

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
имени
П.Н.Лебедева



Ф И А Н

АСТРОКОСМИЧЕСКИЙ ЦЕНТР

ПРЕПРИНТ

15

С.Ф.ЛИХАЧЕВ, Б.Б.КРЕЙСМАН,
И.А.ГИРИН

**СИНТЕЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ В РСДБ
НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ
АДАПТИВНОЙ КАЛИБРОВКИ**

МОСКВА 2003

Аннотация

Рассмотрена задача адаптивной калибровки данных РСДБ для восстановления фазы функции видности. Приведено решение обобщенной нелинейной задачи оптимизации известной в радиоастрономии как «самокалибровка». Процедура самокалибровки предполагает амплитудную и фазовую коррекцию наблюдательных данных посредством итеративного синтеза аппроксимирующей модели наблюдений (структуры радиоисточника). Разработанный алгоритм был реализован в программном комплексе анализа и синтеза изображений ASL for Windows. На примере данных реальных наблюдений показана эффективность разработанного подхода.

Abstract

The algorithm of an adaptive calibration of VLBI data is considered. The solution of so-called “self-calibration” problem is obtained as a solution of non-linear optimization. The self-calibration procedure implements amplitude and phase calibration of the visibility function by means of iterative procedure. Implemented algorithm is a part of the ASL for Windows software. The efficiency of the algorithm is demonstrated on the real observational data.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	4
2.	Постановка задачи	5
3.	Наилучшее линейное приближение	7
4.	Алгоритм решения задачи минимизации	8
5.	Реализация процедуры самокалибровки в ASL for Windows	13
6.	Разностное картографирование	14
8	Благодарности	20
9.	Литература	20

1. Введение

Как хорошо известно, информация о структуре произвольного изображения ограниченного размера в основном содержится в фазах его пространственного спектра [1]. Математическое исследование этого вопроса представлено во множестве публикаций. В частности, работе Вакермана и Ягла [2], показано, что 2-мерная реконструкция изображений отлична от 1-мерной в том, что пространственная структура кодируется положением нулей амплитуд в плоскости пространственных частот (в этих точках фаза становится неопределенной), а также расположением берегов разрезов, представляющих собой кривые (на которых фаза меняет значение с $+\pi$ на $-\pi$) между парами нулей.

Постановка задачи в [2] требует найти неизвестные фазы пространственного спектра по полной выборке амплитудных данных. В радио- и спекл-интерферометрии фазы известны косвенным образом: они либо искажены шумами, связанными не с базами, т.е. парами телескопов, а с каждым телескопом (что сокращает число неизвестных фаз), либо измеряются в виде замкнутых фаз. В радиоинтерферометрии точки данных функции видности неравномерно распределены по плоскости пространственных частот (uv -плоскости) в соответствии с геометрическими факторами наблюдений. В радиоастрономии со сверхдлинной базой (РСДБ) приборные эффекты, а также эффекты распространения в среде, уменьшают время когерентности до минут, что еще более ограничивает множество измерений, для которых неизвестные фазовые ошибки можно считать постоянными. Все вышеперечисленные эффекты многократно усиливаются в случае орбитальной РСДБ (ОРСДБ).

Наиболее полное формальное математическое исследование вопросов фазовой калибровки и восстановления фазовой информации в астрономии было проведено А. Ланном [3]. В частности в работе [3] были приведены алгебраические соотношения для метода замкнутых фаз.

Как было показано в [4], в случае ОРСДБ соотношение замыкания фаз может не выполняться в точках орбиты космического радиотелескопа, близких к апогею, когда база между наземными радиотелескопами становится пренебрежимо малой по сравнению со значением наземно-космической базы. В этом случае фазовое замыкание будет близко к вырождению и будет наблюдаться так называемый «дребезг фазы».

В то же самое время, надежные фазовые измерения чрезвычайно важны для наземно-космических интерферометров, поскольку они значительно влияют на качество восстановления изображений радиоисточников.

В настоящей работе авторы рассматривают вопрос восстановления фазы в РСДБ как решение обобщенной нелинейной задачи оптимизации известной в радиоастрономии как «самокалибровка». Процедура самокалибровки предполагает амплитудную и фазовую коррекцию наблюдательных данных посредством итеративного синтеза аппроксимирующей модели наблюдений (структуры радиоисточника). Поскольку ни в одной из известных авторам этой статьи публикаций вопрос процедуры оптимизации эрмитовой билинейной формы (метрики в пространстве функции видности) детально не поднимался, мы сочли своим долгом описать его довольно подробно в наиболее обобщенных терминах.

2. Постановка задачи

Согласно [5], для N радиотелескопов соотношение между измеренной в момент времени t'_k , $k=1,2,\dots,K$, для частоты ν'_l , $l=1,2,\dots,L$ на базе (i,j) $i=1,2,\dots,N$, $j=i+1,i+2,\dots,N$ функцией видности $V_{ij}(t'_k, \nu'_l)$ и истинной функцией видности $V_{ij}^{true}(t'_k, \nu'_l)$ может быть представлено как

$$V_{ij}(t'_k, \nu'_l) = g_{ikl} \bar{g}_{jkl} \cdot V_{ij}^{true}(t'_k, \nu'_l) + \varepsilon_{ij}(t'_k, \nu'_l). \quad (0.1)$$

Здесь

$$g_i = |g_i| \exp\{i \cdot \arg(g_i)\} = a_i \exp\{i \cdot \varphi_i\}, \quad (0.2)$$

$$V_{ijkl} = |V_{ijkl}| \exp\{i \cdot \arg(V_{ijkl})\} = |V_{ijkl}| \exp\{i \cdot \psi_{ijkl}\}, \quad (0.3)$$

$$V_{ijkl}^{true} = |V_{ijkl}^{true}| \exp\{i \cdot \arg(V_{ijkl}^{true})\} = |V_{ijkl}^{true}| \exp\{i \cdot \hat{\psi}_{ijkl}\}. \quad (0.4)$$

С физической точки зрения, для оценки V_{ijkl}^{true} , необходимо синтезировать модель функции видности \hat{V}_{ijkl} , которая бы минимизировала некоторую, например квадратичную, метрику:

$$\begin{aligned} \rho_{kl} &= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} w_{ijkl}(t'_k, \nu'_l) z_{ijkl} \bar{z}_{ijkl} = \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} w_{ijkl}(t'_k, \nu'_l) \left(g_{ikl} \bar{g}_{jkl} \hat{V}_{ij}(t'_k, \nu'_l) - V_{ij}(t'_k, \nu'_l) \right) \times, \\ &\times \overline{\left(g_{ikl} \bar{g}_{jkl} \hat{V}_{ij}(t'_k, \nu'_l) - V_{ij}(t'_k, \nu'_l) \right)} \xrightarrow{g_i} \min, \end{aligned} \quad (0.5)$$

где,

$$z_{ijkl} = g_{ikl} \bar{g}_{jkl} \hat{V}_{ij}(t'_k, \nu'_l) - V_{ij}(t'_k, \nu'_l). \quad (0.6)$$

Пусть над полем комплексных чисел \mathbf{Z} заданы функции $V_{ij}(t) \in \mathbf{Z}^{(2)}$ и $V_{ij}^{true}(t) \in \mathbf{Z}^{(2)}$. Пусть эти функции связаны соотношением (0.1). Требуется найти вектор $\mathbf{g} = \{g_{ijkl}\}$ для которого метрика (0.5) достигает минима в окрестности точки \mathbf{g}_0 .

