

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**Физический  
институт  
*имени  
П.Н.Лебедева***



**Ф И А Н**

ПРЕПРИНТ

**30**

**Б.Б. КРЕЙСМАН  
СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕ-  
НИЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С  
ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.  
НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ  
РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ  
ЗАДАЧИ ТРЁХ ТЕЛ.**

МОСКВА 2003

## Аннотация

Матрица монодромии, вычисленная в одной произвольной точке периодического решения гамильтоновой системы, позволяет получить как направление продолжения семейства решений первого (по Пуанкаре) рода, так и кратность и направление ответвления периодических решений второго рода. При резонансах 1:1 и 1:2 необходимо учитывать структуру элементарных делителей матрицы монодромии.

На примере плоской ограниченной задачи трех тел показана неограниченность процесса ветвления для неинтегрируемой системы и его конечность для интегрируемой системы.

Оказывается, что периодические решения как первого, так и второго рода, получаемые продолжением симметричных периодических решений этой задачи так же симметричны. Единственным исключением является случай резонанса 1:1 и двух клеток 2-го порядка у матрицы монодромии в жордановой форме. В этом случае все периодические решения второго рода оказались несимметричными. Даны примеры семейств несимметричных периодических решений.

The periodic solutions of autonomous Hamiltonian systems belong to families of the periodic solutions with variables period and index of stability. For the stable solutions the transformation of a neighbourhood of the solution for period is reduced to turning on some angle  $\varphi$ . If  $\varphi$  rationally expresses through  $2\pi$ ,  $\varphi = 2\pi \cdot p/q$ ,  $p$  and  $q$  - integer,  $q > 1$ , the initial family, with period  $T$ , is intersected with the family of the periodic solutions, with period  $qT$ . Such solutions Poincare has defined as **the periodic solutions of second kind**. It appears, **the monodromy matrix allows to define the directions of prolongation both of initial family, and of a family, induced by it as the solutions of second kind**. If there is no second integral, at  $q > 4$  in the neighbourhood of this point of the family of the solutions of second kind there must exist stable solutions, which **generate their own families of the periodic solutions of second kind and so ad infinitum**.

Practically all known periodic solutions of the restricted three bodies problem are **symmetric with respect axis  $x_1$** . It is connected that the equations of motion admit an invariant change of variables. Therefore the monodromy matrix has a special form; it is possible to show, that **at the absence of the resonance 1:1 the prolongation of symmetric periodic solutions of this problem gives only symmetric periodic solutions**. It is essential that **this statement is fair not only for prolongation of the initial family of periodic solutions, but for a family, generated by it as solutions of second kind**.

In case of a resonance 1:1 it is necessary to take into account the structure of elementary divisors of the monodromy matrix. At two divisors  $(\rho - 1)^2$  and  $(\rho + 1)^2$  the monodromy matrix has two eigenvectors. One gives the direction of prolongation of the family of symmetric solutions with variable energy and duration of period. Second vector gives the direction of prolongation of new family of the solutions of second kind, for which energy and duration of period are constant (a first approximation); **these solutions always are asymmetric**. At two other structures of elementary divisors the solutions remain symmetric.

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>4</b>
<b>2 Семейства периодических решений гамильтоновых систем</b>	<b>5</b>
2.1 Структура решений в окрестности периодического решения . . . . .	5
2.2 Построение семейств периодических решений . . . . .	8
2.3 Условия существования периодических решений второго рода . . . . .	14
<b>3 Плоская круговая ограниченная задача трех тел</b>	<b>16</b>
3.1 Уравнения движения во вращающейся системе координат . . . . .	16
3.2 Задача двух тел во вращающейся системе координат. . . . .	19
3.3 Ветвление семейств симметричных периодических решений . . . . .	23
3.4 Примеры ветвления семейств периодических решений . . . . .	28
3.4.1 Семейство орбит вокруг точки либрации $L_3$ . . . . .	28
3.4.2 Семейство периодических орбит $2/1s$ . . . . .	29
3.4.3 Семейство периодических орбит $2/1n$ . . . . .	29
3.5 Семейство периодических орбит соизмеримости $3/2$ и его потомки	31
3.5.1 Семейство периодических орбит соизмеримости $3/2$ . . . . .	31
3.5.2 Семейства, порождаемые орбитами соизмеримости $(3/2)2$	33
3.5.3 Семейства, порождаемые орбитами соизмеримости $(3/2)3$	34
3.5.4 Семейства, порождаемые орбитами соизмеримости $(3/2)6$	37
<b>4 Заключение</b>	<b>38</b>
<b>5 Графики</b>	<b>40</b>

# 1 Введение

Если система дифференциальных уравнений имеет периодическое решение с периодом  $T$ , то вблизи этого решения иногда существуют периодические решения с периодом, кратным  $T$ . Такие решения Пуанкаре предложил называть периодическими решениями второго рода и посвятил им 3 главы в третьем томе своих знаменитых "Новых методов небесной механики" [1], вышедшем в 1899-м году. Однако уже в 1972-м году Г.А.Мерман, редактор и комментатор перевода этого тома на русский язык, был вынужден констатировать, что "периодические решения второго рода, в отличие от решений первого рода, рассмотренных в первом томе "Новых методов небесной механики", пожалуй, наиболее известных широким кругом прикладников из всего, что сделано Пуанкаре, почти совсем забыты, хотя они могут иметь столь же многочисленные применения" [2].

Это кажется странным, так как практически весь необходимый математический аппарат для построения таких решений дан уже в первом томе монографии Пуанкаре [1]. Возможно, задержка с эффективным применением этого аппарата обусловлена тем, что, как будет показано ниже, в отличие от неинтегрируемых систем в случае интегрируемой системы почти все семейства периодических решений не имеют периодических решений второго рода. Если решения неинтегрируемой системы строятся методом аналитического продолжения решений интегрируемой системы, то в окрестности периодического решения второго рода этот метод обязательно расходится. Чем дальше исследуемая система от интегрируемой, тем легче строить периодические решения второго рода, естественно не аналитическими, а численными методами.

Чисто численный подход к проблеме построения периодических решений второго рода ограниченной задачи трех тел дан, в частности, в препринте автора [3]. В этой публикации описывается более компактный и универсальный алгоритм поиска точек бифуркации семейств периодических решений,дается его обоснование методами теории возмущений периодических решений гамильтоновых систем.

Оказалось, что матрица монодромии, вычисленная в одной произвольной точке периодического решения, позволяет получить как направление продолжения семейства периодических решений первого рода, так и кратность и направление ответвления периодических решений второго рода. При резонансах 1:1 и 1:2 необходимо учитывать структуру элементарных делителей матрицы монодромии.

На примере плоской ограниченной задачи трех тел (для системы Земля - Луна) показана неограниченность процесса ветвления для неинтегрируемой системы и его конечность для интегрируемой системы. Приведены характеристики устойчивости (в линейном приближении) полученных решений второго рода для резонансов различных порядков.

Показано, что периодические решения как первого, так и второго рода, получаемые продолжением симметричных периодических решений этой задачи так же симметричны. Единственным исключением является случай резонанса 1:1 и двух клеток 2-го порядка у матрицы монодромии в жордановой форме. В этом случае все периодические решения второго рода оказались несимметричными. Даны примеры семейств несимметричных периодических решений.

## 2 Семейства периодических решений гамильтоновых систем

### 2.1 Структура решений в окрестности периодического решения

Следуя в основном монографиям Пуанкаре [1] и Брюно [4] напомним простейшие положения теории возмущений периодических решений гамильтоновых систем; углубленная информация содержится как в этих публикациях, так и в работах [5]÷[9].

Рассмотрим автономную гамильтонову систему с  $K$  степенями свободы:

$$\frac{dx}{dt} = J \mathbf{H}'(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  –  $2K$  мерный вектор, компоненты которого  $x_k$  и  $x_{K+k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  – канонически сопряженные (координаты и импульсы),  $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$  –  $2K$  мерный вектор – градиент функции Гамильтона  $H(\mathbf{x})$ . Матрица  $J$  порядка  $2K$  имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} 0_K & \mathbf{E}_K \\ -\mathbf{E}_K & 0_K \end{vmatrix}, \quad J^T = J^{-1} = -J, \quad J^2 = -\mathbf{E}_{2K}, \quad \det J = 1, \quad (1.2)$$

где  $0_K$  и  $\mathbf{E}_K$  – нулевая и единичная матрицы порядка  $K$ .

Пусть известно некоторое решение, называемое далее опорным, системы (1.1)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t), \quad (1.3)$$

в окрестности которого функция Гамильтона  $H$  по крайней мере дважды дифференцируема.

Рассмотрим возмущенное движение

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t) + \mathbf{y}(t). \quad (1.4)$$

Подставляя его в уравнение (1.1), разлагая правые части в ряд Тейлора по  $\mathbf{y}(t)$  и отбрасывая члены разложения степени выше первой, получаем уравнения возмущенного движения в первом приближении

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = J \mathbf{H}''(t) \mathbf{y}, \quad (1.5)$$

называемые **уравнениями в вариациях** Пуанкаре. Здесь  $\mathbf{H}''(t)$  – симметричная матрица порядка  $2K$  (матрица Гессса функции Гамильтона  $H(\mathbf{x})$ ) с элементами

$$H''_{ij} = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0; \quad (1.6)$$

символ 0 означает, что в частные производные подставлены значения  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t)$ .

1). Пусть известно решение системы (1.1), зависящее от произвольной постоянной:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^1(t, c), \quad (1.7)$$

и опорному решению (1.3) соответствует  $c=0$ .

В этом случае система (1.5) имеет частное решение

$$\mathbf{y}^1 = \frac{\partial \mathbf{x}^1(t, c)}{\partial c}, \quad (1.8)$$

где после взятия частных производных надо подставить  $c=0$ .

В частности автономная система (1.1) вместе с решением  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t)$  имеет решение  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t + c)$ . Ему соответствует решение уравнений в вариациях

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{J} \mathbf{H}'(\mathbf{x}^0(t)). \quad (1.8')$$

2). Пусть система (1.1) имеет первый интеграл  $F = F(\mathbf{x}) = const$ . В этом случае система (1.5) также имеет первый интеграл:

$$\langle \mathbf{F}'(\mathbf{x}^0(t)), \mathbf{y} \rangle = const, \quad (1.9)$$

и частное решение:

$$\mathbf{y} = \mathbf{J} \mathbf{F}'(\mathbf{x}^0(t)). \quad (1.10)$$

Здесь и далее  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  как обычно означает скалярное произведение векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ .

Первому интегралу  $H(\mathbf{x}) = const$  соответствует первый интеграл системы (1.5)

$$\langle \mathbf{H}'(\mathbf{x}^0(t)), \mathbf{y} \rangle = const, \quad (1.9')$$

и частное решение:

$$\mathbf{y} = \mathbf{J} \mathbf{H}'(\mathbf{x}^0(t)), \quad (1.10')$$

совпадающее с решением (1.8').

3). Пусть система (1.5) имеет первый интеграл

$$\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{y} \rangle = const. \quad (1.11)$$

В этом случае она имеет частное решение

$$\mathbf{y} = \mathbf{J} \mathbf{u}(t). \quad (1.12)$$

Обратно, каждому частному решению системы (1.5), аналогичному решению (1.12), соответствует первый интеграл (1.11) этой системы.

Система уравнений (1.5) является линейной системой с зависящими от времени коэффициентами. Общее решение такой системы с начальными условиями  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$  представимо в виде

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{y}_0, \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{Y}(t)$ —матрица размерности  $2K$ , называемая **матрициантом**.

4). Матрициант гамильтоновой системы уравнений является **симплектической матрицей**, то есть удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{Y}(t)^T \mathbf{J} \mathbf{Y}(t) = \mathbf{J}. \quad (1.14)$$

Симплектические матрицы образуют группу — произведение двух симплектических матриц  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  является симплектической матрицей и любая симплектическая матрица  $\mathbf{M}$  имеет обратную, вычисляемую по формуле

$$\mathbf{M}^{-1} = -\mathbf{J} \mathbf{M}^T \mathbf{J}. \quad (1.14')$$

Пусть порождающее решение (1.3) – периодическое с периодом  $T$ ,

$$\mathbf{x}^0(T) = \mathbf{x}^0(0). \quad (1.15)$$

Матрица  $\mathbf{M}$  размерности  $2K$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{Y}(T)$ , равная значению матрицианта в конце периода, называется **матрицей монодромии**, а ее собственные значения  $\rho_k$  – **мультипликаторами** системы (1.5). Очевидно,

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{M}. \quad (1.16)$$

Так как матрица монодромии вещественна, то наряду с мультипликатором  $\rho$  она имеет комплексно сопряженный мультипликатор  $\bar{\rho}$ . Для гамильтоновой системы наряду с мультипликатором  $\rho$  матрица монодромии имеет обратный мультипликатор  $1/\rho$ .

Таким образом, у вещественных гамильтоновых систем мультипликаторы образуют четверки  $(\rho, \bar{\rho}, 1/\rho, 1/\bar{\rho})$  или по крайней мере пары  $(\rho \text{ и } 1/\rho)$ , располагающиеся либо на вещественной оси (в этом случае  $\rho = \bar{\rho}$ ), либо на единичной окружности комплексной плоскости (в этом случае  $1/\rho = \bar{\rho}$ ).

**Скобками Пуассона** пары дифференцируемых функций  $F_1(\mathbf{x})$  и  $F_2(\mathbf{x})$  называется скалярное произведение  $\langle \mathbf{F}'_1, \mathbf{J}\mathbf{F}'_2 \rangle$ . Если они равны нулю, то говорят, что функции  $F_1(\mathbf{x})$  и  $F_2(\mathbf{x})$  находятся в **инволюции**.

5). Пусть уравнения (1.1) имеют  $N$  однозначных интегралов  $F_1(\mathbf{x}) = const$ ,  $F_2(\mathbf{x}) = const, \dots, F_N(\mathbf{x}) = const$ , отличных от интеграла живых сил и находящихся в инволюции, то либо ненулевые векторы  $\mathbf{H}', \mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_N$  линейно зависят на периодическом решении (1.5), либо  $2N + 2$  мультипликатора равны единице.

Конкретный вид матрицы монодромии зависит от выбора начальной точки на порождающем решении, но значения мультипликаторов  $\rho_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2K$ , и структура элементарных делителей матрицы  $\mathbf{M}$  инвариантны относительно такого сдвига а также невырожденных преобразований фазового пространства.

6). Для вычисления матрицы монодромии обычно приходится интегрировать на интервале времени  $[0, T]$  уравнения движения (1.1) и уравнения в вариациях Пуанкаре (1.5) для единичной матрицы начальных условий, то есть систему уравнений порядка  $2K + (2K)^2 = 2K(1 + 2K)$ . При численном интегрировании полезно использовать следующий прием [6].

Подставим в (1.16)  $t = -T/2$ . Получаем

$$\mathbf{Y}(T/2) = \mathbf{Y}(-T/2)\mathbf{M}, \quad (1.17)$$

следовательно

$$\mathbf{M} = \mathbf{Y}(-T/2)^{-1}\mathbf{Y}(T/2). \quad (1.18)$$

Интегрирование на интервалах времени  $[0, T/2]$  и  $[0, -T/2]$  при фиксированной точности в сумме требует меньше времени, чем интегрирование на интервале  $[0, T]$ . Особенно этот прием эффективен для **t-инвариантных** (инвариантных относительно обращения времени) линейных систем [6], с.116. В нашем случае условие t-инвариантности означает, что известна матрица  $\mathbf{G}$  такая, что

$$\mathbf{H}''(-t) = \mathbf{J}\mathbf{G}\mathbf{J}\mathbf{H}''(t)\mathbf{G}^{-1}. \quad (1.19)$$

Матрицианты  $\mathbf{Y}(-t)$  и  $\mathbf{Y}(t)$  для таких систем связаны уравнением

$$\mathbf{Y}(-t) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y}(t)\mathbf{G}, \quad (1.20)$$

в частности

$$\mathbf{Y}(-T/2) = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Y}(T/2) \mathbf{G}. \quad (1.20')$$

Так как матрица  $\mathbf{Y}(-T/2)$  – симплектическая, то с учетом формулы (1.14') для вычисления матрицы монодромии  $\mathbf{M} = \mathbf{Y}(T)$  получаем

$$\mathbf{Y}(T) = (\mathbf{GJ}) \mathbf{Y}(T/2)^T (\mathbf{GJ})^{-1} \mathbf{Y}(T/2). \quad (1.21)$$

## 2.2 Построение семейств периодических решений

Пусть известно некоторое периодическое, с периодом  $T$ , решение  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t)$ , системы (1.1),  $\mathbf{x}^0(T) = \mathbf{x}^0(0)$ . Для нахождения близкого к нему периодического решения  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t) + \mathbf{y}(t)$  с периодом  $T + dT$  надо решить систему уравнений

$$\mathbf{x}^0(T + dT) + \mathbf{y}(T + dT) = \mathbf{x}^0(0) + \mathbf{y}(0). \quad (2.1)$$

Для малых  $\mathbf{y}, dT$  имеем необходимое условие

$$\mathbf{y}(T) + dT \mathbf{JH}'(\mathbf{x}^0(T)) = \mathbf{y}(0), \quad (2.1')$$

или, с учетом (1.15) и (1.16),

$$(\mathbf{M} - \mathbf{E})\mathbf{y}(0) + dT \mathbf{JH}'(\mathbf{x}^0(0)) = 0. \quad (2.2)$$

Рассмотрим простейший случай автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы,  $K = 2$ . В силу теорем 1 и 2 уравнения в вариациях имеют решение  $\mathbf{y}^1 = \mathbf{JH}'(\mathbf{x}^0(t))$  и первый интеграл  $\langle \mathbf{H}'(\mathbf{x}^0(t)), \mathbf{y} \rangle = const$ . Напрашивается замена переменных  $\mathbf{y} = \mathbf{Az}$  с симплектической и одновременно ортогональной матрицей  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} H_3 & -H_4 & H_1 & H_2 \\ H_4 & H_3 & H_2 & -H_1 \\ -H_1 & -H_2 & H_3 & -H_4 \\ -H_2 & H_1 & H_4 & H_3 \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

где  $H_1, H_2, H_3, H_4$  – компоненты нормированного вектора – градиента функции Гамильтона  $H(\mathbf{x}^0(0))$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

**Все рассматриваемые ниже матрицы – симплектические**, если не оговорено противное.

Переменным  $\mathbf{z}$  соответствует матрица монодромии  $\mathbf{N}$ ,

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}. \quad (2.4)$$

В новой системе координат ортами являются векторы  $\mathbf{a}_i, i = 1, 2, \dots, 4$ , совпадающие с соответствующими столбцами матрицы  $\mathbf{A}$ . Орт  $\mathbf{a}_1$  дает касательную к решению  $\mathbf{x}^0(t)$  а орт  $\mathbf{a}_3$  ортогонален линиям уровня функции Гамильтона. Поэтому матрица  $\mathbf{N}$  имеет вид

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Характеристический полином  $P(\rho)$  матрицы  $\mathbf{N}$  имеет вид

$$P(\rho) = (\rho - 1)^2(\rho^2 - 2s\rho + 1), \quad (2.6)$$

где  $s = (n_{22} + n_{44})/2$ . Число  $s$  определяет устойчивость решения в линейном приближении. Если  $|s| < 1$ , то решение орбитально устойчиво в первом приближении; при  $|s| > 1$  движение неустойчиво [4]. Случай  $|s| > 1$  рассмотрен в публикации [10]. Далее мы будем рассматривать только случай  $|s| \leq 1$ .

Из симплектичности матрицы  $\mathbf{N}$  следует

$$\begin{aligned} n_{22}n_{44} - n_{24}n_{42} &= 1, \\ n_{42}n_{23} - n_{22}n_{43} &= n_{12}, \\ n_{44}n_{23} - n_{24}n_{43} &= n_{14}, \\ n_{22}n_{14} - n_{24}n_{12} &= n_{23}, \\ n_{42}n_{14} - n_{44}n_{12} &= n_{43}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

причем независимыми являются только три равенства из пяти.

В этой системе координат уравнения (2.2) относительно  $\mathbf{z}, dT$  принимают вид

$$\mathbf{N}_1 \mathbf{z} + v dT \mathbf{a}_1 = 0, \quad (2.8)$$

где  $v$  – модуль начальной скорости,  $v = |\mathbf{J}\mathbf{H}'(\mathbf{x}^0(0))| = |\mathbf{H}'(\mathbf{x}^0(0))|$ ,

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{N} - \mathbf{E} = \begin{vmatrix} 0 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} - 1 & n_{23} & n_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} - 1 \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

В развернутом виде уравнения (2.8) имеют вид

$$\begin{aligned} 0 \cdot z_1 + n_{12}z_2 + n_{13}z_3 + n_{14}z_4 + v dT &= 0, \\ 0 \cdot z_1 + (n_{22} - 1)z_2 + n_{23}z_3 + n_{24}z_4 &= 0, \\ 0 \cdot z_1 + n_{42}z_2 + n_{43}z_3 + (n_{44} - 1)z_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.8')$$

Система (2.8) всегда имеет частное решение, соответствующее сдвигу по исходному периодическому решению  $\mathbf{x}^0(t)$  на произвольную величину  $c_1$ ,

$$z_1 = c_1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0, \quad dT = 0. \quad (2.10)$$

Общее решение системы (2.8) представимо в виде

$$\mathbf{z} = c_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{z}', \quad dT = -(n_{12}z'_2 + n_{13}z'_3 + n_{14}z'_4)/v, \quad (2.11)$$

где вектор  $\mathbf{z}'$  ортогонален вектору  $\mathbf{a}_1$ . Можно описывать семейства периодических решений векторами  $\mathbf{z}'$ , не забывая при этом о том, что добавление вектора  $c_1 \mathbf{a}_1$  увеличивает размерность семейств на 1. При описании семейств симметричных периодических решений плоской круговой ограниченной задачи трех тел обычно вместо представления (2.11) фиксируют  $z_2 = 0$ .

Система (2.8') является системой 3-х уравнений с 4-мя неизвестными  $z_2, z_3, z_4, dT$ . Известно, что в качестве решения системы  $n - 1$  однородных линейных уравнений с  $n$  неизвестными можно взять совокупность миноров, полученных из матрицы системы

поочередным вычеркиванием каждого столбца, причем эти миноры берутся с чередующимися знаками (КУРОШ, стр. 83).

Рассмотрим миноры  $d_2, d_3, d_4, d_5$ ,

$$\begin{aligned} d_2 &= -[n_{23}(n_{44} - 1) - n_{24}n_{43}] = n_{23} - n_{14}, \\ d_3 &= (n_{22} - 1)(n_{44} - 1) - n_{24}n_{42} = 2 - n_{22} - n_{44}, \\ d_4 &= -[n_{43}(n_{22} - 1) - n_{23}n_{42}] = n_{43} + n_{12}, \\ d_5 &= -(n_{12}d_2 + n_{13}d_3 + n_{14}d_4). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ранг матрицы  $N_1$  может равняться 1, 2 или 3.

**1.2.1. Пусть ранг матрицы  $N_1$  равен 3**, то есть не все миноры  $d_2, d_3, d_4, d_5$  равны нулю.

В этом случае общее решение системы (2.8) имеет вид

$$z_1 = c_1, \quad z_2 = d_2 c_2, \quad z_3 = d_3 c_2, \quad z_4 = d_4 c_2, \quad dT = d_5 c_2 / v, \quad (2.13)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - произвольные постоянные.

Следовательно, вектор  $\mathbf{b}_1$ ,

$$\mathbf{b}_1 = d_2 \mathbf{a}_2 + d_3 \mathbf{a}_3 + d_4 \mathbf{a}_4, \quad (2.14)$$

дает в фазовом пространстве направление касательной к единственному семейству периодических решений, проходящему через решение (1.3) и имеющему период, близкий к  $T$ . Наличие других семейств периодических решений, проходящих через это решение и имеющих период, близкий к  $T$  или кратный  $T$ , зависит от значения минора  $d_3$ .

**A). Пусть минор  $d_3$  не равен нулю.**

В этом случае вектор  $\mathbf{b}_1$  не лежит в плоскости постоянства функции Гамильтона  $H(\mathbf{x})$  – при изоэнергетической редукции (Себехей [5]) этот вектор получить невозможно.

Если минор  $d_2$  также не равен нулю, то замена переменных  $\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{u}$  с матрицей  $\mathbf{B}$  переводит матрицу  $N$  в матрицу  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & d_2/d_3 \\ 0 & 1 & d_2/d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_4/d_2 & d_4/d_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_{42} & 0 & r_{44} \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

При этом  $r_{13} = (n_{12}d_2 + n_{13}d_3 + n_{14}d_4)/d_3$ ,  $r_{24} = n_{24}$ ,

$$r_{22} = n_{22} + n_{24}d_4/d_2, \quad r_{44} = n_{44} - n_{24}d_4/d_2, \quad (2.16)$$

$$r_{42} = n_{42} + (n_{44} - r_{22})d_4/d_2, \quad r_{22}r_{44} - r_{24}r_{42} = 1.$$

В новой системе координат уравнения (2.8') принимают вид

$$r_{13}u_3 + vdT = 0, \quad (r_{22} - 1)u_2 + r_{24}u_4 = 0, \quad r_{42}u_2 + (r_{44} - 1)u_4 = 0, \quad (2.8'')$$

и имеют решение, зависящее от двух произвольных постоянных  $c_1$  и  $c_2$ ,

$$u_1 = c_1, \quad u_3 = c_2, \quad u_2 = u_4 = 0, \quad dT = -r_{13}c_2/v, \quad (2.17)$$

очевидно совпадающее с решением (2.13).

Если минор  $d_2$  равен нулю, а минор  $d_4$  не равен нулю, то предварительной заменой переменных с матрицей  $\mathbf{J}_1$ ,

$$\mathbf{J}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.18)$$

мы можем поменять местами переменные  $z_2$  и  $z_4$  и свести ситуацию к предыдущей.

Если же оба минора  $d_2$  и  $d_4$  равны нулю, то из равенств (2.6) следует, что

$$n_{12} = n_{14} = n_{23} = n_{43} = 0, \quad (2.19)$$

то есть матрица  $\mathbf{N}$  уже имеет вид матрицы  $\mathbf{R}$ .

Таким образом при  $d_3 \neq 0$  матрица  $\mathbf{N}$  всегда приводится к виду матрицы  $\mathbf{R}$  с помощью матрицы  $\mathbf{B}$ , у которой второй и третий столбцы ортогональны первому столбцу.

Далее мы предполагаем, что  $r_{22} = r_{44}$ . Если это не так, то замена переменных с матрицей  $\mathbf{B}_1$ ,

$$\mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{vmatrix}, \quad (2.20)$$

где  $\psi = \arctan \frac{r_{44} - r_{22}}{2(r_{24} + r_{42})}$ , переводит матрицу  $\mathbf{R}$  в матрицу того же вида, у которой  $r_{22} = r_{44}$ .

Так как мы исключили из рассмотрения случай  $|s| > 1$ , то для мультиликаторов  $\rho_3$  и  $\rho_4$  имеем

$$\rho_3 = \cos \varphi - i \sin \varphi, \quad \rho_4 = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (2.21)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , а угол  $\varphi$  определяется из условий

$$\cos \varphi = s, \quad r_{42} \sin \varphi \geq 0. \quad (2.22)$$

Если  $s \neq -1$ , то замена переменных  $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{v}$  с матрицей  $\mathbf{C}$  переводит матрицу  $\mathbf{R}$  в матрицу  $\mathbf{S}$ ,

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad (2.23)$$

где  $c_{44} = \sqrt{r_{42}/\sin \varphi}$ ,  $c_{22} = 1/c_{44}$ . Таким образом, при замене переменных  $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{v}$  с матрицей  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$ , матрица  $\mathbf{M}$  переводится в матрицу  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{MD}$ .

Пусть  $\varphi$  рационально выражается через  $2\pi$ ,  $\varphi = 2\pi \cdot p/q$ ,  $p$  и  $q$  – целые. Повторенному  $q$  раз исходному решению будут соответствовать матрицы  $\mathbf{S}^q$  и  $\mathbf{M}^q$ ,

$$\mathbf{S}^q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13}q & 0 \\ 0 & \cos 2\pi p & 0 & -\sin 2\pi p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin 2\pi p & 0 & \cos 2\pi p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13}q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{M}^q = \mathbf{D} \mathbf{S}^q \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D} \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13}q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{D}^{-1}. \quad (2.25)$$

Все 4 мультиликатора матрицы  $\mathbf{M}^q$  равны единице, она имеет два элементарных делителя  $(\rho - 1)$  и  $(\rho + 1)$  и один  $(\rho - 1)^2$ . Матрица монодромии  $\mathbf{M}^q$  в жордановой форме состоит из двух клеток 1-го порядка и одной клетки 2-го порядка и имеет три собственных вектора  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_4$ .

Следовательно, от повторенного  $q$  раз исходного решения отвечаются решения с периодом  $qT$ . Такие решения Пуанкаре предложил называть **периодическими решениями второго рода**. Направления продолжения нового семейства дают векторы  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_4$ . Так как их проекции на  $\mathbf{v}_3$  равны нулю, то  $dH = 0$ . При  $q > 4$  у построенного семейства периодических решений на решении (1.3) происходит смена устойчивости орбит и достигается экстремум  $H(\mathbf{x})$ . Для меньших  $q$  ситуация неоднозначна [4].

Принятое нами условие ортогональности вектору  $\mathbf{v}_1$  при нечетном  $q$  однозначно определяет направление продолжения нового семейства.

При четном  $q$  ( $q = 2q_1$  и  $p$  - нечетное) за время  $q_1T$  получаем поворот на  $\pi$  (по модулю  $2\pi$ ),

$$\mathbf{S}^{q_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13}q_1 & 0 \\ 0 & \cos \pi p & 0 & -\sin \pi p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \pi p & 0 & \cos \pi p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13}q_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (2.26)$$

Поэтому шагу  $c_2\mathbf{v}_2$  и шагу  $-c_2\mathbf{v}_2$  соответствуют две ветви одного и того же решения. Приходится отказаться от условия ортогональности вектору  $\mathbf{v}_1$  и рассматривать продолжения  $c_4\mathbf{v}_4$ . Брюно [4] считает получающиеся два семейства различными. Нам кажется более естественным считать, что семейство одно - в точке ветвления при движении по этому семейству сохраняется непрерывность, но отсутствует дифференцируемость. Подробнее эта ситуация описана в разделе 2.3.

При  $s = -1$  из  $r_{22} = r_{44}$  и (2.7) следует, что  $r_{24}r_{42} = 0$ , и либо  $r_{24} = 0, r_{42} \neq 0$ , либо  $r_{42} = 0, r_{24} \neq 0$ , либо  $r_{42} = r_{24} = 0$ , и матрица  $\mathbf{R}$  имеет вид  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  либо  $\mathbf{R}_3$ ,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_{42} & 0 & -1 \end{vmatrix}, \mathbf{R}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

Исключая третий случай, возникающий в описанной выше ситуации формулы (2.26), получаем, что  $\mathbf{R}$  и подобная ей  $\mathbf{N}$  имеют по два элементарных делителя  $(\rho - 1)^2$  и  $(\rho + 1)^2$  и по одному собственному вектору, соответствующим мультиликаторам  $\rho = 1$  и  $\rho = -1$ . В случае матрицы  $\mathbf{R}_1$  вектор  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 = (0, c_3, 0, 0)^T$ , дает в фазовом пространстве направление касательной к семейству периодических решений с удвоенным периодом. В случае матрицы  $\mathbf{R}_2$  вектор  $\mathbf{b}_2$  имеет вид  $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 0, c_3)^T$ .

Повторенному дважды исходному решению соответствуют матрицы  $\mathbf{R}_1^2, \mathbf{R}_2^2$  либо  $\mathbf{R}_3^2$ ,

$$\mathbf{R}_1^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2r_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \mathbf{R}_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2r_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2r_{42} & 0 & 1 \end{vmatrix}, \mathbf{R}_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2r_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.28)$$

**В).** Пусть минор  $d_3$  равен нулю а хотя бы один из миноров  $d_2$  или  $d_4$  отличен от нуля. В этом случае матрица монодромии  $\mathbf{N}$  имеет один элементарный делитель  $(\rho-1)^4$ , в жордановой форме состоит из одной клетки 4-го порядка и имеет один собственный вектор  $\mathbf{a}_1$ . Вектор  $\mathbf{b}_1$ ,

$$\mathbf{b}_1 = d_2 \mathbf{a}_2 + d_4 \mathbf{a}_4, \quad (2.29)$$

дает в фазовом пространстве направление касательной к единственному семейству периодических решений, проходящему через решение (1.3) и имеющему период, близкий к  $T$ . Вектор  $\mathbf{b}_1$  ортогонален градиенту функции Гамильтона  $H(\mathbf{x})$ , у семейства периодических решений на решении (1.3) происходит смена устойчивости орбит и достигается экстремум  $H(\mathbf{x})$ .

