучей в точке  $(x_p - x_r, y_q - y_t)$ , просуммированных по частотам  $\nu_k$  с соответствующими весами  $A_{kpq} A_{krt} \cdot (\beta_k)^n$ . Точнее коэффициент  $(\widehat{B}_{il})_{pqrt}$ , расположенный в  $i$ -ой строке и  $l$ -ом столбце матрицы  $\widehat{\mathbf{V}}_{pqrt}$ , определяется формулой

$$(\widehat{B}_{il})_{pqrt} = \widehat{B}_{i+l} = \sum_{k=1}^K B_{k,p-r,q-t} A_{kpq} A_{krt} \cdot (\beta_k)^{i+l}, \quad i, l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (0.33)$$

В случае произвольных диаграмм направленности интерферометров  $A_{krt}$  расчеты по формулам (0.32), (0.33) требуют больших объемов оперативной памяти – не менее  $(K+2N) \cdot M^2$  чисел: для хранения  $K$  массивов “грязных лучей”  $B_{krt}$  и двух векторно-значных массивов  $(\tilde{I})_{rt}$  и  $(\bar{D})_{rt}$  даже, если все значения  $A_{krt}$  не хранить в памяти, а каждый раз вычислять по аналитическим формулам. Поэтому далее для экономии машинной памяти рассмотрим только случай, когда

$$A_{krt} = \begin{cases} A_k \varphi_{rt}, & \text{если } x_r^2 + y_t^2 < 1 \\ 0, & \text{если } x_r^2 + y_t^2 \geq 1 \end{cases}, \quad \varphi_{rt} \geq 0, \quad A_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (0.34)$$

где  $A_k$  - коэффициент усиления  $k$ -го интерферометра,  $\varphi_{rt}$  - нормированная диаграмма направленности, которая не зависит от частоты  $\nu_k$  и будет учтена в качестве дополнительного сомножителя в каждой компоненте вектора  $(\tilde{I})_{rt}$ .

При этом условия (0.25) при  $K \geq N$  выполняются и во всех формулах, начиная с формулы (0.24), можно заменить  $A_{krt} \Rightarrow A_k$ . Тогда компоненты начальной остаточной векторной карты  $(\bar{D})_{rt}^{(0)}$  будут определяться из (0.30), когда все  $(\tilde{I})_{il}^{(0)} = \bar{0}$  по формулам

$$(D_i)_{rt}^{(0)} = \sum_{k=1}^K D_{krt} A_k \cdot (\beta_k)^i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

и в силу (0.23) получим, что  $(D_i)_{rt}^{(0)}$  является преобразованием Фурье функции:

$$(V_i)_{nm} = \sum_{k=1}^K (-1)^{n+m} \cdot w_{knm} V_{knm} A_k \cdot (\beta_k)^i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (0.35)$$

Теперь индексы матрицы  $\widehat{\mathbf{V}}_{prt}$  определяются только разностями  $r-p$ ,  $t-q$ , т.е.  $\widehat{\mathbf{V}}_{prt} = \widehat{\mathbf{V}}_{r-p, t-q}$ , а элемент двух-индексной матрицы  $\widehat{\mathbf{V}}_{rt}$ , расположенный  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце есть

$$\left(\widehat{B}_{i+l}\right)_{rt} = \sum_{k=1}^K B_{krt} \cdot A_k^2 \cdot (\beta_k)^{i+l}, \quad i, l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (0.36)$$

Из (0.22) следует, что функции  $\left(\widehat{B}_i\right)_{rt}$  являются преобразованиями Фурье функций:

$$\left(W_i\right)_{nm} = \sum_{k=1}^K w_{knm} \cdot A_k^2 \cdot (\beta_k)^i, \quad i = 0, 1, \dots, 2N-2. \quad (0.37)$$

Расчет компонент матриц  $\mathbf{V}_i$  и  $\mathbf{W}_i$  непосредственно по исходным данным и формулам (0.35), (0.37) позволяет существенно уменьшить объем используемой машинной памяти, поскольку тогда нет необходимости хранить значения  $V_{krm}$ ,  $w_{knm}$ ,  $B_{krt}$ .

Введем обозначения: пусть  $\bar{e}_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$  - орт, соответствующий нулевой

компоненте  $N$ -вектора;  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & \cdots & E_{N-1} \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E_{N-1} & E_N & \cdots & E_{2N-2} \end{pmatrix}$  - матрица максимальных

значений  $B_{k,0,0}$  "грязных" лучей, просуммированных по частотам  $\nu_k$  с соответствующими весами  $A_k^2 \cdot (\beta_k)^n$ . Точнее  $\mathbf{E} = \widehat{\mathbf{B}}_{0,0} = \{E_{i+l}\}$ , т.е. компоненты  $\mathbf{E}$  определяются формулой (0.36) при  $r=t=0$

$$E_{i+l} = \left(\widehat{B}_{i+l}\right)_{0,0} = \sum_{k=1}^K B_{k,0,0} \cdot A_k^2 \cdot (\beta_k)^{i+l}, \quad i, l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (0.38)$$

В приложении 1 доказано, что  $\mathbf{E}$ - положительная матрица, поэтому имеется обратная матрица  $\mathbf{E}^{-1}$ . Пусть  $\mathbf{T} = \{T_{il}\}$  - обратимая нижняя треугольная матрица, т.е.  $T_{il} = 0$ , если  $i < l$  ( $i, l = 0, 1, \dots, N$ ), определяемая условием

$$\mathbf{E} = \mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}, \quad (0.39)$$

где  $\mathbf{T}^*$  - верхняя треугольная матрица сопряженная с  $\mathbf{T}$ .

Расчет очередного  $s$ -го шага ( $s = 1, 2, \dots$ ) начинается с выбора точки  $(x_p, y_q)$ , т.е. с поиска значений индексов  $r = p$ ,  $t = q$ , на которых достигается максимум

$$\mathcal{E}^{(s-1)} = \max_{x_r^2 + y_t^2 < 1; 1 \leq m < N} \left\{ \left| (D_m)_{rt}^{(s-1)} \right|, \left| \Gamma_{rt}^{(s-1)} \right| \right\}, \quad (0.40)$$

$$\text{где } \Gamma_{rt}^{(s-1)} = \min \left\{ - (D_0)_{rt}^{(s-1)}, \frac{T_{00}^2}{\gamma} \cdot (\widehat{I}_0)_{rt}^{(s-1)} + T_{00} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_{0n} \cdot (D_n)_{rt}^{(s-1)} \right\}, \quad (0.41)$$

$\Psi_{0n}$  - элементы нулевой строки матрицы  $(\mathbf{T}^*)^{-1} = (\Psi_{in})$ ;  $\gamma$  - коэффициент усиления следующей схемы векторной релаксации для расчета вектора  $(\bar{I})_{pq}^{(s)}$ :

$$\bar{\delta I} = \gamma \mathbf{E}^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)}, \quad \sigma_* = \begin{cases} T_{00} \cdot \left\{ (\bar{I}_0)_{pq}^{(s-1)} + (\delta \bar{I})_0 \right\}, & \text{если } (\bar{I}_0)_{pq}^{(s-1)} + (\delta \bar{I})_0 < 0 \\ 0, & \text{если } (\bar{I}_0)_{pq}^{(s-1)} + (\delta \bar{I})_0 \geq 0 \end{cases},$$

$$(\bar{I})_{pq}^{(s)} = (\bar{I})_{pq}^{(s-1)} + \bar{\delta I} - \sigma_* \cdot \mathbf{T}^{-1} \circ \bar{e}_0. \quad (0.42)$$

В приложении 2 доказано, что если  $0 < \gamma < 2$ , то для выбранной таким образом точки  $(x_p, y_q) \in G_2$  счет по формулам (0.32), (0.42) обеспечивает справедливость оценки

$$0 \leq \varepsilon^{(s-1)} \leq \Omega \cdot \left( \frac{\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)}}{\gamma(2-\gamma)} \right)^{1/2}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (0.43)$$

где  $\rho^{(s)}$  - значение целевой функции  $\rho$  после  $s$ -го шага,

$$\Omega = \max_{0 \leq m < N} \sqrt{E_{m+m}}, \quad E_{m+m} = \sum_{n=m}^{N-1} T_{nm}^2, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{см. (0.39)}).$$

Вычисления по формулам (0.32), (0.40), (0.42) прекращаются после  $s$ -го шага, если выполнено условие  $\varepsilon^{(s-1)} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  - заданная точность.

В приложении 3 доказано, что выполнение условия (0.43) гарантирует сходимость этого итерационного процесса к решению задачи квадратичного программирования (0.27) - (0.29). В этом приложении получены также следующие оценки для скорости сходимости этих итераций к решению  $(\bar{I}_L)_{pq}^{(\infty)}$ ,  $(D_L)_{rt}^{(\infty)}$ :

$$\left| (\bar{I}_L)_{pq}^{(\infty)} - (\bar{I}_L)_{pq}^{(m)} \right| \leq \left( \frac{\gamma \cdot (E^{-1})_{LL}}{2-\gamma} \right)^{1/2} \cdot \sum_{s=m+1}^{\infty} (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})^{1/2}, \quad (0.44)$$

$$\left| (D_L)_{rt}^{(\infty)} - (D_L)_{rt}^{(m)} \right| \leq \left( \frac{\gamma \cdot E_{L+L}}{2-\gamma} \right)^{1/2} \cdot \sum_{s=m+1}^{\infty} (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})^{1/2}, \quad (0.45)$$

$$L = 0, 1, \dots, N-1, \quad m = 0, 1, \dots,$$

где  $E_{L+L}, (E^{-1})_{LL}$  - значения  $L$ -го диагонального элемента соответственно матриц  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}^{-1}$ , но эти оценки применимы только, если сходится ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})^{1/2} < \infty. \quad (0.46)$$

Последнее условие будет, например, выполнено, если  $\rho^{(s)} - \rho^{(\infty)} \square s^{-\omega}$ , где  $\omega > 1$ ,

а  $\rho^{(\infty)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \rho^{(s)}$ , т.к. тогда  $\sum_{s=m+1}^{\infty} (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})^{1/2} \square m^{\frac{1-\omega}{2}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ . Для изучения

скорости сходимости ряда (0.46) требуется более детальное исследование.