Утверждение 1. Метрика (0.5) инвариантна относительно операции сопряжения.

Доказательство. Умножим вектор $\mathbf{g} = \{g_{ij}\}$ на $\exp\{-i\varphi\}$, где $\varphi \in \mathbf{R}$. Получим,

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} \cdot \exp\{i\varphi\}. \quad (0.7)$$

Принимая во внимание (0.6) имеем

$$\begin{aligned} z_{ij}(\mathbf{g}') &= \mathbf{g}_{ikl} \cdot \exp\{-i\varphi\} \cdot \bar{\mathbf{g}}_{jkl} \cdot \exp\{i\varphi\} \cdot \hat{V}_{ij}(t_k, \nu_l) - V_{ij}(t_k, \nu_l) = \\ &= \mathbf{g}_{ikl} \cdot \bar{\mathbf{g}}_{jkl} \cdot \hat{V}_{ij}(t_k, \nu_l) - V_{ij}(t_k, \nu_l) = z_{ij}(\mathbf{g}'). \end{aligned} \quad (0.8)$$

Доказательство закончено.

Преобразуем ρ к виду

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{\substack{0 < k < K \\ 0 < l < L}} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} w_{ijkl} \cdot \left| \hat{V}_{ij}(t'_k, \nu'_l) \right|^2 \cdot (\mathbf{g}_{ikl} \bar{\mathbf{g}}_{jkl} - X_{ijkl}) \cdot \overline{(\mathbf{g}_{ikl} \bar{\mathbf{g}}_{jkl} - X_{ijkl})} = \\ &= \sum_{\substack{0 < k < K \\ 0 < l < L}} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} W_{ijkl} \cdot (\mathbf{g}_{ikl} \bar{\mathbf{g}}_{jkl} - X_{ijkl}) \cdot \overline{(\mathbf{g}_{ikl} \bar{\mathbf{g}}_{jkl} - X_{ijkl})}, \end{aligned} \quad (0.9)$$

где $W_{ijkl} = w_{ijkl} \cdot \left| \hat{V}_{ij}(t'_k, \nu'_l) \right|^2$, $X_{ijkl} = \frac{V_{ijkl}}{\hat{V}_{ijkl}} = \left| \frac{V_{ijkl}}{\hat{V}_{ijkl}} \right| \cdot \exp\left\{i(\psi_{ijkl} - \hat{\psi}_{ijkl})\right\}$.

Если провести минимизацию для каждого t'_k, ν'_l , то получим коэффициенты усиления $g_i(t'_k, \nu'_l)$.

Реально, число моментов времени K имеет порядок 10^5 , число частот L -- несколько десятков. Поэтому число комбинаций (K, L) достаточно большое. Обычно весь интервал времени анализа данных (функции видности) (t_0, t_1) разбивают на подинтервалы, на которых коэффициенты усиления считаются постоянными и выбираются из условия

$$\rho = \sum_{k, l} w_{ijkl} \rho_{kl} \xrightarrow{g_i} \min.$$

Schwab и Cotton в работе [6] предположили более точную модель, использующую линейную аппроксимацию для фазы φ_i , как функции времени и частоты. При этом амплитуда функции видности

считалась неизменной. Возникающая при этом задача оптимизации тригонометрического полинома оказалась многоэкстремальной и трудно разрешимой.

Исходя из этого, разумнее оставаться в декартовых координатах для g_i и использовать для каждой из них линейную аппроксимацию. В этом случае задача оптимизации существенно упрощается и сводится к оптимизации полинома четвертой степени, допускающей эффективное решение. При этом оптимизация осуществляется по удвоенному числу параметров, что обеспечивает лучшее приближение модели к реальным наблюдательным данным.

3. Наилучшее линейное приближение

Для обоснования предлагаемого подхода предположим, что мы решили $(K \times L)$ задач (0.5) и получили $(K \times L)$ оптимальных g_{ikl} , $i = 1, 2, \dots, N$.

Наилучшее линейное приближение на множестве $\{t'_k, v'_l\}$, $1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L$ имеет вид

$$g_i(t'_k, v'_l) = A_{ikl} + i \cdot B_{ikl}, \quad (0.10)$$

и

$$\begin{cases} A_{ikl} = y_i + t'_k y_{N+i} + v'_l y_{2N+i} \\ B_{ikl} = y_{3N+i} + t'_k y_{4N+i} + v'_l y_{5N+i} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (0.11)$$

Здесь $t_k = t'_k - t_{mean}$, $v_l = v'_l - v_{mean}$, $t_{mean} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K t'_k$, $v_{mean} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L v'_l$.

Так как размерность множества $\{t'_k, v'_l\}$ велика, то будем рассматривать вектор Y размерности $6N$ как неизвестный и вместо $K \times L$ задач (0.5) решим одну задачу

$$\rho' = \sum_{k,l} \rho_{kl} \xrightarrow{Y} \min. \quad (0.12)$$

Из (0.9) имеем

$$\begin{aligned} \rho_{kl} &= 0.5 \sum_{i \neq j} W_{ijkl} \left(g_{ikl} \bar{g}_{jkl} - X_{ijkl} \right) \cdot \overline{\left(g_{ikl} \bar{g}_{jkl} - X_{ijkl} \right)} = \\ &= 0.5 \sum_{i \neq j} W_{ijkl} \left(g_{ikl} \bar{g}_{jkl} - X_{ijkl} \right) \cdot \left(\bar{g}_{ikl} g_{jkl} - \bar{X}_{ijkl} \right) = \\ &= 0.5 \sum_{i \neq j} W_{ijkl} \left[|g_{ikl}|^2 |g_{jkl}|^2 + |X_{ijkl}|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ g_{ikl} \bar{g}_{jkl} \bar{X}_{ijkl} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (0.13)$$

Поскольку

$$g_{ikl} \bar{g}_{ikl} = \left(A_{ikl} A_{jkl} + B_{ikl} B_{jkl} \right) + i \left(A_{jkl} B_{ikl} - A_{ikl} B_{jkl} \right), \quad (0.14)$$

то

$$\begin{aligned} \rho' &= 0.5 \sum_{i \neq j} \sum_{kl} W_{ijkl} \left[\left(A_{ikl}^2 + B_{ikl}^2 \right) \left(A_{jkl}^2 + B_{jkl}^2 \right) + |X_{ijkl}|^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(A_{ikl} A_{jkl} + B_{ikl} B_{jkl} \right) \operatorname{Re} \left\{ X_{ijkl} \right\} - 2 \left(A_{jkl} B_{ikl} - A_{ikl} B_{jkl} \right) \operatorname{Im} \left\{ X_{ijkl} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (0.15)$$

Таким образом, получаем задачу минимизации полинома четвертой степени от y_1, \dots, y_{6N} [7].