**1.2.2 Пусть ранг матрицы  $\mathbf{N}_1$  равен 2,** то есть все миноры  $d_2, d_3, d_4, d_5$ , равны нулю, но среди элементов второй или третьей строки матрицы  $\mathbf{N}_1$  есть отличные от нуля.

Из формулы (2.28) видно, что такая ситуация может возникать при пересечении семейства периодических решений с семейством решений, имеющих в 2 раза меньший период. Поэтому надо проверить, не является ли исследуемое решение периодическим с периодом  $T/2$ . Если это так, то периоду  $T/2$  соответствует матрица монодромии, подобная матрице  $\mathbf{R}_1$  формулы (2.28), и надо рассматривать случай  $s = -1$ .

Далее рассматривается случай, когда  $T/2$  не является периодом. Пусть преобразование (2.20) уже выполнено и  $n_{22} = n_{44}$ . В этом случае

$$n_{22} = n_{44} = 1, \quad n_{23} = n_{14}, \quad n_{43} = -n_{12}, \quad n_{24} - n_{42} \neq 0, \quad n_{24}n_{42} = 0, \quad (2.30)$$

Следовательно, либо  $n_{24} = 0$ , либо  $n_{42} = 0$ . В первом случае ( $n_{24} = 0, n_{42} \neq 0$ ) второе уравнение системы (2.7) дает  $n_{42}n_{23} = 0$ , откуда  $n_{23} = n_{14} = 0$  и матрица  $\mathbf{N}$  имеет вид

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & -n_{12} & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.31)$$

Второй случай ( $n_{24} \neq 0, n_{42} = 0$ ) сводится к первому перестановкой (2.18).

Замена переменных  $\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{u}$  с матрицей  $\mathbf{B}$  переводит матрицу  $\mathbf{N}$  в матрицу  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & n_{12}/n_{42} \\ 0 & 1 & n_{12}/n_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_{42} & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.32)$$

При этом  $r_{13} = n_{12}^2/n_{42} + n_{13}$ ,  $r_{42} = n_{42}$ . Матрица монодромии  $\mathbf{R}$  имеет почти жорданову форму и состоит из двух клеток 2-го порядка - одна на пересечении первого и третьего столбцов с первой и третьей строками, вторая - на пересечении второго и

четвертого столбцов со второй и четвертой строками. Поэтому  $\mathbf{R}$  и подобная ей  $\mathbf{N}$  имеют по два элементарных делителя  $(\rho - 1)^2$  и  $(\rho - 1)^2$  и по два собственных вектора, соответствующих мультиплликатору  $z = 1$ . Уравнения (2.8) принимают вид

$$r_{13} \cdot u_3 + vdT = 0, \quad r_{42} \cdot u_2 = 0. \quad (2.8'')$$

Общее решение системы (2.8'') представимо в виде

$$u_1 = z_1 = c_1, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = c_2, \quad u_4 = c_3, \quad dT = -r_{13}c_2/v, \quad (2.33)$$

где  $c_1, c_2$  и  $c_3$  - произвольные постоянные.

С учетом замечания (2.11) вектор  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 = (0, 0, c_2, 0)^T$ , дает в фазовом пространстве направление касательной к единственному семейству периодических решений, проходящему через решение (1.3), и имеющему период, изменение которого при движении по семейству дается формулой (2.33) -  $dT = -r_{13}c_2/v$ . Из определения матрицы  $\mathbf{B}$  видно, что проекция этого вектора на градиент функции Гамильтона  $H$  отлична от нуля.

Вектор  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 = (0, 0, 0, c_3)^T$ , дает в фазовом пространстве направление касательной ко второму семейству периодических решений, проходящему через решение (1.3), и имеющему период, для которого  $dT = 0$ . Проекция этого вектора на градиент функции Гамильтона  $H$  также равна нулю.

Поэтому естественно первое семейство назвать семейством периодических решений первого рода по Пуанкаре, а второе - семейством периодических решений второго рода по Пуанкаре.

**1.2.3 Пусть ранг матрицы  $N_1$  равен 1.** Это возможно только в том случае, когда матрица  $N$  имеет вид

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & n_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.34)$$

совпадающий с видом матрицы  $S^q$  формулы (2.24). Значит произошло пресечение семейства периодических решений второго рода с периодом  $T$  с породившим его семейством с меньшим периодом  $T_1$ . Поэтому надо найти максимальное  $q$  такое, что  $T/q$  остается периодом нашего решения,  $T_1 = T/q$ , вычислить матрицу  $S$  и воспользоваться алгоритмом раздела A.

## 2.3 Условия существования периодических решений второго рода

1). Рассмотрим сначала простейший случай системы с двумя степенями свободы. Если система неинтегрируема, то имеем пару единичных мультиплликаторов  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  и пару мультиплликаторов  $\rho_3$  и  $\rho_4, \rho_4 = 1/\rho_3$ . Пусть  $|\rho_3| = |\rho_4| = 1$ . В этом случае  $\rho_3$  и  $\rho_4$  являются комплексно сопряженными с аргументами  $\pm\varphi$  и решение орбитально устойчиво в линейном приближении. Если  $\varphi$  рационально выражается через  $2\pi$ ,  $\varphi = 2\pi \cdot p/q$ ,  $p$  и  $q$  — целые, то у повторенного  $q$  раз исходного решения этой паре мультиплликаторов будет соответствовать пара единичных мультиплликаторов, что является необходимым

условием генерации новых семейств периодических решений второго рода. Так как среди этих решений почти всегда [4] есть орбитально устойчивые, то ситуация повторяется и процесс продолжается в принципе неограниченно.

Пусть имеется однозначный интеграл  $F(q, p) = const$ , отличный от интеграла  $H(q, p) = const$  и система (1) интегрируема. Согласно теореме (4), если на решении градиенты  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{F}'$  не являются линейно зависимыми, то еще два мультиликатора равны единице, размерность семейств периодических решений равна в общем случае трем (как исключение—четырем) и дальнейшее ветвление невозможно.

Линейная зависимость градиентов  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{F}'$  эквивалентна линейной зависимости четырех двумерных векторов

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial F}{\partial q_1} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \frac{\partial F}{\partial q_2} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \frac{\partial F}{\partial p_2} \end{array} \right).$$

Так как функции  $F(q, p)$  и  $H(q, p)$  находятся в инволюции:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial F}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) = 0,$$

то из линейной зависимости первого и второго векторов следует зависимость третьего и четвертого векторов. Таким образом, множества линейной зависимости градиентов  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{F}'$  двумерны и являются семействами периодических решений с парой отличных от единицы мультиликаторов  $\rho_3$  и  $\rho_4$ , лежащих на единичной окружности. На этих семействах ситуация та же, как в случае неинтегрируемой системы и возможна генерация новых семейств периодических решений второго рода. Однако на новых семействах векторы  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{F}'$  уже не являются линейно зависимыми, поэтому все 4 мультиликатора для них равны единице. Эти семейства двупараметрические и являются подмножествами размерности 3 четырехмерного фазового пространства. Дальнейшее ветвление их невозможно.

2). Пусть теперь число степеней свободы равно трем и нет однозначных интегралов  $F(q, p) = const$ , отличных от интеграла  $H(q, p) = const$ . В этом случае характеристический многочлен  $P$  матрицы монодромии имеет вид:

$$P = (x - 1)^2(x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1),$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — вещественные коэффициенты, регулярно изменяющиеся при движении по семейству периодических решений. Как показал Брук [11], расположение на комплексной плоскости третьего—шестого мультиликаторов определяется параболой  $a_2 = a_1^2/4 + 2$  и прямыми  $a_2 = 2a_1 - 2$  и  $a_2 = -2a_1 - 2$ , касающимися параболы в точках  $(4, 6)$  и  $(-4, 6)$ . В точках плоскости  $(a_1, a_2)$ , лежащих выше параболы, мультиликаторы образуют четверку и генерация новых семейств периодических решений второго рода невозможна.

В точках, лежащих ниже параболы,  $a_2 < a_1^2/4 + 2$ , мультиликаторы образуют две пары, каждой из которых соответствует свое двумерное инвариантное подпространство. При этом существенны 3 ситуации:

а) обе пары лежат на единичной окружности, решение устойчиво. При движении по семейству периодических решений поворот каждого из двумерных инвариантных

подпространств может стать кратным  $2\pi$ , следовательно возможна генерация новых семейств периодических решений второго рода в этих подпространствах. Это имеет место при выполнении трех условий:  $a_2 > 2a_1 - 2$ ,  $a_2 > -2a_1 - 2$ ,  $a_2 < 6$ .

б) одна пара лежит на единичной окружности, вторая – на вещественной прямой, решение "полуустойчиво". Это имеет место при условии  $(a_2 - 2a_1 + 2)(a_2 + 2a_1 + 2) < 0$ . Генерация новых семейств периодических решений второго рода возможна на "устойчивом" подпространстве.

с) в остальных точках  $(a_1, a_2)$  обе пары лежат на вещественной прямой, решение неустойчиво и генерация новых семейств периодических решений второго рода невозможна.

Если имеется однозначный интеграл  $F(q, p) = const$ , отличный от интеграла  $H(q, p) = const$  то, как несложно показать, множества линейной зависимости градиентов  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{F}'$  двумерны, являются семействами периодических решений, имеющими по крайней мере одну пару отличных от единицы мультипликаторов  $\rho_3$  и  $\rho_4$ , лежащих на единичной окружности. На этих семействах возможна генерация новых семейств периодических решений второго рода, которые имеют по две пары единичных мультипликаторов. Новые семейства двупараметрические и являются подмножествами размерности 3 шестимерного фазового пространства. Дальнейшее ветвление их возможно в том случае, когда третья пара мультипликаторов  $\rho_5$  и  $\rho_6$  лежит на единичной окружности.

3). Если число степеней свободы больше трех, то имеется еще больше возможностей ветвлений семейств периодических решений. При движении по семейству периодических решений могут возникать ситуации, когда несколько пар мультипликаторов лежат на единичной окружности. Поворот каждого из двумерных подпространств, соответствующих этим парам мультипликаторов, может стать кратным  $2\pi$  и возможна генерация новых семейств периодических решений второго рода в этих подпространствах.

Данная методика ниже применяется для изучения ветвлений семейств симметричных периодических решений плоской круговой ограниченной задачи трех тел в основном для системы Земля - Луна.

### 3 Плоская круговая ограниченная задача трех тел

#### 3.1 Уравнения движения во вращающейся системе координат

Пусть [5] две материальные точки с массами  $M_1$  и  $M_2$  движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс с угловой скоростью  $\Omega$  под действием взаимного ньютонаинского притяжения, а третье тело пренебрежимо малой массы движется в плоскости их движения. Проще всего уравнения движения третьего тела выглядят во вращающейся (синодической) системе координат в безразмерной форме [5]. Начало координат находится в барицентре притягивающих тел, ось  $X_1$  направлена от тела меньшей массы  $M_2$  к телу большей массы  $M_1$ . Система вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\Omega$ ; в качестве единицы времени берется  $1/\Omega$ , единицы расстояния – расстояние между притягивающими телами, единицы массы –  $(M_1 + M_2)$ . В этой системе притягивающие тела неподвижны и имеют координаты  $(m_2, 0)$  и  $(-m_1, 0)$ , где  $m_1$  и  $m_2$  – их безразмерные массы,

$$m_1 = M_1 / (M_1 + M_2), \quad m_2 = M_2 / (M_1 + M_2), \quad m_1 + m_2 = 1. \quad (1.1)$$

Ниже численные примеры даются в основном для системы Земля - Луна и используется  $m_2 = 0.01215058162343363$ . В примерах для системы Солнце - Юпитер используется  $m_2 = 0.00095388$ .

Функция Гамильтона  $H(\mathbf{x})$  вычисляется по формуле

$$H = \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2) + x_2x_3 - x_1x_4 - \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}, \quad r_1^2 = (x_1 - m_2)^2 + x_2^2, \quad r_2^2 = (x_1 + m_1)^2 + x_2^2, \quad (1.2)$$

уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + x_3, & \frac{dx_2}{dt} &= x_4 - x_1, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4 - \frac{m_1(x_1 - m_2)}{r_1^3} - \frac{m_2(x_1 + m_1)}{r_2^3}, & \frac{dx_4}{dt} &= -x_3 - \frac{m_1x_2}{r_1^3} - \frac{m_2x_2}{r_2^3}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Первых интегралов, отличных от интеграла энергии  $H(\mathbf{x}) = const$ , нет и задача не интегрируется в квадратурах [8]. Исторически принято интеграл энергии записывать в виде  $-2H(\mathbf{x}) = C$ , где  $C$  называется константой Якоби.

Условия периодичности решения с периодом  $T$  имеют вид:

$$x_k(T) = x_k(0), \quad k = 1, 2, \dots, 4. \quad (1.4)$$

Предполагая, что известен какой-либо способ (например, численный метод) интегрирования уравнений движения (1.3), мы можем рассматривать условия (1.4) как 4 нелинейных уравнения с 5 неизвестными  $x_k(0)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 4$ , и  $T$ .

Система (1.3) допускает инвариантную замену переменных:

$$\tilde{t} = -t, \quad \tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = -x_2, \quad \tilde{x}_3 = -x_3, \quad \tilde{x}_4 = x_4. \quad (1.5)$$

Поэтому наряду с решением  $\mathbf{x}(t)$  этой системы ее решением будет  $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t})$ . На плоскости  $x_1x_2$  графики этих решений симметричны относительно оси  $x_1$ . При этом сохраняется направление движения по орбите - прямым орбитам (на которых движение осуществляется против часовой стрелки) соответствуют прямые орбиты, а обратным орбитам (на которых движение осуществляется по часовой стрелке) соответствуют обратные орбиты,

При совпадении решений  $\mathbf{x}(t)$  и  $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t})$  получается **симметричное относительно оси  $x_1$  решение**.

Практически все известные к настоящему моменту периодические решения системы (1.3) симметричны относительно оси  $x_1$ . Это связано с тем, что для них существенно упрощаются условия периодичности (1.4).

Действительно, пусть в начальный момент времени  $t = 0$  выполняются условия

$$x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = v_1, \quad (1.6)$$

то есть орбита пересекает ось  $x_1$  и, как следует из уравнений (1.3), ортогональна оси  $x_1$ . Если в какой-либо момент времени  $T/2$  она снова пересекает ось  $x_1$  и ортогональна ей:

$$x_1(T/2) = a_2, \quad x_2(T/2) = 0, \quad x_3(T/2) = 0, \quad x_4(T/2) = v_2, \quad (1.7)$$

то, интегрируя в обратном времени от  $t = 0$  до  $t = -T/2$ , получим из условий симметрии (1.5):

$$x_1(-T/2) = a_2, \quad x_2(-T/2) = 0, \quad x_3(-T/2) = 0, \quad x_4(-T/2) = v_2. \quad (1.7')$$

Следовательно, координаты и импульсы в моменты времени  $t = T/2$  и  $t = -T/2$  равны между собой и решение периодично с периодом  $T$ .

Обратно, если решение периодично с периодом  $T$  и в начальный момент времени  $t = 0$  выполняются условия (1.6), то в момент времени  $T/2$  выполняются условия (1.7).

Очевидно, что периодические решения, определяемые начальными условиями  $(a_1, v_1)$  и соответствующими им в момент  $T/2$  начальными условиями  $(a_2, v_2)$ , совпадают между собой. Для исключения этой неоднозначности мы фиксируем наши обозначения так, что  $a_1 \leq a_2$  до тех пор, пока это не противоречит условию гладкости этих параметров при движении по семейству периодических решений.

Так как значения  $a_2$  и  $v_2$  могут быть произвольными, то для симметричных относительно оси  $x_1$  периодических решений ограниченной задачи мы имеем 2 нелинейных уравнения

$$x_2(a_1, v_1, T/2) = 0, \quad x_3(a_1, v_1, T/2) = 0, \quad (1.8)$$

с 3 неизвестными  $a_1$ ,  $v_1$  и  $T$ . Значения  $x_2(0)$  и  $x_3(0)$  всегда берутся нулевыми.

Покажем, что можно понизить порядок этой системы и свести задачу нахождения симметричных относительно оси  $x_1$  периодических решений к задаче решения одного нелинейного уравнения с двумя неизвестными [3].

Действительно, система двух нелинейных уравнений с тремя неизвестными в общем случае в качестве множества решений имеет множество кривых трехмерного пространства  $a_1$ ,  $v_1$ ,  $T$ , возможно пересекающихся в точках бифуркации. Пусть нам известно какое-либо решение  $a_1^0$ ,  $v_1^0$ ,  $T^0$  этой системы. Мы можем определить геометрические характеристики  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $l_4$  соответствующей этому решению орбиты за полуинтервал времени  $t > 0$ ,  $t \leq T/2$ .

Здесь обозначено:

$l_1$  - число пересечений орбитой оси  $x_1$ ,

$l_2$  и  $l_3$  - число экстремумов расстояний  $R_1$  и  $R_2$  до притягивающих тел,

$l_4$  - число обращений в ноль импульса  $x_3$ .

Как показано в публикации автора [3], эти числа могут иметь разные значения для орбит одного семейства. Существенно то, что изменения каждого из них происходят в разных, достаточно удаленных друг от друга точках семейства. Мы можем заменить условие выхода из программы интегрирования  $t = T/2$  на условие  $t = T^y$ , где  $T^y$  - момент  $l_1$ -го пересечения оси  $x_1$ . В результате нам становится известной длительность периода  $T$ ,  $T = 2T^y$ , и автоматически удовлетворяется первое уравнение системы (1.8). Для нахождения симметричного относительно оси  $Y$  периодического решения достаточно решить одно нелинейное уравнение:

$$V_x(a_1, v_1, T^y) = 0, \quad (1.9)$$

с двумя неизвестными  $a_1$  и  $v_1$ .

Если число  $l_1$  меняется при продолжении семейства, то мы можем взять в качестве условия выхода из программы интегрирования условие  $t = T^i$ , где  $T^i$  - момент  $l_4$ -го обращения в ноль импульса  $x_3$ .

Отметим, что множество орбит, включаемых в одно семейство периодических решений, зависит от метода продолжения по параметру. Так, например, Брук [12] использует регуляризацию уравнений движения и продолжает семейство за орбиты соударения. При таком подходе в одно семейство включаются орбиты с разным числом облетов

притягивающих тел. Если не использовать регуляризацию а требовать сохранения части геометрических характеристик орбиты за интервал времени  $[0, T/2]$ , то семейства продолжаются без изменения числа облетов притягивающих тел, но с существенными изменениями [3] характеристик  $l_1, l_2, l_3, l_4$ .

Пусть  $\mathbf{w}$  – вектор состояний в инерциальной (сидерической) системе координат,  $w_1$  и  $w_2$  – координаты,  $w_3$  и  $w_4$  – скорости. Несложно показать, что при выполнении в начальный момент времени  $t = 0$  условий (1.6) для этих переменных будут выполняться условия

$$w_1(0) = a_1 + m_2, \quad w_2(0) = 0, \quad w_3(0) = 0, \quad w_4(0) = v_1 + m_2, \quad (1.6')$$

то есть в сидерической системе координат в начальный момент орбита пересекает линию, соединяющую притягивающие тела, и ортогональна ей; так как  $m_2$  мало, то координата  $x_1$  мало отличается от  $w_1$  а импульс  $v_1$  мало отличается от скорости  $w_4$ . Следовательно, графики зависимостей  $v_1$  от  $a_1$ , однозначно определяющие семейства симметричных периодических решений системы (1.3), визуально совпадают с графиками зависимостей скорости  $w_4$  от  $w_1$  и отличаются от них только малым сдвигом начала координат.

### 3.2 Задача двух тел во вращающейся системе координат.

Пусть второе притягивающее тело отсутствует. В этом случае  $m_2 = 0$  и

$$H = \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2) + x_2x_3 - x_1x_4 - \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (2.1)$$

а уравнения движения принимают вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_4, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4 - \frac{x_1}{r^3}, \quad \frac{dx_4}{dt} = -x_3 - \frac{x_2}{r^3}. \quad (2.2)$$

В инерциальной (сидерической) системе координат периодическими решениями невозмущенной задачи являются все эллиптические орбиты вокруг Земли, в том числе круговые орбиты и решения-отрезки, в которые вырождаются эллиптические орбиты при эксцентриситете равном соответственно нулю или единице.

Во вращающейся, синодической системе координат периодическими решениями этой задачи будут круговые орбиты вокруг Земли и образы эллиптических орбит с такими периодами, что за целое число месяцев  $n_1$  малое тело совершает целое число  $n_2$  оборотов вокруг Земли. **Рациональное число  $N$ ,  $N = n_2/n_1$ , называется соизмеримостью орбиты.**

Принято, вслед за Пуанкаре, орбиты, получаемые из круговых орбит невозмущенной задачи, называть периодическими решениями первого сорта, а образы эллиптических орбит произвольной соизмеримости – периодическими решениями второго сорта. Ниже будет показано, что периодические решения второго сорта являются периодическими решениями второго рода, порождаемые периодическими решениями первого сорта.

Рассмотрим периодические решения невозмущенной задачи в расчете на то, что часть их свойств сохранится в возмущенной задаче.

Легко убедиться, что эта задача имеет два первых интеграла (энергии и площадей)

$$H = c_1, \quad F = x_1x_4 - x_2x_3 = c_2 \quad (2.3)$$

и, следовательно, интегрируема. Для градиентов  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{F}'$  имеем

$$\mathbf{H}' = \left( -x_4 + \frac{x_1}{r^3}, x_3 + \frac{x_2}{r^3}, x_2 + x_3, -x_1 + x_4 \right)^T, \quad \mathbf{F}' = (x_4, -x_3, -x_2, x_1)^T \quad (2.4)$$

и условие их линейной зависимости дает

$$x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0, \quad x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{r}. \quad (2.5)$$

Следовательно,  $dr/dt = (x_1 x_3 + x_2 x_4)/r = 0$  и периодические решения первого рода являются круговыми орбитами. Для изучения этих орбит целесообразно перейти, как это сделано у Хаджидеметриу [13], к полярным координатам  $\theta, r$  и сопряженным им  $p_\theta, p_r$ . Имеем

$$H = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{p_\theta}{r} \right)^2 + p_r^2 \right] - p_\theta - \frac{1}{r}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{r^2} - 1, \quad \frac{dr}{dt} = p_r, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = 0, \quad \frac{dp_r}{dt} = \frac{p_\theta^2 - r}{r^3}. \quad (2.7)$$

Интеграл площадей и условие его линейной зависимости от интеграла энергии принимают вид

$$p_\theta = c_2, \quad p_r = 0, \quad p_\theta^2 = r. \quad (2.8)$$

Обозначим через  $\omega$  угловую скорость  $d\theta/dt$ . Для прямых (в сидерической системе координат) орбит имеем  $p_\theta = \sqrt{r}$ ,  $\omega = r^{-3/2} - 1$ , для обратных  $p_\theta = -\sqrt{r}$ ,  $\omega = -r^{-3/2} - 1$ .

Исключая неподвижные точки в синодической системе координат ( $p_\theta > 0, r = 1, \omega = 0$ ), получаем, что множество решений системы (2.5) и эквивалентной ей системы (2.8) состоит из трех подмножеств:

- 1). обратные в сидерической системе круговые орбиты ( $p_\theta < 0$ ),
- 2). прямые как в сидерической, так и в синодической системе координат круговые орбиты ( $p_\theta > 0, r < 1, \omega > 0$ ),
- 3). прямые в сидерической, но обратные в синодической системе координат круговые орбиты ( $p_\theta > 0, r > 1, \omega < 0$ ).

В данной публикации мы ограничимся рассмотрением прямых как в сидерической, так и в синодической системе координат круговых орбит (класс  $k$  по Стремгрену [5]), так как они представляют наибольший интерес для приложений. Для такой орбиты радиуса  $r$

$$p_\theta = \sqrt{r}, \quad T = 2\pi/\omega = 2\pi/(r^{-3/2} - 1). \quad (2.8')$$

Уравнения в вариациях имеют вид

$$\frac{dy}{dt} = J \mathbf{H}''(t) \mathbf{y} = A \mathbf{y} = \begin{vmatrix} 0 & -2r^{-5/2} & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^{-3} & 2r^{-5/2} & 0 \end{vmatrix} \mathbf{y}. \quad (2.9)$$

Так как матрица  $A$  не зависит от времени, то система (2.9) интегрируема. Характеристический многочлен матрицы  $A$  имеет вид  $\lambda^2(\lambda^2 + r^{-3})$  и собственные числа  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = ir^{-3/2}$ ,  $\lambda_4 = -ir^{-3/2}$ .

Замена переменных  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z}$  с симплектической матрицей  $\mathbf{C}$  переводит матрицу  $\mathbf{A}$  в матрицу  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2r^{-1/4} \\ 0 & r^{3/4} & 2r^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-3/4} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-3/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^{-3/2} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.9) переходят в уравнения  $d\mathbf{z}/dt = \mathbf{B}\mathbf{z}$  с матрициантом  $\mathbf{Z}(t)$ ,

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3r^{-2}t & 0 \\ 0 & \cos \omega_1 t & 0 & -\sin \omega_1 t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \omega_1 t & 0 & \cos \omega_1 t \end{vmatrix}, \quad (2.11)$$

где  $\omega_1 = -r^{-3/2}$ . Так как период  $T$  равен  $2\pi/\omega = 2\pi/(r^{-3/2} - 1)$ , то для матрицы монодромии  $\mathbf{S}$  имеем

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}(T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -6\pi/(\sqrt{r} - r^2) & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad (2.12)$$

где  $\varphi$  - угол поворота за период,

$$\varphi = \omega_1 T = 2\pi\omega_1/\omega = -2\pi/(1 - r^{3/2}). \quad (2.13)$$

На рисунке 1 дана зависимость параметра  $s$  от константы Якоби  $C$  для этого семейства круговых орбит невозмущенной задачи, прямых как в сидерической, так и в синодической системе координат. Из формулы (2.12) для матрицы монодромии  $\mathbf{S}$  имеем  $s = \cos \varphi$ , то есть  $|s| \leq 1$ . На рисунке 2. дана зависимость от константы Якоби угла  $\varphi$  поворота за период. Если в общем случае формула (2.12) раздела 1 дает этот угол  $\varphi$  по модулю  $2\pi$  (или 360 градусов), то здесь мы получаем точное значение этого угла.

Как и выше, выделим из множества всех прямых круговых орбит подмножество  $S_1$  орбит с такими периодами, что за целое число месяцев  $n_1$  малое тело совершает целое число  $n_2$  оборотов вокруг Земли. Рациональное число  $N$ ,  $N = n_2/n_1$ , называемое соизмеримостью орбиты, однозначно определяет радиус  $r_N$  орбиты,  $r_N = 1/N^{2/3}$ . Из формулы (2.13) следует, что соизмеримостям  $N = (n+1)/n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , соответствуют углы  $\varphi = -2\pi(n+1)$  и резонансы 1:1. Соизмеримостям  $N = (n+2)/n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , соответствуют углы  $\varphi = -\pi(2n+1)$  и резонансы 1:2. Кривая  $s = s(C)$  в этих точках касается прямых  $s = 1$  и  $s = -1$ , но не пересекает их. Смены устойчивости не происходит.

Для произвольного  $N$  формула (2.13) дает  $\varphi = -2\pi q/(q-p)$  и получаем резонанс 1:(q-p). Таким образом, семейства периодических решений, которым в инерциальной системе координат соответствуют эллиптические орбиты, являются семействами периодических решений второго рода для породившего их семейства круговых орбит.

В невозмущенной задаче любое периодическое решение остается периодическим после поворота на любой угол вокруг начала координат. Нам важны свойства симметричных относительно оси  $x_1$  периодических решений, начальные значения для которых удовлетворяют уравнениям (1.6).

На рисунках 3.1 и 3.2 представлены образцы таких орбит соизмеримости 4/1 во вращающейся системе координат. Орбиты  $2(n_2 - n_1) = 6$  раз за период пересекают ось  $x_1$  - в точках  $a_1$  и  $a_2$  и дважды в точках  $B_1$  и  $B_2$ . За полупериод имеем 3 пересечения - нечетное число. Поэтому на этих рисунках  $a_1$  и  $a_2$  имеют разные знаки. На рисунке 3.2 им соответствуют перигеи орбит. При увеличении  $a_2$  три точки пересечения орбитой полуоси  $x_1 > 0$  сближаются и, при эксцентризите равном нулю, совпадают - эллиптическая орбита склоняется в круговую с синодическим периодом в 3 раза меньшим. При дальнейшем увеличении  $a_2$  (рисунок 3.1)  $a_1$  и  $a_2$  соответствуют апогеям орбит. **Орбиты, у которых  $a_1$  соответствует апогею, мы называем основными, а орбиты, у которых  $a_1$  соответствует перигею, - дополнительными орбитами.** Таким образом, при изменении  $a_2$  от нуля до максимального значения (равного  $2a$ ) мы получаем все орбиты соизмеримости 4/1, сначала дополнительные, затем круговые и затем основные.

Несколько другую структуру имеет семейство симметричных относительно оси  $x_1$  периодических решений соизмеримости 3/1, представленных на рисунках 4.1 и 4.2. Орбиты  $2(n_2 - n_1) = 4$  раза за период пересекают ось  $x_1$  - в точках  $a_1$  и  $a_2$  и дважды в точке  $B_1$ . За полупериод имеем 2 пересечения - четное число. Поэтому на этих рисунках  $a_1$  и  $a_2$  имеют одинаковые знаки. У основных орбит (рисунок 4.1)  $a_1$  соответствуют апогеям орбит и  $a_2$  - перигеям орбит. При уменьшении модуля  $a_1$  точки  $(a_1, 0)$  и  $(a_2, 0)$  сближаются и, при эксцентризите равном нулю, совпадают - эллиптическая орбита склоняется в круговую с периодом в 2 раза меньшим. Если пренебречь нашим соглашением  $a_1 \leq a_2$  и продолжать уменьшать  $a_2$ , то новых орбит не возникнет - будут повторяться те же орбиты, только  $a_1$  и  $a_2$  поменяются местами. Из физических соображений мы вынуждены признать, что в этом случае продолжение семейства по параметру  $a_1$  или  $a_2$  за круговую орбиту невозможно.

На рисунке 4.2 представлены дополнительные орбиты соизмеримости 3/1. У них  $a_2$  соответствует апогею,  $a_1$  - перигею орбиты. При уменьшении  $a_2$  обе точки пересечения орбитой полуоси  $x_1 > 0$  сближаются и, при эксцентризите равном нулю, совпадают - дополнительные эллиптические орбиты склоняются в круговую орбиту. На плоскости параметров  $(a_1, v_1)$  или  $(a_2, v_2)$  семейство периодических решений соизмеримости 3/1 представляется двумя несвязанными кривыми, соответствующими основным и дополнительным орбитам.

В то же время несложно заметить, что если отказаться от задания решения в точках  $(a_1, v_1)$  или  $(a_2, v_2)$  и задавать его как несимметричное в точке  $B_1$ , то несвязность пропадает. При движении по семейству в точке перехода от основных орбит к дополнительным все 4 фазовые координаты непрерывны, но производные от них терпят разрыв.

Аналогичная ситуация возникает при любых соизмеримостях  $N$ ,  $N = n_2/n_1$ . За время, равное половине периода, орбита с малым эксцентризитетом, начинающаяся в точке  $(a_1, 0)$ , пересечет ось  $x_1$   $n_3$ ,  $n_3 = n_2 - n_1$ , раз, включая и конечную точку  $(a_2, 0)$ . Если  $n_3$  нечетное, то  $a_1$  и  $a_2$  имеют разные знаки, при  $n_3$  четном - одинаковые.

Понятие соизмеримости семейства орбит и обусловленные ею свойства семейства сохраняются для простейших орбит слабовозмущенной задачи. К сожалению наиболее интересные семейства этой задачи, в том числе и получаемые из простейших как периодические решения второго рода, не описываются таким простым понятием, как соизмеримость.