## § 5. Алгоритм численного решения задачи

Далее предлагается алгоритм совместной обработки наблюдений в  $K$  близких, но различных частотных диапазонах при условии, что диаграммы направленности интерферометров  $A_{krt}$  имеют вид:

$$A_{krt} = \begin{cases} A_k \varphi_{rt}, & \text{если } x_r^2 + y_t^2 < 1 \\ 0, & \text{если } x_r^2 + y_t^2 \geq 1 \end{cases}, \quad \varphi_{rt} \geq 0, \quad A_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

где функция  $\varphi_{rt}$  не зависит от частоты  $\nu_k$  и будет учтена в качестве дополнительного сомножителя в каждой компоненте вектора  $(\vec{I})_{rt}$ . Пусть исходные данные заданы в виде файла  $\Phi$  записного типа, где в каждой записи одним и тем же координатам базы  $(u, v)$  соответствуют  $K \geq N$  измеренных значений видности  $V_1, \dots, V_K$  для всех частот наблюдений  $\nu_k$ , причем некоторые  $V_j$  могут быть неопределены, если выставлен соответствующий флаг. Здесь  $N$  – число учитываемых коэффициентов разложения модельной интенсивности источников в ряд по малому параметру  $\beta_k$ . При использовании этого алгоритма основной объем необходимой оперативной памяти  $\approx (4N-1)M^2 + (3N-1)K + N^2 + M$  чисел слабо зависит от  $K$  – числа обрабатываемых частот. При реализации алгоритма можно хранить в одних и тех же массивах матрицы:  $\mathbf{W}_i$  и  $\hat{\mathbf{V}}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N-2$ ; матрицы  $\mathbf{V}_i$  и  $\mathbf{D}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ ; матрицы  $\Sigma \mathbf{1}$  и  $\hat{\mathbf{I}}_0$ , а также  $\Sigma \mathbf{V}$  и  $\hat{\mathbf{I}}_1$  (для последней матрицы только, если  $N \neq 1$ ).

1. Выберем величину  $M = 2^{m_0}$  (линейную размерность массивов), параметры  $N$ ,  $K$ , коэффициент усиления схемы релаксации  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 2$ ); зададим точность  $\varepsilon > 0$ , определяющую окончание счета, величины порогов  $\varphi^{(*)}$ ,  $\hat{I}_0^{(*)} > 0$ , набор  $A_k$  – коэффициентов усиления интерферометров и аналитические формулы для расчета единой нормированной диаграммы направленности интерферометров  $\varphi_{rt}$  и ненормированных весовых множителей  $w_{kmm}$ . Зададим набор частот  $\nu_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) измерений  $\nu_{k+1} > \nu_k$ ,  $\nu_K - \nu_1 \ll \nu_1$ , и опорную частоту  $\nu_0$  внутри интервала  $\nu_1 < \nu_0 < \nu_K$  (лучше выбрать  $\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_K}{2}$ ). Вычислим значения малых параметров

$\beta_k = \frac{\nu_k}{\nu_0} - 1$  и сохраним величины  $A_k \cdot (\beta_k)^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  и  $A_k^2 \cdot (\beta_k)^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N-2$  соответственно в массивах размерности  $N \times K$  и  $(2N-1) \times K$  для использования в п.2. Создадим целочисленный массив

граничных индексов  $Q_p = \frac{M}{2} - \left[ \sqrt{p(M-p)} \right]$ ,  $p = 1, 2, \dots, M-2$ , где  $[h]$  - наибольшее целое число не превосходящее данное вещественное число  $h$ . Обнулیم  $3N-1$  массивов размерности  $M \times M$  каждый, где будут храниться матрицы  $V_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  и матрицы  $W_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N-2$ .

2. В цикле по номеру частоты  $k = 1, 2, \dots, K$  выполним следующее:

✓ Обнуляем 2 массива  $\Sigma I$  и  $\Sigma V$  размерности  $M \times M$ .

✓ Последовательно просматривая все записи файла  $\Phi$  исходных данных для текущей записи сначала проверим флаг, соответствующий значению  $k$ -ой видности  $V_k$ . Если  $V_k$  отсутствует, тогда перейдем к следующей записи файла  $\Phi$ . В противном случае текущие координаты базы  $(u, v)$ , если они были измерены на частоте  $\nu_*$ , пересчитаем на масштаб, соответствующий частоте  $\nu_0$  по формулам:  $u := \frac{\nu_0 \cdot u}{\nu_*}$ ,  $v := \frac{\nu_0 \cdot v}{\nu_*}$ , и

приурочим их  $(u, v) \Rightarrow (u_n, v_m)$  к узлу единой равномерной сетки по формулам:  $n = \begin{cases} \tilde{n} \bmod M, & \text{если } \tilde{n} \geq 0 \\ M + (\tilde{n} \bmod M), & \text{если } \tilde{n} < 0 \end{cases}$ ,  $m = \begin{cases} \tilde{m} \bmod M, & \text{если } \tilde{m} \geq 0 \\ M + (\tilde{m} \bmod M), & \text{если } \tilde{m} < 0 \end{cases}$ ,

$0 \leq n < M$ ,  $0 \leq m < M$ , где  $\tilde{n} = \left[ 2u + \frac{1}{2} \right]$ ,  $\tilde{m} = \left[ 2v + \frac{1}{2} \right]$ . Тогда  $u_n = \frac{n}{2}$ ,  $v_m = \frac{m}{2}$  -

результат этой “привязки”. Здесь  $(\tilde{n} \bmod M)$  - остаток от деления целого  $\tilde{n}$  на целое число  $M$ . Для полученного таким способом  $n, m$ - матричного индекса добавим очередное значение в гистограмму  $\Sigma I$  и в сумму значений  $\Sigma V$   $k$ -ой видности:  $(\Sigma I)_{nm} := (\Sigma I)_{nm} + 1$ ,  $(\Sigma V)_{nm} := (\Sigma V)_{nm} + V_k$ .

Затем вычислим симметричный матричный индекс  $n', m'$  по формулам:  $n' = \begin{cases} M - n, & \text{если } n \neq 0 \\ 0, & \text{если } n = 0 \end{cases}$ ,  $m' = \begin{cases} M - m, & \text{если } m \neq 0 \\ 0, & \text{если } m = 0 \end{cases}$  и для него также добавим

очередные значения  $(\Sigma I)_{n'm'} := (\Sigma I)_{n'm'} + 1$ ,  $(\Sigma V)_{n'm'} := (\Sigma V)_{n'm'} + \overline{V_k}$ , где  $\overline{V_k}$  - величина, комплексно сопряженная  $V_k$ . Повторим вычисления этого подпункта для следующей записи файла  $\Phi$  и т.д. Просмотр файла  $\Phi$  завершен.

✓ В цикле по  $n, m = 0, 1, \dots, M-1$  для текущей точки  $(u_n, v_m)$  вычислим  $k$ -ый ненормированный весовой множитель  $w_{knm}$  по заданной аналитической формуле и усредненную  $k$ -ую видность  $V_{knm}$  по формуле: если  $(\Sigma I)_{nm} \neq 0$ , тогда  $V_{knm} := \frac{(\Sigma V)_{nm}}{(\Sigma I)_{nm}}$ , а если  $(\Sigma I)_{nm} = 0$ , тогда  $V_{knm}$  не определена, поэтому следует выбрать  $w_{knm} := 0$ . Затем сформируем  $2N-1$  значение  $(W_i)_{nm}$  по формулам  $(W_i)_{nm} := (W_i)_{nm} + w_{knm} \cdot A_k^2 \cdot (\beta_k)^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N-2$  и  $N$  значений

$(V_i)_{nm}$  по формулам  $(V_i)_{nm} := (V_i)_{nm} + (-1)^{n+m} \cdot w_{knm} \cdot V_{knm} \cdot A_k \cdot (\beta_k)^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Веса  $w_{knm}$  должны быть определены для всех  $K \cdot M^2$  значений их индексов и удовлетворять условиям  $w_{knm} \geq 0$  и симметрии  $w_{knm} = w_{kn'm'}$ . Тогда по построению величины  $V_{knm}$ ,  $(V_i)_{nm}$ ,  $(W_i)_{nm}$  будут удовлетворять условиям:  $V_{knm} = \overline{V_{kn'm'}}$ ,  $(V_i)_{nm} = \overline{(V_i)_{n'm'}}$ ,  $(W_i)_{nm} = \overline{(W_i)_{n'm'}}$ . Далее текущие значения  $w_{knm}$ ,  $V_{knm}$  не понадобятся и сохранять их в массивах не нужно. Единую нормировку весов  $w_{knm}$  делать не нужно, поскольку искомые матрицы  $\hat{I}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  от нее не зависят. Цикл по  $n, m$  завершен. Цикл по переменной  $k$  завершен.