4. Алгоритм решения задачи минимизации

Для нахождения минимума нелинейной функции $\rho = F(\mathbf{g})$ был использован метод Ньютона [7]. Если в точке экстремума $z(\mathbf{g}_m) = \mathbf{grad} F \neq 0$, то делается переход в точку $\mathbf{g}_{m+1} = \mathbf{g}_m + \mathbf{h}_m$.

Разлагая $z(\mathbf{g}_m + \mathbf{h}_m)$ в ряд по степеням и ограничиваясь линейными членами, получаем условие для \mathbf{h} :

$$z(\mathbf{g}_m + \mathbf{h}_m) = z(\mathbf{g}_m) + P(\mathbf{g}_m) \mathbf{h}_m = 0,$$

где $P(\mathbf{g}_m)$ -- гессиан F в точке \mathbf{g}_0 , матрица вторых производных от F ,

$$P_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial g_i \partial g_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Отсюда,

$$\mathbf{h}_m = -P^+(\mathbf{g}_m)z(\mathbf{g}_m),$$

где $P^+(\mathbf{g}_m)$ - матрица псевдообратная матрице $P(\mathbf{g}_m)$.

Псевдообратные матрицы [7] совпадают с обратными для невырожденных матриц.

Для квадратичных выпуклых функций метод Ньютона дает решение задачи за один шаг. В общем случае, мы получаем итеративную процедуру

4.1. Схема метода Ньютона

1. Выбрать $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0$.
2. Вычислить $\mathbf{Z}(\mathbf{g})$.
3. Если $|\mathbf{z}| < \varepsilon_1$, то выход.
4. Вычислить $\mathbf{P}(\mathbf{g})$.
5. Вычислить псевдообратную матрицу $\mathbf{P}^+(\mathbf{g})$ методом Гревилля (контроль $\mathbf{P}\mathbf{P}^+\mathbf{P} = \mathbf{P}$).
6. Вычислить $\mathbf{h} = -\mathbf{P}^+(\mathbf{g})\mathbf{Z}(\mathbf{g})$
7. Вычислить оптимальную длину шага α в направлении \mathbf{h} .
8. Если $|\alpha\mathbf{h}| \geq \varepsilon$, то пересчитать $\mathbf{g} = \mathbf{g} + \alpha\mathbf{h}$, идти к пункту 2.
9. Если $|\alpha\mathbf{h}| < \varepsilon$ -- выход.

Таким образом, для решения конкретной задачи надо разработать алгоритмы вычисления $\mathbf{z} = \mathbf{grad} F$ и гессиана P .

4.2. Вычисление градиента и гессиана

$$\frac{\partial A_{ikl}}{\partial y_n} = \begin{cases} 1, & n = i, \\ t_k, & n = N + i, \\ v_l, & n = 2N + i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}, \quad (0.16)$$

$$\frac{\partial B_{ikl}}{\partial y_n} = \begin{cases} 1, & n = 3N + i, \\ t_k, & n = 4N + i, \\ v_l, & n = 5N + i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (0.17)$$

Из формулы (0.15) получаем

$$\frac{\partial \rho_{kl}}{\partial A_{ikl}} = 2 \sum_{j \neq i} W_{ijkl} \left[A_{ikl} \left(A_{jkl}^2 + B_{jkl}^2 \right) - A_{jkl} \operatorname{Re} \left\{ X_{ijkl} \right\} + B_{jkl} \operatorname{Im} \left\{ X_{ijkl} \right\} \right], \quad (0.18)$$

$$\frac{\partial \rho_{kl}}{\partial B_{ikl}} = 2 \sum_{j \neq i} W_{ijkl} \left[B_{ikl} \left(A_{jkl}^2 + B_{jkl}^2 \right) - B_{jkl} \operatorname{Re} \left\{ X_{ijkl} \right\} - A_{jkl} \operatorname{Im} \left\{ X_{ijkl} \right\} \right]. \quad (0.19)$$

Номерам n координат вектора y соответствуют три целых числа p, q, i . Пусть $\xi = \operatorname{int} \left\{ \frac{n-1}{N} \right\}$ - целая часть и $i = \operatorname{rem} \left\{ \frac{n-1}{N} \right\} + 1$, где rem - остаток числа $\frac{n-1}{N}$. Положим $p = 0$, если $n \leq 3N$; $p = 1$, если $n > 3N$. Тогда $q = \xi - 3Np$ ($q = 0, 1, 2$). Обратно $n = 3Np + Nq + \eta$.

Графически это выглядит так

$$\begin{array}{ccccccc} \overbrace{y_1, \dots, y_i, \dots, y_N}^{q=0} & \overbrace{y_{N+1}, \dots, y_{N+i}, \dots, y_{2N}}^{q=1} & \overbrace{y_{2N+1}, \dots, y_{2N+i}, \dots, y_{3N}}^{q=2} & & p = 0 \\ y_{3N+1}, \dots, y_{3N+i}, \dots, y_{4N} & y_{4N+1}, \dots, y_{4N+i}, \dots, y_{5N} & y_{5N+1}, \dots, y_{5N+i}, \dots, y_{6N} & & p = 1. \end{array}$$

При $p=0$ используются формулы для A_{ikl} , при $p=1$ -- формулы для B_{ikl} (см. (0.11)).

Введем массив C_{qkl} с координатами

$$C_{0kl}=1, \quad C_{1kl}=t_k, \quad C_{2kl}=v_l. \quad (0.20)$$

Для вычисления вектора градиента $\mathbf{grad}\{\rho'\}$ получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial y_n} = \begin{cases} \sum_{k,l} \frac{\partial \rho_{kl}}{\partial A_{ikl}} \cdot \frac{\partial A_{ikl}}{\partial y_n}, & p=0, \\ \sum_{k,l} \frac{\partial \rho_{kl}}{\partial B_{ikl}} \cdot \frac{\partial B_{ikl}}{\partial y_n}, & p=1. \end{cases} \quad (0.21)$$

Или, с учетом (0.16) и (0.17), имеем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial y_n} = \begin{cases} \sum_{k,l} \frac{\partial \rho_{kl}}{\partial A_{ikl}} \cdot C_{qkl}, & p=0, \\ \sum_{k,l} \frac{\partial \rho_{kl}}{\partial B_{ikl}} \cdot C_{qkl}, & p=1. \end{cases} \quad (0.22)$$