### 3.3 Ветвление семейств симметричных периодических решений

Матрица Гессса  $\mathbf{H}''(t)$  функции Гамильтона  $H(\mathbf{x})$  ограниченной задачи трех тел имеет вид:

$$\mathbf{H}''(t) = \begin{vmatrix} H_{11}'' & H_{12}'' & 0 & -1 \\ H_{12}'' & H_{22}'' & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} H_{11}'' &= \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} = -2\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) - 3x_2^2\left(\frac{m_1}{r_1^5} + \frac{m_2}{r_2^5}\right), \\ H_{12}'' &= \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = -3x_2\left[\frac{m_1(x_1 - m_2)}{r_1^5} + \frac{m_2(x_1 + m_1)}{r_2^5}\right], \\ H_{22}'' &= \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} = \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - 3x_2^2\left(\frac{m_1}{r_1^5} + \frac{m_2}{r_2^5}\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для симметричных периодических решений ограниченной задачи трех тел выкладки раздела 1.2 существенно упрощаются, если начальный момент времени соответствует одному из двух моментов пересечения орбитой оси  $x_1$  ортогонально этой оси:

$$x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = v_1, \quad (3.3)$$

либо

$$x_1(0) = a_2, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = v_2. \quad (3.4)$$

В этом случае

$$x_1(-t) = x_1(t), \quad x_2(-t) = -x_2(t), \quad x_3(-t) = -x_3(t), \quad x_4(-t) = x_4(t), \quad (3.5)$$

и, как следует из элементарных выкладок, система уравнений в вариациях является  $t$ -инвариантной с матрицей  $\mathbf{G}$ ,

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Формула (1.22) для вычисления матрицы монодромии  $\mathbf{M} = \mathbf{Y}(T)$  принимает вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{Y}(T) = \mathbf{G}_1 \mathbf{Y}(T/2)^T \mathbf{G}_1 \mathbf{Y}(T/2), \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{GJ}$ ,

$$\mathbf{G}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Прямые выкладки показывают, что вычисляемая по формуле (3.7) матрица монодромии  $\mathbf{M}$  имеет определенные симметрии:

$$m_{33} = m_{11}, \quad m_{44} = m_{22}, \quad m_{43} = -m_{12}, \quad m_{23} = -m_{14}, \quad m_{34} = -m_{21}, \quad m_{41} = -m_{32}. \quad (3.9)$$

Кроме того  $H_2 = H_3 = 0$  и матрица  $\mathbf{A}$  имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -H_4 & H_1 & 0 \\ H_4 & 0 & 0 & -H_1 \\ -H_1 & 0 & 0 & -H_4 \\ 0 & H_1 & H_4 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Следовательно, после замены переменных  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{Az}$  свойство  $t$ -инвариантности с матрицей  $\mathbf{G}$  сохраняется и для новых переменных  $\mathbf{z}$  матрица монодромии  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}$ , также имеет симметрии:

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} & -n_{14} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & -n_{12} & n_{22} \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

Формула (3.9) раздела 1 упрощается:

$$d_2 = -2n_{14}, \quad d_3 = 2(1 - n_{22}), \quad d_4 = 0, \quad d_5 = -(n_{12}d_2 + n_{13}d_3)/v. \quad (3.12)$$

Наиболее существенным является **тождественное равенство нулю минора  $d_4$** .

**2.3.1. Пусть ранг матрицы  $\mathbf{N}_1$  равен 3**, то есть хотя бы один из миноров  $d_2, d_3$  не равен нулю.

Как следует из формулы (2.11) раздела 1, в этом случае вектор  $\mathbf{b}_1$ ,

$$\mathbf{b}_1 = d_2 \mathbf{a}_2 + d_3 \mathbf{a}_3 = d_2 \begin{vmatrix} -H_4 \\ 0 \\ 0 \\ H_1 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} H_1 \\ 0 \\ 0 \\ -H_4 \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

дает в фазовом пространстве направление касательной к единственному семейству периодических решений, проходящему через опорное решение (1.3) и имеющему период, близкий к  $T$ . Из формулы (3.13) видно, что вектор  $\mathbf{b}_1$  имеет нулевые проекции на оси  $x_2$  и  $x_3$  и новые периодические решения **симметричны относительно оси  $x_1$** . Следовательно, если хотя бы один из миноров  $d_2, d_3$  не равен нулю, то продолжение **симметричных периодических решений ограниченной задачи трех тел дает симметричные периодические решения**.

Так как  $n_{22} = n_{44}$ , то преобразование (2.20) делать не надо.

**A. Если  $d_3 \neq 0$** , то замена переменных  $\mathbf{z} = \mathbf{Bu}$  с матрицей  $\mathbf{B}$  переводит матрицу  $\mathbf{N}$  в матрицу  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & d_2/d_3 \\ 0 & 1 & d_2/d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_{42} & 0 & r_{22} \end{vmatrix}. \quad (3.14)$$

Исключая из рассмотрения случай  $|s| > 1$ , для мультиликаторов  $\rho_3$  и  $\rho_4$  имеем аналогично (2.21), (2.22)

$$\rho_3 = \cos \varphi - i \sin \varphi, \quad \rho_4 = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (3.15)$$

где угол  $\varphi$  определяется из условий

$$\cos \varphi = s, \quad r_{42} \sin \varphi \geq 0. \quad (3.16)$$

**Если**  $s \neq -1$ , то как и в общем случае замена переменных  $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{v}$  с матрицей  $\mathbf{C}$  переводит матрицу  $\mathbf{R}$  в матрицу  $\mathbf{S}$ ,

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad (3.17)$$

где  $c_{44} = \sqrt{r_{42}/\sin \varphi}$ ,  $c_{22} = 1/c_{44}$ .

Таким образом, при замене переменных  $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{v}$  с матрицей  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$ , матрица  $\mathbf{M}$  переводится в матрицу  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{MD}$ . Из структуры матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{S}$  видно, что при этом первый столбец матрицы  $\mathbf{A}$  остается неизменным, а второй просто умножается на  $c_{22}$ .

Если  $\varphi$  рационально выражается через  $2\pi$ ,  $\varphi = 2\pi \cdot p/q$ ,  $p$  и  $q$  - целые, то повторенному  $q$  раз исходному решению как и в общем случае будут соответствовать матрицы  $\mathbf{S}^q$  и  $\mathbf{M}^q$ ,

$$\mathbf{S}^q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13}q & 0 \\ 0 & \cos 2\pi p & 0 & -\sin 2\pi p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin 2\pi p & 0 & \cos 2\pi p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13}q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{M}^q = \mathbf{DS}^q\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D} \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13}q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{D}^{-1}. \quad (3.19)$$

Все 4 мультипликатора матрицы  $\mathbf{M}^q$  равны единице, она имеет два элементарных делителя  $(\rho - 1)$  и  $(\rho + 1)$  и один  $(\rho - 1)^2$ . Матрица монодромии  $\mathbf{M}^q$  в жордановой форме состоит из двух клеток 1-го порядка и одной клетки 2-го порядка и имеет три собственных вектора  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_4$ .

Следовательно, от повторенного  $q$  раз исходного решения ответвляются решения с периодом  $qT$ . Направления продолжения нового семейства дают векторы  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_4$ . Так как их проекции на  $\mathbf{v}_3$  равны нулю, то  $dH = 0$ .

Вектор  $\mathbf{v}_2$  имеет вид

$$\mathbf{v}_2 = c_{22} \begin{vmatrix} -H_4 \\ 0 \\ 0 \\ H_1 \end{vmatrix}. \quad (3.20)$$

Следовательно новые решения также **симметричны относительно оси  $x_1$** . Итак, при отсутствии резонанса 1:1 периодические решения второго рода, порождаемые симметричными периодическими решениями ограниченной задачи трех тел, являются симметричными периодическими решениями. Удивительным является тот факт, что для определения направления продолжения нового семейства (вектор  $\mathbf{v}_2$ ) не требуется вычисление матрицы монодромии.

Отдельно надо рассмотреть случай  $s = -1$ . Из  $r_{22} = r_{44} = -1$  следует, что  $r_{24}r_{42} = 0$ , и либо  $r_{24} = 0, r_{42} \neq 0$ , либо  $r_{42} = 0, r_{24} \neq 0$ , либо  $r_{24} = r_{42} = 0$ , и матрица  $\mathbf{R}$  имеет вид  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  либо  $\mathbf{R}_3$ ,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_{42} & 0 & -1 \end{vmatrix}, \mathbf{R}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (3.21)$$

Исключая третий случай, возникающий при четном  $q$ , как и в общем случае получаем, что  $\mathbf{R}$  и подобная ей  $\mathbf{N}$  имеют по два элементарных делителя  $(\rho - 1)^2$  и  $(\rho + 1)^2$  и по одному собственному вектору, соответствующих мультиплликаторам  $\rho = 1$  и  $\rho = -1$ . В случае матрицы  $\mathbf{R}_1$  вектор  $\mathbf{a}_2$ , дает в фазовом пространстве направление касательной к семейству периодических решений с удвоенным периодом. Так как вектор  $\mathbf{a}_2$  имеет нулевые проекции на оси  $x_2$  и  $x_3$ , то получаем симметричные периодические решения.

В случае матрицы  $\mathbf{R}_2$  вектор  $\mathbf{b}_2$  имеет ненулевые проекции на оси  $x_2$  и  $x_3$ , может показаться, что порождаемые периодические решения несимметричны. Однако это не так.

Выше было показано (формула (2.26)), что при четном  $q$  ( $q = 2q_1$  и  $p$  - нечетное) за время  $q_1 T$  получаем поворот на  $\pi$  (по модулю  $2\pi$ ). Для симметричного периодического решения при выполнении условия (3.3) в начальный момент времени получаем, что в момент времени  $q_1 T/2 = qT/4$  выполняется условие (3.4), то есть мы находимся во второй точке пересечения оси  $x_1$  под прямым углом. Из соображений симметрии ясно, что за время  $qT/4 = q_1 T/2$  получается поворот на  $\pi/2$  (по модулю  $2\pi$ ) инвариантного подпространства, натянутого на векторы  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_4$ . Поэтому матрица  $\mathbf{R}$ , вычисленная в этой точке имеет вид  $\mathbf{R}_1$ , а не  $\mathbf{R}_2$  и, следовательно, вектор  $\mathbf{a}_2$  имеет нулевые проекции на оси  $x_2$  и  $x_3$  и новые периодические решения с удвоенным периодом симметричны.

Этот переход полезен при любом четном  $q$ . Выше отмечалось, что для таких  $q$  направление вектора  $\mathbf{v}_2$  позволяет построить только одну ветвь семейства  $q$  - кратных периодических решений. Если вторую ветвь строить по направлению вектора  $\mathbf{v}_4$ , то (как и при  $q = 2$ ), может показаться, что порождаемые периодические решения несимметричны. Поэтому надо перейти во вторую точку пересечения оси  $x_1$  под прямым углом, пересчитать матрицу  $\mathbf{R}$  для этой точки и строить вторую ветвь семейства  $q$  - кратных симметричных периодических решений по новому направлению вектора  $\mathbf{v}_2$ .

**В. Если**  $d_3 = 0$  то  $n_{22} = 1$  и матрица  $\mathbf{N}$  приобретает вид:

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & 1 & -n_{14} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & -n_{12} & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.11')$$

где в силу симплектичности матрицы  $\mathbf{N}$

$$2n_{14} = n_{24}n_{12}, \quad n_{24}n_{42} = 0, \quad n_{14}n_{42} = 0. \quad (3.22)$$

**Если**  $d_2 \neq 0$ , то ранг матрицы  $\mathbf{N}_1$  равен 3 и матрица  $\mathbf{N}$  имеет один элементарный делитель  $(\rho - 1)^4$  и имеет один собственный вектор  $\mathbf{a}_1$ . Матрица монодромии в жордановой форме состоит из одной клетки 4-го порядка. Формула (3.13) сохраняется

$\mathbf{b}_1 = d_2 \mathbf{a}_2 + d_3 \mathbf{a}_3 = d_2 \mathbf{a}_2$ . Следовательно, на этом решении происходит смена устойчивости орбит, решения остаются симметричными.

**2.3.2. Пусть ранг матрицы  $N_1$  равен 2**, то есть  $d_2 = d_3 = 0$ , но среди элементов второй или третьей строки матрицы  $N_1$  есть отличные от нуля. В этом случае из равенства  $d_2 = -2n_{14} = 0$  следует, что для матрицы  $N$  возможны два варианта:

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & n_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & -n_{12} & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.23)$$

Во втором случае замена переменных  $\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{u}$  с матрицей  $\mathbf{B}$  переводит матрицу  $N$  в матрицу  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & n_{12}/n_{42} \\ 0 & 1 & n_{12}/n_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_{42} & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.24)$$

причем  $r_{42} = n_{42}$ .

Как и в общем случае матрица монодромии  $\mathbf{R}$  состоит из двух клеток 2-го порядка - одна на пересечении первого и третьего столбцов с первой и третьей строками, вторая - на пересечении второго и четвертого столбцов со второй и четвертой строками. Поэтому  $\mathbf{R}$  и подобная ей  $N$  имеют по два элементарных делителя  $(\rho - 1)^2$  и  $(\rho + 1)^2$  и по два собственных вектора, соответствующих мультиплликатору  $z = 1$ .

Для всех изученных нами семейств имел место второй случай и матрица  $\mathbf{R}$  приводилась к виду (3.24). Уравнения (2.8) принимают вид

$$r_{13} \cdot u_3 + vdT = 0, \quad r_{42} \cdot u_2 = 0. \quad (3.25)$$

Общее решение этой системы представимо в виде

$$u_1 = z_1 = c_1, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = c_2, \quad u_4 = c_3, \quad dT = -r_{13}c_2/v, \quad (3.26)$$

где  $c_1, c_2$  и  $c_3$  - произвольные постоянные.

С учетом замечания (2.11) вектор  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_1 = (0, 0, c_2, 0)^T$ , дает в фазовом пространстве направление касательной к единственному семейству периодических решений, проходящему через решение (1.3), и имеющему период, изменение которого при движении по семейству дается формулой (3.26):  $dT = -r_{13}c_2/v$ . Из определения матрицы  $\mathbf{B}$  видно, что проекция этого вектора на градиент функции Гамильтона  $H$  отличен от нуля. **Порождаемые при этом периодические решения симметричны.**

Вектор  $\mathbf{b}_2$ ,  $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 0, c_3)^T$ , дает в фазовом пространстве направление касательной ко второму семейству периодических решений, проходящему через решение (1.3), и имеющему период, для которого  $dT = 0$ . Проекция этого вектора на градиент функции Гамильтона  $H$  также равна нулю. **Порождаемое при этом периодическое решение несимметрично.**

Каждому семейству  $N$  несимметричных периодических решений  $\mathbf{x}(t)$  соответствует семейство  $N'$  несимметричных периодических решений  $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t})$ , получающихся из решений семейства  $N$  поворотом на 180 градусов вокруг оси  $x_1$  с помощью преобразования

(1.5). Значения параметра  $s$ , длительности периода и константы Якоби для точек этих семейств совпадают.

Исключением является только описанный выше случай порождения несимметричного периодического решения симметричным. В этом случае семейство решений  $\tilde{x}(\tilde{t})$  оказывается продолжением семейства  $x(t)$  и можно рассматривать две ветви одного семейства.

### 3.4 Примеры ветвления семейств периодических решений

Ниже рассматриваются примеры построения семейств периодических решений второго рода. Основное внимание уделяется семействам несимметричных периодических решений, а также резонансам 1,2,3.

#### 3.4.1 Семейство орбит вокруг точки либрации $L_3$

Простейшим из семейств симметричных периодических решений, для которого имеет место резонанс 1:1, является семейство орбит вокруг точки либрации  $L_3$ . На рисунке 5 даны (в синодической системе координат) образцы симметричных орбит вокруг точки  $L_3$ .

Вблизи всех трех коллинеарных точек либрации орбиты вокруг этих точек неустойчивы. Это видно и из рисунка 6, на котором дана зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для семейства орбит вокруг  $L_3$ . Однако, как видно из этого же рисунка, при убывании константы Якоби параметр  $s$  так же убывает, становится меньше 1, и последующие орбиты устойчивы.

Из точки смены устойчивости построено семейство несимметричных периодических орбит. Как видно из рисунка 6, у этого семейства параметр  $s$  по модулю везде меньше 1, то есть все орбиты этого семейства устойчивы.

На рисунке 7 даны образцы несимметричных орбит "вокруг" точки либрации  $L_3$ . Видно, что одна ветвь семейства заканчивается на короткопериодических орbitах вокруг треугольной точки либрации  $L_5$ , а симметричная ей вторая ветвь - на коротко-периодических орбитах вокруг треугольной точки либрации  $L_4$ . Эти семейства были получены ранее обратным движением из точек либрации  $L_4$  и  $L_5$ .

Из рисунка 6 видно, что у семейства несимметричных орбит на каждой ветви параметр  $s$  принимает, в частности, значения -0.5 (дважды), 0 и 0.5. Поэтому несложно построить семейства трех, четырех и шестикратных орбит. Примеры трехкратных орбит даны на рисунке 8. Два семейства трехкратных орбит и начинаются и заканчиваются на двух ветвях семейства несимметричных орбит "вокруг" точки либрации  $L_3$ .

У несимметричных орбит отклонение длительности периода от единичного значения бывает больше, чем у симметричных. Следовательно, у этих орбит интенсивнее эволюция в инерциальной, синодической системе координат. Образец эволюции за 1 год дан на рисунке 9.

Для задач проектирования сильноэволюционирующих орбит особенно существенна устойчивость орбит этого семейства.

Аналогичные расчеты проведены и для системы Солнце - Юпитер ( $m_2 = 0.00095388$ ). На рисунке 10 дана зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для семейств симметричных и несимметричных орбит вокруг точки либрации  $L_3$  при этом значении  $m_2$ .

Так как график для несимметричных орбит проходит выше  $s = 0.85$ , то минимальная кратность решений второго рода 12.

### 3.4.2 Семейство периодических орбит 2/1s

Для приложений наиболее интересными являются семейства прямых симметричных периодических орбит соизмеримости 2/1. Как показано в публикации автора [3], таких семейств два. Одно из них, обозначаемое далее 2/1s, возникает из семейства круговых орбит задачи двух тел, описанного в подпункте 2.2. На рисунках 11.1 и 11.2 даны образцы орбит этого семейства. Оказывается, что при больших значениях константы Якоби (малых радиусах) форма орбит близка к круговой. При малых значениях константы Якоби орбиты похожи на дополнительные орбиты соизмеримости 2/1 с практически неизменным периодом. На рисунках 12 и 13 даны графики зависимости параметра  $s$  и угла поворота  $\varphi$  от константы Якоби. Параметры периодических решений, которым соответствуют резонансы 1-10, даны в таблице 1. В качестве единицы длительности периода как и у Брюно [4] взята длительность одного оборота системы координат.

Аналогичные расчеты проведены и для системы Солнце - Юпитер. Соответствующие графики выведены пунктиром, параметры периодических решений, которым соответствуют резонансы 1-10, даны в таблице 2. В таблицах мы ограничились резонансами 1-10 только ради экономии бумаги. Используемая программа рассчитывает резонансы до 24-го.

Для построения начальных точек семейств симметричных периодических решений нужных соизмеримостей обычно используют в качестве порождающих решений решения невозмущенной задачи, а в качестве метода - метод продолжения по массовому параметру  $t_2$ .

Эти же решения можно рассматривать как периодические решения второго рода, порождаемые соответствующим семейством периодических орбит 2/1s, и для продолжения использовать описанный выше метод. Начальные точки семейств даются в таблицах типа таблиц 1 и 2.

В районе резонанса 2:1 теория предсказывает зону неустойчивости, с трудом различимую на рисунках 12 и 13. В увеличенном виде эта зона неустойчивости дана на рисунках 12.1 и 13.1. Видно, что размер зоны уменьшается с убыванием массового параметра  $t_2$ . Из рисунка 1 видно, что при  $t_2 = 0$  зона неустойчивости пропадает.

Всюду параметр  $s$  меньше 1, поэтому резонанса 1:1 нет и несимметричные решения не порождаются.

### 3.4.3 Семейство периодических орбит 2/1n

Второе семейство прямых симметричных периодических орбит соизмеримости 2/1 получено путем возмущения орбит вокруг коллинеарной точки либрации  $L_2$ , расположенной между притягивающими телами. Подробно это семейство описано в публикации автора [3]. Бруком [11] получена часть семейства 2/1n продолжением семейства периодических орбит 2/1s за орбиты соударения. На рисунках 14.1 - 14.4 даны образцы орбит семейства 2/1n. На рисунках 15 и 16 даны графики зависимости параметра  $s$  и длительности периода от константы Якоби. Параметры периодических решений, которым соответствуют резонансы 1-6, даны в таблице 3.

Для орбит семейства 2/1n максимальные значения модуля параметра  $s$  достигают 45000, для рассматриваемых ниже еще более сложных семейств - 150000000. Поэтому

на рисунке 15 и последующих даются фрагменты графиков зависимости параметра  $s$ , а именно окрестность области устойчивости.

Параметр  $s$  6 раз принимает значение 1. В точках 1 и 42 таблицы 3 имеем локальный максимум константы Якоби, в точке 15 - локальный минимум.

**Таблица 1. Параметры периодических решений с резонансами 1-10 семейства 2/1s в системе Земля-Луна.**

$n$	$a_1$	$v_1$	$a_2$	$v_2$	T	$C$	$s$	$u$	$p/q$
1	.21354168	2.01385250	-.18933170	-2.01286203	.1001	5.8205	.809	324	9/10
2	.22674803	1.93149962	-.20256179	-1.93036724	.1112	5.5473	.766	320	8/9
3	.24235360	1.84200621	-.21820099	-1.84069250	.1251	5.2679	.707	315	7/8
4	.26113985	1.74369328	-.23703690	-1.74214148	.1430	4.9821	.623	309	6/7
5	.28428567	1.63418461	-.26025985	-1.63230974	.1669	4.6894	.500	300	5/6
6	.31366365	1.50996273	-.28976574	-1.50763210	.2004	4.3897	.309	288	4/5
7	.33160243	1.44073052	-.30780181	-1.43809864	.2227	4.2373	.174	280	7/9
8	.35244895	1.36553097	-.32878211	-1.36253113	.2506	4.0835	.000	270	3/4
9	.37702253	1.28310532	-.35354488	-1.27965635	.2865	3.9284	-.223	257	5/7
10	.38622890	1.25375406	-.36283145	-1.25013596	.3009	3.8765	-.309	252	7/10
11	.40647567	1.19182169	-.38327289	-1.18783998	.3345	3.7725	-.500	240	2/3
12	.42960005	1.12507407	-.40664931	-1.12071671	.3764	3.6687	-.707	225	5/8
13	.44242516	1.08972122	-.41962594	-1.08519224	.4016	3.6170	-.809	216	3/5
14	.45618408	1.05302664	-.43355367	-1.04836242	.4303	3.5655	-.901	206	4/7
15	.46341665	1.03423052	-.44087608	-1.02952342	.4462	3.5400	-.940	200	5/9
16	.48325308	.98437544	-.46095201	-.97969935	.4930	3.4748	-1.000	180	1/2
17	.49174958	.96377846	-.46954129	-.95920968	.5146	3.4489	-1.000	180	1/2
18	.50878678	.92389640	-.48672062	-.91981007	.5616	3.3997	-.940	160	4/9
19	.51417689	.91169969	-.49213517	-.90786913	.5777	3.3848	-.901	154	3/7
20	.52340994	.89133568	-.50137206	-.88810853	.6069	3.3599	-.809	144	2/5
21	.53094927	.87527341	-.50886254	-.87274620	.6327	3.3400	-.707	135	3/8
22	.54231042	.85231912	-.52000061	-.85138917	.6760	3.3101	-.500	120	1/3
23	.55020711	.83768536	-.52755117	-.83851066	.7110	3.2887	-.309	108	3/10
24	.55322616	.83255365	-.53036379	-.83428907	.7261	3.2801	-.223	103	2/7
25	.55964508	.82326763	-.53607253	-.82778701	.7644	3.2598	.000	90	1/4
26	.56325839	.82042590	-.53888806	-.82773761	.7948	3.2448	.174	80	2/9
27	.56496585	.82197749	-.53974827	-.83204858	.8197	3.2331	.309	72	1/5
28	.56444825	.83448907	-.53745211	-.84997994	.8589	3.2151	.500	60	1/6
29	.55983204	.85782692	-.53095268	-.87878371	.8895	3.2006	.623	51	1/7
30	.55065495	.89518490	-.51968775	-.92212155	.9158	3.1865	.707	45	1/8
31	.53241361	.96374522	-.49881794	-.99847082	.9418	3.1681	.766	40	1/9

Порождаются два семейства несимметричных периодических решений. Одно из них начинается и заканчивается на семействе 2/1n - точки 14 и 28 таблицы 3 (точки  $R_1$  и  $R_2$  на графиках). Второе порождается точке 29 семейства 2/1n (точке  $R_3$  на графиках).

На рисунках 17 и 18 даны графики зависимости параметра  $s$  и длительности периода от константы Якоби для этих семейств несимметричных орбит. На рисунках 19.1 и 19.2 даны образцы орбит второго семейства, на рисунках 19.3 и 19.4 - образцы орбит первого семейства. Параметр  $s$  у обоих семейств полностью пересекает интервал  $(-1,1)$  и можно построить решения второго рода любой кратности.

**Таблица 2. Параметры периодических решений с резонансами 1-10 семейства 2/1s в системе Солнце-Юпитер.**

<i>n</i>	<i>a</i> <sub>1</sub>	<i>v</i> <sub>1</sub>	<i>a</i> <sub>2</sub>	<i>v</i> <sub>2</sub>	T	<i>C</i>	<i>s</i>	<i>u</i>	<i>p/q</i>
1	-.20212538	-2.22322681	.20211821	2.22329753	.1000	5.8434	.809	324	9/10
2	-.21538620	-2.15370352	.21537717	2.15378348	.1111	5.5681	.766	320	8/9
3	-.23106015	-2.07937755	.23104849	2.07946905	.1250	5.2867	.707	315	7/8
4	-.24993622	-1.99932290	.24992067	1.99942910	.1429	4.9986	.623	309	6/7
5	-.27320780	-1.91229058	.27318622	1.91241594	.1667	4.7036	.500	300	5/6
6	-.30277942	-1.81653081	.30274786	1.81668165	.2000	4.4016	.309	288	4/5
7	-.32086247	-1.76462011	.32082330	1.76478681	.2223	4.2480	.174	280	7/9
8	-.34191071	-1.70947044	.34186108	1.70965538	.2500	4.0928	.000	270	3/4
9	-.37612905	-1.62992212	.37605826	1.63013453	.3001	3.8841	-.309	252	7/10
10	-.39673615	-1.58708251	.39664989	1.58730868	.3334	3.7792	-.500	240	2/3
11	-.42041211	-1.54182941	.42030549	1.54206675	.3751	3.6744	-.707	225	5/8
12	-.43363920	-1.51819182	.43352001	1.51843226	.4001	3.6221	-.809	216	3/5
13	-.45556175	-1.48133624	.45542009	1.48157465	.4446	3.5440	-.940	200	5/9
14	-.48010925	-1.44316216	.47994078	1.44338310	.4994	3.4675	-1.000	180	1/2
15	-.48081055	-1.44211596	.48064130	1.44233609	.5010	3.4655	-1.000	180	1/2
16	-.50296194	-1.41025229	.50276867	1.41043517	.5558	3.4053	-.940	160	4/9
17	-.51945500	-1.38794240	.51924569	1.38807872	.6003	3.3651	-.809	144	3/5
18	-.52819939	-1.37657964	.52798296	1.37668258	.6253	3.3451	-.707	135	3/8
19	-.54198106	-1.35931135	.54175669	1.35934593	.6671	3.3155	-.500	120	1/3
20	-.55233042	-1.34686031	.55210407	1.34682759	.7004	3.2946	-.309	108	3/10
21	-.56677405	-1.33026450	.56655416	1.33010705	.7505	3.2670	.000	90	1/4
22	-.57423906	-1.32208859	.57402890	1.32184796	.7784	3.2534	.174	80	2/9
23	-.57991080	-1.31609907	.57971232	1.31578386	.8007	3.2433	.309	72	1/5
24	-.58786708	-1.30812527	.58769412	1.30768310	.8341	3.2292	.500	60	1/6
25	-.59307206	-1.30331487	.59292474	1.30276928	.8580	3.2199	.623	51	1/7
26	-.59664234	-1.30033634	.59651951	1.29970495	.8760	3.2133	.707	45	1/8
27	-.59916276	-1.29851312	.59906299	1.29780922	.8899	3.2083	.766	40	1/9
28	-.60096905	-1.29746552	.60089093	1.29669928	.9012	3.2045	.809	36	1/10

### 3.5 Семейство периодических орбит соизмеримости 3/2 и его потомки

Типичную ситуацию можно проиллюстрировать на примере семейства симметричных периодических орбит соизмеримости 3/2. Подробно это семейство описано в публикации автора [3]. Это семейство замкнутое и имеет не слишком большие мультиплликаторы в области неустойчивости. Были построены 3 разных семейства симметричных шестикратных орбит - ((3/2)2)3, (3/2)3)2 и (3/2)6. Оказывается, наличие несимметричных периодических решений существенно увеличивает число ветвей.

#### 3.5.1 Семейство периодических орбит соизмеримости 3/2

На рисунке 20 даны образцы орбит этого семейства, на рисунках 21 и 22 - зависимости параметра *s* и угла поворота  $\varphi$  от константы Якоби. Параметры периодических решений

соизмеримости 3/2, которым соответствуют резонансы 1-6, даны в таблице 4.

**Таблица 3. Параметры периодических решений с резонансами 1-6 семейства 2/1n в системе Земля-Луна.**

<i>n</i>	<i>a</i> <sub>1</sub>	<i>v</i> <sub>1</sub>	<i>a</i> <sub>2</sub>	<i>v</i> <sub>2</sub>	<i>l</i> <sub>1</sub>	T	<i>C</i>	<i>s</i>	<i>u</i>
1	-.8647642	.2154603	.7678626	.2568450	5	1.3256214	3.1518388	1- <i>ma</i> <sub>1</sub>	360
2	-.8647676	.2154664	.7678373	.2569402	5	1.3258370	3.1518388	0.5	300
3	-.8647689	.2154688	.7678276	.2569765	5	1.3259193	3.1518388	0.309	288
4	-.8647711	.2154726	.7678120	.2570352	5	1.3260524	3.1518387	0	270
5	-.8647745	.2154789	.7677868	.2571302	5	1.3262679	3.1518387	-0.5	240
6	-.8647767	.2154829	.7677712	.2571888	5	1.3264010	3.1518386	-0.809	216
7	-.8647780	.2154853	.7677616	.2572250	5	1.3264833	3.1518386	-1	180
8	-.8705616	.2435292	.7570626	.3087891	5	1.4975851	3.1439777	-1	180
9	-.8705635	.2435397	.7570620	.3087966	5	1.4976262	3.1439744	-0.809	144
10	-.8705666	.2435568	.7570610	.3088086	5	1.4976926	3.1439691	-0.5	120
11	-.8705716	.2435844	.7570593	.3088280	5	1.4978000	3.1439605	0	90
12	-.8705747	.2436015	.7570583	.3088400	5	1.4978663	3.1439552	0.309	72
13	-.8705766	.2436120	.7570577	.3088474	5	1.4979072	3.1439519	0.5	60
14	-.8705816	.2436395	.7570560	.3088667	5	1.4980142	3.1439434	1- <i>e</i> <sub>2</sub>	0
15	-.9813759	2.033815	1.318173	-.8316664	7	3.1703870	2.5692095	1- <i>mi</i> <sub>1</sub>	360
16	-.9813754	2.033754	1.318201	-.8316912	7	3.1703647	2.5692096	0.5	300
17	-.9813753	2.033731	1.318211	-.8317006	7	3.1703561	2.5692098	0.309	288
18	-.9813750	2.033693	1.318229	-.8317160	7	3.1703423	2.5692098	0	270
19	-.9813746	2.033631	1.318257	-.8317408	7	3.1703198	2.5692099	-0.5	240
20	-.9813744	2.033593	1.318275	-.8317562	7	3.1703060	2.5692101	-0.809	216
21	-.9813741	2.033569	1.318285	-.8317656	7	3.1702973	2.5692102	-1	180
22	-.9800519	1.857074	1.327552	-.8095257	7	3.1461813	2.6195328	-1	180
23	-.9800501	1.856868	1.327539	-.8094699	7	3.1461642	2.6196031	-0.809	144
24	-.9800473	1.856535	1.327517	-.8093794	7	3.1461364	2.6197171	-0.5	120
25	-.9800428	1.855996	1.327482	-.8092328	7	3.1460915	2.6199017	0	90
26	-.9800399	1.855662	1.327461	-.8091419	7	3.1460637	2.6200159	0.309	72
27	-.9800382	1.855456	1.327447	-.8090857	7	3.1460465	2.6200866	0.5	60
28	-.9800336	1.854915	1.327412	-.8089382	7	3.1460015	2.6202717	1- <i>b</i> <sub>2</sub>	0
29	-.9166030	.5159218	.8830903	.1377485	5	2.6460475	3.0423304	1- <i>e</i> <sub>1</sub>	0
30	-.9165984	.5158902	.8830496	.1378273	5	2.6458979	3.0423431	0.5	60
31	-.9165967	.5158781	.8830341	.1378574	5	2.6458408	3.0423479	0.309	72
32	-.9165938	.5158586	.8830090	.1379061	5	2.6457484	3.0423557	0	90
33	-.9165892	.5158271	.8829685	.1379847	5	2.6455989	3.0423683	-0.5	120
34	-.9165863	.5158076	.8829434	.1380333	5	2.6455065	3.0423761	-0.809	144
35	-.9165846	.5157955	.8829279	.1380634	5	2.6454494	3.0423809	-1	180
36	-.8981162	.4030797	.7552155	.3971476	5	2.0542318	3.0854166	-1	180
37	-.8981160	.4030789	.7552037	.3971783	5	2.0542142	3.0854166	-0.809	216
38	-.8981156	.4030776	.7551847	.3972280	5	2.0541858	3.0854166	-0.5	240
39	-.8981149	.4030756	.7551539	.3973085	5	2.0541398	3.0854167	0	270
40	-.8981145	.4030743	.7551348	.3973583	5	2.0541114	3.0854167	0.309	288
41	-.8981142	.4030736	.7551231	.3973891	5	2.0540938	3.0854167	0.5	300
42	-.8981136	.4030716	.7550922	.3974696	5	2.0540479	3.0854167	1- <i>ma</i> <sub>2</sub>	360

Из рисунка 21 видно, что параметр  $s$  принимает значение 1 только в точках экстремума константы Якоби. В этих точках происходит смена устойчивости орбит, решения остаются симметричными. Для выхода на семейства несимметричных периодических орбит надо построить семейства кратных соизмеримостей. Из рисунка 22 видно, что существуют в частности два двукратных семейства (угол поворота  $\varphi$  равен  $180^\circ$ ), одно трехкратное ( $\varphi = 240^\circ$ ), одно четырехкратное ( $\varphi = 270^\circ$ ) и три пятикратных ( $\varphi = 144^\circ$ ,  $\varphi = 216^\circ$  и  $\varphi = 288^\circ$ ). Каждому семейству соответствуют две точки на графике рисунка 22, одна в его левой части, вторая - в правой.