В результате выполнения п.2 будут вычислены матричные элементы вида  $(W_i)_{nm} = \sum_{k=1}^K w_{knm} A_k^2 (\beta_k)^i$ ,  $(V_i)_{nm} = \sum_{k=1}^K (-1)^{n+m} w_{knm} V_{knm} A_k (\beta_k)^i$ , где  $w_{knm}$  - ненормированные веса,  $V_{knm}$  - среднее значение  $k$ -ых видностей, приуроченных к одному и тому же  $\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$ - узлу равномерной  $u, v$ -сетки базовых координат, построенной в масштабе длины волны  $\lambda_0$  соответствующей опорной частоте  $\nu_0$ .

3. Обнулим матрицы коэффициентов  $\hat{I}_i$   $i = 0, 1, \dots, N-1$ , т.е. сформируем

нулевое начальное векторное поле  $\vec{\hat{I}}_{pq}^{(0)} = \left( (\hat{I}_0)_{pq}^{(0)}, (\hat{I}_1)_{pq}^{(0)}, \dots, (\hat{I}_{N-1})_{pq}^{(0)} \right)^T$ .

Применяя  $3N-1$  раз алгоритм двумерного быстрого преобразования Фурье, вычислим для всех значений индексов  $p, q = 0, 1, \dots, M-1$  массивы начальных остаточных карт – просуммированные по частотам с весами

аналоги “грязных” карт :  $(D_i)_{pq}^{(0)} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} (V_i)_{nm} \cdot \exp\left\{-\frac{2\pi j}{M}(np + mq)\right\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  и массивы

просуммированных по частотам с разными весами аналогов “грязных” лучей :  $(\hat{B}_i)_{pq} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} (W_i)_{nm} \cdot \exp\left\{-\frac{2\pi j}{M}(np + mq)\right\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N-2$ . Здесь

точки  $(x_p, y_q)$ , в которых будут определены искомые векторы коэффициентов  $(\vec{\hat{I}})_{pq}$ , расположены в  $M^2$  узлах равномерной сетки с

шагом  $\Delta = \frac{2}{M}$  и  $x_p = p\Delta - 1$ ,  $y_q = q\Delta - 1$ ,  $p, q = 0, 1, \dots, M-1$ . Эта сетка покрывает область  $x^2 + y^2 < 1$ , где  $x, y$  - направляющие косинусы, определяющие положение источника на небесной полусфере.

4. Вычислим обратную матрицу  $E^{-1}$  по коэффициентам матрицы  $E > 0$  равным  $E_{i+l} = (\hat{B}_{i+l})_{0,0}$ ,  $i, l = 0, 1, \dots, N-1$ , используя запись  $E$  в виде произведения матриц  $E = T^* \circ T$ , где  $T = (T_{nm})$ - нижняя треугольная



матрица, т.е.  $T_{nm} = 0$ , если  $n < m$ , а  $\mathbf{T}^*$  - матрица сопряженная с  $\mathbf{T}$ . Для вещественной матрицы  $\mathbf{E}$  матрицу  $\mathbf{T}$  также можно выбрать вещественной, если ее компоненты  $T_{nm}$  для  $n \geq m$  вычислить в цикле по  $n = N-1, N-2, \dots, 0$  и  $m = n-1, n-2, \dots, 0$  по рекуррентным формулам:

$$T_{nn} = \sqrt{E_{n+n} - \sum_{i=n+1}^{N-1} T_{in}^2}, \quad T_{nm} = \frac{E_{n+m} - \sum_{i=n+1}^{N-1} T_{in} \cdot T_{im}}{T_{nn}} \quad (\text{заметим, что при } n = N-1 \text{ суммы } \sum_{i=n+1}^{N-1} \text{ в этих формулах отсутствуют}).$$

Подкоренные выражения здесь положительны поскольку  $\mathbf{E} > 0$ . Затем для  $n \leq m$  вычислим элементы  $\Psi_{nm}$  верхней треугольной матрицы  $(\mathbf{T}^*)^{-1} = (\Psi_{nm})$  в цикле по переменным

$$n = N-1, N-2, \dots, 0 \quad m = N-1, N-2, \dots, n \quad \text{по формуле } \Psi_{nm} = \frac{\delta_{nm} - \sum_{i=n+1}^{N-1} T_{in} \cdot \Psi_{im}}{T_{nn}}.$$

Здесь  $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m \end{cases}$  - символ Кронекера. Вычислим все элементы

искомой матрицы  $\mathbf{E}^{-1} = (E^{-1})_{nm}$  в цикле по  $n, m = 0, 1, \dots, N-1$  по формуле

$$(E^{-1})_{nm} = \frac{\Psi_{nm} - \sum_{i=0}^{n-1} T_{ni} \cdot (E^{-1})_{im}}{T_{nn}}. \quad \text{Определим номер первого шага } s := 1.$$

5. Расчет очередного  $s$ -го шага ( $s = 1, 2, \dots$ ) начинается с поиска подходящей точки  $(x_p, y_q)$ . Для этого в цикле по  $r = 1, 2, \dots, M-2$  и  $t = Q_r, Q_r + 1, \dots, M - Q_r - 1$ , который соответствует перебору всех точек  $(x_r, y_t)$ , удовлетворяющих условию  $x_r^2 + y_t^2 < 1$ , найдем значения индексов  $r = p, \quad t = q$ , на которых достигается максимум:

$$\varepsilon^{(s-1)} = \max_{\substack{x_r^2 + y_t^2 < 1; \\ 1 \leq m < N}} \left\{ \left| (D_m)_{rt}^{(s-1)} \right|, \left| \Gamma_{rt}^{(s-1)} \right| \right\} \quad \text{и вычислим } \varepsilon^{(s-1)}. \quad \text{Здесь } (D_m)_{rt}^{(s-1)} -$$

значение  $m$ -ой остаточной карты в точке  $(x_r, y_t)$  после  $(s-1)$ -го шага;

$$\Gamma_{rt}^{(s-1)} = \min \left\{ - (D_0)_{rt}^{(s-1)}, \frac{T_{00}^2}{\gamma} \cdot (\hat{I}_0)_{rt}^{(s-1)} + T_{00} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_{0n} \cdot (D_n)_{rt}^{(s-1)} \right\}. \quad \text{В выбранной точке}$$

вычислим вектор  $\overrightarrow{\delta \hat{I}} = \gamma \mathbf{E}^{-1} \circ (\vec{D})_{pq}^{(s-1)}$ . Если  $\sigma_* = T_{00} \cdot \left\{ (\hat{I}_0)_{pq}^{(s-1)} + (\delta \hat{I})_0 \right\} < 0$ , тогда

в цикле по  $n = 0, 1, \dots, N-1$  учтем поправку  $(\delta \hat{I})_n := (\delta \hat{I})_n - \sigma_* \cdot \Psi_{0n}$ . Цикл по

$n$  завершен. Вычислим  $(\vec{I})_{pq}^{(s)} = (\vec{I})_{pq}^{(s-1)} + \overrightarrow{\delta \hat{I}}$ . В цикле по переменным

$r = 1, 2, \dots, M-2$  и  $t = Q_r, Q_r + 1, \dots, M - Q_r - 1$  вычислим остаточную

векторную карту  $(\vec{D})_{rt}^{(s)} = (\vec{D})_{rt}^{(s-1)} - \widehat{\mathbf{B}}_{\mu\eta} \circ \overrightarrow{\delta \hat{I}}$ , где индексы  $\mu, \eta$  определяются

по формулам:  $\mu = \begin{cases} r - p, & \text{если } r \geq p \\ M + r - p, & \text{если } r < p \end{cases}$ ,  $\eta = \begin{cases} t - q, & \text{если } t \geq q \\ M + t - q, & \text{если } t < q \end{cases}$ , тогда  $0 \leq \mu, \eta < M$ . Коэффициент в  $i$ -ой строке и  $l$ -ом столбце матрицы  $\widehat{\mathbf{B}}_{\mu\eta}$  равен  $(\widehat{B}_{i+l})_{\mu\eta}$ ,  $i, l = 0, 1, \dots, N-1$ . Цикл по переменным  $r, t$  завершен.

Проверим условие окончания счета  $\varepsilon^{(s-1)} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  - заданная точность, и если это условие не выполнено, то увеличим счетчик числа шагов на единицу  $s := s + 1$  и опять перейдем к выполнению п.5.

6. После выполнения условия  $\varepsilon^{(s-1)} < \varepsilon$  в цикле по  $p = 1, 2, \dots, M-2$  и  $q = Q_p, Q_p + 1, \dots, M - Q_p - 1$  определим коэффициенты  $(I_m)_{pq}$  и спектральные индексы  $\alpha_{pq}$  (если  $N > 1$ ) по формулам:

$$(I_m)_{pq} = \begin{cases} \frac{M^2 \sqrt{1 - x_p^2 - y_q^2}}{4\varphi_{pq}} \cdot (\widehat{I}_m)_{pq}^{(s)}, & \text{если } \varphi_{pq} \geq \varphi^{(*)}, \\ \text{не определен,} & \text{если } \varphi_{pq} < \varphi^{(*)} \end{cases}, (m = 0, 1, \dots, N-1),$$

$$\alpha_{pq} = \begin{cases} \frac{(\widehat{I}_1)_{pq}^{(s)}}{(\widehat{I}_0)_{pq}^{(s)}}, & \text{если } (\widehat{I}_0)_{pq}^{(s)} \geq \widehat{I}_0^{(*)} \\ \text{не определен,} & \text{если } (\widehat{I}_0)_{pq}^{(s)} < \widehat{I}_0^{(*)} \end{cases}, \text{здесь } \varphi^{(*)}, \widehat{I}_0^{(*)} - \text{малые положительные}$$

пороговые значения. Интенсивность источника в заданной точке  $(x_r, y_t)$  на заданной частоте  $\nu$  теперь можно вычислить по формуле:

$$I(x_r, y_t, \nu) \approx (I_0)_{rt} + (I_1)_{rt} \cdot \beta + \dots + (I_{N-1})_{rt} \cdot \beta^{N-1}, \text{ где } \beta = \frac{\nu}{\nu_0} - 1. \text{ Расчет по}$$

последней формуле при больших значениях  $N$  позволяет отказаться от предположения о малости параметра  $\beta$ .