Перед тем как вычислить симметрическую матрицу вторых производных (гессиан) G вычислим следующие производные

$$\frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial A_{ikl}^2} = 2 \sum_{j \neq i} W_{ijkl} (A_{jkl}^2 + B_{jkl}^2), \quad (0.23)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial A_{ikl} \partial A_{jkl}} = 2W_{ijkl} \left(2A_{ikl}A_{jkl} - \operatorname{Re}\{X_{ijkl}\} \right), \quad i \neq j, \quad (0.24)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial B_{ikl}^2} = \frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial A_{ikl}^2} \quad (0.25)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial B_{ikl} \partial B_{jkl}} = 2W_{ijkl} \left(2B_{ikl}B_{jkl} - \operatorname{Re}\{X_{ijkl}\} \right), \quad i \neq j, \quad (0.26)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial A_{ikl} \partial B_{ikl}} = 0, \quad (0.27)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial A_{ikl} \partial B_{jkl}} = 2W_{ijkl} \left(2A_{ikl} B_{jkl} + \text{Im} \{ X_{ijkl} \} \right) \quad i \neq j. \quad (0.28)$$

После этого для второго индекса m матрицы G_{mn} вычислим числа p_1, q_1 и j . Получаем

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial y_m \partial y_n} = \begin{cases} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial A_{ikl}^2} C_{qkl} C_{q_1kl}, & p = p_1 = 0, \quad i = j, \\ \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial A_{ikl} \partial A_{jkl}} C_{qkl} C_{q_1kl}, & p = p_1 = 0, \quad i \neq j, \\ 0, & p = 0, p_1 = 1 \text{ or } p = 1, p_1 = 0, \quad i = j, \\ \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial A_{ikl} \partial B_{jkl}} C_{qkl} C_{q_1kl}, & p = 0, p_1 = 1, \quad i \neq j, \\ \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial A_{jkl} \partial B_{ikl}} C_{qkl} C_{q_1kl}, & p = 1, p_1 = 0, \quad i \neq j, \\ \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial B_{ikl}^2} C_{qkl} C_{q_1kl}, & p = 1, p_1 = 1, \quad i = j, \\ \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \rho_{kl}}{\partial B_{ikl} \partial B_{jkl}} C_{qkl} C_{q_1kl}, & p = 1, p_1 = 1, \quad i \neq j. \end{cases} \quad (0.29)$$

4.3. Определение оптимальной величины шага оптимизации

Так как функция ρ' является полиномом четвертой степени от компонент вектора y , то при изменении шага $\alpha \mathbf{h}$ из точки y_0 критерий $\rho'(y_0 + \alpha \mathbf{h})$ будет полиномом четвертой степени от скаляра α

$$\rho'(y_0 + \alpha \mathbf{h}) = p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 + \alpha^4 p_4, \quad (0.30)$$

коэффициенты которого вычисляются по следующим формулам:

$$p_0 = \rho'(y_0), \quad (0.31)$$

$$p_1 = \left\langle \mathbf{h}^T, \mathbf{grad} \left\{ \rho'(y_0) \right\} \right\rangle, \quad (0.32)$$

$$p_2 = 0.5 \cdot \mathbf{h}^T G(y_0) \mathbf{h}, \quad (0.33)$$

$$p_3 = 0.5 \left[\rho'(y_0 + \mathbf{h}) - \rho'(y_0 - \mathbf{h}) \right] - p_1, \quad (0.34)$$

$$p_3 = 0.5 \left[\rho'(y_0 + \mathbf{h}) + \rho'(y_0 - \mathbf{h}) \right] - p_0 - p_2. \quad (0.35)$$

Для нахождения минимума по α решаем уравнение

$$\frac{\partial \rho'(y_0 + \mathbf{h})}{\partial \alpha} = 0, \quad (0.36)$$

то есть

$$p_1 + 2\alpha p_2 + 3\alpha^2 p_3 + 4\alpha^3 p_4 = 0. \quad (0.37)$$

Это кубическое уравнение решается аналитически. Если оказалось три действительных корня, то по формуле (0.30) находим значения ρ' и выбираем корень с наименьшим ρ' . Таким образом, в направлении \mathbf{h} определяется не локальный, а *глобальный экстремум*.

5. Реализация процедуры самокалибровки в ASL for Windows

Процедура оценивания коэффициентов усиления, описанная выше была реализована в процедуре самокалибровки для компьютерного проекта ASL for Windows (<http://platon.asc.rssi.ru/asl/asl.html>). На рисунке 1 представлена блок-схема алгоритма реализующего самокалибровку с временным интегрированием.

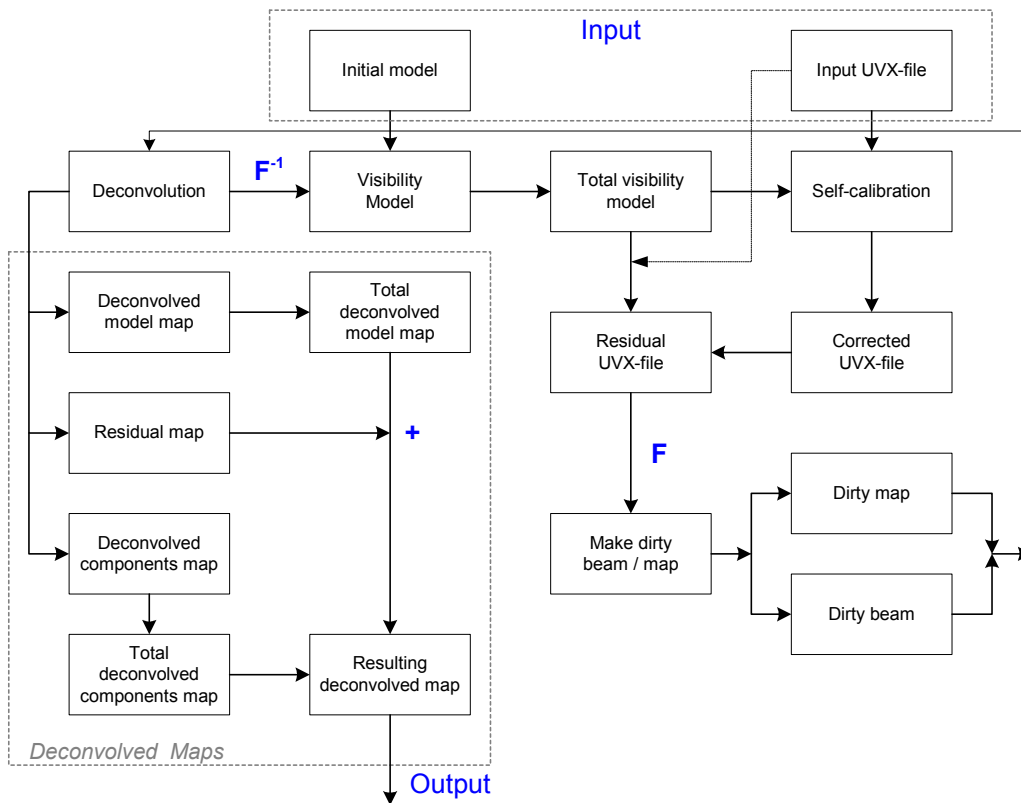


Рис.1

Входными параметрами программы являются входной файл в формате UVX (Input UVX-file) начальная модель (Initial model), использующую ограничения и информацию об уже имеющейся структуре источника. В качестве начальной модели может быть использовано: а) δ -функция в начале (x, y) -координат, б) набор (положительных) «чистых» компонент, в) любая другая карта (изображение).