### 3.5.2 Семейства, порождаемые орбитами соизмеримости (3/2)2

Остановимся на интересных семействах соизмеримости (3/2)2. Образцы орбит этих семейств даны на рисунке 23. При резонансе 2:1 матрица монодромии имеет элементарные делители  $(\rho - 1)^2$  и  $(\rho + 1)^2$  и в жордановой форме состоит из двух клеток 2-го порядка. Поэтому устойчивая и неустойчивая ветви порожденного семейства периодических решений второго рода пересекают основное семейство не в общих точках, как при остальных резонансах. Это видно из рисунка 24, на котором зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для одной ветви дана сплошной линией, а для другой - мелким пунктиром. Правая часть графика в увеличенном виде дана на рисунке 24.1. Оба графика имеют по одному пересечению линии  $s=1$  в точках, отличных от граничных, и поэтому порождающих семейства несимметричных периодических орбит. Образцы орбит этих семейств даны на рисунке 25. Оказывается, что оба семейства сливаются в одно семейство, соединяющее эти ветви. Зависимость параметра  $s$  константы Якоби для этого семейства, обозначенного далее (3/2)2n, дана на рисунках 24 и 24.1.

Здесь и далее  $b_i$  и  $e_i$  обозначают начальную и конечную точку  $i$ -го семейства,  $b_n$  и  $e_n$  - начальную и конечную точку семейства несимметричных периодических орбит.

Параметры симметричных периодических решений соизмеримости (3/2)2, которым соответствуют резонансы 1-6, даны в таблице 5, а несимметричных - в таблице 6. У несимметричных орбит  $x_2$  фиксируется равным нулю и поэтому не выводится.

Начальной и конечной точкам  $b_n$  и  $e_n$  семейства (3/2)2n соответствуют 1-я и 14-я строки таблицы 6. В 1-й строке  $x_3$  равно нулю, как и положено для симметричных орбит. В 14-я строке  $x_3$  отлично от нуля и может показаться, что орбита несимметрична. На самом деле имеет место несимметричное представление симметричных орбит, описанное выше в разделе 2.2.

Здесь и далее выводятся данные по одной ветви семейства несимметричных периодических орбит. Для второй ветви (второго решения) надо заменить  $x_2$  и  $x_3$  на  $-x_2$  и  $-x_3$ .

На рисунке 26 дана зависимость угла поворота от константы Якоби для семейств соизмеримости (3/2)2. Углу поворота 120 градусов соответствуют орбиты утроенной соизмеримости ((3/2)2)3. Имеем одно семейство симметричных решений ((3/2)2)3s и два семейства несимметричных периодических решений ((3/2)2)3n.

Параметры симметричных периодических решений семейства ((3/2)2s)3 с резонансами 1-3 даны в таблице 7.

Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для этих семейств дана на рисунках 27 и 28. Видно, что семейства несимметричных периодических решений ((3/2)2)3n не

имеют резонансов 1:1, а семейство симметричных решений  $((3/2)2)3s$  порождает два семейства несимметричных периодических решений  $((3/2)2)3s_{\text{n}}$ .

Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для этих семейств дана на рисунке 29. Видно, что у этих семейств резонансов 1:1 нет и процесс генерации орбит устроенной соизмеримости  $((3/2)2)3$  завершается.

Всего получилось 5 семейств устроенной соизмеримости  $((3/2)2)3$  - одно семейство симметричных решений  $((3/2)2)3s$  и 4 семейства несимметричных периодических решений.

Образец орбиты семейства несимметричных периодических решений  $((3/2)2)3n$  дан на рисунке 30.

**Таблица 4. Параметры периодических решений с резонансами 1-6 семейства 3/2.**

$n$	$a_1$	$v_1$	$a_2$	$v_2$	$l_1$	Период	$C$	$s$	$u$	$p/q$
1	-3172924	-1.851740	1.215301	-.6519440	5	2.0323	2.7050	1	360	1/1
2	-3156298	-1.859486	1.217309	-.6531780	5	2.0301	2.7055	0.5	300	5/6
3	-3151363	-1.861685	1.217988	-.6532993	5	2.0292	2.7061	0.309	288	4/5
4	-3146098	-1.863773	1.218904	-.6528361	5	2.0276	2.7077	0	270	3/4
5	-3151472	-1.859658	1.219364	-.6487916	5	2.0242	2.7135	-0.5	240	2/3
6	-3177628	-1.844953	1.217840	-.6409968	5	2.0211	2.7219	-0.809	216	3/5
7	-3226236	-1.818976	1.214189	-.6287974	5	2.0181	2.7335	-1	180	1/2
8	-3838339	-1.530937	1.159007	-.4941644	5	2.0027	2.8331	-1	180	1/2
9	-4681968	-1.204757	1.078180	-.3161734	5	1.9848	2.9275	-0.809	144	2/5
10	-5597204	-0.9100488	.9901229	-.1271654	5	1.9466	2.9966	-0.809	144	2/5
11	-6505477	-0.6597327	.9070566	.0445815	3	1.8369	3.0413	-1	180	1/2
12	-6634960	-0.6268563	.8967983	.0640190	3	1.8092	3.0463	-1	180	1/2
13	-6838869	-0.5767234	.8833211	.0870411	3	1.7588	3.0535	-0.809	216	3/5
14	-6939332	-0.5530850	.8787631	.0927866	3	1.7326	3.0564	-0.5	240	2/3
15	-7023986	-0.5340601	.8766625	.0931153	3	1.7114	3.0582	0	270	3/4
16	-7058842	-0.5265653	.8764170	.0916677	3	1.7032	3.0587	0.309	288	4/5
17	-7076725	-0.5228183	.8764611	.0904929	3	1.6993	3.0588	0.5	300	5/6
18	-7114741	-0.5151176	.8769965	.0868754	3	1.6915	3.0590	1	360	1/1

### 3.5.3 Семейства, порождаемые орбитами соизмеримости $(3/2)3$

Из таблицы 4 и рисунка 22 следует, что существует одно семейство периодических решений устроенной соизмеримости  $(3/2)3$ . Параметры решений этого семейства, соответствующих резонансам 1 и 2, приведены в таблице 8. Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби дана на рисунке 31. На рисунке 32 даны образцы орбит этого семейства.

Известно [4], что в точке рождения семейства устроенной соизмеримости смены устойчивости не происходит, решения остаются неустойчивыми. Обычно точка смены устойчивости и экстремума константы Якоби находится недалеко от точки рождения семейства устроенной соизмеримости. Это хорошо видно на рисунке 31.1, на котором в увеличенном виде дан правый конец рисунка 31.

**Таблица 5. Параметры периодических решений с резонансами 1-6 семейства (3/2)2s.**

$n$	$x_1$	$x_4$	$l_1$	Период	$C$	$s$	$v$	$u$	$p/q$
1	-.32262592	-1.81896543	9	4.03628752	2.73352865	1	$b_1$	0	1/1
2	-.33659330	-1.75387147	9	4.03689276	2.73972971	.5		60	1/6
3	-.34033283	-1.73670937	9	4.03713505	2.74227989	.309		72	1/5
4	-.34632550	-1.70954104	9	4.03754246	2.74667367	0		90	1/4
5	-.35658885	-1.66400611	9	4.03825125	2.75471635	-.5		120	1/3
6	-.36374981	-1.63298050	9	4.03872998	2.76053700	-.809		144	2/5
7	-.36872521	-1.61177790	9	4.03904720	2.76463340	-1		180	1/2
8	-.45950126	-1.26848150	9	4.03944077	2.83698305	-1		180	1/2
9	-.46584793	-1.24707666	9	4.03886987	2.84164188	-.809		144	2/5
10	-.47521960	-1.21598544	9	4.03782048	2.84841299	-.5		120	1/3
11	-.48895726	-1.17146976	9	4.03578850	2.85810999	0		90	1/4
12	-.49691494	-1.14623210	9	4.03431200	2.86360671	.309		72	1/5
13	-.50170259	-1.13123401	9	4.03330757	2.86687271	.5		60	1/6
14	-.51393972	-1.09350918	9	4.03030702	2.87508642	1	$b_n$	0	1/1
15	-.65054779	-.659732709	5	3.67398549	3.04130518	1	$e_1$	0	1/1
16	.89679838	.064019038	5	3.61840751	3.04636002	1	$e_2$	0	1/1
17	.91145196	.017940577	5	3.67688413	3.04014388	1	$e_n$	0	1/1
18	1.1590072	-.494164435	9	4.00546118	2.83312644	1	$b_2$	0	1/1

**Таблица 6. Параметры периодических решений с резонансами 1-6 семейства (3/2)2n.**

$n$	$x_1$	$x_3$	$x_4$	$l_1$	Период	$C$	$s$	$u$	$p/q$
1	-.513939729	.000000000	-1.093509180	9	4.03030	2.875086	1	1	1/1
2	-.519923199	-.006079439	-1.075367378	9	4.02876	2.879007	.5	60	1/6
3	-.522225635	-.007075121	-1.068438805	9	4.02812	2.880504	.309	72	1/5
4	-.525797287	-.008320131	-1.057747359	7	4.02707	2.882817	0	90	1/4
5	-.531679841	-.009896891	-1.040285359	7	4.02518	2.886596	-.5	120	1/3
6	-.535249135	-.010666716	-1.029777360	7	4.02393	2.888872	-.809	144	2/5
7	-.537447558	-.011089103	-1.023337360	7	4.02313	2.890268	-1	0	1/2
8	-.692584838	-.021977902	-.584861652	5	3.73157	3.022892	-1	180	1/2
9	-.692134946	-.022368366	-.584673276	5	3.72769	3.024138	-.809	144	2/5
10	-.691122401	-.023108997	-.584858165	5	3.72113	3.026246	-.5	120	1/3
11	-.688352621	-.024754391	-.587171539	5	3.70942	3.029986	0	90	1/4
12	-.685386138	-.026284599	-.590934776	5	3.70118	3.032598	.309	72	1/5
13	-.682619451	-.027624521	-.595072827	5	3.69551	3.034384	.5	60	1/6
14	-.654400080	-.040941725	-.650662359	5	3.67688	3.040144	1	1	1/1

**Таблица 7. Параметры симметричных периодических решений с резонансами 1-3 семейства ((3/2)2s)3.**

<i>n</i>	<i>a</i> <sub>1</sub>	<i>v</i> <sub>1</sub>	<i>a</i> <sub>2</sub>	<i>v</i> <sub>2</sub>	<i>l</i> <sub>1</sub>	Период	<i>C</i>	<i>s</i>	<i>u</i>	<i>p/q</i>
1	-.4749782	-1.2167171	-.3683738	-1.5870035	13	12.1135	2.8483899	1	360	1/1
2	-.4752196	-1.2159854	-.3684035	-1.5868761	13	12.1135	2.8484129	1	360	1/1
3	-.4791761	-1.2020316	-.3716119	-1.5722940	13	12.1108	2.8536543	1	360	1/1
4	-.6464421	-.6963806	-.5263090	-.9974070	7	11.3885	3.0040005	1	360	1/1
5	-.6464121	-.6964463	-.5263088	-.9974075	7	11.3885	3.0040005	-.5	240	2/3
6	-.6464021	-.6964682	-.5263088	-.9974078	7	11.3885	3.0040005	-.1	180	1/2
7	-.4319275	-1.3488783	-.3751212	-1.5563311	13	12.0952	2.8597913	-.1	181	1/2
8	-.4319105	-1.3489427	-.3751082	-1.5563889	13	12.0952	2.8597722	-.5	240	2/3
9	-.4318593	-1.3491360	-.3750691	-1.5565627	13	12.0953	2.8597146	1	360	1/1
10	-.3565855	-1.6640381	-.3205794	-1.8227392	13	12.1147	2.7546556	1	360	1/1
11	-.3581122	-1.6583143	-.3211087	-1.8207709	13	12.1135	2.7527637	1	360	1/1
12	-.3610677	-1.6459694	-.3224104	-1.8144441	13	12.1124	2.7536064	-.5	240	2/3
13	-.3617320	-1.6431736	-.3227074	-1.8129714	13	12.1121	2.7539190	-.1	180	1/2
14	-.6544869	-.7159721	-.4798185	-1.1582952	13	11.8448	2.9523118	-.1	180	1/2
15	-.6546217	-.7156363	-.4799198	-1.1579466	13	11.8443	2.9523994	-.5	120	1/3
16	-.6550296	-.7146200	-.4802270	-1.1568897	13	11.8431	2.9526651	1	0	1/1
17	-.6923953	-.6206785	-.5153518	-1.0400800	9	11.6799	2.9806353	1	0	1/1
18	-.6926769	-.6199468	-.5157012	-1.0389560	9	11.6781	2.9808914	-.5	120	1/3
19	-.6927695	-.6197058	-.5158167	-1.0385848	9	11.6775	2.9809759	-.1	180	1/2
20	-.7184468	-.5394727	-.5687223	-.8735680	7	11.2666	3.0195625	-.1	180	1/2
21	-.7184414	-.5394822	-.5687051	-.8736130	7	11.2664	3.0195627	-.5	240	2/3
22	-.7184251	-.5395111	-.5686528	-.8737500	7	11.2662	3.0195630	1	0	1/1

Строки 1 и 6 таблицы 8 задают начальную и конечную точки семейства симметричных периодических решений утроенной соизмеримости  $(3/2)3s$ , строки 2 и 7 - точки минимума и максимума константы Якоби на семействе, строки 5 и 10 - начальную и конечную точки порождаемого семейства несимметричных периодических решений утроенной соизмеримости  $(3/2)3n$ . Строки 3 и 4 таблицы 8 задают начальную и конечную точки первого, а строки 8 и 9 - второго семейства симметричных шестикратных периодических решений  $((3/2)3s)2$ .

На рисунке 32 дан образец орбиты семейства  $(3/2)3n$ .

На рисунках 33.1 и 33.2 дана зависимость угла поворота от константы Якоби для семейств  $(3/2)3s$  и  $(3/2)3n$ .

Из этих графиков видно, что семейство несимметричных периодических решений  $((3/2)3n$  не имеет резонансов 1:1 но порождает семейство удвоенной соизмеримости  $((3/2)3n)2n$  и симметричное ему. Параметры решений семейства  $((3/2)3n)2n$ , соответствующих резонансам 1:1, приведены в таблице 9. Зависимость параметра *s* от константы Якоби дана на рисунке 35. Хорошо видна нестандартная структура этого семейства. Оно начинается при  $C=2.860914159783788$ , затем продолжается в сторону возрастания константы Якоби до локального максимума  $C=3.040830711574453$ , далее продолжается в сторону убывания константы Якоби до локального минимума  $C=2.878933009235505$ , затем снова продолжается в сторону возрастания константы Якоби и заканчивается при  $C=3.042969168736619$ .

**Таблица 8. Параметры периодических решений с резонансами 1-2 семейства (3/2)3.**

$n$	$a_1$	$v_1$	$a_2$	$v_2$	$l_1$	Период	$C$	$s$	$v$	$u$
1	-.3151472	-1.859658	1.219364	-.6487916	13	6.07267	2.7135062	1	b	0
2	-.3127623	-1.871182	1.217018	-.6470900	13	6.07361	2.7131937	1	mi	0
3	-.3078579	-1.893998	1.206048	-.6350473	13	6.07848	2.7171754	-1	$b_1$	180
4	-.3749641	-1.556780	1.078693	-.4091919	13	6.10363	2.8603334	-1	$e_1$	180
5	-.3752300	-1.555600	1.078379	-.4085585	13	6.10344	2.8607211	1	$b_n$	0
6	-.6939332	-.5530850	.8787631	.9278663	7	5.19796	3.0564290	1	e	0
7	-.6972400	-.5462082	.8778267	.9684909	7	5.19519	3.0564863	1	ma	0
8	-.7123745	-.5176874	.8767630	.1106078	7	5.20993	3.0545807	-1	$e_1$	180
9	-.7249722	-.5044377	.8954870	.8705040	7	5.33878	3.0438547	-1	$b_1$	180
10	-.7252066	-.5046120	.8968346	.8474909	7	5.34592	3.0432492	1	$e_n$	0

**Таблица 9. Параметры периодических решений с резонансами 1:1 семейства ((3/2)3n)2n.**

$n$	$x_1$	$x_2$	$v_1$	$v_2$	$l_1$	Период	$C$	$s$	$v$
1	.0	-.385313035	1.554612680	.136449380	13	12.206716	2.860914	1	b
2	.0	-.514137384	1.036189037	.115380136	13	10.723773	3.040831	1	max
3	.3	.258284488	-1.332477735	.793330600	13	12.148812	2.878933	1	min
4	.3	.454959443	-.884315024	.399445744	13	10.695347	3.042969	1	e

Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для двух семейств симметричных периодических решений  $((3/2)3s)2s$  дана на рисунке 36. Параметры решений, соответствующих резонансам 1:1, приведены в таблице 10. Первые 5 строк соответствуют первому семейству, следующие 5 строк - второму семейству. Каждое из этих семейств порождает по одному семейству несимметричных периодических решений  $((3/2)3s)2n$ . Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для этих семейств дана на рисунке 37. Параметры решений, соответствующих резонансам 1:1, приведены в таблице 11.

Отметим, что в отличие от предыдущих случаев резонанса 1:2 каждое несимметричное семейство  $((3/2)3s)2n$  начинается и заканчивается на своем семействе симметричных периодических решений  $((3/2)3s)2s$ , а не соединяет их.

Итого мы получили 6 шестикратных семейств, порожденных орбитами соизмеримости  $(3/2)3$  - 2 симметричных и 4 несимметричных.

### 3.5.4 Семейства, порождаемые орбитами соизмеримости $(3/2)6$

Из таблицы 4 и рисунка 22 следует, что существует одно семейство шестикратных симметричных периодических решений  $(3/2)6s$ . Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби дана на рисунке 38. Ясно, что существует одно семейство шестикратных несимметричных периодических решений  $(3/2)6n$ . Ввиду сверхвысокой неустойчивости этих решений (модуль параметра  $s$  достигает  $10^8$ ) удалось построить только правую часть этого семейства.

**Таблица 10. Параметры периодических решений с резонансами 1:1 семейства ((3/2)3s)2s.**

$n$	$a_1$	$v_1$	$a_2$	$v_2$	$l_1$	Период	$C$	$s$	$v$
1	1.20604893	-.63504733	1.20604893	-.63504733	13	12.1570	2.7172	1	$b_1$
2	1.19011617	-.61400457	1.20645500	-.62700110	13	12.1558	2.7277	1	$b_{n_1}$
3	.91540967	-.02460619	.91625373	-.01018811	9	10.8010	3.0374	1	$e_{n_1}$
4	.91442228	-.02181991	.91504190	-.01014000	9	10.7748	3.0382	1	max
5	1.07869368	-.40919195	1.07869368	-.40919195	13	12.2073	2.8603	1	$e_1$
6	-.71237451	-.51768741	-.71237451	-.51768741	7	10.4199	3.0546	1	$e_2$
7	-.72558719	-.49741999	-.70097176	-.54479455	7	10.5519	3.0498	1	$e_{n_2}$
8	-.57925918	-.91226584	-.56256035	-.95283420	11	12.1167	2.9034	1	$b_{n_2}$
9	-.57704373	-.91827850	-.56112557	-.95708935	11	12.1218	2.9021	1	min
10	-.72497227	-.50443773	-.72497227	-.50443773	7	10.6776	3.0439	1	$b_2$

**Таблица 11. Параметры периодических решений с резонансами 1:1 семейства ((3/2)3s)2n.**

$n$	$x_1$	$x_2$	$v_1$	$v_2$	$l_1$	Период	$C$	$s$	$v$
1	.0	-.544015025	.941430392	.110648322	13	10.551931	3.049760	1.0	$e_{n_2}$
2	.0	-.356211317	1.662620769	.159599984	13	12.116702	2.903448	1.0	$b_{n_2}$
3	.0	.503114200	-1.072183410	.117575537	17	10.801039	3.037438	1.0	$e_{n_1}$
4	.2	-.233722798	1.708365007	1.028233412	13	12.155770	2.727745	1.0	$b_{n_1}$

Итого у нас получилось 13 семейств шестикратных орбит, 4 симметричных и 9 несимметричных.

Довольно неожиданным оказался тот факт, что кривая зависимости параметра  $s$  от константы Якоби имеет практически произвольный вид.

Кривая не обязательно пересекает всю область устойчивости, локальный экстремум  $s$  по константе Якоби может достигаться и внутри области устойчивости.

Диапазон изменения константы Якоби у потомков может существенно превосходить диапазон изменения константы Якоби родителей. Константа Якоби может иметь несколько локальных экстремумов.

## 4 Заключение

В публикации [3] я выдвинул гипотезу о том, что **семейство периодических решений первого рода и итеративно генерируемые из него семейства периодических решений второго рода образуют дерево**. Доказать это не удалось, однако и опровергающих численных примеров не встретилось.

В этом смысле самыми сложными являются случаи резонанса 1:2. Порождаемые при этом две ветви приходится считать независимыми семействами, иногда имеющими общего потомка (резонанс 1:1).

Отметим, что для ограниченной задачи трех тел резонанс 1:1 имел место только для семейств симметричных решений и ни разу не встретился для семейств несимметричных периодических решений.

Анализ орбит, полученных по вышеописанным алгоритмам, позволил выделить направление поиска реальных орбит, удовлетворяющих требованиям проекта наземно-

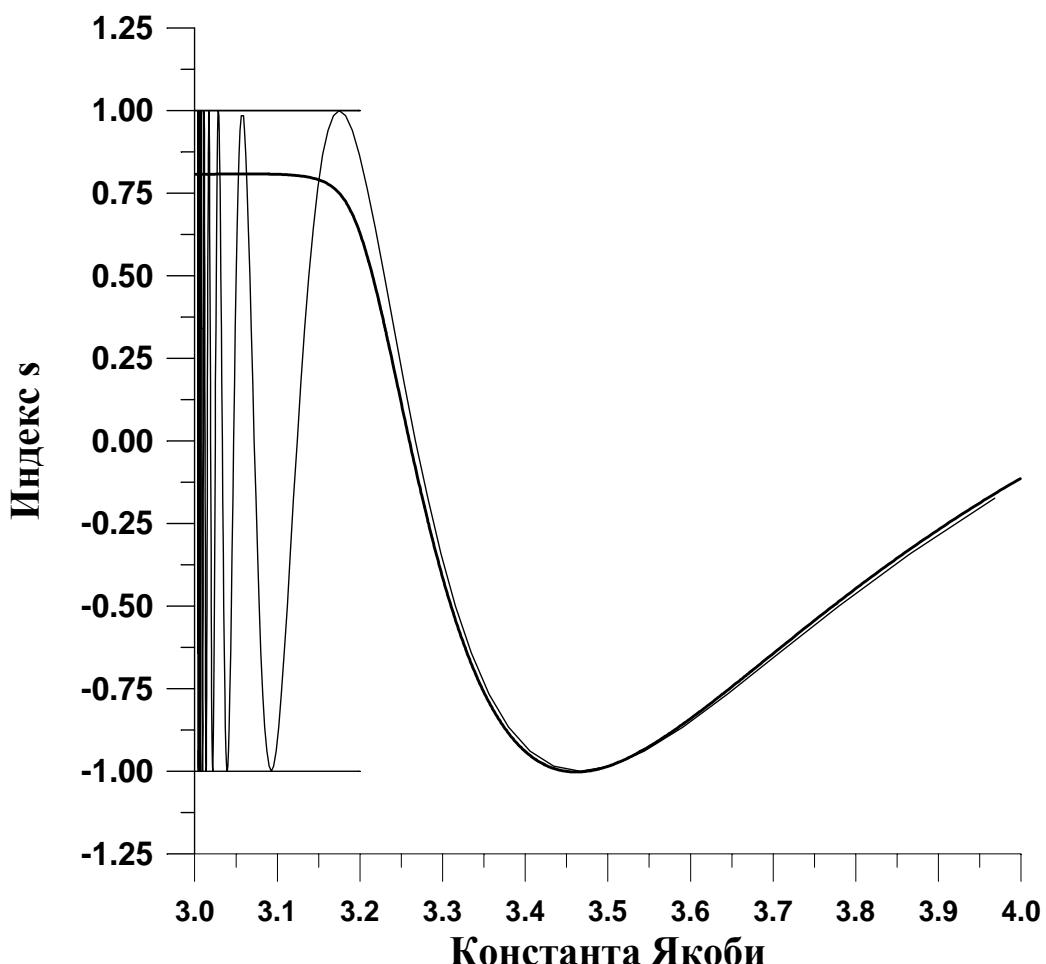
космического интерферометра "Радиоастрон".

Автор благодарен Кардашеву Н.С., Пономареву Ю.Н. и Сазонову В.В. за внимание и помощь в работе. Промежуточные результаты в 1995-1999 годах неоднократно докладывались на спецсеминаре кафедры теоретической механики МГУ. Автор благодарен всем коллегам, принимавшим участие в работе этих семинаров, особенно профессорам Белецкому В.В. и Брюно А.Д.

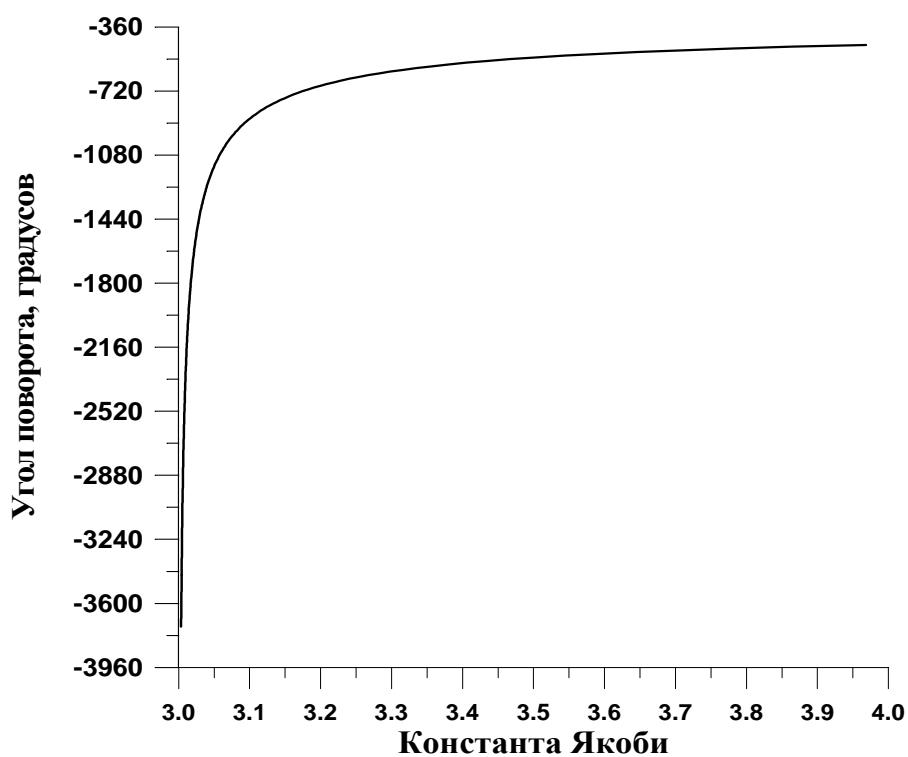
## Литература

- [1] Poincare H. Les methodes nouvelles de la Mecanique celeste, Т. 1-3. Paris, Gauthier-Villars, 1892, 385 р.; 1893, 479 р.; 1899, 414 р.  
(Перевод на русский язык: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 1-3. В книге: Избранные труды. Т. 1-2. М.: Наука, 1971, 771 с.; 1972, 9-356 с.)
- [2] Мерман Г.А. Комментарии к тому 3 "Новых методов небесной механики". В книге: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972, с. 962.
- [3] Крейсман Б.Б. О симметричных периодических решениях плоской ограниченной задачи трех тел. Препр. Физического инст. им.П.Н.Лебедева РАН, 1997, ном. 66, 131с.
- [4] Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. М., Наука, 1990, 296 с.
- [5] Szebehely V. Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies. 1967, Academic Press, New York and London.  
(Перевод на русский язык: Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М., Наука, 1982, 656 с.)
- [6] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М. Наука, 1972, 720 с.
- [7] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М. Наука, 1989, 472 с.
- [8] Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, Изд-во Удмуртского гос. университета, 1995, 432 с.
- [9] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М., Наука, 1990, 416 с.
- [10] Крейсман Б.Б. Гравитационный маневр с помощью сверхнеустойчивых орбит вокруг точек либрации. Космич. исследования, 2003, том 41, 1. С. 57-68.
- [11] Broucke R. Stability of Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem with Earth-Moon masses. NASA Techn. Rep. 32-1168. Pasadena, 1968. 92 p.
- [12] Broucke R. Periodic Orbits in the Elliptic, Restricted Three-Body Problem. AIAA Jurnal, Vol. 7, No. 6, p. 1003, 1969.
- [13] Хаджиdemetriu Дж. Д. Неустойчивость периодических орбит планетного типа. В сборнике Неустойчивости в динамических системах. Приложения к небесной механике. Пер. с англ./Под ред. В. Дж. Себехея. М., Мир, 1982, 168 с.