## § 6. Вариант задачи без условий неотрицательности

В этом разделе вместо сформулированной и решенной в §1 - §5 задачи рассмотрим ее вариант, когда не используются условия (0.26) неотрицательности коэффициентов  $(\widehat{I}_0)_{pq}$  ( $p, q = 0, 1, \dots, M-1$ ), и выясним к каким изменениям в полученных формулах и в алгоритме численного решения задачи приводит это обстоятельство. Оказывается, что тогда вид целевой функции (0.24) и выражения (0.30) для остаточных полей остаются неизменными, а вместо системы равенств и неравенств (0.27) - (0.29) задача сводится к решению линейной алгебраической системы уравнений высокого порядка

$$(D_m)_{pq} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (x_p, y_q) \in G_2$$

относительно  $\approx \frac{\pi}{4} \cdot N \cdot M^2$  неизвестных значений  $(\hat{I}_m)_{il}$ . Формула (0.32) для расчета на каждом шаге поля остаточной векторной карты  $(\bar{D})_{rt}^{(s)}$  также остается прежней, а вместо соотношений (0.40) - (0.42) используется

$$\varepsilon^{(s-1)} = \left| (D_L)_{pq}^{(s-1)} \right| = \max_{x_p^2 + y_q^2 < 1; 0 \leq m < N} \left| (D_m)_{rt}^{(s-1)} \right| \quad (0.47)$$

- формула для вычисления величины  $\varepsilon^{(s-1)}$  и подходящего выбора точки  $(x_p, y_q)$ , в которой на s-ом шаге уточняется вектор коэффициентов  $(\bar{I})_{pq}^{(s)}$  по формуле

$$(\bar{I})_{pq}^{(s)} = (\bar{I})_{pq}^{(s-1)} + \gamma \mathbf{E}^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)}, \quad (0.48)$$

Вид основных неравенств (0.43), (0.44), (0.45), (0.49), полученных в приложениях 1 – 3, сохраняется. Изменения в алгоритме численного решения задачи относятся только к п.5 в § 5 и состоят в использовании формул (0.47) и (0.48) для вычисления  $\varepsilon^{(s-1)}$ , точки  $(x_p, y_q)$  и вектора  $(\bar{I})_{pq}^{(s)}$ . Теперь величины  $\Gamma_{rt}^{(s-1)}$  и  $\sigma_*$  в алгоритме не используются.

## § 7. Экспериментальная проверка алгоритма обобщенной многочастотной деконволюции

Экспериментальная проверка разработанного алгоритма многочастотной деконволюции проводилась, как на модельных, так и на реальных данных РСДБ наблюдений. Был разработан и запрограммирован модуль многочастотной обработки изображений, который был включен в состав программного комплекса ASL for Windows (<http://platon.asc.rssi.ru/dpd/asl/asl.html>). На рисунке 1 показан интерфейс разработанного модуля

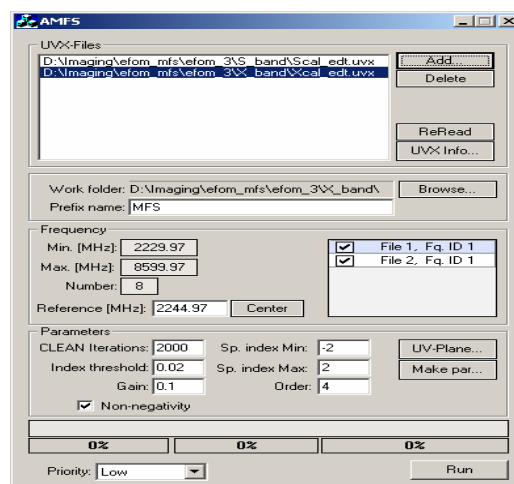


Рис.1.

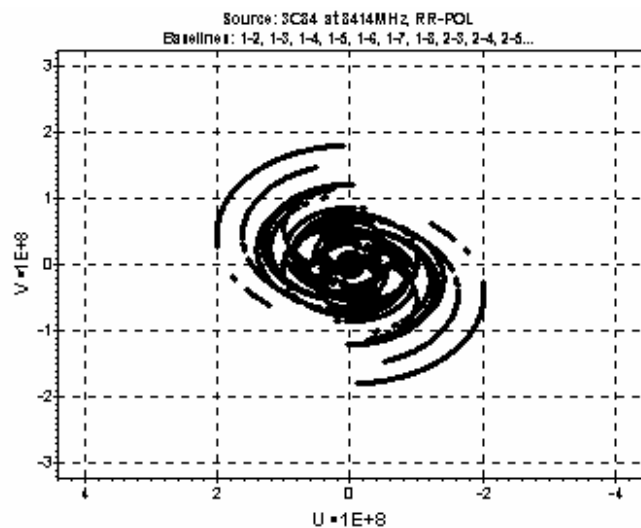
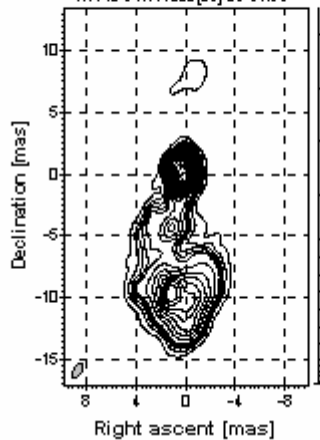


Рис.2

3C84, RR-POL, 8414MHz Max.  
 value: 2.7367  
 Center at RA S: 19:42.2, DEC  
 41:30:42.3(2000)  
 0.0015 ± 0.000858 [a] at -30.56°



Levels:  
 (0.019, 0.058, 0.097, 0.136, 0.174, 0.209,  
 0.416, 0.543, 0.669, 0.796, 0.923, 1.049, 1.361,  
 1.768, 2.166, 2.543)

Рис.4

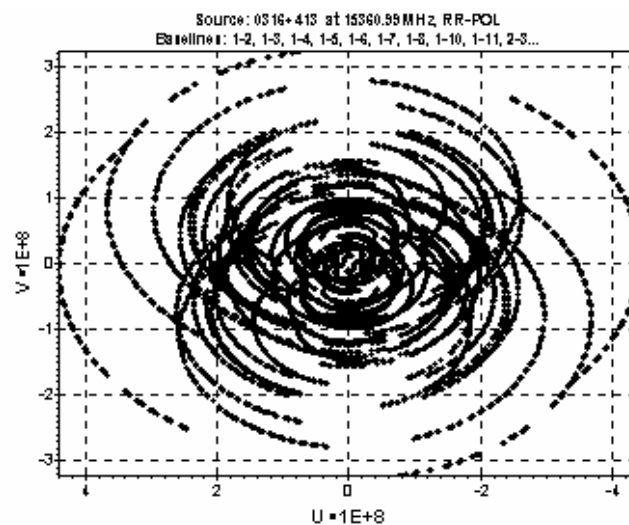
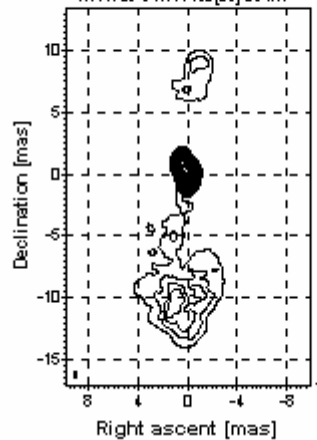


Рис.3

0316+413, RR-POL, 15360.99MHz  
 Max. value: 2.7415  
 Center at RA S: 19:42.2, DEC  
 41:30:42.1(2000)  
 0.000728 ± 0.000462 [a] at 1.07°



Levels:  
 (0.019, 0.058, 0.097, 0.136, 0.175, 0.230,  
 0.417, 0.544, 0.670, 0.797, 0.924, 1.051, 1.363,  
 1.771, 2.169, 2.547)