Далее алгоритм приступает к формированию модели функции видности для текущей итерации, которая формируется из набора «чистых» компонент (Deconvolution), полученных одним из методов деконволюции, таких как CLEAN или методом максимума энтропии (ММЭ). После этого, алгоритм приступает непосредственно к процедуре самокалибровки (Self-Calibration), которая минимизирует (0.9), находит соответствующие коэффициенты усиления $g_i(t_1)$ и $g_j(t_1)$ для каждого периода интегрирования функции видности (см.

раздел 4) в пределах времени наблюдений и вычисляет скорректированную видность (Corrected UVX-file)

$$V_{ij,corr}(t_k) = \frac{V_{ij}(t_k)}{g_i(t_k)g_j^*(t_k)} \quad (0.38)$$

Согласно выбору пользователя, из исходного или скорректированного файла вычитается суммарная модель функции видности (Total visibility model) и на основе этой разности синтезируется новая модель для последующей итерации алгоритма самокалибровки, производится проверка критерия сходимости и алгоритм начинает следующую итерацию.

В процессе работы алгоритма пользователь может контролировать невязку модели и исходных данных, а также набор карт (Deconvolved maps).

6. Разностное картографирование

Разностное картографирование относится к процессу организации вычислений для решения задач итерационной деконволюции. Впервые такой подход был использован для синтеза изображений в пакете Olaf созданном в Nuffield Radio Astronomy Laboratories. Однако наибольшее распространение разностное картографирование получило в пакете Difmap [8].

В проекте ASL for Windows была также использована техника разностного картографирования. Как отмечалось рядом авторов (см., например, [9]), для улучшения сходимости решения (0.5) можно выбирать либо только фазовую самокалибровку, либо совместную амплитудную и фазовую калибровку. Исследования показали, что модель может хорошо описывать фазы истинной видности, но плохо описывать ее амплитуды, и наоборот. В этом случае на первых итерациях алгоритма рекомендуется избегать амплитудной самокалибровки и использовать лишь фазовую до тех пор пока поток модели источника не достигнет значений близких к распределению

амплитуды от радиуса $\sqrt{u^2 + v^2}$ исходных данных (наблюдений). Как только это произойдет, амплитудная калибровка может быть включена. Помимо этого возможные проблемы деконволюции, связанные с распределением данных на (u, v) -плоскости, могут быть решены переходом естественному взвешиванию данных (natural weighting), что обеспечит наилучшее отношение сигнал/шум и/или использование обуживающих функций (tapering). Такие изменения параметров могут обнаружить протяженную структуру источника, потерянную из-за пространственного ограничения данных. Различные участки (u, v) -плоскости могут быть подчеркнуты различными процедурами взвешивания. Например равномерное взвешивание уменьшает вклад в синтезируемое изображение участков (u, v) -плоскости с малыми значениями функции видности. В случае симметрии ошибок измерения ситуация может быть улучшена за счет редактирования зависимости функции видности от радиуса $\sqrt{u^2 + v^2}$.

Ниже, на рис.2...6 показаны результаты обработки радиоисточника NGC7552, являющегося остатком вспышки сверхновой. На рисунке 2 представлена исходная («грязная») контурная карта радиоисточника NGC7552

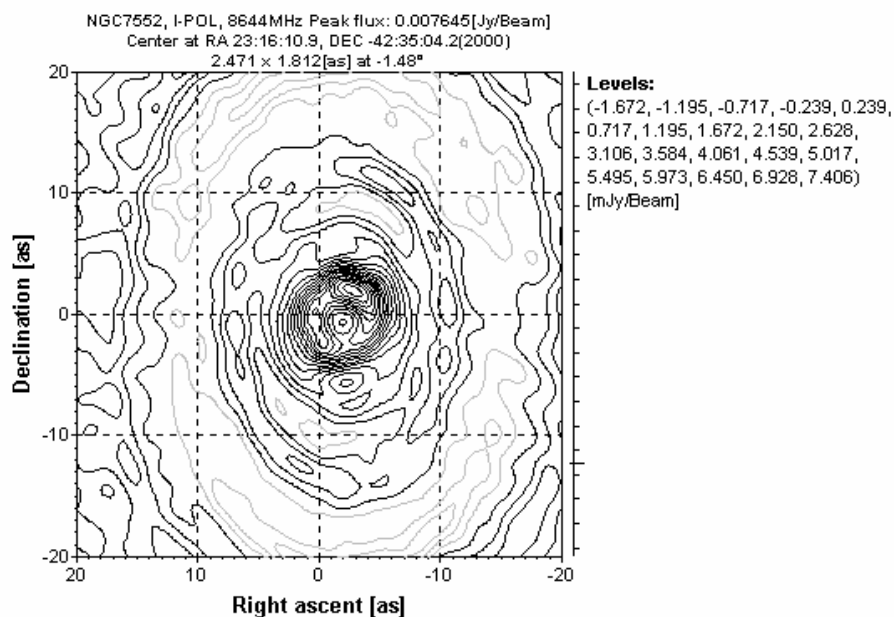


Рис.2.

На рисунке 3а и 3б показаны распределение амплитуды и фазы NGC7552 в зависимости от радиуса $\sqrt{u^2 + v^2}$