## **5 Графики**



**Рис. 1. Зависимость индекса  $s$  от константы Якоби  
для семейства круговых орбит**



**Рис. 2. Зависимость угла поворота от константы Якоби  
для семейства круговых орбит**

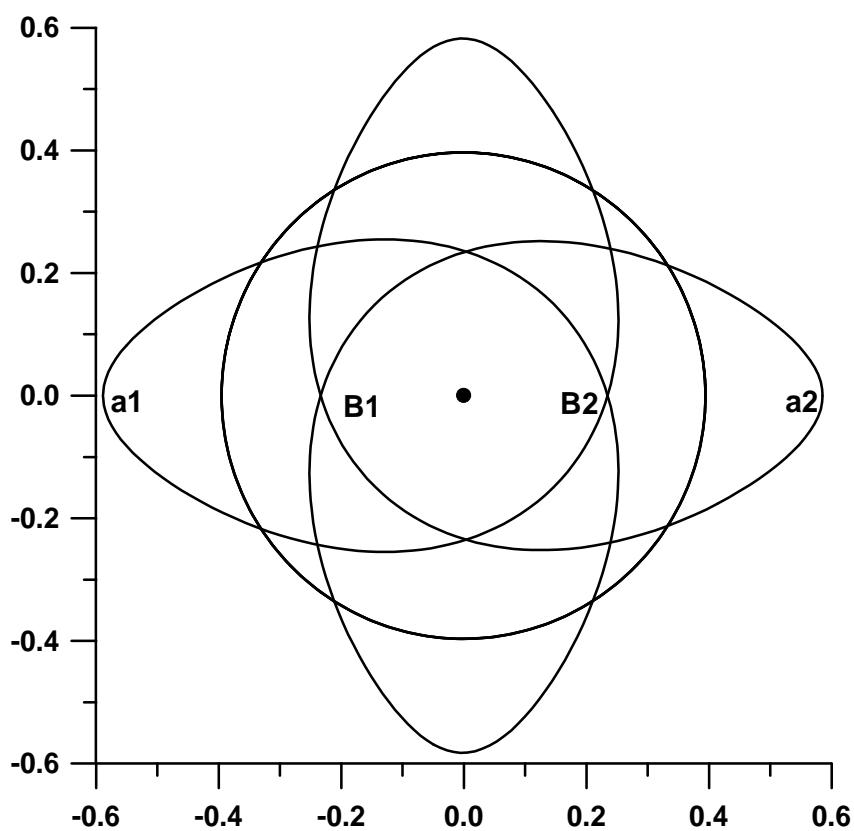


Рис. 3.1 Основные орбиты соизмеримости 4/1

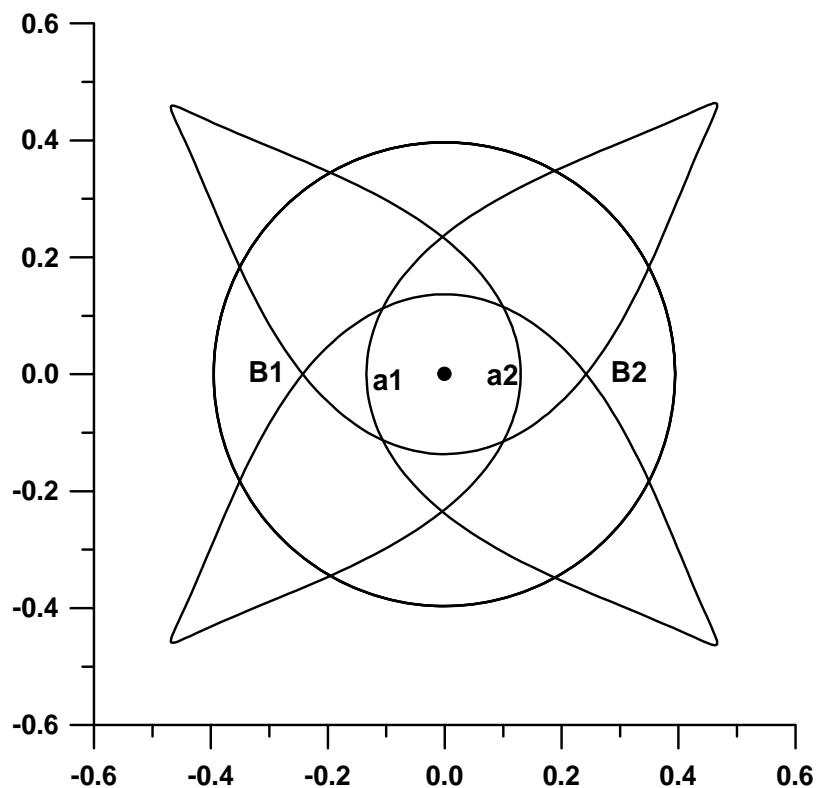
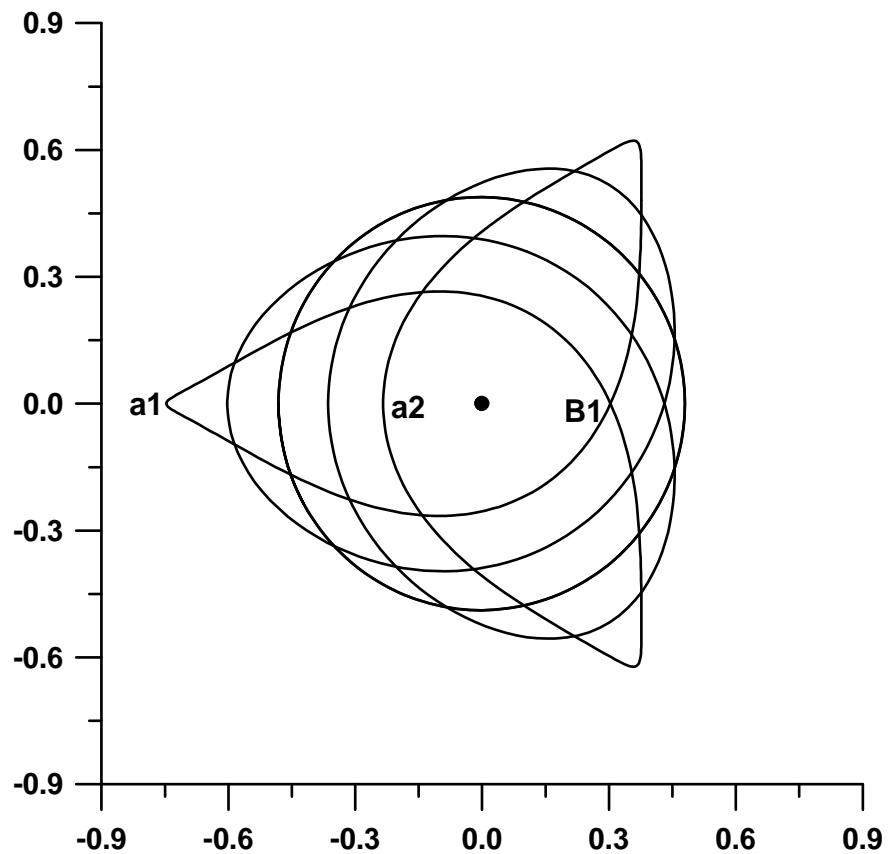
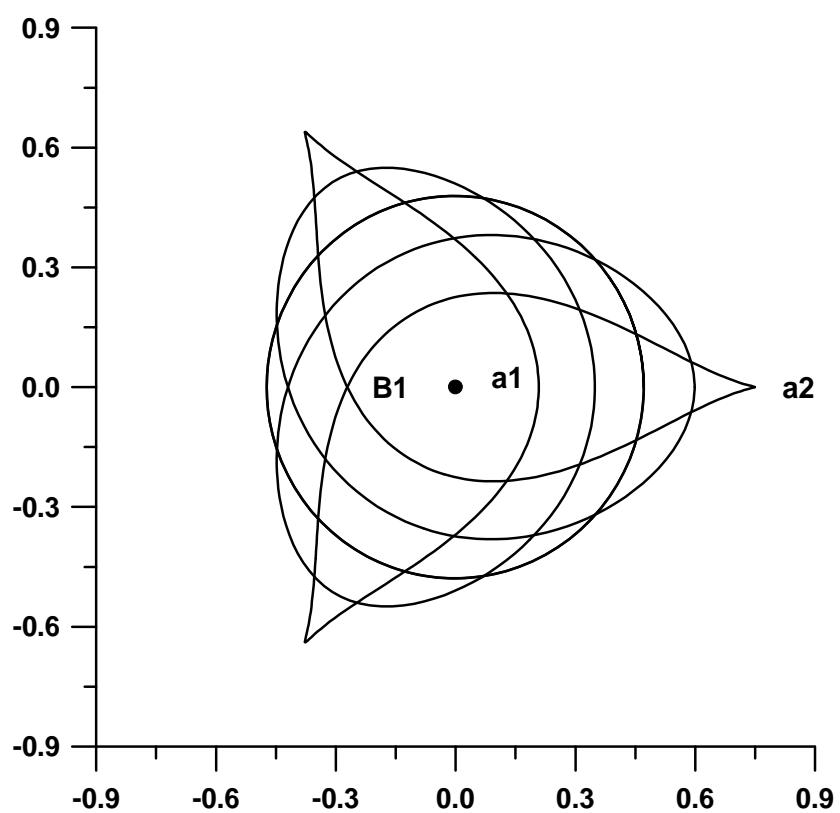


Рис. 3.2 Дополнительные орбиты соизм. 4/1



**Рис. 4.1 Основные орбиты соизмеримости 3/1**



**Рис. 4.2 Дополнительные орбиты соизм. 3/1**

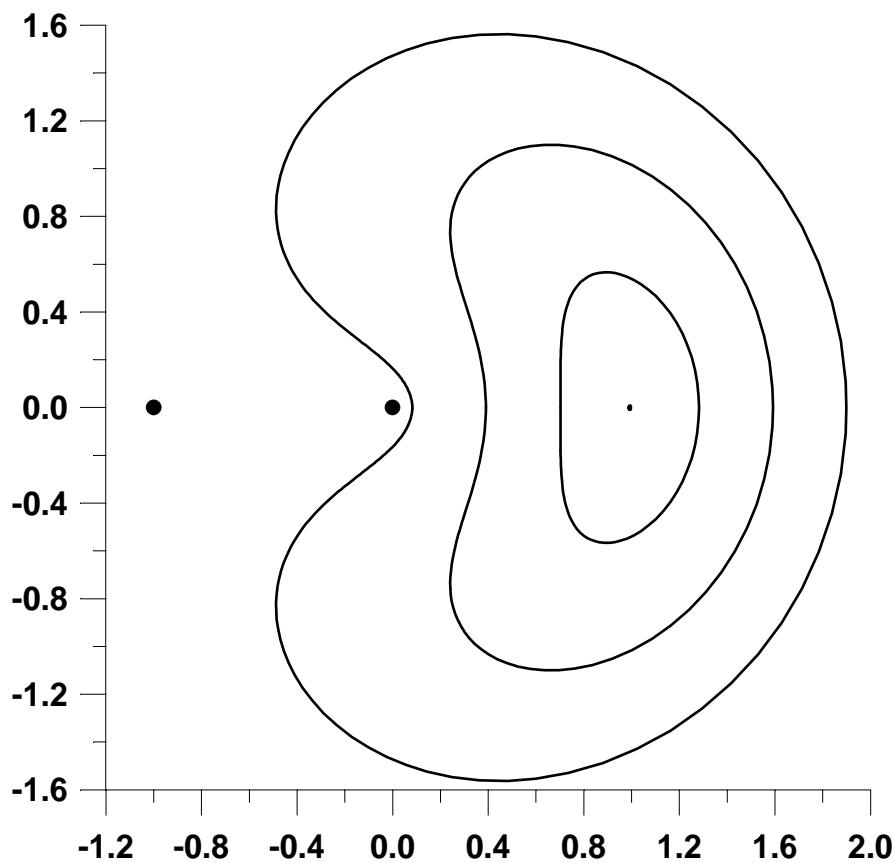


Рис. 5. Орбиты вокруг точки либрации L3

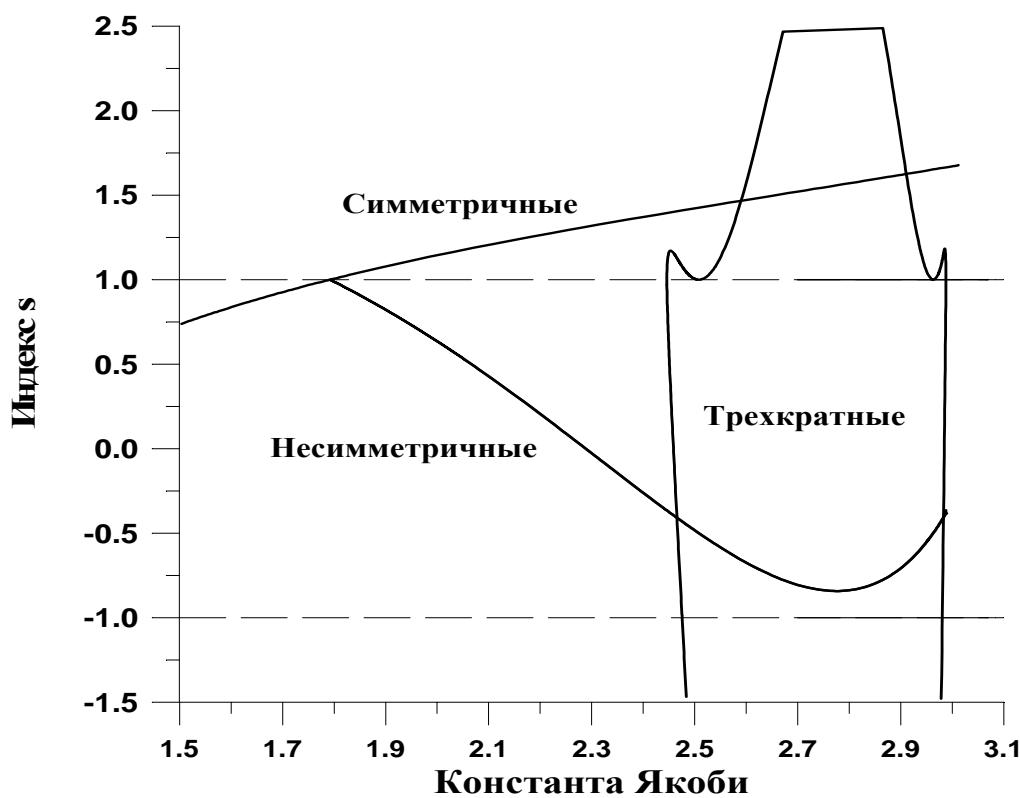
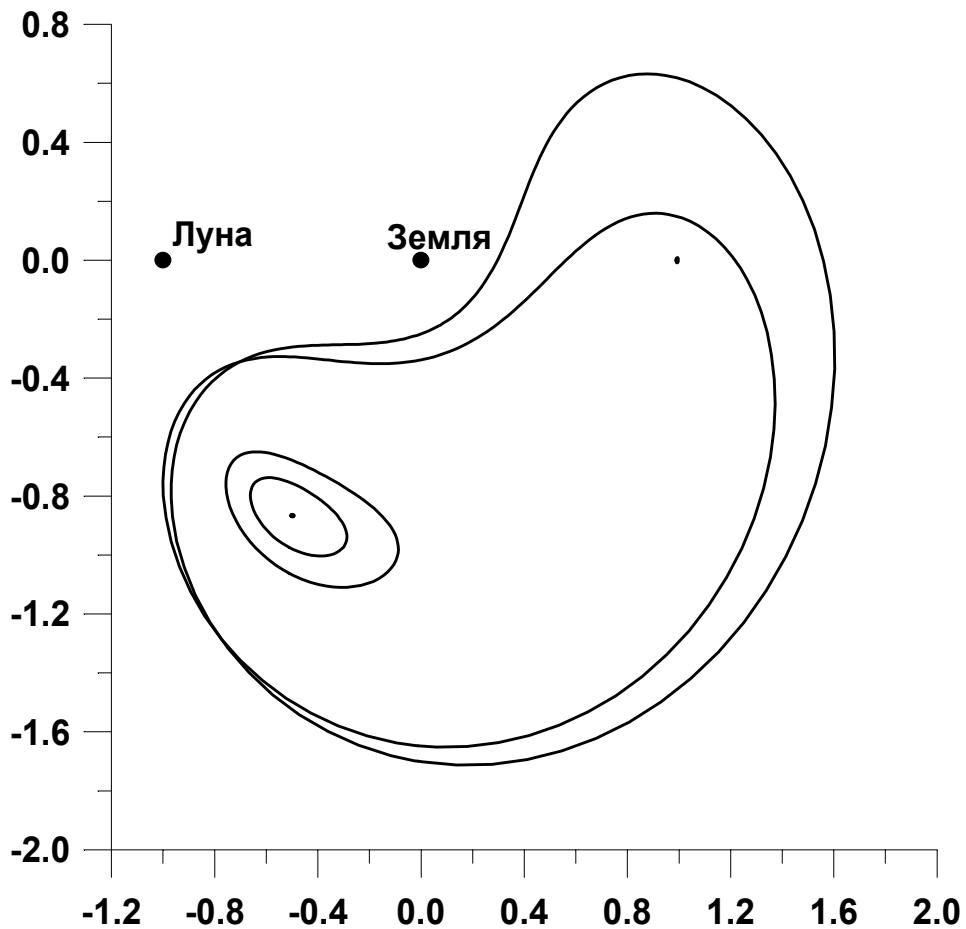
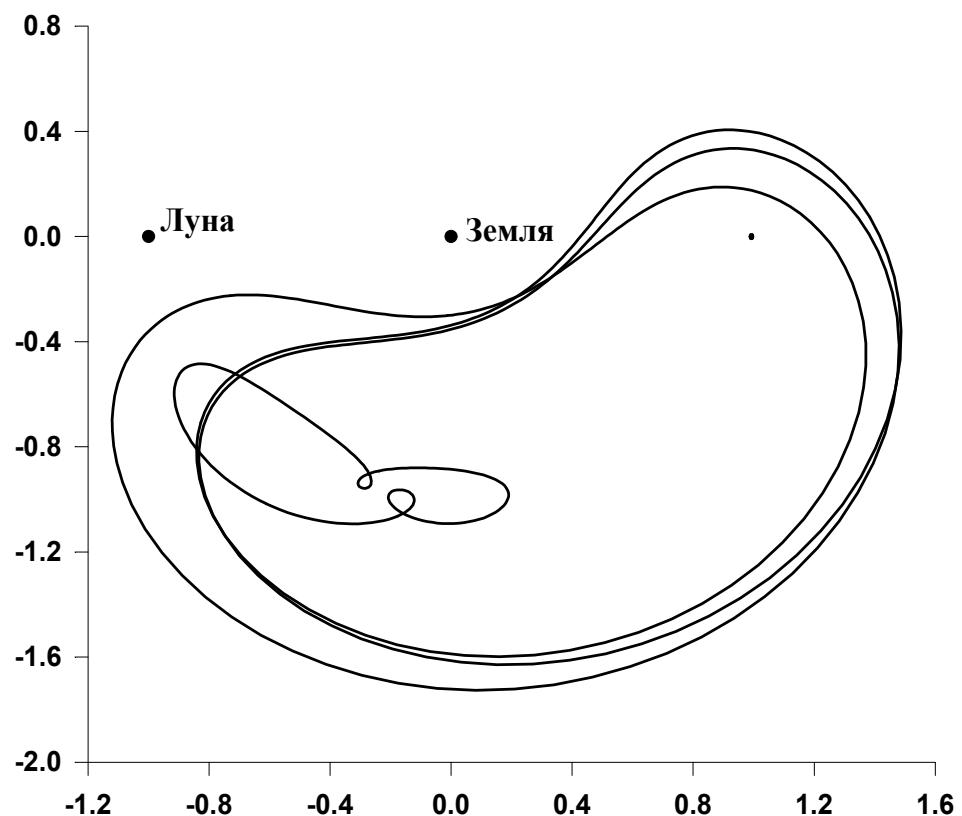


Рис. 6. Зависимость индекса  $s$  от константы Якоби для семейств орбит вокруг L3



**Рис. 7. Несимметричные орбиты вокруг точек либрации**



**Рис. 8. Трехкратные орбиты вокруг L3**

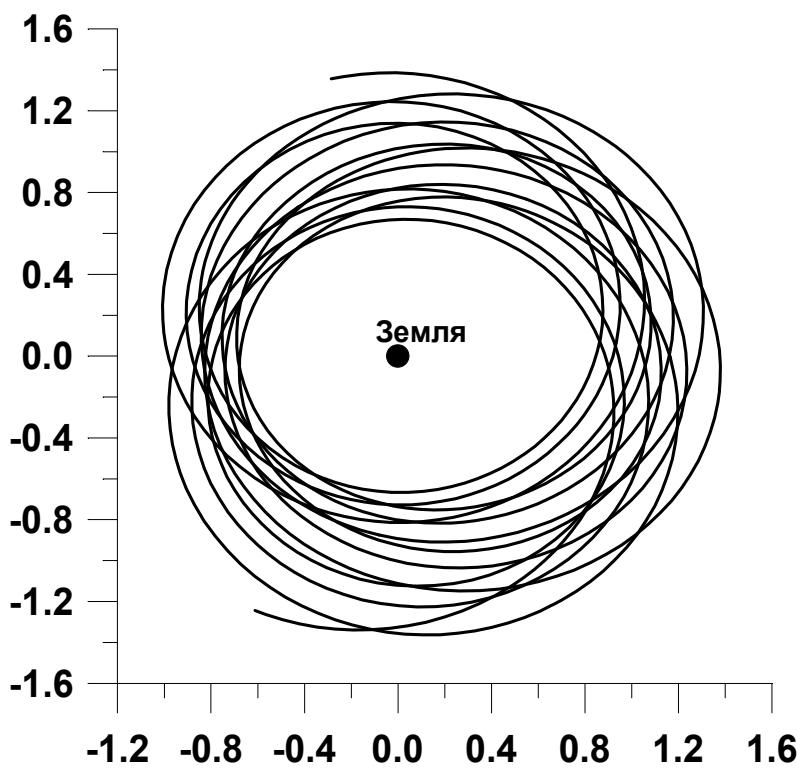


Рис. 9. Орбита вокруг точки либрации L3  
в инерциальной системе координат

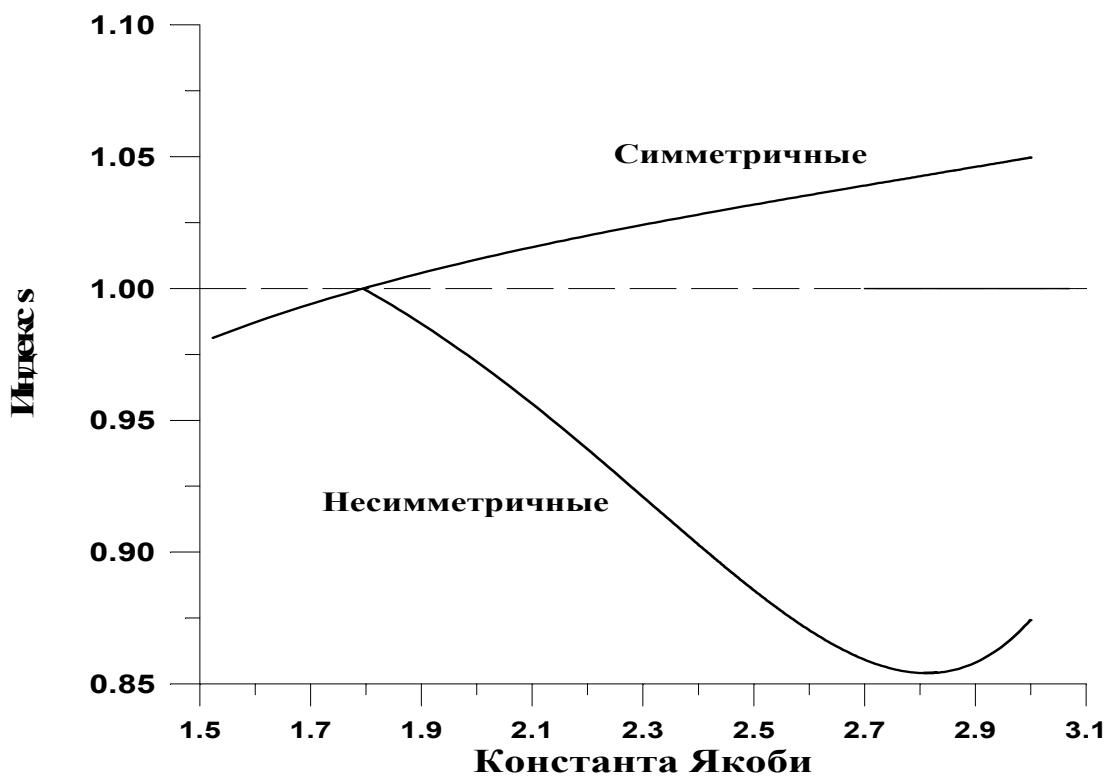


Рис. 10. Зависимость  $s$  от константы Якоби для системы Солнце-Юпитер, орбиты вокруг L3

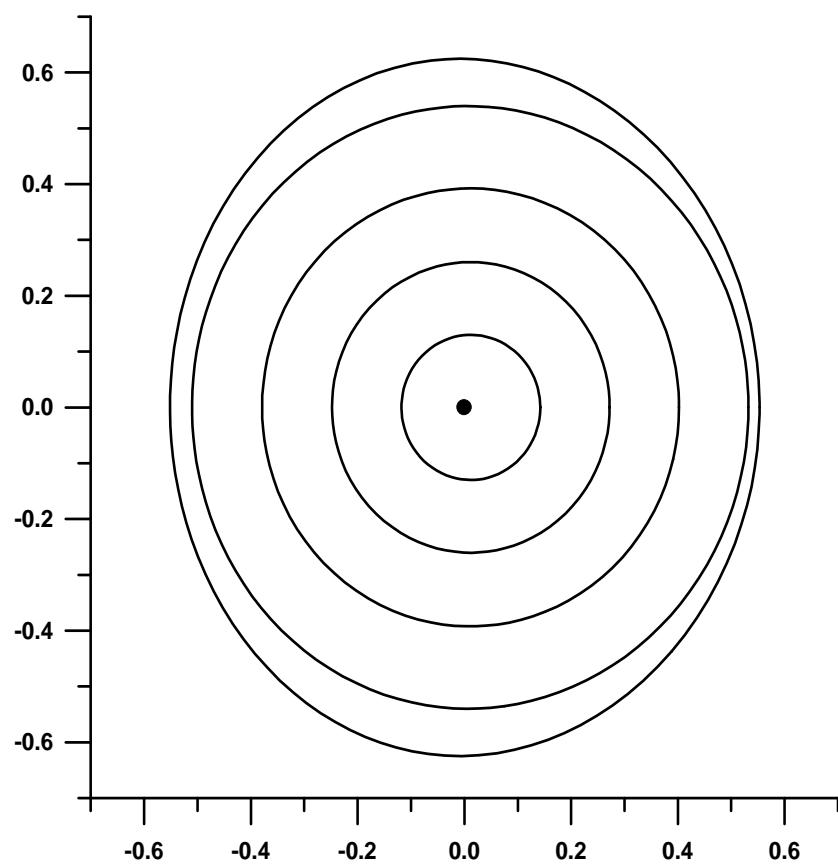


Рис. 11.1. Почти-круговые орбиты семейства 2/1s

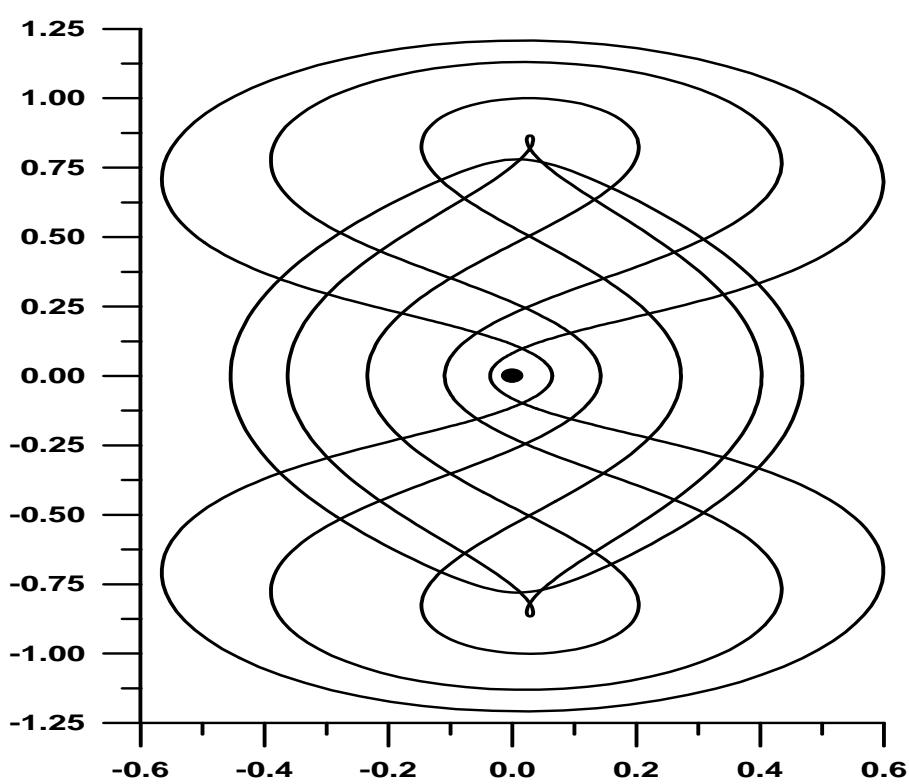
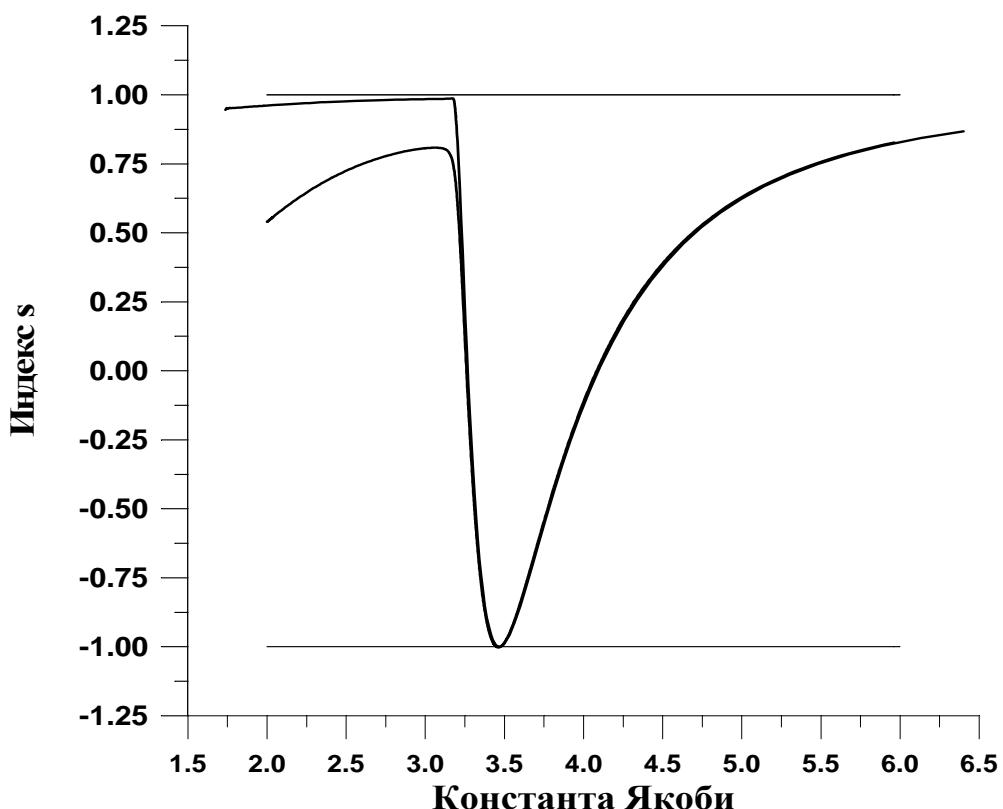
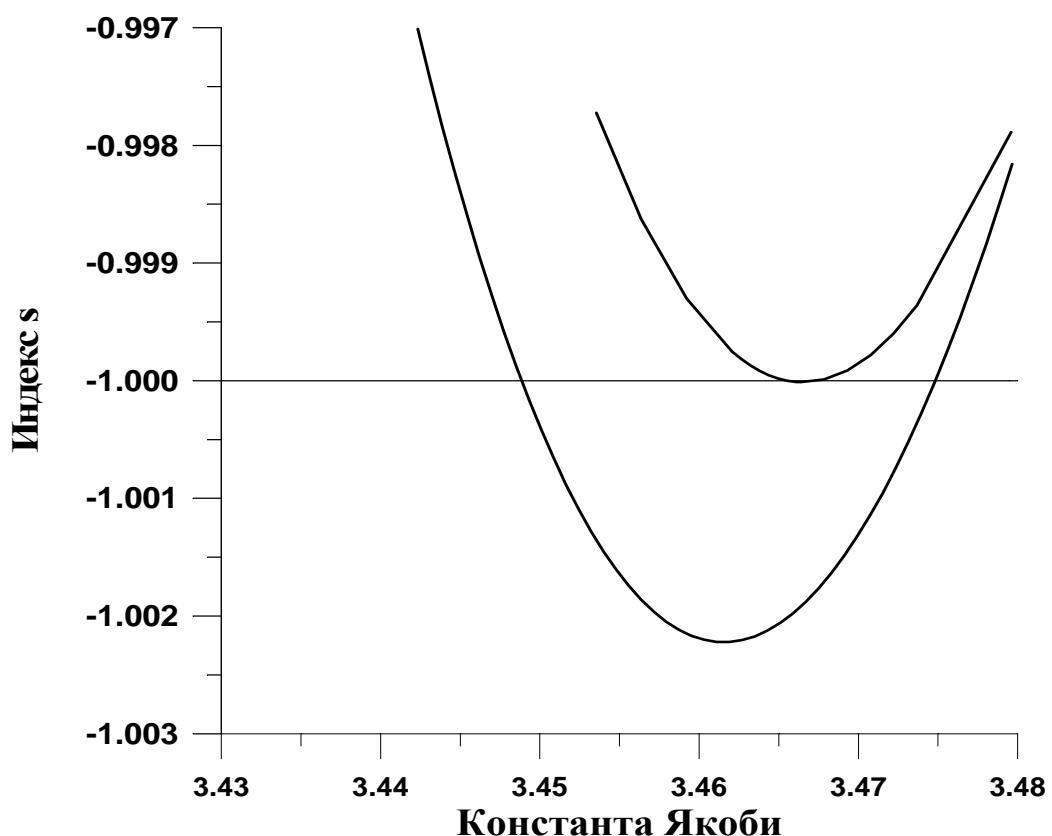