Рис.5

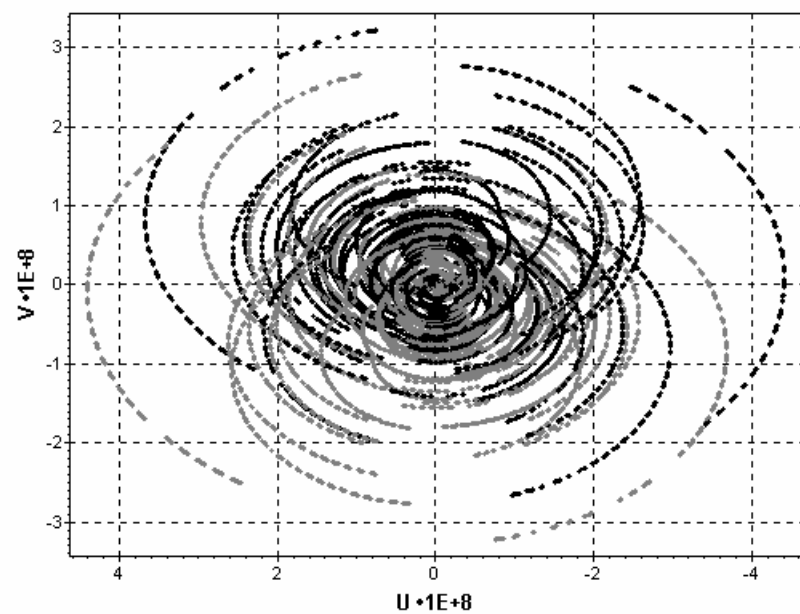


Рис.6

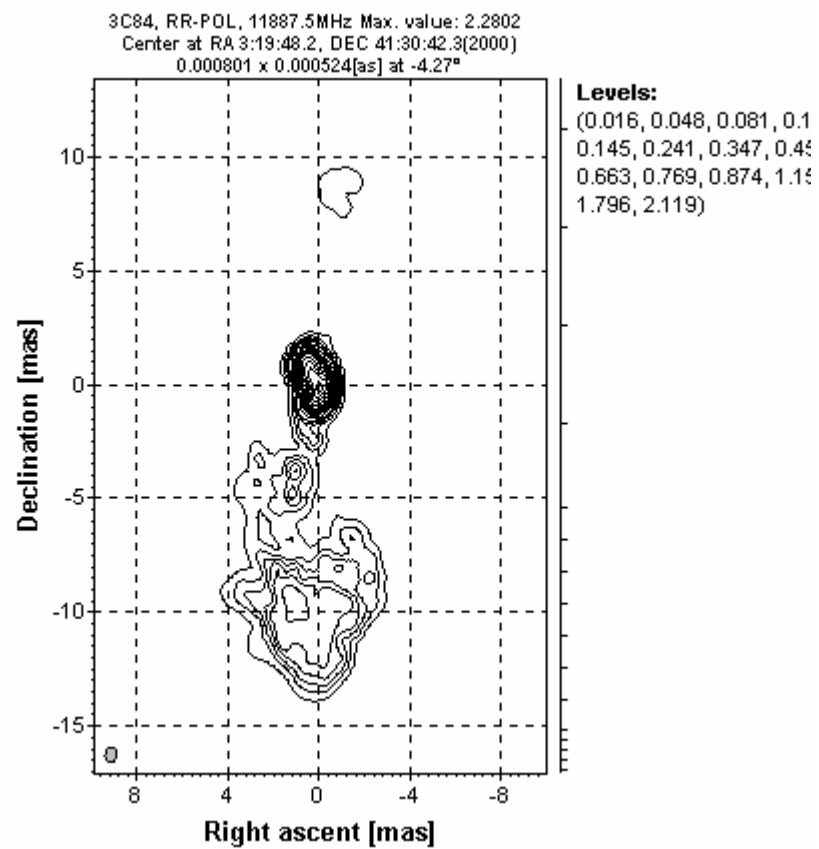


Рис. 7

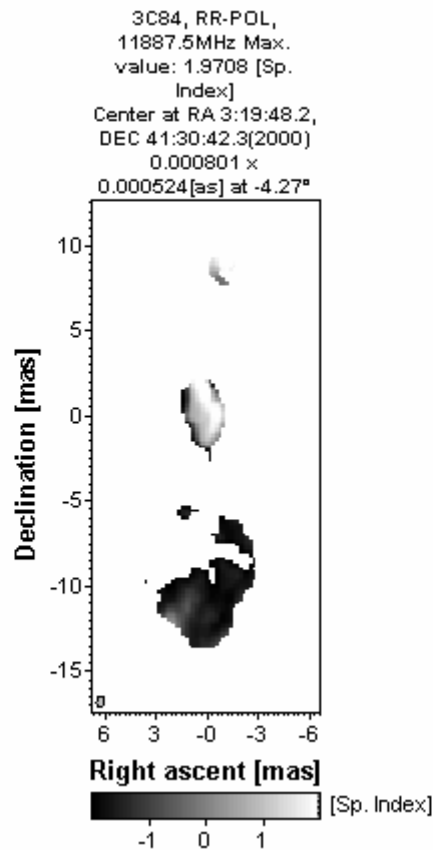


Рис. 8

На рисунках 1--8 приведены результаты двухчастотной обработки источника 3C84 . Рисунок 2 и рисунок 3 демонстрируют заполнения  $(u,v)$ -плоскости для VLBA наблюдений на 8 и 15 GHz соответственно. На рисунке 4 и рисунке 5 показаны изображения 3C84 на соответствующих частотах после нескольких итераций самокалибровки. Рисунки 6 и 7 демонстрируют объединенное заполнение  $(u,v)$ -плоскости и результат многочастотной деконволюции на промежуточной (опорной частоте 11 GHz). Как видно из рисунка 6, качество изображения значительно выше, чем на рисунке 4 или рисунке 5. На рисунке 8 приведена оценка спектрального индекса источника 3C84.

Вся обработка радиоинтерферометрических наблюдений производилась с помощью программного комплекса ASL for Windows.

## Литература

1. Kuhn H.W., Tucker A.W., Nonlinear Programming, in Neyman J. (ed.), Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951, 481-492.
2. Tucker A.W., Linear and Nonlinear Programming, Operat. Res., **5** (1957), 244-257.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование. М., 1975.
4. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход, пер. с англ. М., 1973.
5. Томпсон Р., Моран Дж., Свенсон Дж. Интерферометрия и синтез в радиоастрономии. Пер. С англ.- М.: Мир, 1989.- 568 с.

## Приложение 1. Некоторые свойства матриц $\mathbf{E}$ и $\widehat{\mathbf{B}}_{rt}$

Докажем (см. (0.36), (0.38) – определения матриц  $\mathbf{E}$  и  $\widehat{\mathbf{B}}_{rt}$ ), что если выполнены условия (0.34), то матрица  $\mathbf{E}$  - положительная, а неравенства

$$\left| \left( \widehat{\mathbf{B}}_{rt} \circ \vec{\eta}, \vec{\xi} \right) \right| \leq (\mathbf{E} \circ \vec{\eta}, \vec{\eta})^{1/2} \cdot (\mathbf{E} \circ \vec{\xi}, \vec{\xi})^{1/2} \quad (0.49)$$

справедливы для любых целых индексов  $r, t$  и любых  $N$ -мерных векторов  $\vec{\eta}, \vec{\xi}$ . Здесь  $(\vec{\mu}, \vec{\xi}) = \sum_{i=0}^{N-1} \mu_i \xi_i$  – скалярное произведение векторов  $\vec{\mu}, \vec{\xi}$ .

$$\begin{aligned} & \text{Используя определение (0.36) элементов матрицы } \widehat{\mathbf{B}}_{rt}, \text{ имеем } \left( \widehat{\mathbf{B}}_{rt} \circ \vec{\eta}, \vec{\xi} \right) = \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left( \widehat{B}_{i+l} \right)_{rt} \eta_l \xi_i = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left( \sum_{k=1}^K B_{krt} A_k^2 \cdot (\beta_k)^{i+l} \right) \eta_l \xi_i = \sum_{k=1}^K B_{krt} A_k^2 \left( \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i \cdot (\beta_k)^i \right) \left( \sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \cdot (\beta_k)^l \right) \end{aligned}$$

Применим к этому соотношению неравенство Коши и оценку (см. (0.22))

$$\left| B_{krt} \right| = \left| \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} \cdot \exp \left\{ -\frac{2\pi j}{M} (nr + mt) \right\} \right| \leq \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w_{knm} = B_{k,0,0}, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} & \left| \left( \widehat{\mathbf{B}}_{rt} \circ \vec{\eta}, \vec{\xi} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^K \left| B_{krt} \right| A_k^2 \left| \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i \cdot (\beta_k)^i \right| \left| \sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \cdot (\beta_k)^l \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^K \left| \sqrt{B_{k,0,0}} \cdot A_k \cdot \left( \sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \cdot (\beta_k)^l \right) \right| \cdot \left| \sqrt{B_{k,0,0}} \cdot A_k \cdot \left( \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i \cdot (\beta_k)^i \right) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\left( \sum_{k=1}^K B_{k,0,0} A_k^2 \left( \sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \cdot (\beta_k)^l \right)^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{k=1}^K B_{k,0,0} A_k^2 \left( \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i \cdot (\beta_k)^i \right)^2 \right)^{1/2} = (\mathbf{E} \circ \vec{\eta}, \vec{\eta})^{1/2} \cdot (\mathbf{E} \circ \vec{\xi}, \vec{\xi})^{1/2}, \quad \text{т.е.}$$

неравенство (0.49) доказано. Здесь использовано, что элементы матрицы  $\mathbf{E} = \widehat{\mathbf{B}}_{0,0}$  определяются формулой (0.38) и

$$\theta = (\mathbf{E} \circ \vec{\eta}, \vec{\eta}) = \sum_{k=1}^K B_{k,0,0} A_k^2 \cdot \left( \sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \cdot (\beta_k)^l \right)^2 \geq 0.$$

Из последнего выражения видно, что условие  $\theta = 0$  выполняется только когда многочлен  $P_{N-1}(\beta) = \eta_0 + \eta_1 \cdot \beta + \dots + \eta_{N-1} \cdot \beta^{N-1}$  степени  $N-1$  имеет  $K$  ( $K \geq N$ ) различных нулей  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$  (т.к. все  $B_{k,0,0} > 0$ ,  $A_k > 0$ ), но это возможно только, если  $\eta_0 = \eta_1 = \dots = \eta_{N-1} = 0$ . Таким образом доказано, что матрица  $\mathbf{E}$  положительная.