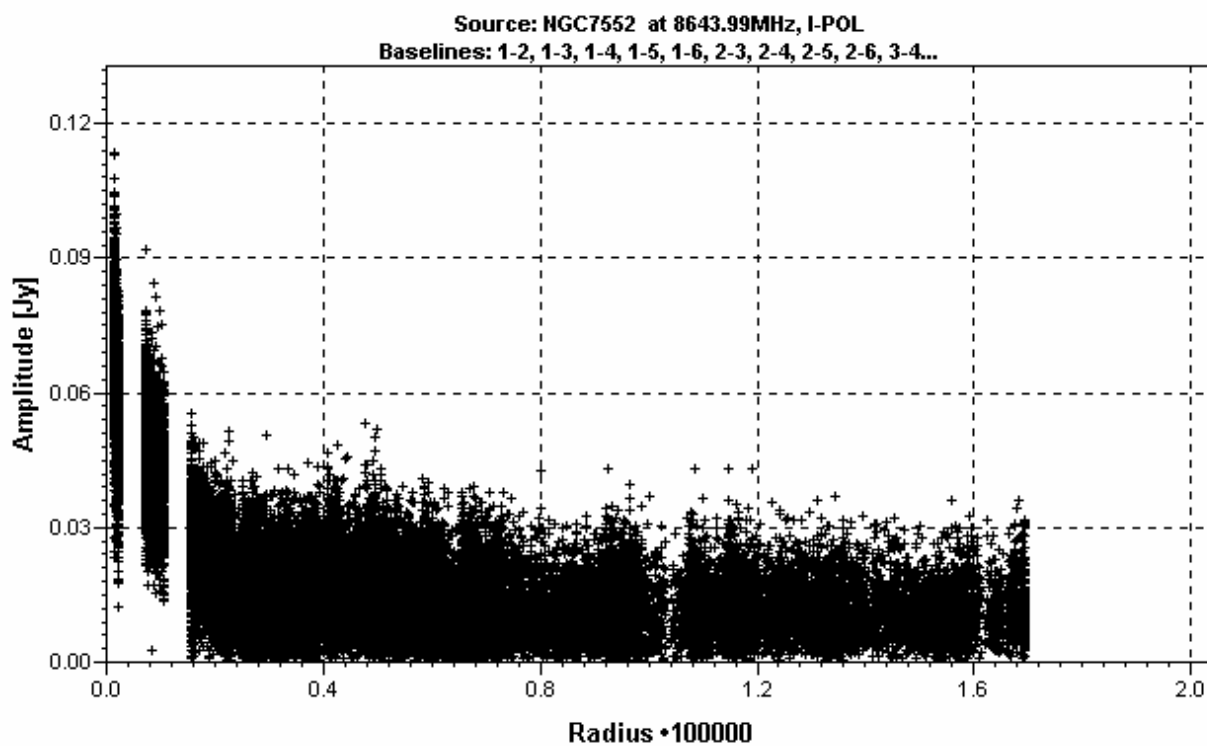


Рис. 3а.

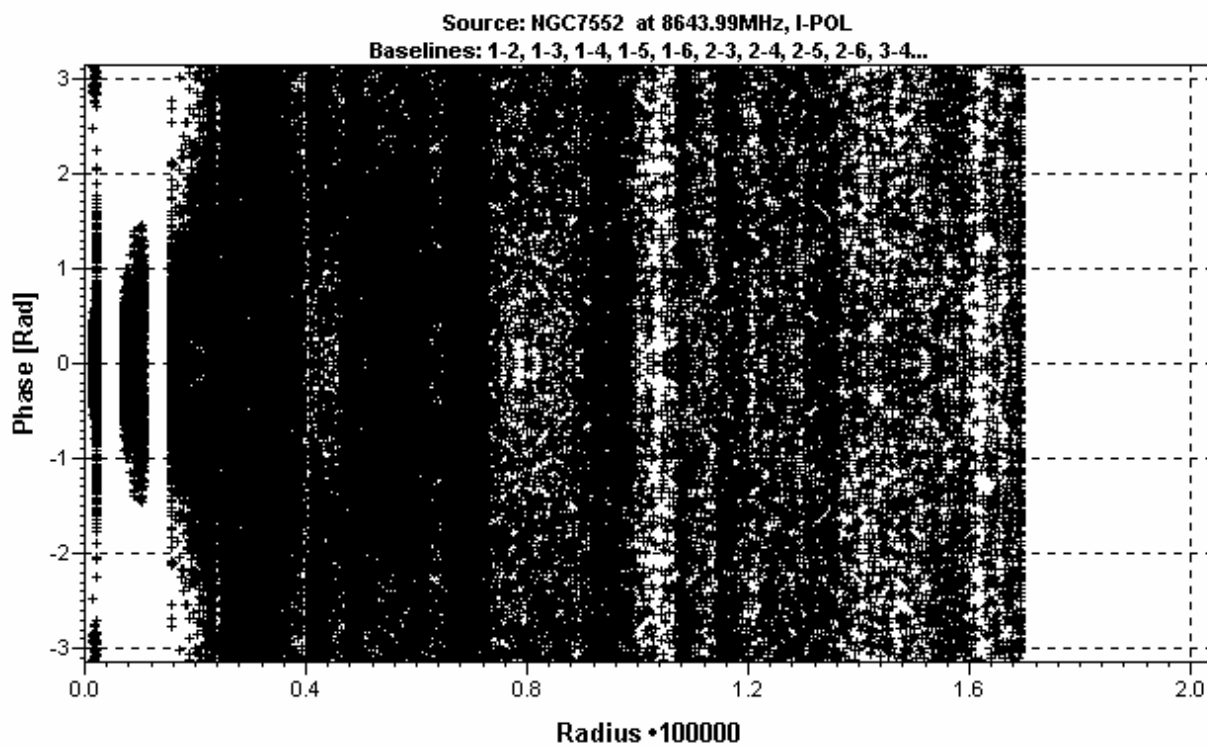


Рис. 3б.

На рисунке 4а и 4б показаны распределение амплитуды и фазы модели NGC7552 в зависимости от радиуса $\sqrt{u^2 + v^2}$ после 6 итераций самокалибровки с ограничением на положительность компонент, выполняемой по следующему алгоритму:

1. CLEAN компоненты разделяются на две части положительную и отрицательную.
2. Отрицательные компоненты пересчитываются на (uv) -плоскость и вычитаются из корректируемого файла.
3. Положительные компоненты добавляются к с суммарной модели.
4. В самокалибровке участвуют корректируемые данные (за вычетом отрицательных компонент) и суммарная модель. Результатом является новый корректируемый файл.