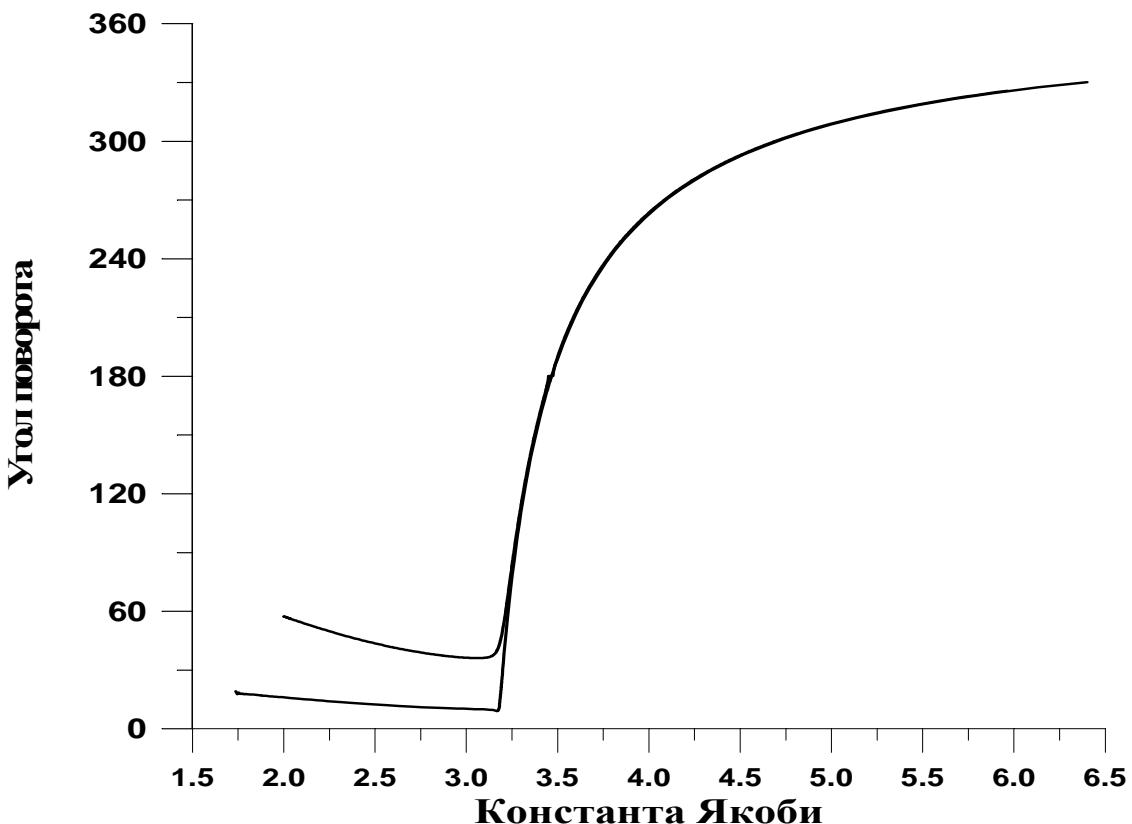
Рис. 11.2. Орбиты семейства 2/1s



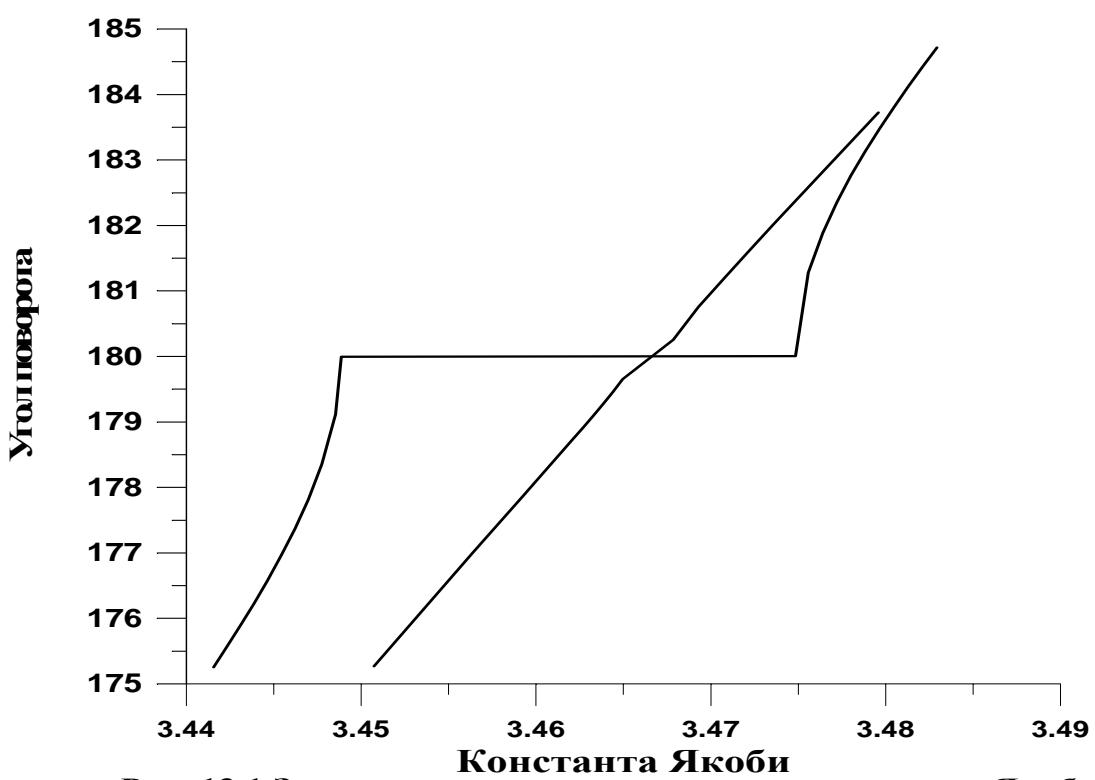
**Рис. 12.** Зависимость индекса  $s$  от константы Якоби  
для семейства орбит соизмеримости  $2/1s$



**Рис. 12.1** Зависимость индекса  $s$  от константы Якоби  
для семейства орбит соизмеримости  $2/1s$



**Рис. 13.** Зависимость угла поворота от константы Якоби для семейства орбит соизмеримости 2/1s



**Рис. 13.1** Зависимость угла поворота от константы Якоби для семейства орбит соизмеримости 2/1s

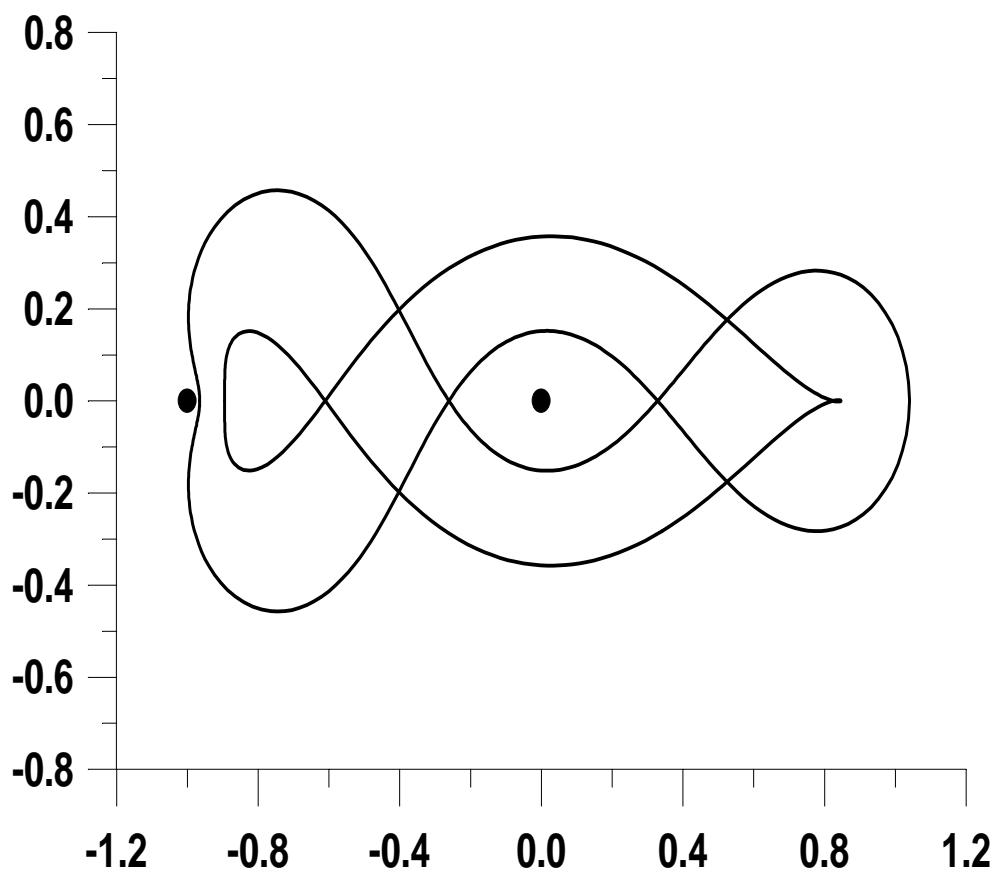


Рис. 14.1 Орбиты семейства 2/1n

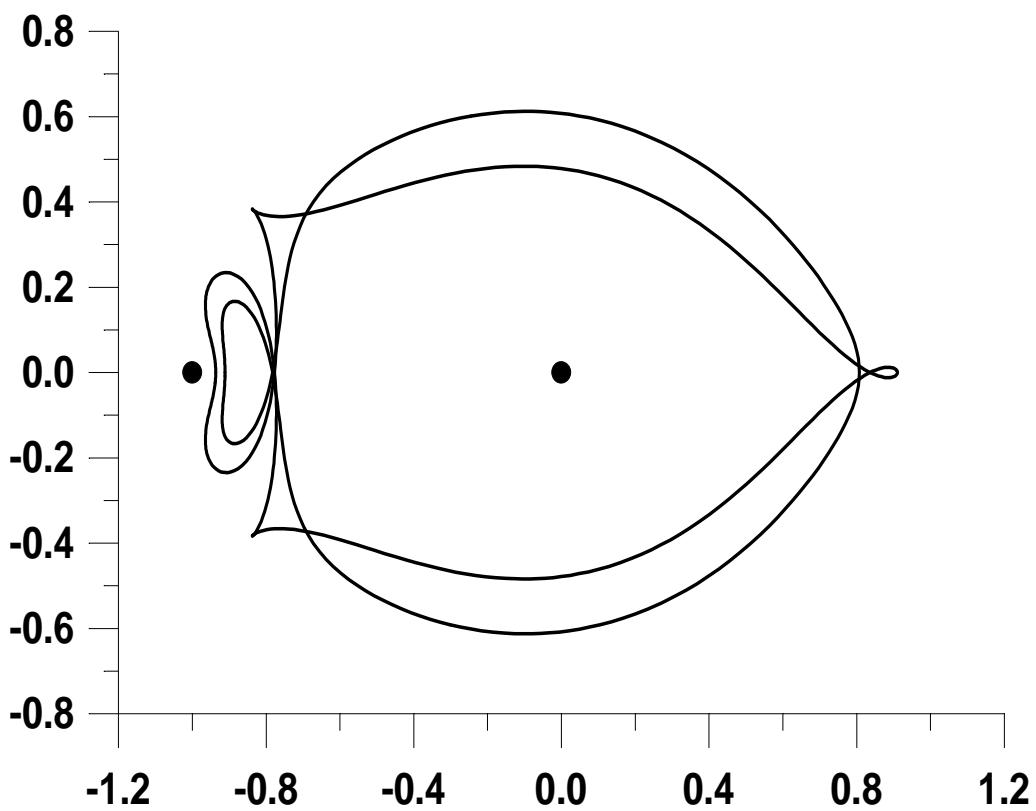


Рис. 14.2 Орбиты семейства 2/1n

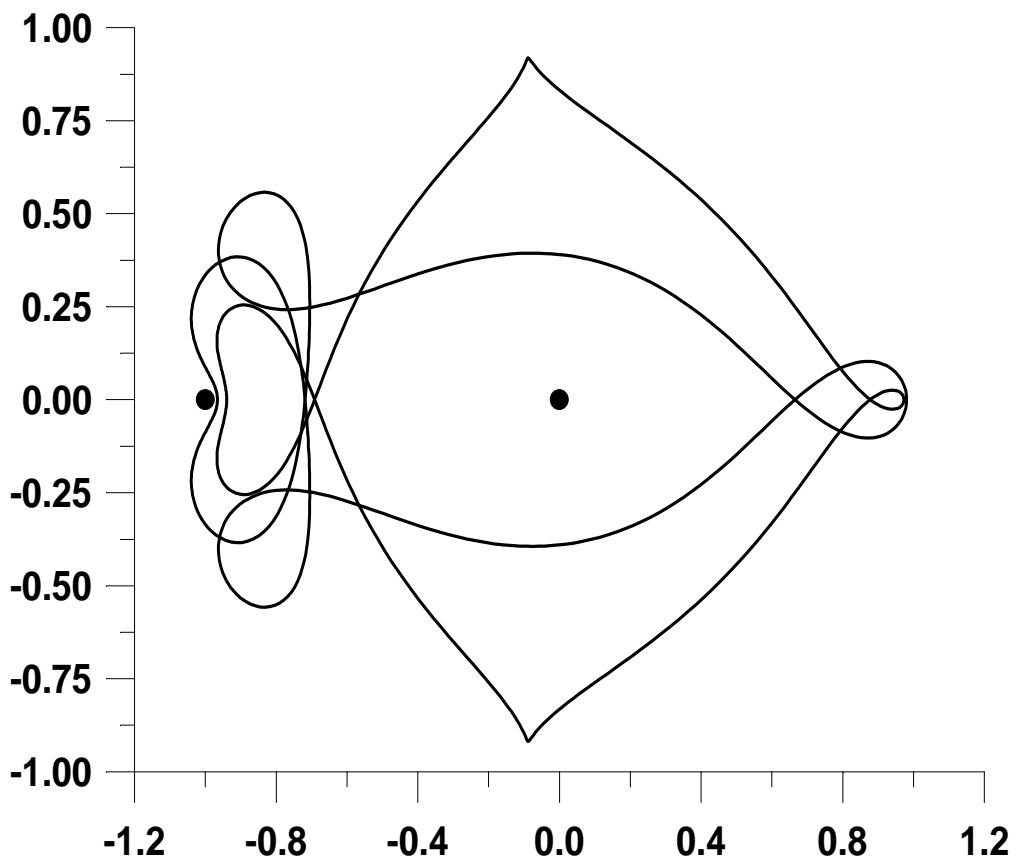


Рис. 14.3 Орбиты семейства 2/1n

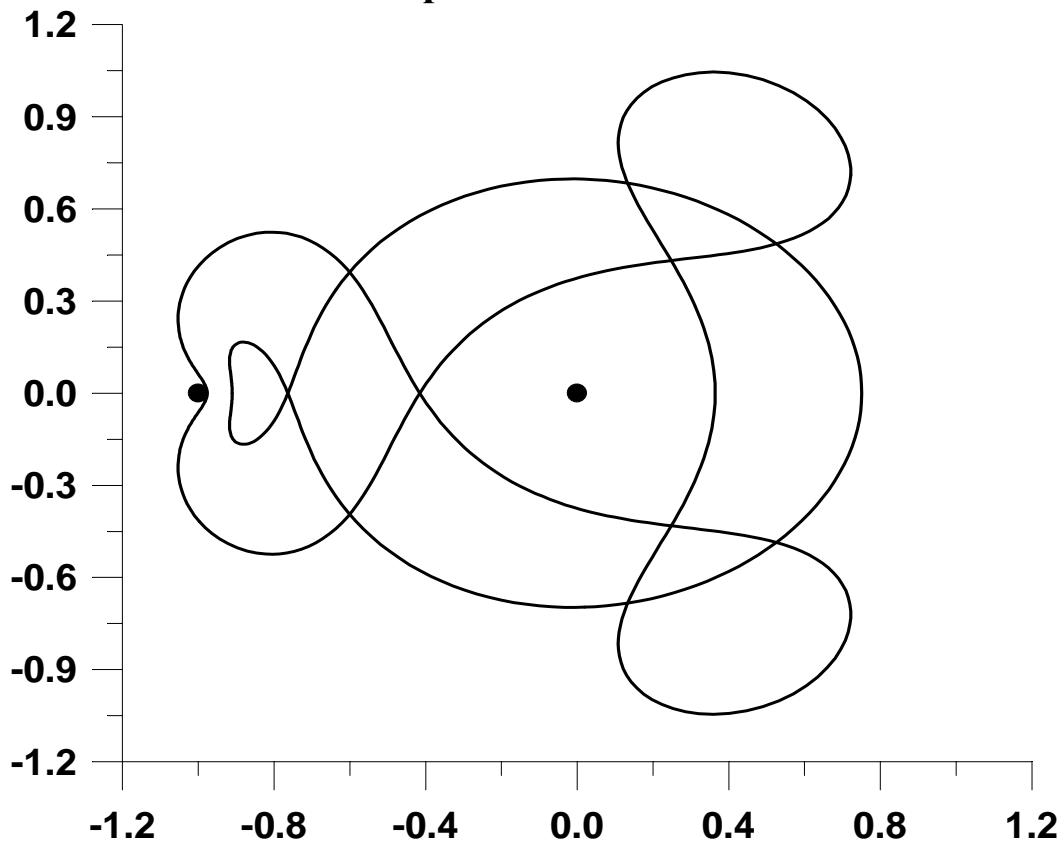
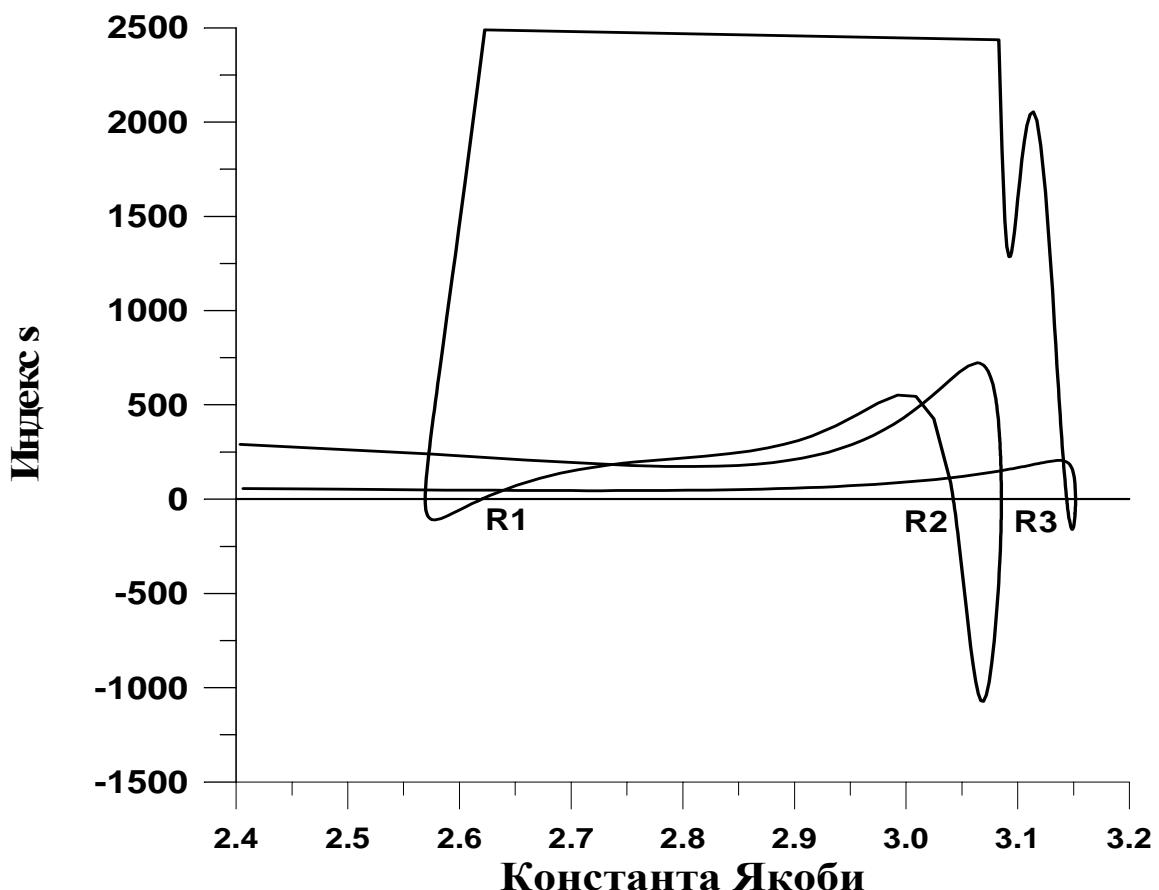
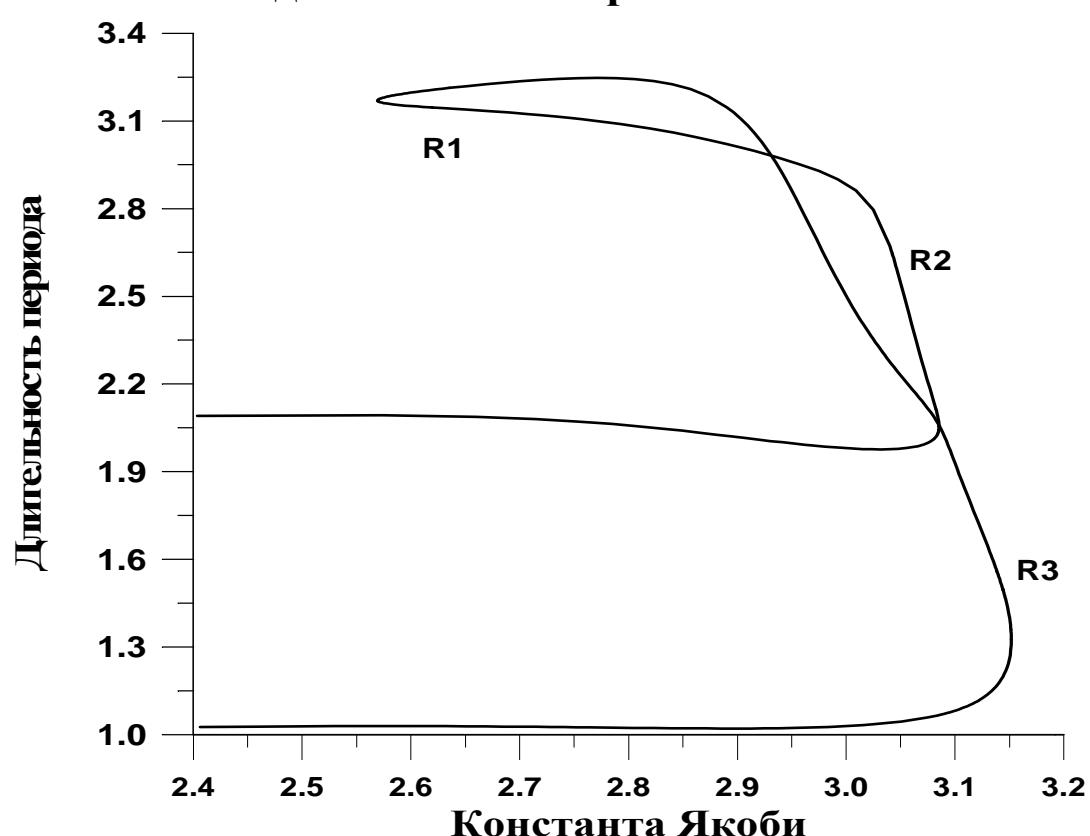


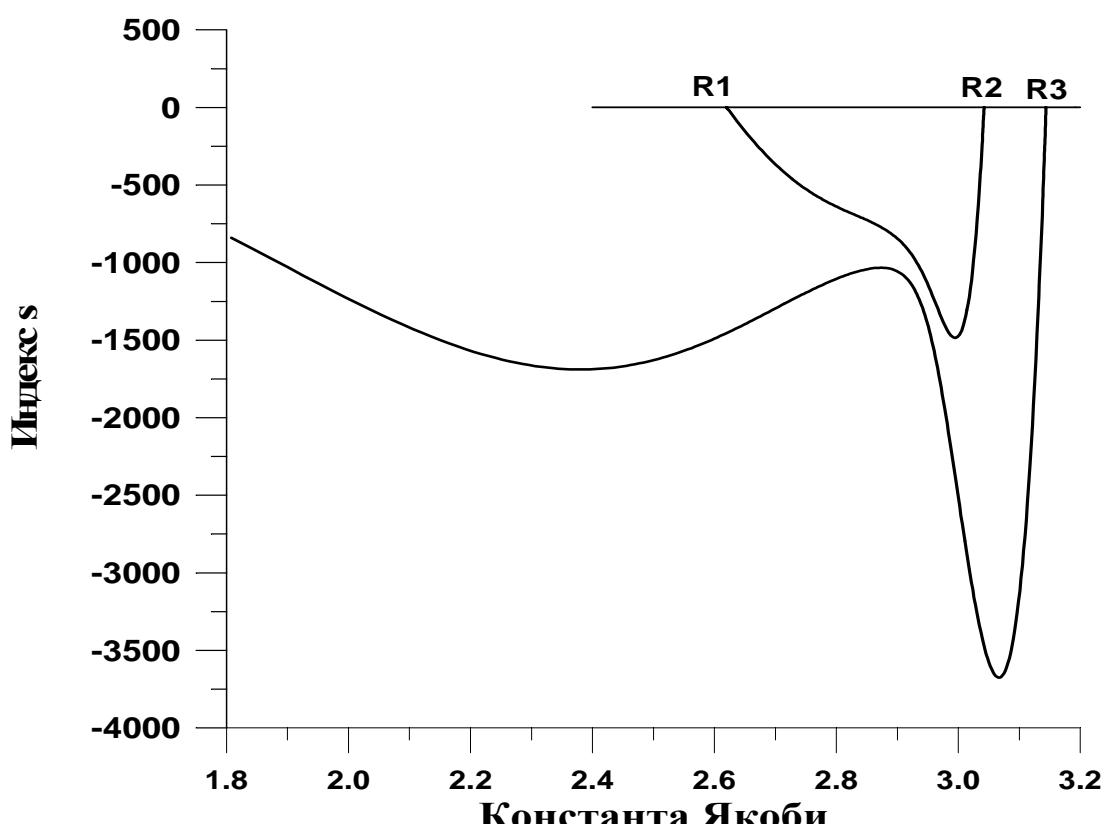
Рис. 14.4 Орбиты семейства 2/1n



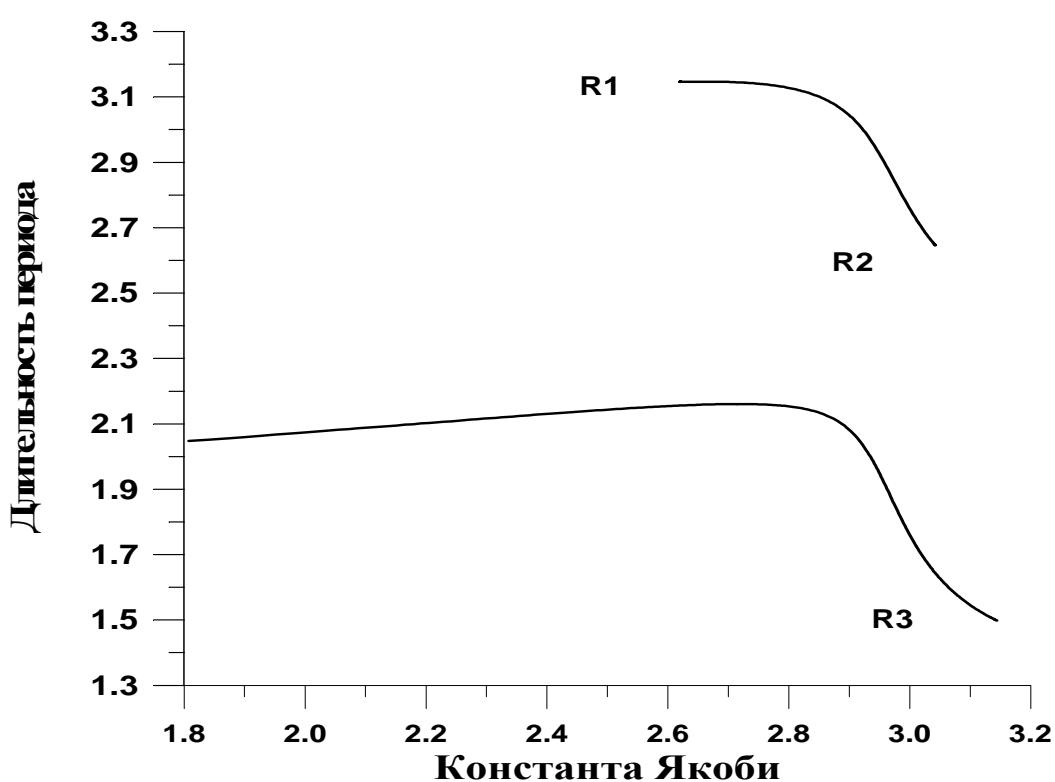
**Рис. 15. Зависимость индекса  $s$  от константы Якоби для семейства орбит  $2/1n$**



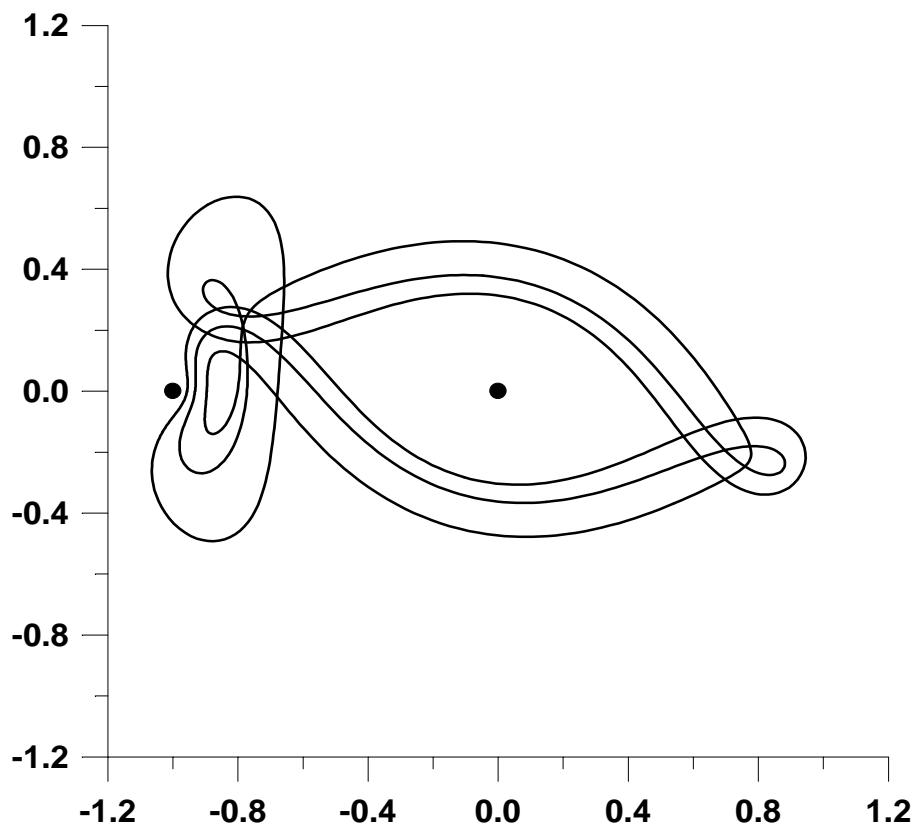
**Рис. 16. Зависимость периода от константы Якоби для семейства орбит  $2/1n$**