Эти свойства матриц  $\mathbf{E}$  и  $\widehat{\mathbf{B}}_{rt}$  будут использованы ниже в приложениях 2 и 3.



## Приложение 2. Выбор схемы векторной релаксации

В данном разделе обсуждается технология выбора схемы векторной релаксации, счет по которой, как показано в приложении 3, обеспечивает сходимость к искомому решению задачи.

Выведем формулы для вычисления вектора  $\left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}^{(s)}$  в выбранной точке  $(x_p, y_q) \in G_2$ . Рассмотрим выражение (0.24) как функцию только одного независимого вектора  $\left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq} = \left(\left(\bar{I}_0\right)_{pq}, \left(\bar{I}_1\right)_{pq}, \dots, \left(\bar{I}_{N-1}\right)_{pq}\right)^T$ , а остальные векторы  $\left(\bar{\bar{I}}\right)_{il}$  пусть равны их значениям, полученным после  $(s-1)$ -го шага, т.е.  $\left(\bar{\bar{I}}\right)_{il} = \left(\bar{\bar{I}}\right)_{il}^{(s-1)}$ , если  $(i, l) \neq (p, q)$ . Тогда после приведения в (0.24) подобных членов получим

$$\rho\left(\left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}\right) = \left(\mathbf{E} \circ \left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}, \left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}\right) - 2\left(\left(\bar{R}\right)_{pq}^{(s-1)}, \left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}\right) + \rho_0^{(s-1)}. \quad (0.50)$$

Все компоненты матрицы  $\mathbf{E}$ , вектора  $\left(\bar{R}\right)_{pq}^{(s-1)} = \left(\left(R_0\right)_{pq}^{(s-1)}, \left(R_1\right)_{pq}^{(s-1)}, \dots, \left(R_{N-1}\right)_{pq}^{(s-1)}\right)^T$  и скаляр  $\rho_0^{(s-1)}$  не зависят от  $\left(\bar{I}_0\right)_{pq}, \left(\bar{I}_1\right)_{pq}, \dots, \left(\bar{I}_{N-1}\right)_{pq}$  и определяются (после  $(s-1)$ -го шага) формулами:

$$\rho_0^{(s-1)} = \rho(\bar{0}), \quad E_t = \sum_{k=1}^K B_{k,0,0} \cdot A_k^2 \cdot (\beta_k)^t, \quad \left(R_m\right)_{pq}^{(s-1)} = \sum_{k=1}^K A_k \cdot (\beta_k)^m \cdot \left\{ D_{kpq} - \right. \\ \left. - A_k \cdot \sum_{(i,l) \neq (p,q)} B_{k,p-i,q-l} \left( \left(\bar{I}_0\right)_{il}^{(s-1)} + \left(\bar{I}_1\right)_{il}^{(s-1)} \cdot \beta_k + \dots + \left(\bar{I}_{N-1}\right)_{il}^{(s-1)} \cdot (\beta_k)^{N-1} \right) \right\}. \quad (0.51)$$

Из соотношений (0.51) видно, что если  $(x_p, y_q) \in G_1$ , тогда  $\rho$  не зависит от  $\left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}$ .

Сведем квадратичную форму  $\rho\left(\left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}\right)$  к виду с  $N$  полными квадратами:

$$\rho\left(\left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}\right) = \left\| \mathbf{T} \circ \left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq} - \left(\bar{g}\right)_{pq}^{(s-1)} \right\|^2 + \rho_1^{(s-1)}, \quad (0.52)$$

где  $\left\| \bar{h} \right\|^2 = h_0^2 + h_1^2 + \dots + h_{N-1}^2$  – квадрат длины вектора  $\bar{h}$  размерности  $N$ ;  $\mathbf{T} = (T_{nm})$  – нижняя треугольная  $N \times N$  матрица, т.е.  $T_{nm} = 0$ , если  $n < m$ . Используя линейность скалярного произведения и свойства сопряженной матрицы, преобразуем (0.52) к виду

$$\rho\left(\left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}\right) = \left( \mathbf{T} \circ \left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq} - \left(\bar{g}\right)_{pq}^{(s-1)}, \mathbf{T} \circ \left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq} - \left(\bar{g}\right)_{pq}^{(s-1)} \right) + \rho_1^{(s-1)} = \\ = \left( \mathbf{T}^* \circ \mathbf{T} \circ \left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq}, \left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq} \right) - 2 \left( \mathbf{T}^* \circ \left(\bar{g}\right)_{pq}^{(s-1)}, \left(\bar{\bar{I}}\right)_{pq} \right) + \left( \left(\bar{g}\right)_{pq}^{(s-1)}, \left(\bar{g}\right)_{pq}^{(s-1)} \right) + \rho_1^{(s-1)},$$

где  $\mathbf{T}^*$  - верхняя треугольная матрица сопряженная с  $\mathbf{T}$ . Сравнение последнего выражения с (0.50) дает соотношения для определения матрицы  $\mathbf{T}$ , вектора  $(\bar{g})_{pq}^{(s-1)}$  и скаляра  $\rho_1^{(s-1)}$ , которые не зависят от  $(\bar{I})_{pq}$ :

$$\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{T}^* \circ (\bar{g})_{pq}^{(s-1)} = (\bar{R})_{pq}^{(s-1)}, \quad \left\| (\bar{g})_{pq}^{(s-1)} \right\|^2 + \rho_1^{(s-1)} = \rho_0^{(s-1)}.$$

Поскольку  $\det \mathbf{E} > 0$  (см. приложение 1), то матрица  $\mathbf{T}^*$  имеет обратную, следовательно

$$(\bar{g})_{pq}^{(s-1)} = (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ (\bar{R})_{pq}^{(s-1)}. \quad (0.53)$$

Сравнивая выражения (0.30) при  $(\bar{I})_{il} = (\bar{I})_{il}^{(s-1)}$  и (0.51) для  $(R_m)_{pq}^{(s-1)}$  получим

$$(\bar{R})_{pq}^{(s-1)} = (\bar{D})_{pq}^{(s-1)} + \mathbf{E} \circ (\bar{I})_{pq}^{(s-1)},$$

с помощью которого исключим  $(\bar{R})_{pq}^{(s-1)}$  в (0.53). В силу (0.39) получим

$$(\bar{g})_{pq}^{(s-1)} = (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ \left( (\bar{D})_{pq}^{(s-1)} + \mathbf{T}^* \circ \mathbf{T} \circ (\bar{I})_{pq}^{(s-1)} \right) = (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)} + \mathbf{T} \circ (\bar{I})_{pq}^{(s-1)}. \quad (0.54)$$

Из определения (0.50) функции  $\rho \left( (\bar{I})_{pq} \right)$  следует, что  $\rho \left( (\bar{I})_{pq}^{(s-1)} \right) = \rho^{(s-1)}$  - значение функции  $\rho$  после  $(s-1)$ -го шага, а  $\rho \left( (\bar{I})_{pq}^{(s)} \right) = \rho^{(s)}$ , т.к. на  $s$ -ом шаге для релаксации выбирается точка  $(x_p, y_q)$ . Поэтому вычитая из выражения

(0.52) при  $(\bar{I})_{pq} = (\bar{I})_{pq}^{(s-1)}$  то же самое выражение, но при  $(\bar{I})_{pq} = (\bar{I})_{pq}^{(s)}$  получим,

что  $\rho$  после  $s$ -го шага уменьшится на величину

$$\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)} = \left\| \mathbf{T} \circ (\bar{I})_{pq}^{(s-1)} - (\bar{g})_{pq}^{(s-1)} \right\|^2 - \left\| \mathbf{T} \circ (\bar{I})_{pq}^{(s)} - (\bar{g})_{pq}^{(s-1)} \right\|^2.$$

С помощью (0.54) исключим в последней формуле вектор  $(\bar{g})_{pq}^{(s-1)}$  получим

$$\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)} = \left\| (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)} \right\|^2 - \left\| \mathbf{T} \circ \left\{ (\bar{I})_{pq}^{(s)} - (\bar{I})_{pq}^{(s-1)} \right\} - (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)} \right\|^2. \quad (0.55)$$

Выберем схему векторной релаксации из условия коллинеарности векторов, длины которых вычисляются в (0.55):

$$\mathbf{T} \circ \left\{ (\bar{I})_{pq}^{(s)} - (\bar{I})_{pq}^{(s-1)} \right\} - (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)} = (\gamma - 1) \cdot (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)}, \quad (0.56)$$

где  $\gamma$  - вещественный параметр. Тогда (0.55) можно записать в виде

$$\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)} = \gamma(2 - \gamma) \left\| (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)} \right\|^2 = \gamma(2 - \gamma) \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^2. \quad (0.57)$$

где

$$\bar{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1})^T = (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)}. \quad (0.58)$$

Умножая (0.56) слева на матрицу  $\mathbf{T}^{-1}$  и учитывая, что

$$\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \circ (\mathbf{T}^*)^{-1}, \quad (0.59)$$

получим

$$\left(\bar{I}\right)_{pq}^{(s)} = \left(\bar{I}\right)_{pq}^{(s-1)} + \gamma \mathbf{E}^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)}. \quad (0.60)$$

Соотношения (0.56), (0.57), (0.60) в силу (0.26) справедливы, если для нулевой компоненты вектора, вычисленного по формуле (0.60), выполнено условие  $\left(\bar{I}_0\right)_{pq}^{(s)} \geq 0$ .