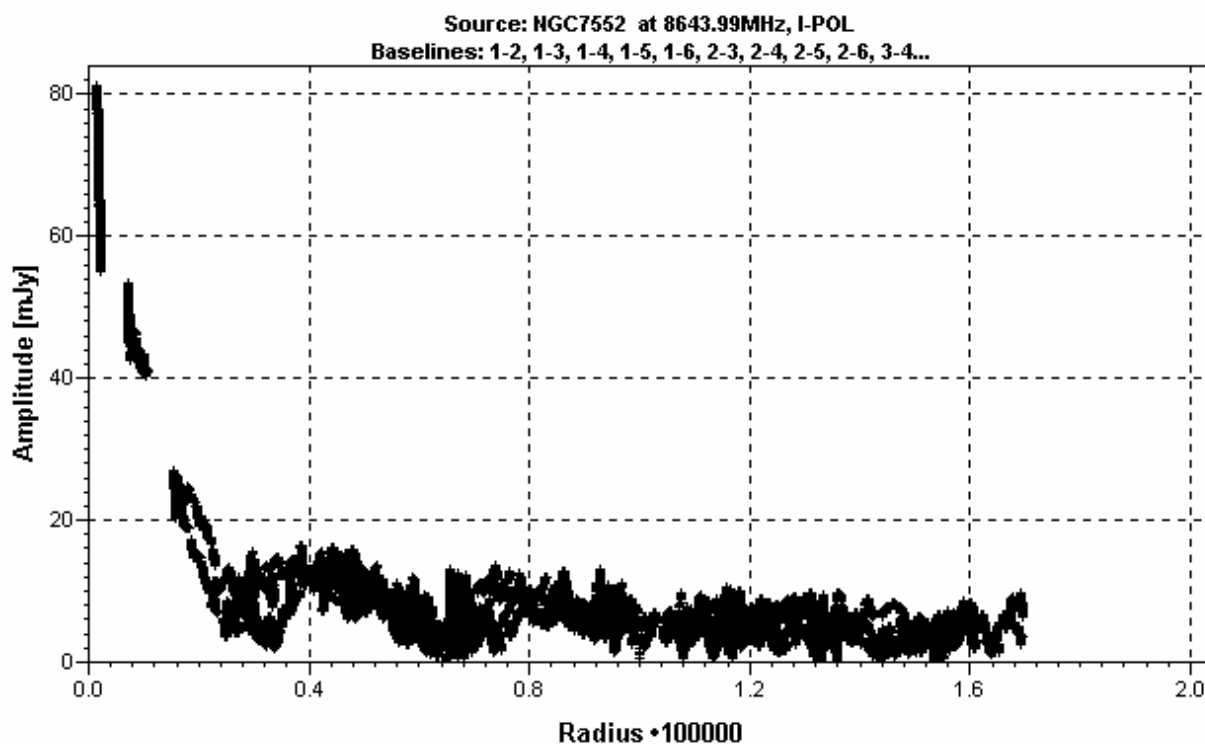


Рис. 4а.

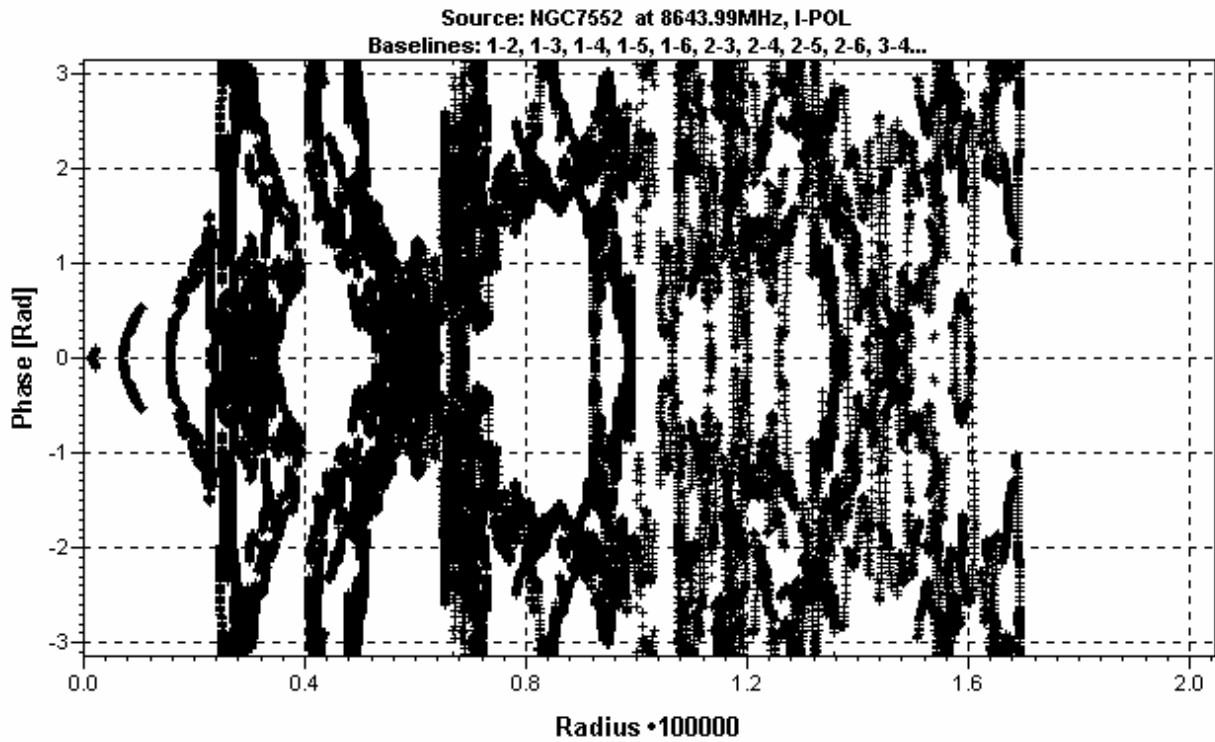


Рис. 4б.

На рисунке 5а и 5б показаны фрагменты распределения фазы модели NGC7552 и скорректированных данных в зависимости от радиуса $\sqrt{u^2 + v^2}$ после 6 итераций самокалибровки с ограничением на положительность компонент.

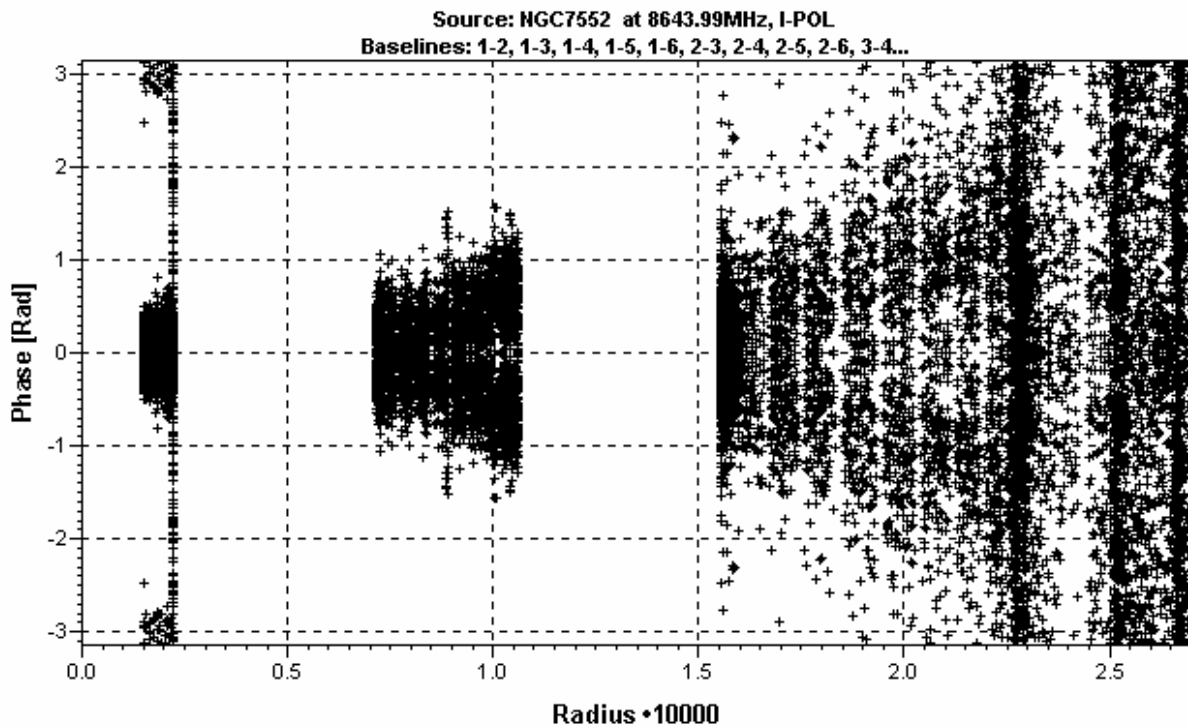


Рис. 5а.