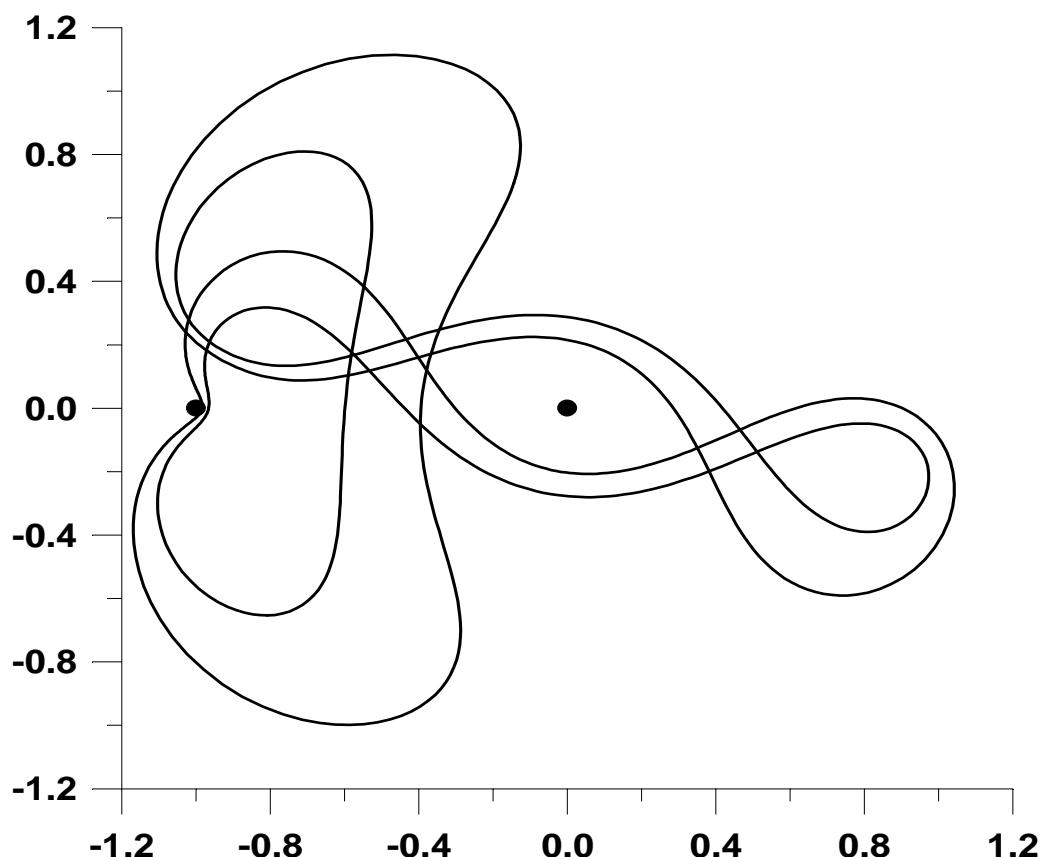
**Рис. 17. Зависимость индекса  $s$  от константы Якоби  
для семейств несимметричных орбит  $2/1n$**



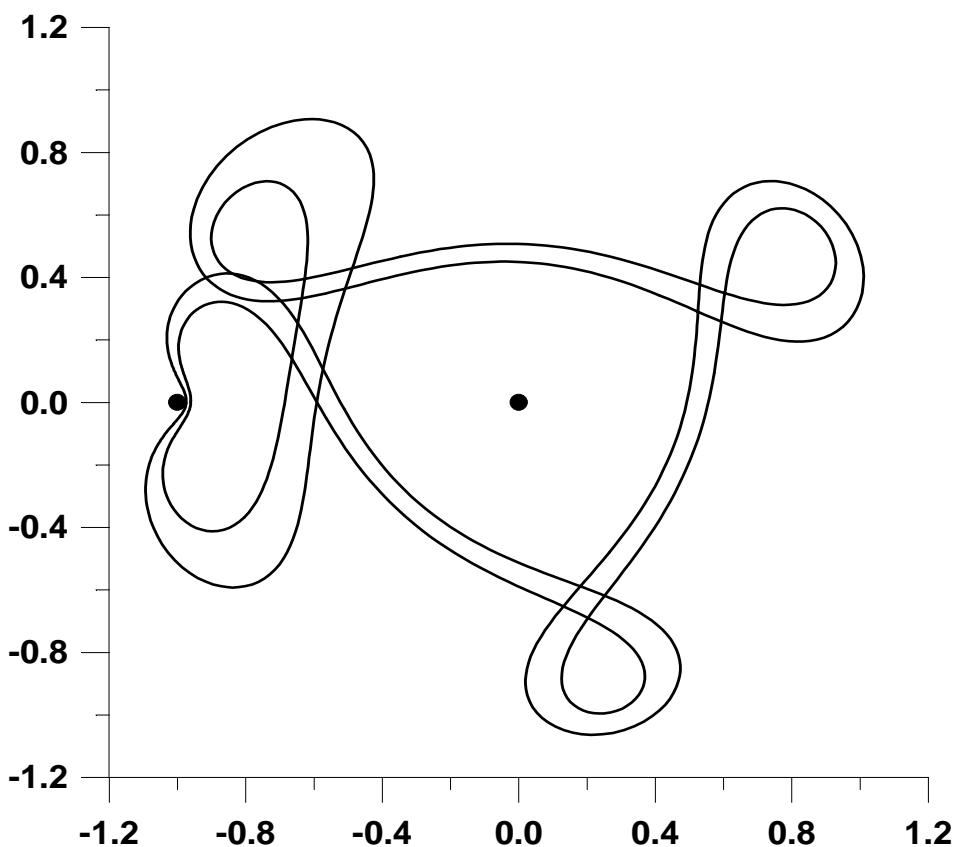
**Рис. 18. Зависимость периода от константы Якоби  
для семейств несимметричных орбит  $2/1n$**



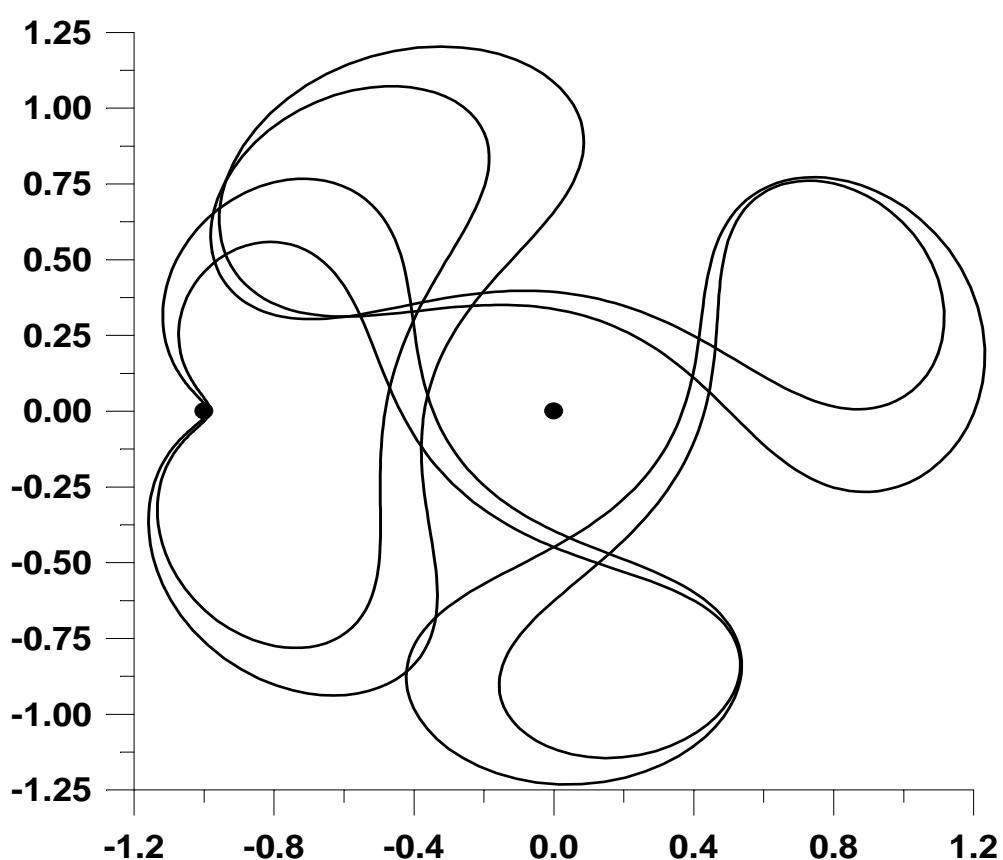
**Рис. 19.1 Несимметричные орбиты соизмеримости  $2/1n$**



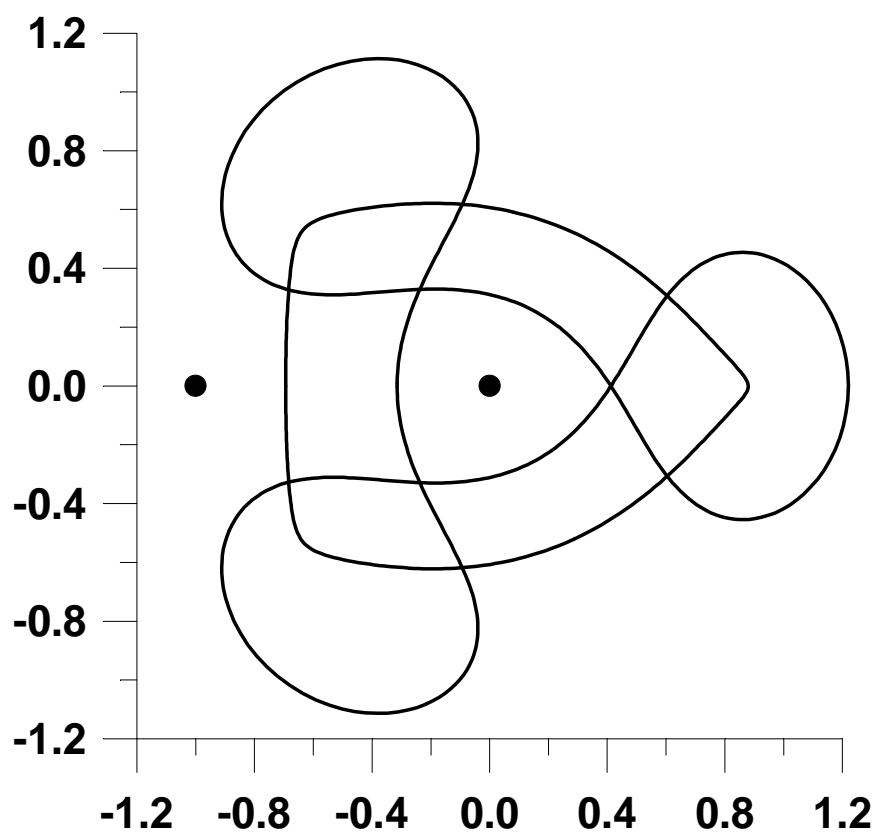
**Рис. 19.2 Несимметричные орбиты соизмеримости  $2/1n$**



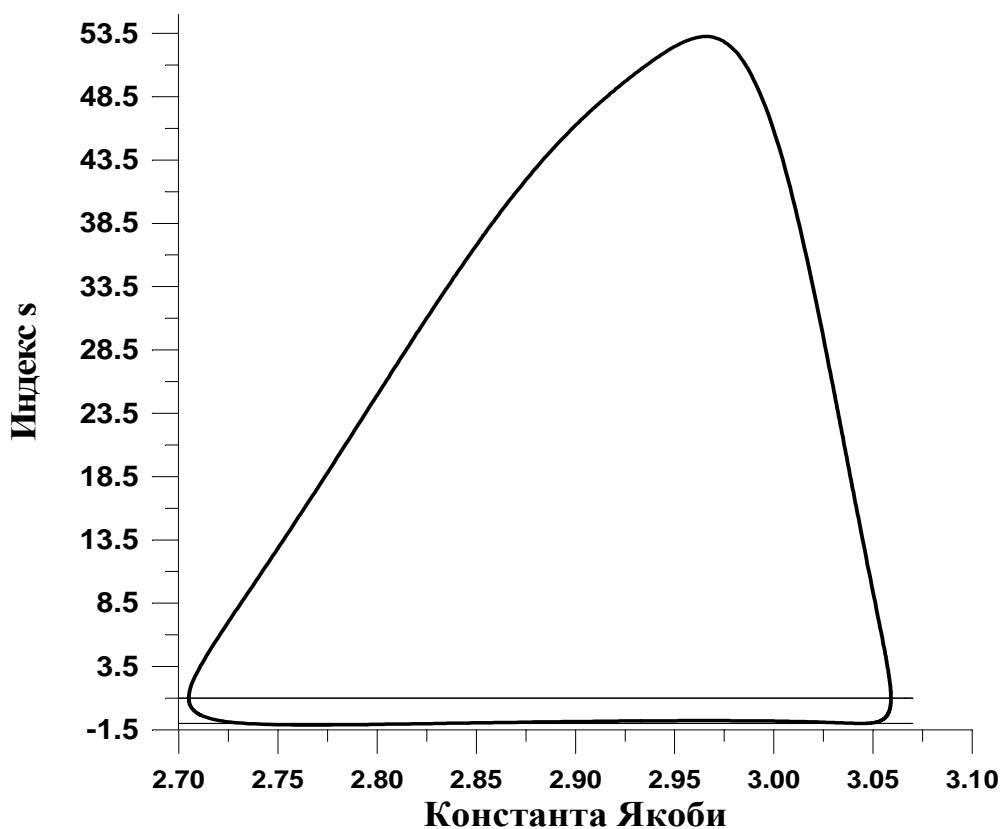
**Рис. 19.3 Несимметричные орбиты соизмеримости 2/1n**



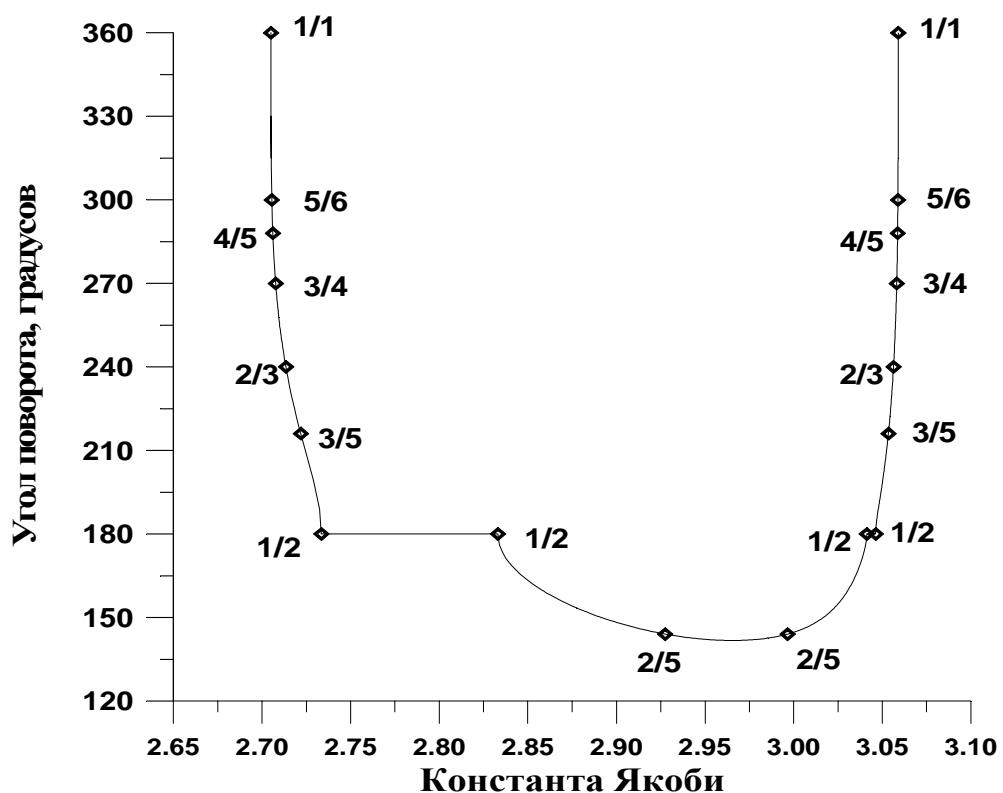
**Рис. 19.4 Несимметричные орбиты соизмеримости 2/1n**



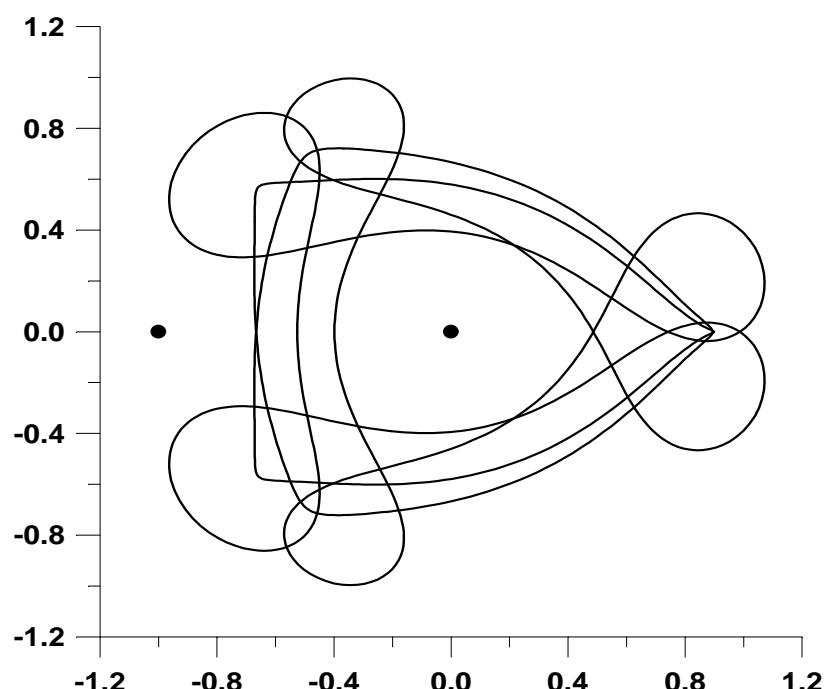
**Рис. 20. Орбиты соизмеримости  $3/2$**



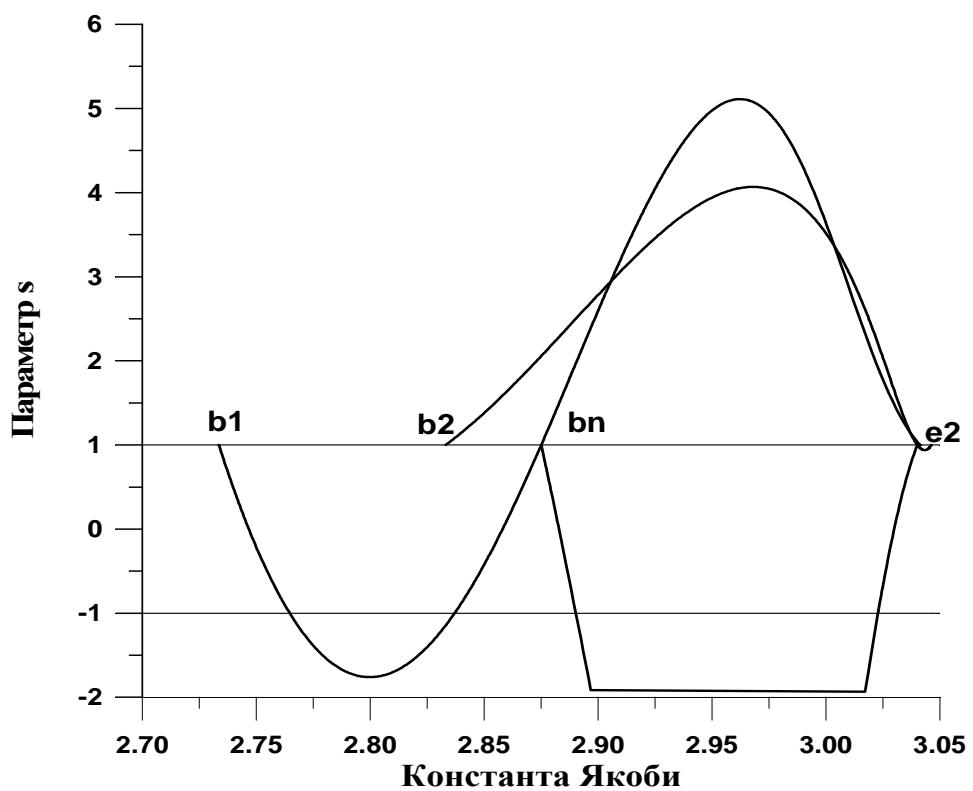
**Рис. 21. Зависимость индекса  $s$  от константы Якоби  
для семейства орбит соизмеримости  $3/2$**



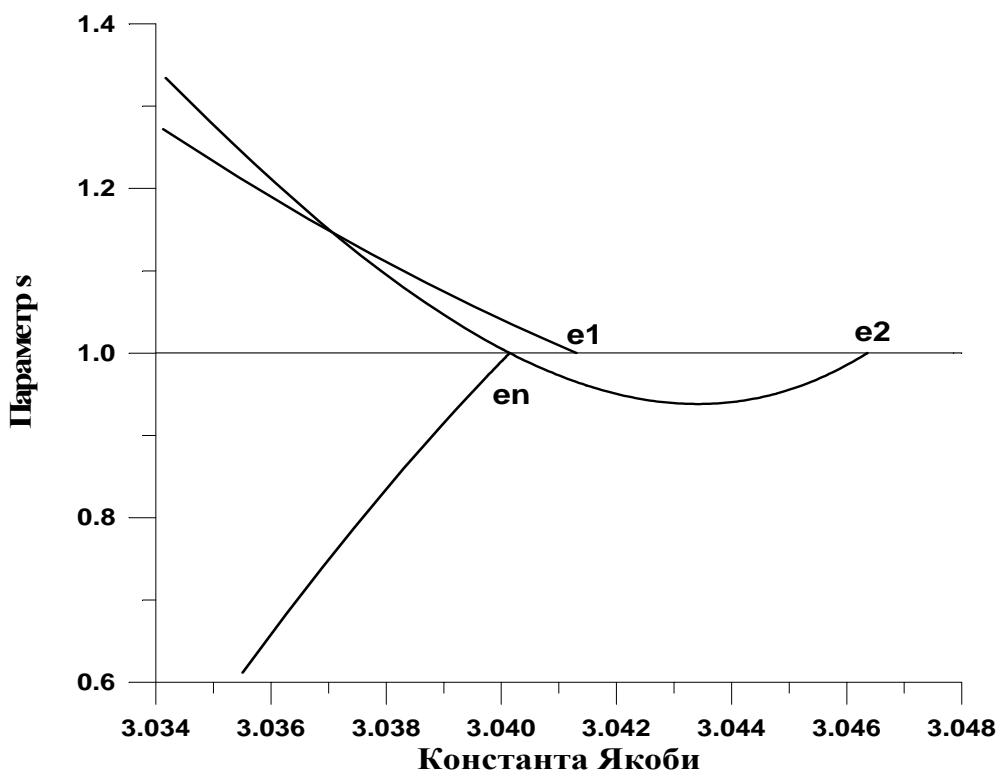
**Рис. 22. Зависимость угла поворота от константы Якоби для семейства орбит соизмеримости 3 / 2**



**Рис. 23. Орбиты соизмеримости (3/2)2**



**Рис. 24.** Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для семейств соизмеримости  $(3/2)2$



**Рис. 24.1.** Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для семейств соизмеримости  $(3/2)2$

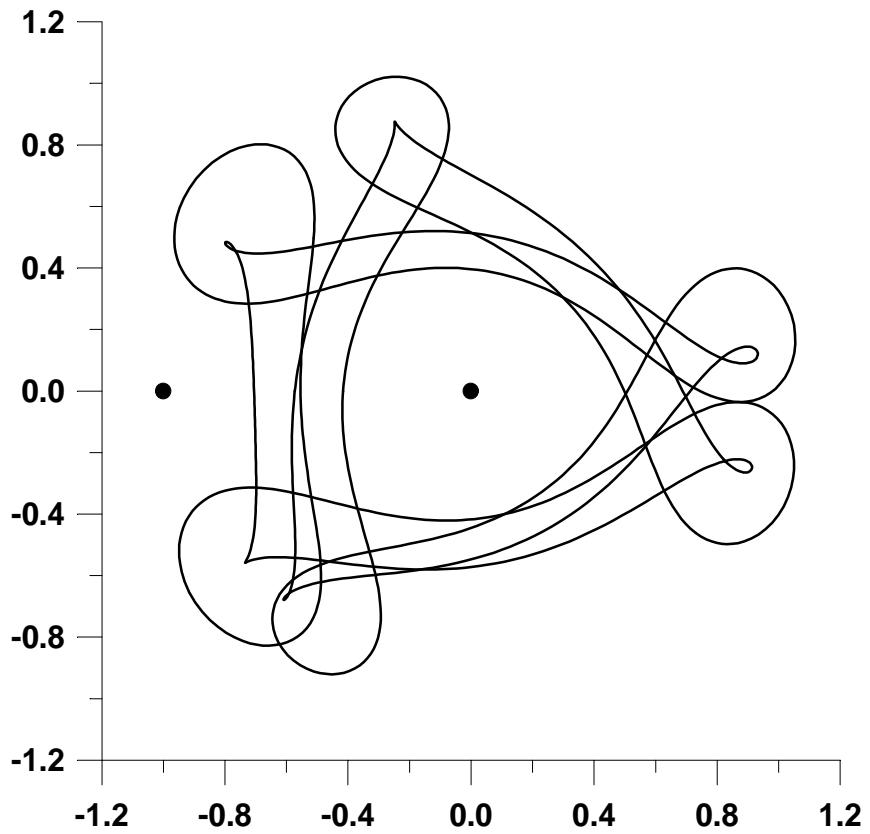


Рис. 25. Несимметричные орбиты соизмеримости  $(3/2)2$

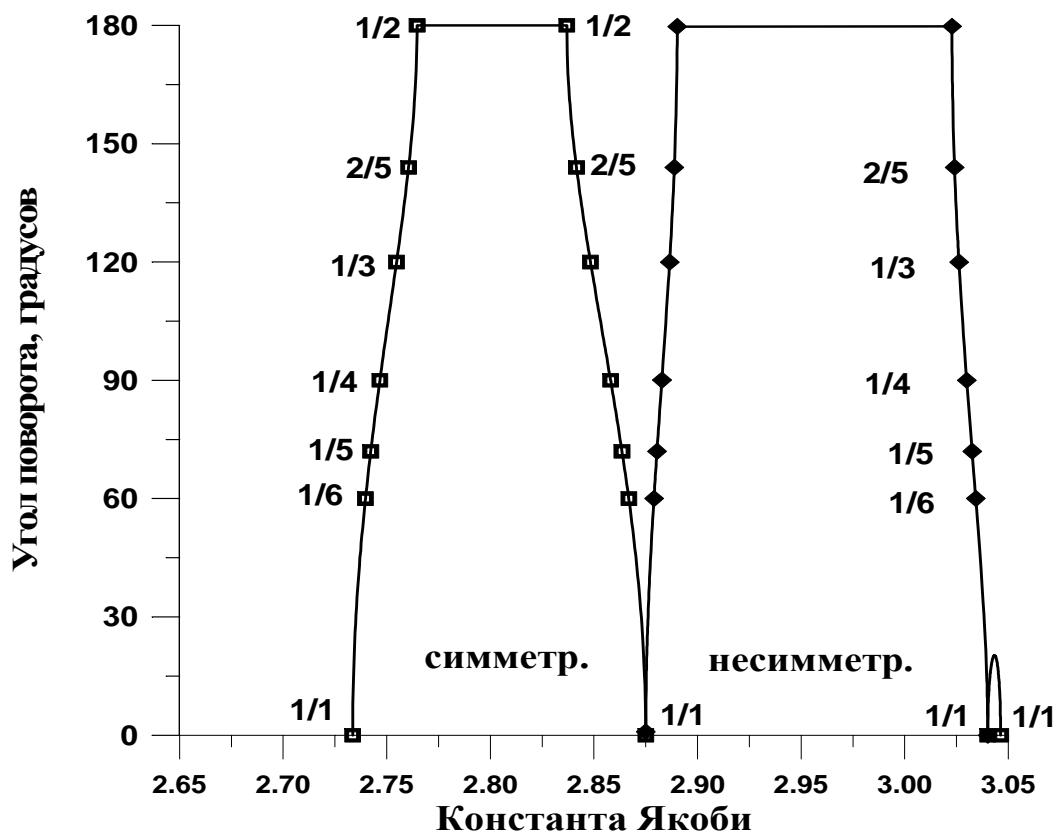


Рис. 26. Зависимость угла поворота от константы Якоби для семейств орбит соизмеримости  $(3/2)2$

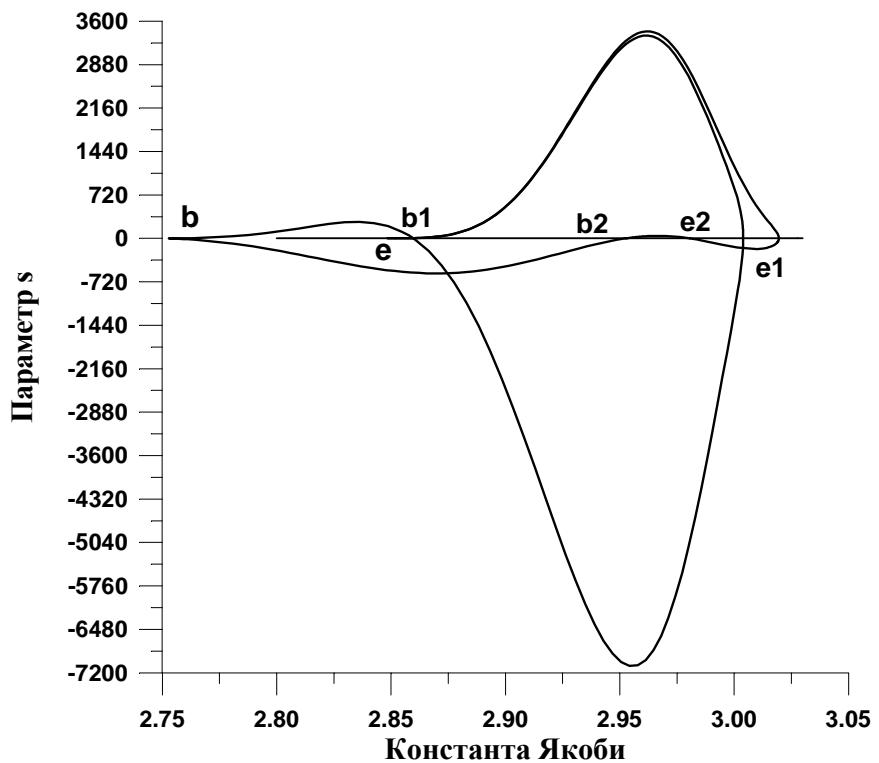


Рис. 27. Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби  
для симметричного семейства  $((3/2)2)3$