Тогда точку  $(x_p, y_q)$  назовем точкой 1- типа, а если в этой точке (на  $s$ -ом шаге) выполнено противоположное условие  $\left(\bar{I}_0\right)_{pq}^{(s)} < 0$ , тогда назовем ее точкой 2- типа.

Обозначим  $\bar{e}_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$  - орт, соответствующий нулевой компоненте  $N$ -вектора. Если точка  $(x_p, y_q)$ , выбранная по формулам (0.40), (0.41), оказалась точкой 2- типа, то

вместо (0.60) вычислим вектор  $\left(\bar{I}\right)_{pq}^{(s)}$  по формуле

$$\left(\bar{I}\right)_{pq}^{(s)} = \left(\bar{I}\right)_{pq}^{(s-1)} + \gamma \mathbf{E}^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)} - \sigma_* \cdot \mathbf{T}^{-1} \circ \bar{e}_0, \quad (0.61)$$

и выберем значение  $\sigma_*$  так, чтобы  $\left(\bar{I}_0\right)_{pq}^{(s)} = 0$ , т.е.

$$\sigma_* = T_{00} \cdot \left(\bar{I}_0\right)_{pq}^{(s-1)} + \gamma \cdot \sigma_0 < 0, \quad (0.62)$$

т.к.  $\mathbf{E}^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)} = \mathbf{T}^{-1} \circ \bar{\sigma}$  (см. (0.58)), но  $\mathbf{T}^{-1}$  - нижняя треугольная матрица, поэтому нулевая компонента вектора  $\mathbf{E}^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)}$  равна

$$\left(\mathbf{T}^{-1} \circ \bar{\sigma}, \bar{e}_0\right) = \frac{\sigma_0}{T_{00}} = \frac{1}{T_{00}} \left( (\mathbf{T}^*)^{-1} \circ (\bar{D})_{pq}^{(s-1)}, \bar{e}_0 \right) = \frac{1}{T_{00}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \Psi_{0n} \cdot (D_n)_{pq}^{(s-1)}. \quad (0.63)$$

Из формул п.4 алгоритма получим

$$\mathbf{T}^{-1} \circ \bar{e}_0 = (\Psi_{00}, \Psi_{01}, \dots, \Psi_{0, N-1})^T, \quad \Psi_{00} = \frac{1}{T_{00}}, \quad T_{00} > 0, \quad (0.64)$$

где  $\Psi_{0n}$  - элементы нулевой строки верхней треугольной матрицы  $(\mathbf{T}^*)^{-1} = (\Psi_{nm})$ .

В силу (0.63), (0.64) неравенство (0.62) эквивалентно неравенству

$$-(D_0)_{pq}^{(s-1)} > \frac{T_{00}^2}{\gamma} \cdot \left(\bar{I}_0\right)_{pq}^{(s-1)} + T_{00} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_{0n} \cdot (D_n)_{pq}^{(s-1)},$$

из которого видно, что выбор точки  $(x_p, y_q)$  на  $s$ -ом шаге по формулам (0.40), (0.41) согласован с проверкой типа этой точки, т.е. с проверкой неравенства (0.62).

Подставляя (0.61) в (0.55) и учитывая (0.62) получим

$$\begin{aligned} \rho^{(s-1)} - \rho^{(s)} &= \|\vec{\sigma}\|^2 - \|(\gamma-1)\vec{\sigma} - \sigma_* \cdot \vec{e}_0\|^2 = \gamma(2-\gamma) \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^2 + \sigma_0^2 - ((\gamma-1)\sigma_0 - \sigma_*)^2 = \\ &= \gamma(2-\gamma) \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^2 + \sigma_0^2 - \left( \sigma_0 + T_{00} \cdot (\widehat{I}_0)_{pq}^{(s-1)} \right)^2 \geq \gamma(2-\gamma) \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^2 + \left( \frac{T_{00} \cdot (\widehat{I}_0)_{pq}^{(s-1)}}{\gamma} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (0.65)$$

Докажем, что для всех  $0 < \gamma < 2$  справедливо неравенство (0.43).

Случай 1. Пусть значение  $\varepsilon^{(s-1)}$  (см.(0.40)) достигается в точке  $(x_p, y_q)$  1- типа.

Тогда справедливы формулы (0.57), (0.60), а из (0.41) получим  $\Gamma_{pq}^{(s-1)} = -(D_0)_{pq}^{(s-1)}$ ,

поэтому

$$\varepsilon^{(s-1)} = \left| (D_L)_{pq}^{(s-1)} \right| = \left| \sum_{n=L}^{N-1} T_{nL} \cdot \sigma_n \right| \leq \left( \sum_{n=L}^{N-1} T_{nL}^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=L}^{N-1} \sigma_n^2 \right)^{1/2} \leq \Omega \left( \frac{\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)}}{\gamma(2-\gamma)} \right)^{1/2}, \quad (0.66)$$

где индекс  $L$  может принимать и нулевое значение. Здесь использовано соотношение

$$(\bar{D})_{pq}^{(s-1)} = \mathbf{T}^* \circ \vec{\sigma}, \quad \text{т.е.} \quad (D_L)_{pq}^{(s-1)} = \sum_{n=L}^{N-1} T_{nL} \cdot \sigma_n, \quad L = 0, 1, \dots, N-1, \quad (0.67)$$

см.(0.58), затем учитывается, что  $\gamma(2-\gamma) > 0$ , если  $0 < \gamma < 2$ , и применяется

неравенство Коши и формула  $\sum_{n=L}^{N-1} T_{nL}^2 = E_{L+L} \leq \Omega^2$  (см.(0.39)) для диагональных элементов  $E_{L+L}$  матрицы  $\mathbf{E}$ , где  $\Omega = \max_{0 \leq L < N} \sqrt{E_{L+L}}$ .

Случай 2. Пусть значение  $\varepsilon^{(s-1)}$  достигается в точке  $(x_p, y_q)$  2- типа. Тогда справедливы формулы (0.61), (0.65) и из (0.41), (0.67) получим

$$\Gamma_{pq}^{(s-1)} = \frac{T_{00}^2}{\gamma} (\widehat{I}_0)_{pq}^{(s-1)} + T_{00} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_{0n} \cdot (D_n)_{pq}^{(s-1)} = \frac{T_{00}^2}{\gamma} (\widehat{I}_0)_{pq}^{(s-1)} - \sum_{n=1}^{N-1} T_{n0} \cdot \sigma_n. \quad (0.68)$$

Поэтому, если  $\varepsilon^{(s-1)} = |\Gamma_{pq}^{(s-1)}|$ , то применяя к (0.68) неравенство Коши, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(s-1)} &= |\Gamma_{pq}^{(s-1)}| = \left| T_{00} \cdot \left( \frac{T_{00}}{\gamma} (\widehat{I}_0)_{pq}^{(s-1)} \right) - \sum_{n=1}^{N-1} T_{n0} \cdot \sigma_n \right| \leq \\ &\left( T_{00}^2 + \sum_{n=1}^{N-1} T_{n0}^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \left( \frac{T_{00} \cdot (\widehat{I}_0)_{pq}^{(s-1)}}{\gamma} \right)^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_n^2 \right)^{1/2} \leq \Omega \left( \frac{\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)}}{\gamma(2-\gamma)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Если же  $|\Gamma_{pq}^{(s-1)}| < \varepsilon^{(s-1)} = \left| (D_L)_{pq}^{(s-1)} \right|$ , то справедлива оценка (0.66), но теперь индекс  $L \neq 0$ .

Итак доказано, что на каждом шаге верно неравенство  $\varepsilon^{(s-1)} \leq \Omega \left( \frac{\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)}}{\gamma(2-\gamma)} \right)^{1/2}$ .

### Приложение 3. О сходимости процедуры векторной релаксации

Если коэффициент усиления схемы релаксации  $\gamma$  удовлетворяет условию  $0 < \gamma < 2$ , то из формул (0.57), (0.65) видно, что функция  $\rho$  после  $s$ -го шага уменьшится, так как тогда  $\rho^{(s-1)} > \rho^{(s)}$ , т.е. последовательность  $\rho^{(s)}$  монотонно убывает. Кроме того в силу (0.14), (0.15) она ограничена снизу  $\rho^{(s)} \geq 0$ . Поэтому имеется предел  $\rho^{(s)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \rho^{(\infty)}$ . Переход к этому пределу в неравенстве (0.43) дает  $\varepsilon^{(s-1)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ .