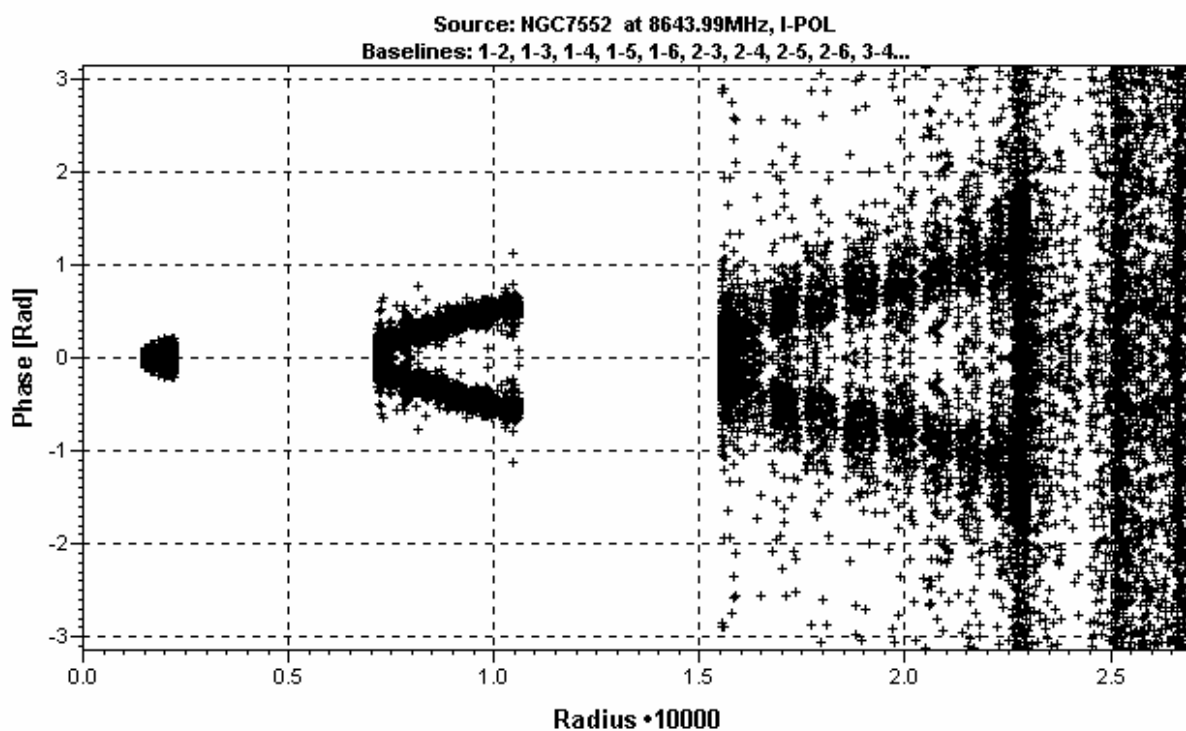


Рис. 5а.

Из рисунков видно существенное улучшение фазы в результате самокалибровки.

На рисунке 6 показана карта NGC7552, восстановленная в результате самокалибровки.

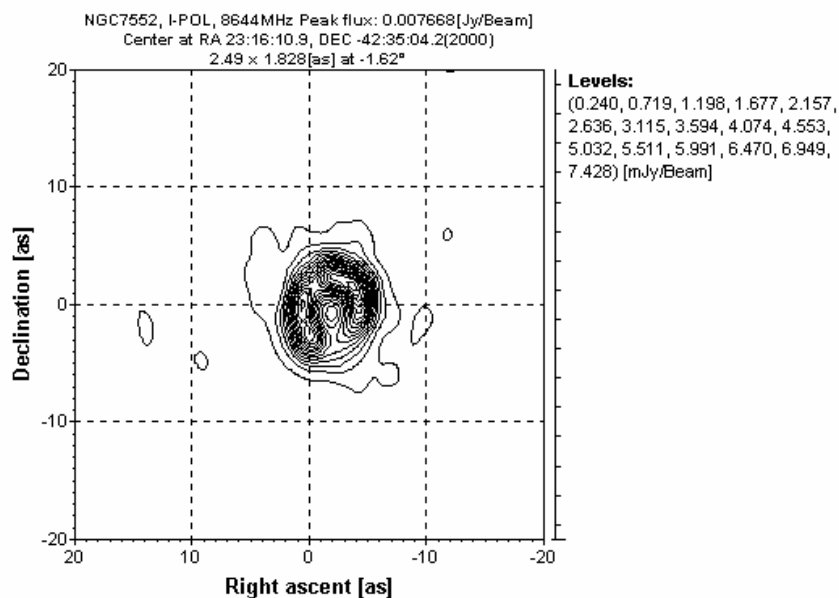


Рис. 6.

6. Благодарности

Авторы благодарны безвременно ушедшему из жизни Роберту Джелмингу (Robert M. Hjellming), НРАО, США, который существенно повлиял на постановку задачи и подход к ее решению. Мы также выражаем нашу признательность сотрудникам АТНФ (Австралия) и НРАО (США), предоставившим данные наблюдений для тестирования алгоритмов, а также сотрудника АКЦ ФИАН Андрею Чуприкову за ряд полезных дискуссий по проблеме самокалибровки в РСДБ.

7. Литература

1. Оппенхам А.В., Лин Дж. С. *Proc IEEE*, 1981, **69**, 529—541.
2. Вакерман К.К., Ягл А.Е., *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1994, **11**, 2016—2026.
3. Lann A., *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1990, **7**, 500-512.
4. Likhachev S.F. High quality Imaging for space VLBI observations with ultra high angular resolution. Galaxies and their Constituents at the Highest Angular Resolutions, Proceedings of IAU Symposium #205, held 15-18 August 2000 at Manchester, United Kingdom. Edited by R. T. Schilizzi, 2001, p. 430.
5. Cornwell T., Fomalont E. B. *Self-Calibration*. In “Synthesis Imaging In Radio Astronomy” edited by R. Perley, F. Schwab and A. Bridle, ASSP, vol. 6, 1994, 185—197.
6. Schwab F.R., Cotton W.D. *VLA Global fringe search techniques for VLBI*. *Astronomical Journal* (ISSN 0004-6256), vol. 88, May 1983, p. 688-694.
7. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. *Практическая оптимизация*. — Мир, М., 1985, 510 с.
8. Shepherd M.S. *DIFMAP: an interactive program for synthesis imaging*,-- ASP Conference Series, vol.125, "Astronomical Data Analysis Software and Systems VI.

9. Perley R. A. *High dynamic range imaging*. In “Synthesis Imaging In Radio Astronomy” edited by R. Perley, F. Schwab and A. Bridle, ASSP, vol. 6, 1994, 287—313.