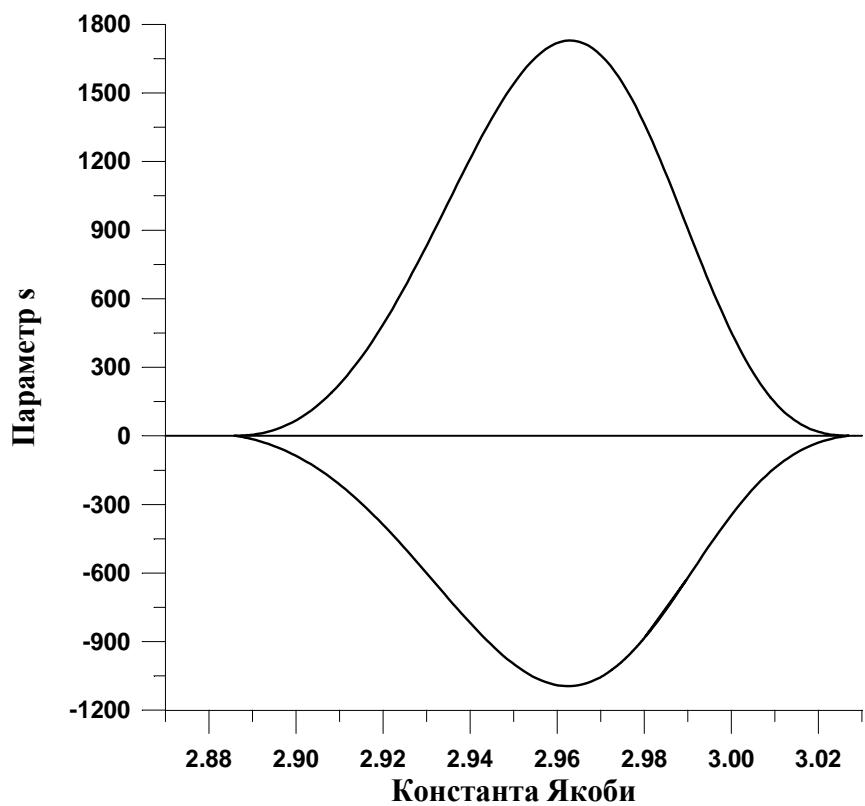
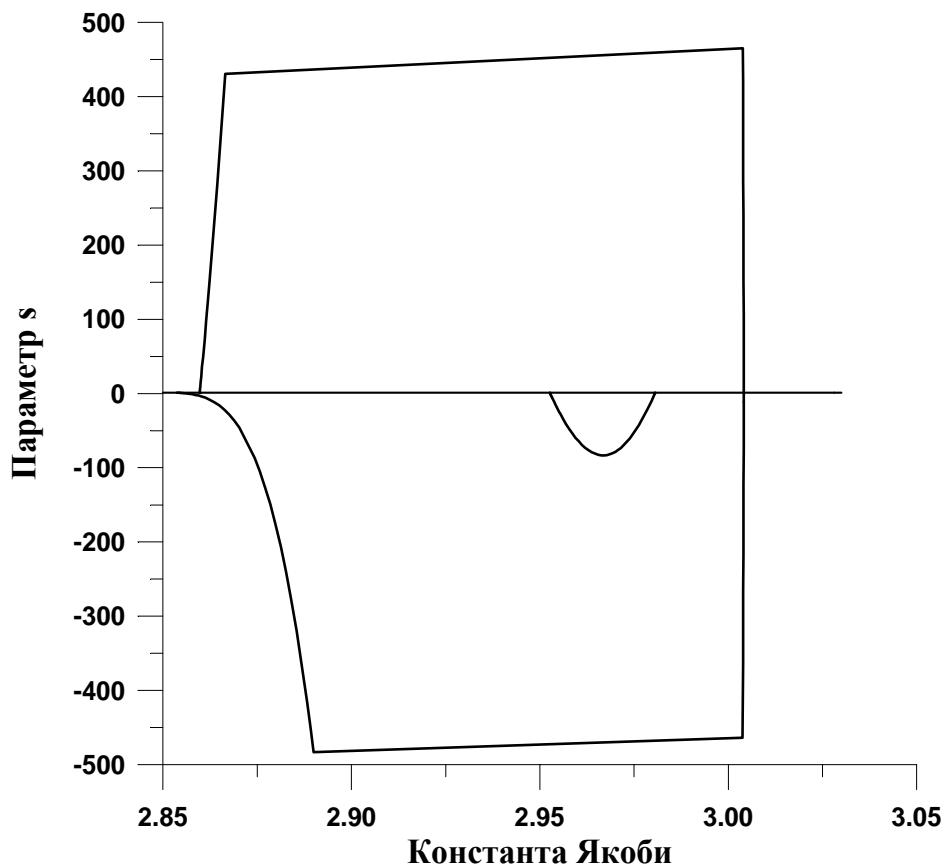
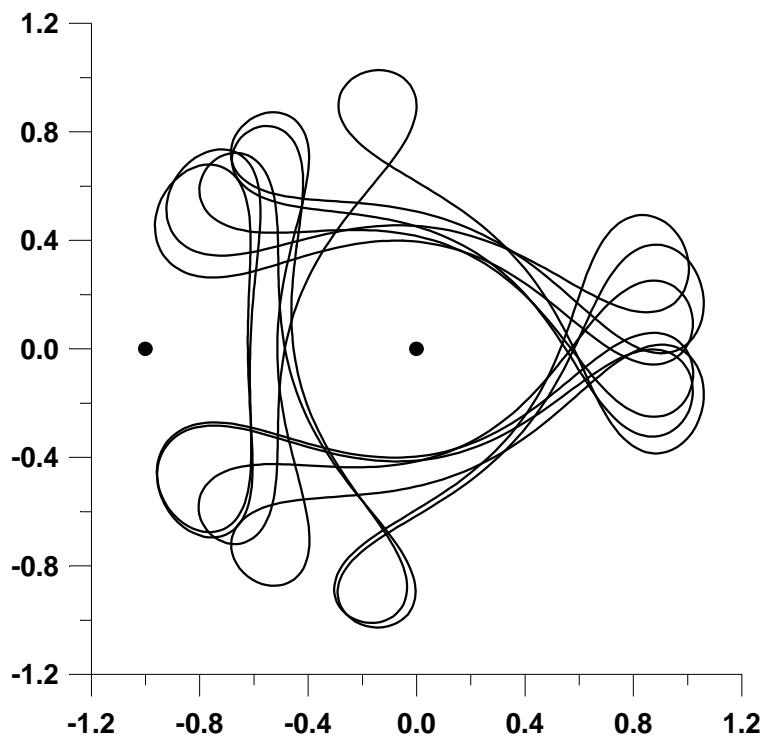


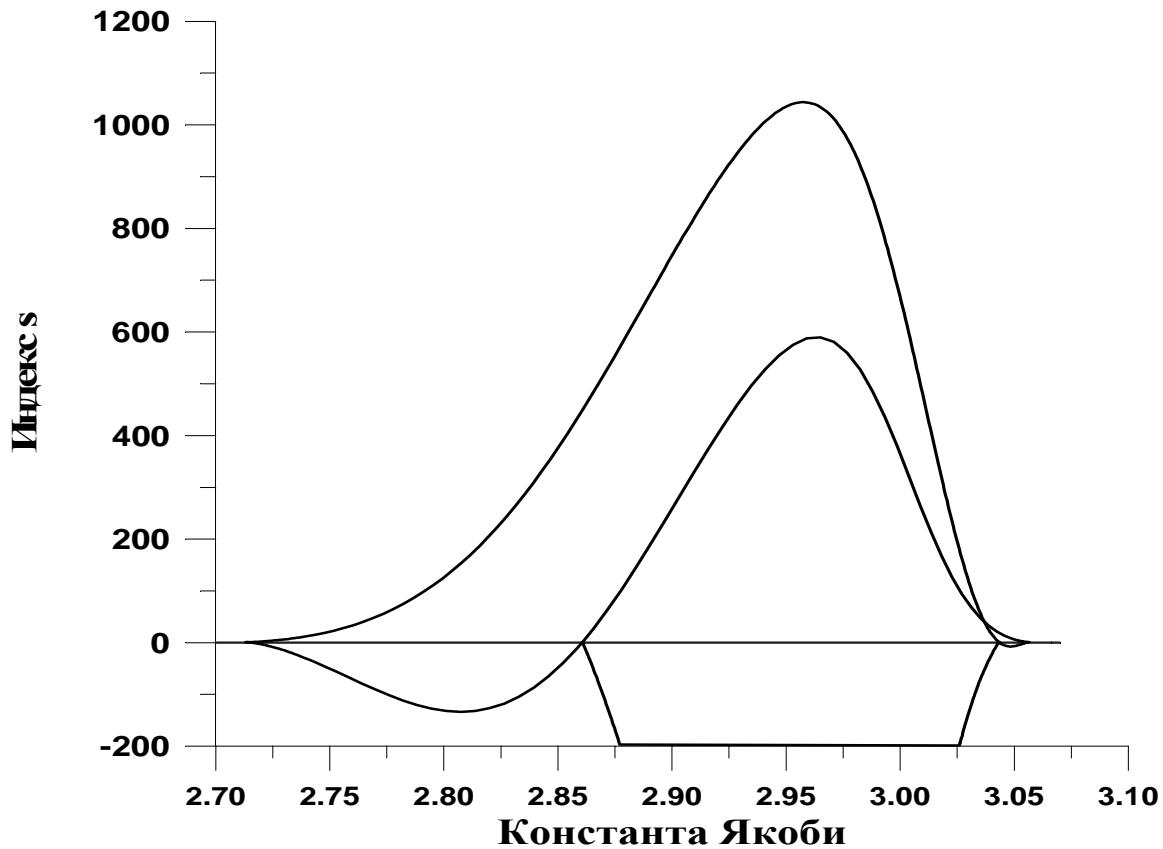
Рис. 28. Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби  
для несимметричного семейства  $((3/2)2)3$



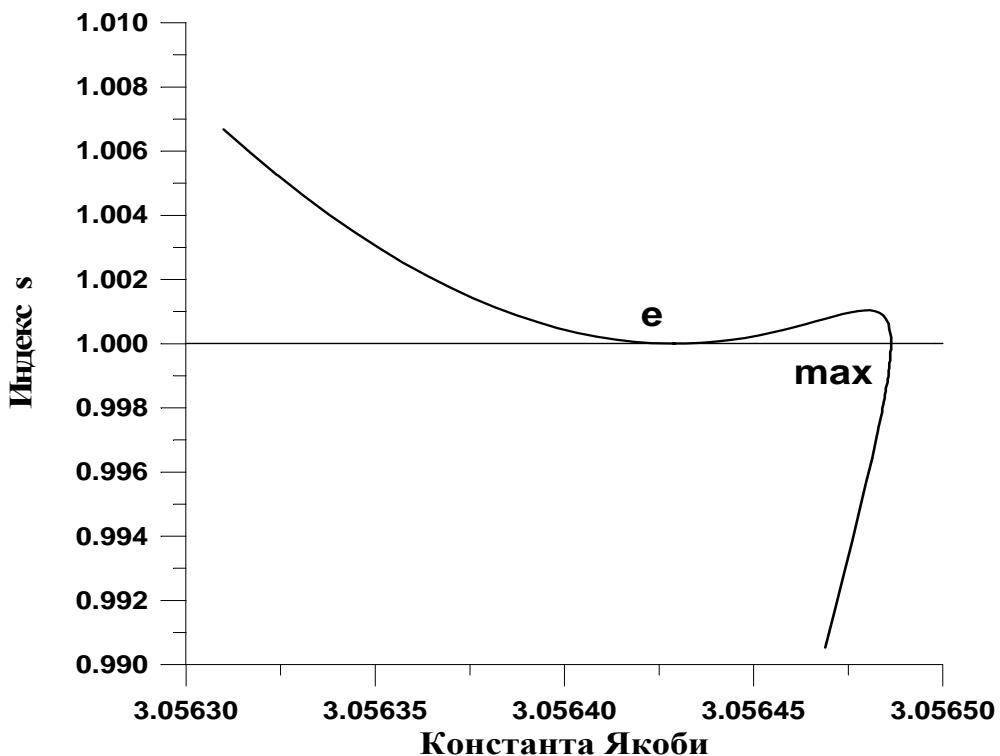
**Рис. 29.** Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для несимметричных семейств  $((3/2)2)3$  второго рода



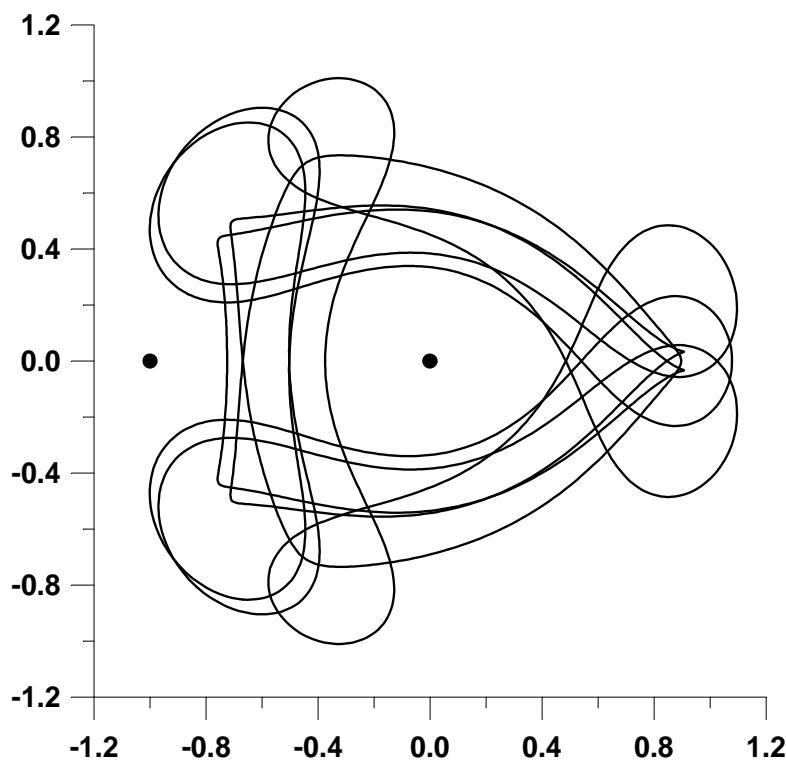
**Рис. 30.** Несимметричная орбита соизмеримости  $((3/2)2)3$



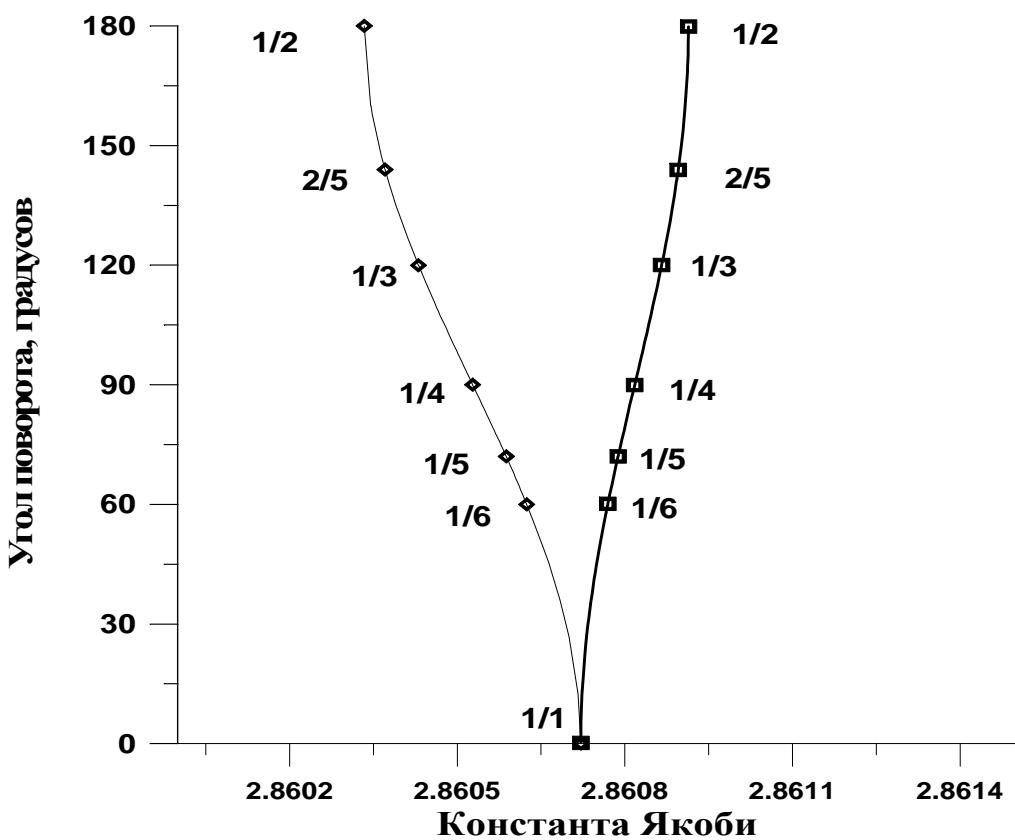
**Рис. 31. Зависимость индекса  $s$  от константы Якоби для семейства соизмеримости  $(3/2)3$**



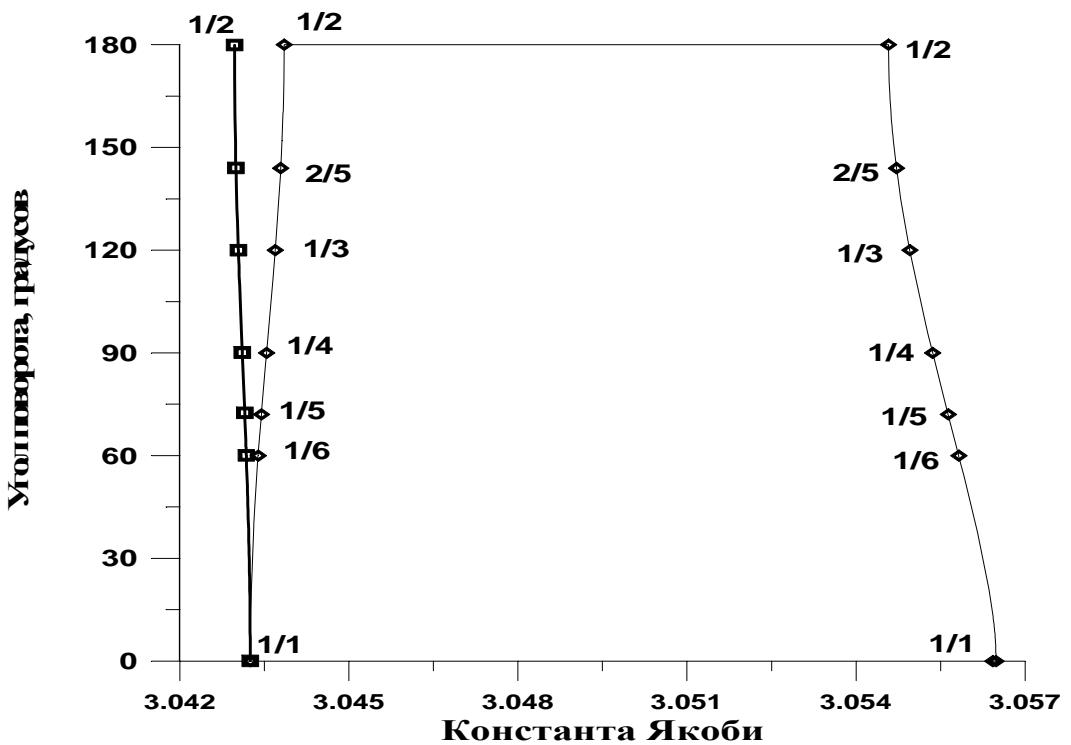
**Рис. 31.1. Зависимость индекса  $s$  от константы Якоби для семейства соизмеримости  $(3/2)3$  (фрагмент)**



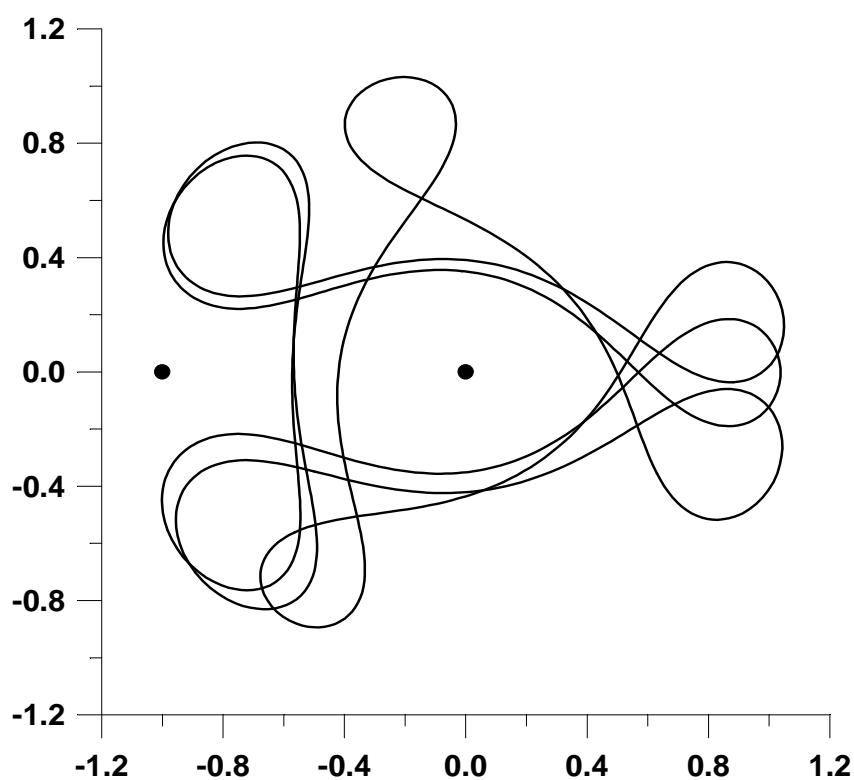
**Рис. 32. Орбиты соизмеримости (3/2)3**



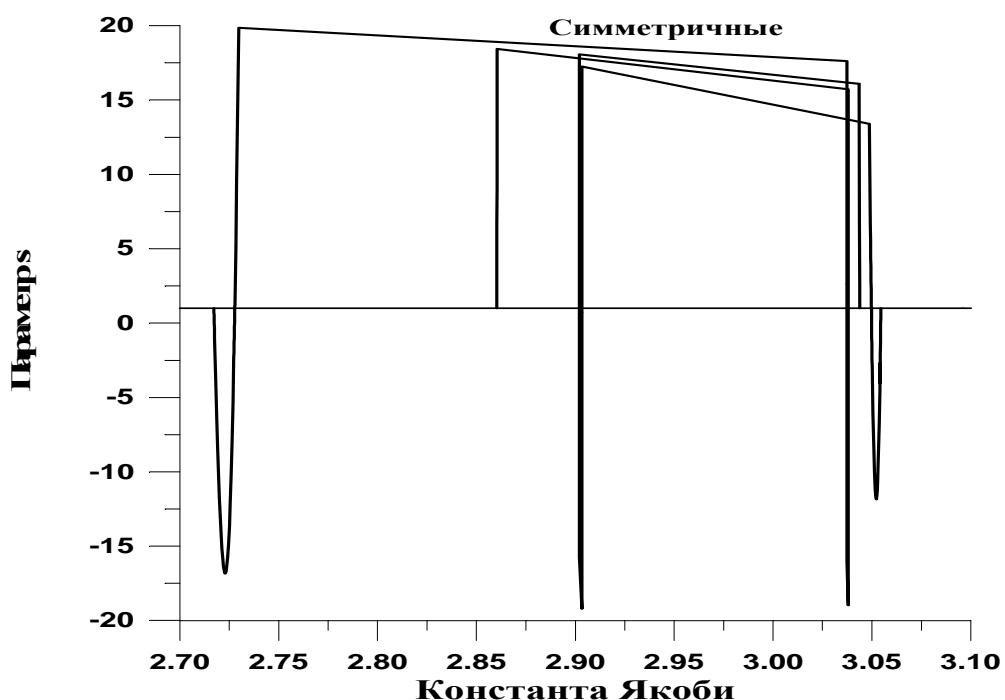
**Рис. 33.1. Зависимость угла поворота от константы Якоби для семейств орбит соизмеримости (3/2)3**



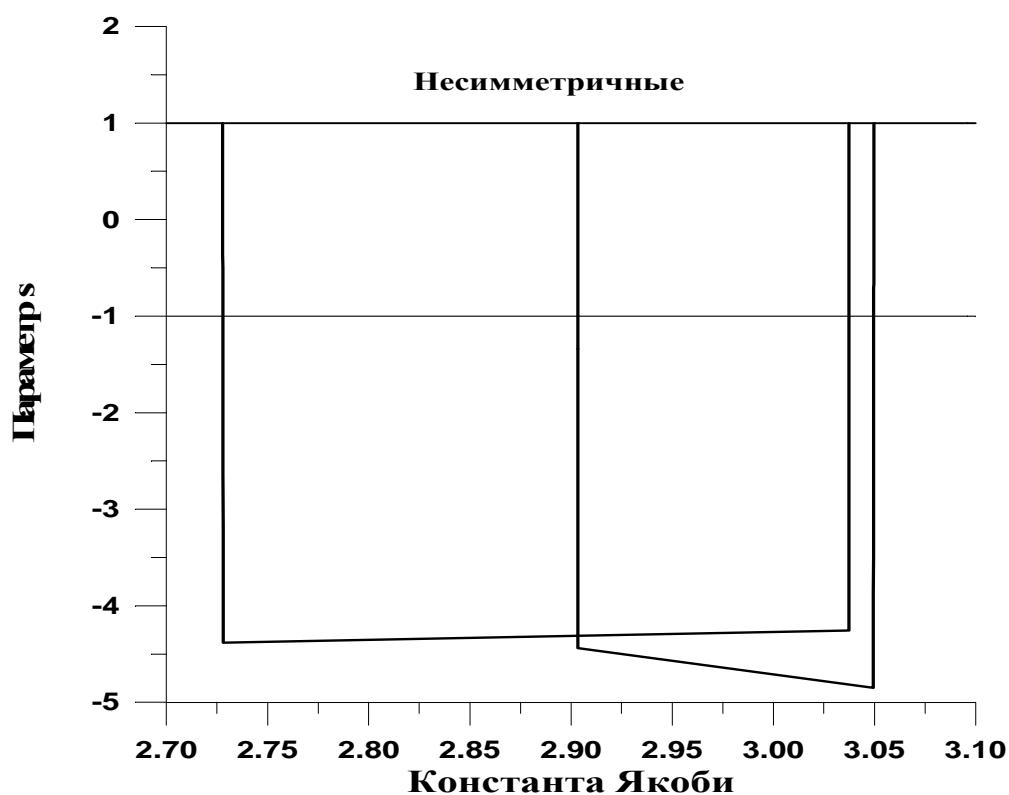
**Рис. 33.2.** Зависимость угла поворота от константы Якоби для семейств орбит соизмеримости  $(3/2)3$



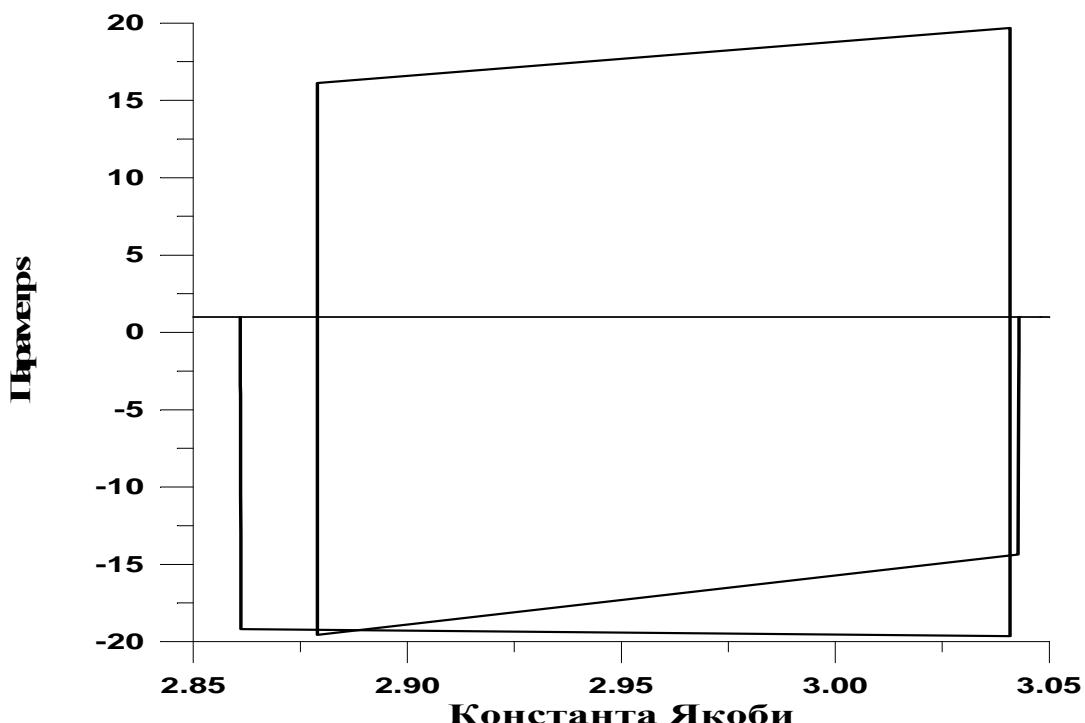
**Рис. 34.** Несимметричная орбита соизмеримости  $(3/2)3$



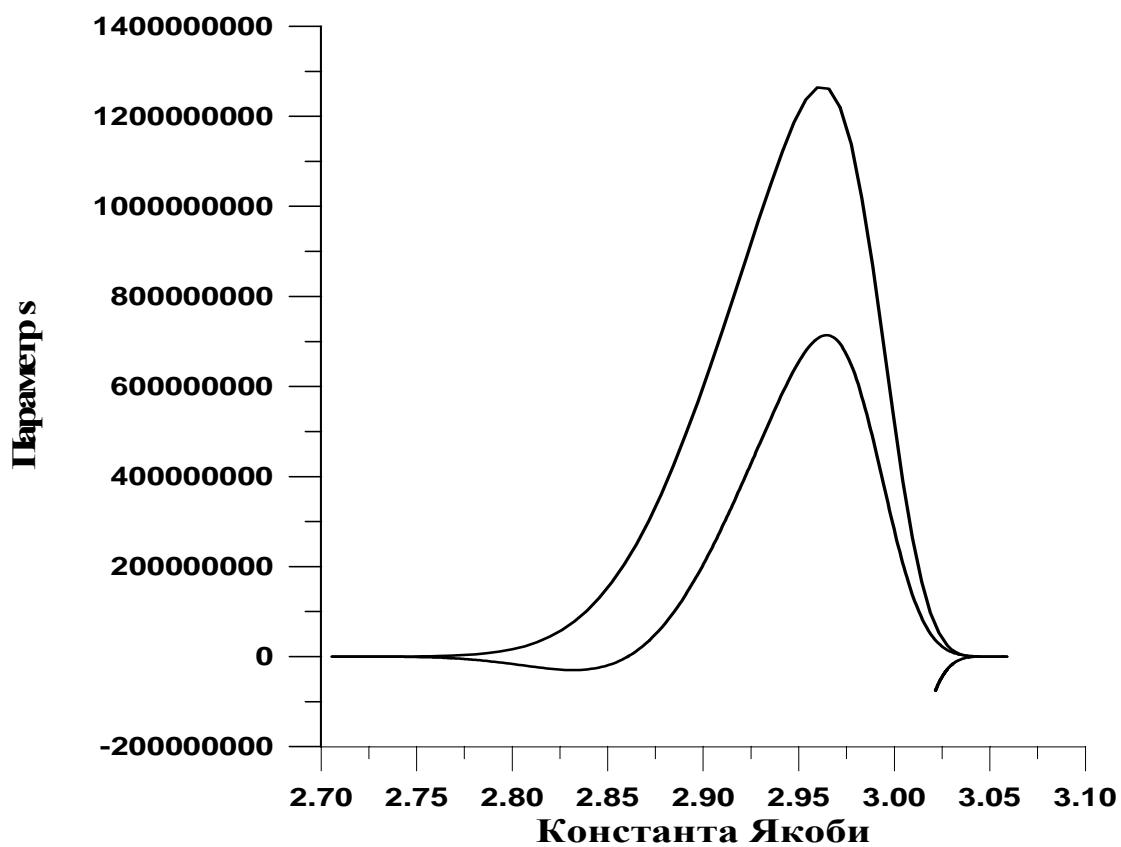
**Рис. 35.** Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для семейств соизмеримости  $((3/2)3s)2s$



**Рис. 36.** Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для семейств соизмеримости  $((3/2)3s)2n$



**Рис. 37. Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для семейства соизмеримости  $((3/2)3n)2$**



**Рис. 38. Зависимость параметра  $s$  от константы Якоби для семейства соизмеримости  $(3/2)6$**