Для любой точки  $(x_r, y_t) \in G_2$  из определения (0.40) величин  $\varepsilon^{(s-1)}$  следует, что  $\left| (D_m)_{rt}^{(s-1)} \right| \leq \varepsilon^{(s-1)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N-1$ . Поэтому в пределе  $s \rightarrow \infty$  получим

$$(D_m)_{rt}^{(s-1)} \rightarrow 0, \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (0.69)$$

т.е. выполнены все условия (0.27). Кроме того  $\left| \Gamma_{rt}^{(s-1)} \right| \leq \varepsilon^{(s-1)}$ , поэтому

$$\Gamma_{rt}^{(s-1)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0. \quad (0.70)$$

Пусть имеется бесконечное число номеров шагов  $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots (s_{i-1} < s_i)$ , для которых  $(x_r, y_t)$  является точкой 1- типа, тогда для этой последовательности в силу (0.41) имеем

$$\Gamma_{rt}^{(s_i-1)} = -(D_0)_{rt}^{(s_i-1)} \leq \frac{T_{00}^2}{\gamma} \cdot (\widehat{I}_0)_{rt}^{(s_i-1)} + T_{00} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_{0n} \cdot (D_n)_{rt}^{(s_i-1)}.$$

Переходя к пределу  $i \rightarrow \infty$  в последнем неравенстве и используя (0.69), (0.70) получим

$$0 = (D_0)_{pq}^{(\infty)} \leq \frac{T_{00}^2}{\gamma} \cdot (\widehat{I}_0)_{pq}^{(\infty)},$$

то есть выполнено условие (0.29). В противном случае для всех достаточно больших номеров шагов  $s > s_{\max}$  точка  $(x_r, y_t)$  является точкой 2- типа, т.е.

$$\Gamma_{rt}^{(s-1)} = \frac{T_{00}^2}{\gamma} \cdot (\widehat{I}_0)_{rt}^{(s-1)} + T_{00} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_{0n} \cdot (D_n)_{rt}^{(s-1)} < -(D_0)_{rt}^{(s-1)},$$

и предельный переход  $s \rightarrow \infty$  в этом неравенстве в силу (0.69), (0.70) дает

$$0 = \frac{T_{00}^2}{\gamma} \cdot (\widehat{I}_0)_{pq}^{(\infty)} \leq -(D_0)_{pq}^{(\infty)},$$

то есть выполнено условие (0.28). Таким образом доказано, что предельные значения при  $s \rightarrow \infty$  остаточных карт  $(D_m)_{rt}^{(\infty)}$  и векторного поля коэффициентов  $(\widehat{I})_{rt}^{(\infty)}$  для всех точек  $(x_r, y_t) \in G_2$  удовлетворяют всем условиям (0.27) - (0.29), определяющим искомое решение. Отсюда следует сходимость итерационного процесса (0.32), (0.40), (0.42) к этому решению.

Получим теперь оценки для скорости сходимости этих итераций. Формулу (0.42) перепишем в виде

$$\left(\tilde{I}\right)_{pq}^{(s)} = \left(\tilde{I}\right)_{pq}^{(s-1)} + \mathbf{T}^{-1} \circ \vec{\mathcal{G}}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (0.71)$$

где  $\vec{\mathcal{G}} = \gamma \vec{\sigma} - \sigma_* \cdot \vec{e}_0$ , а вектор  $\vec{\sigma}$  определяется формулой (0.58). Сначала оценим длину вектора  $\vec{\mathcal{G}}$ . Если  $(x_p, y_q)$  - точка 1- типа, тогда  $\sigma_* = 0$  и верна формула (0.57), поэтому

$$\mathcal{G}^2 = \gamma^2 \sigma^2 = \gamma^2 \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^2 = \frac{\gamma}{2-\gamma} (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)}).$$

Если же  $(x_p, y_q)$  - точка 2- типа, тогда в силу (0.62), (0.65) получим оценку

$$\mathcal{G}^2 = (\gamma \sigma_0 - \sigma_*)^2 + \gamma^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^2 = \left(T_{00} \cdot (\hat{I}_0)_{pq}^{(s-1)}\right)^2 + \gamma^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^2 \leq \frac{\gamma}{2-\gamma} (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)}). \quad (0.72)$$

Таким образом на  $s$ -ом шаге оценка (0.72) верна для всех типов точек  $(x_p, y_q) \in G_2$ , поэтому применяя неравенство Коши для  $L$ -ой компоненты ( $L = 0, 1, \dots, N-1$ ) векторного равенства (0.71) получим

$$\left|(\hat{I}_L)_{pq}^{(s)} - (\hat{I}_L)_{pq}^{(s-1)}\right| = \left|\sum_{i=0}^L \Psi_{iL} \cdot \mathcal{G}_i\right| \leq \mathcal{G} \cdot \left(\sum_{i=0}^L \Psi_{iL}^2\right)^{1/2} \leq \left(\frac{\gamma \cdot (E^{-1})_{LL}}{2-\gamma} \cdot (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})\right)^{1/2}, \quad (0.73)$$

т.к. элемент матрицы  $\mathbf{T}^{-1}$ , расположенный в  $L$ -ой строке и  $i$ -ом столбце, равен  $\Psi_{iL}$ , а диагональные элементы матрицы  $\mathbf{E}^{-1}$  в силу (0.59) равны

$$(E^{-1})_{LL} = \sum_{i=0}^L \Psi_{iL}^2.$$

Учитывая, что  $(\hat{I}_L)_{pq}^{(s)} - (\hat{I}_L)_{pq}^{(s-1)} \neq 0$  только, если на  $s$ -ом шаге была выбрана точка  $(x_p, y_q)$ , получим, что для любых номеров  $n, m$  ( $n > m$ ) в силу (0.73) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left|(\hat{I}_L)_{pq}^{(n)} - (\hat{I}_L)_{pq}^{(m)}\right| &= \left|\sum_{s=m+1}^n \left((\hat{I}_L)_{pq}^{(s)} - (\hat{I}_L)_{pq}^{(s-1)}\right)\right| \leq \\ &\leq \sum_{s=m+1}^n \left|(\hat{I}_L)_{pq}^{(s)} - (\hat{I}_L)_{pq}^{(s-1)}\right| \leq \left(\frac{\gamma \cdot (E^{-1})_{LL}}{2-\gamma}\right)^{1/2} \cdot \sum_{s=m+1}^n (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})^{1/2}. \end{aligned} \quad (0.74)$$

Подставляя (0.71) в (0.32), получим итерационный процесс для вычисления остаточной векторной карты :

$$(\vec{D})_{rt}^{(s)} = (\vec{D})_{rt}^{(s-1)} - \widehat{\mathbf{B}}_{r-p, t-q} \circ \mathbf{T}^{-1} \circ \vec{\mathcal{G}}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (0.75)$$

для всех точек  $(x_r, y_t) \in G_2$ , а точка  $(x_p, y_q) \in G_2$  выбирается из условия (0.40).

Умножим (0.75) скалярно на  $L$ -ый орт  $\vec{e}_L = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{L+1}, 1, 0, \dots, 0\right)^T$ , получим

$$(\mathbf{D}_L)_{rt}^{(s)} - (\mathbf{D}_L)_{rt}^{(s-1)} = -(\widehat{\mathbf{B}}_{r-p, t-q} \circ \mathbf{T}^{-1} \circ \vec{\mathcal{G}}, \vec{e}_L).$$

Применяя далее неравенство (0.49) и выбирая  $\vec{\eta} = \mathbf{T}^{-1} \circ \vec{\mathcal{G}}$ ,  $\vec{\xi} = \vec{e}_L$ , получим оценку

$$\begin{aligned} & \left| (D_L)_{rt}^{(s)} - (D_L)_{rt}^{(s-1)} \right| = \left| (\widehat{\mathbf{B}}_{r-p, t-q} \circ \mathbf{T}^{-1} \circ \vec{\mathcal{G}}, \vec{e}_L) \right| \leq \\ & \leq \left( \mathbf{E} \circ (\mathbf{T}^{-1} \circ \vec{\mathcal{G}}), (\mathbf{T}^{-1} \circ \vec{\mathcal{G}}) \right)^{1/2} \cdot (\mathbf{E} \circ \vec{e}_L, \vec{e}_L)^{1/2} = \mathcal{G} \sqrt{E_{L+L}} \leq \left( \frac{\gamma \cdot E_{L+L}}{2-\gamma} (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)}) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (0.76)$$

Здесь использовано соотношение (0.39) и неравенство (0.72). Для любых номеров шагов  $n, m$  ( $n > m$ ) и для  $L = 0, 1, \dots, N-1$  в силу (0.76) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| (D_L)_{rt}^{(n)} - (D_L)_{rt}^{(m)} \right| = \left| \sum_{s=m+1}^n \left( (D_L)_{rt}^{(s)} - (D_L)_{rt}^{(s-1)} \right) \right| \leq \\ & \leq \sum_{s=m+1}^n \left| (D_L)_{rt}^{(s)} - (D_L)_{rt}^{(s-1)} \right| \leq \left( \frac{\gamma \cdot E_{L+L}}{2-\gamma} \right)^{1/2} \cdot \sum_{s=m+1}^n (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})^{1/2}. \end{aligned} \quad (0.77)$$

Если выполнено условие  $\rho^{(s)} - \rho^{(\infty)} \square s^{-\omega}$ ,  $\omega > 1$ , тогда ряд  $\sum_{s=1}^{\infty} (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})^{1/2}$  сходится, т.к.  $(\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})^{1/2} \square s^{-\frac{\omega+1}{2}}$  и  $\sum_{s=m+1}^n (\rho^{(s-1)} - \rho^{(s)})^{1/2} \square m^{\frac{1-\omega}{2}} - n^{\frac{1-\omega}{2}}$ .

Тогда в неравенствах (0.74), (0.77) можно перейти к пределу  $n \rightarrow \infty$  и получить степенные  $\square m^{\frac{1-\omega}{2}}$  оценки (0.44), (0.45) для скорости сходимости всех коэффициентов  $(\widehat{I}_L)_{pq}^{(m)}$  и всех остаточных карт  $(D_L)_{rt}^{(m)}$  к искомому решению  $(\widehat{I}_L)_{pq}^{(\infty)}$ ,  $(D_L)_{rt}^{(\infty)}$ .